HAL
open science

Édition morphologique de signaux sur graphes

Olivier Lézoray

▶ **To cite this version:**

Olivier Lézoray. Édition morphologique de signaux sur graphes. GRETSI, Aug 2019, Lille, France. hal-02272358

HAL Id: hal-02272358

https://hal.science/hal-02272358

Submitted on 27 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Édition morphologique de signaux sur graphes *

Olivier LÉZORAY

Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 14000 Caen, France
olivier.lezoray@unicaen.fr

Résumé – Nous abordons le problème de l'édition de signaux tels que des images ou des maillages colorés en 3D. Le problème est modélisé à l'aide de signaux sur graphes et leur traitement morphologique est considéré. Comme les opérateurs morphologiques ont besoin d'un treillis complet, une approche dédiée au traitement morphologique des données vectorielles sur les graphes est proposée. Des applications d'édition telles que la manipulation de détail et le tone mapping illustrent les avantages de l'approche proposée. Elles reposent sur la décomposition morphologique hiérarchique d'un signal à plusieurs échelles.

Abstract – We address the problem of editing signals such as images or 3D colored meshes. The problem is modeled with graph signals and their morphological processing is considered. Since morphological operators require a complete lattice, a dedicated approach for the morphological processing of vectorial data on graphs is proposed. Editing applications such as sharpness enhancement and tone mapping are shown to illustrate the benefits of the proposed approach. They rely on the morphological hierarchical decomposition of graph signals at different scales.

1 Introduction

Le filtrage d'image est reconnu comme l'une des opérations les plus importantes du traitement d'image. En particulier, le filtrage avec préservation de structure est une opération essentielle pour une grande variété d'applications de la photographie numérique et plus généralement de l'édition d'images. [1]. Au cours de la dernière décennie, de nombreux filtres de lissage préservant la structure ont été proposés [2, 3, 4, 5]. Ils visent à décomposer une image en structures proéminentes et en détails à échelle fine, facilitant ainsi la manipulation ultérieure de l'image pour l'amélioration des détails ou l'abstraction visuelle. Ces filtres ont été conçus à l'origine pour les images, mais certains ont été étendus aux maillages 3D [6]. Dans cet article, nous proposons d'étudier l'utilisation d'opérateurs de morphologie mathématique (MM) pour de telles tâches d'édition. Cela n'a jamais été étudié auparavant dans la littérature. Les opérateurs morphologiques sont des filtres qui préservent les valeurs de l'espace d'entrée, et ne sont donc pas soumis à la production d'halos, ce qui est un problème courant dans les tâches d'édition d'images [1]. La construction d'opérateurs morphologiques algébriques repose sur des treillis complets [7], ce qui impose de disposer d'une relation d'ordre entre les éléments à traiter. Si la MM est bien définie pour les scalaires, il n'existe pas d'extension générale admise qui permette d'effectuer des opérations morphologiques sur les vecteurs puisqu'il n'y a pas d'ordre naturel des vecteurs. Nous avons récemment proposé dans [8] un cadre pour la construction de treillis complets pour tout type de données vectorielles. Ce dernier apprend un treillis complet à partir d'une modélisation de la variété sur laquelle vivent les vecteurs. Dans cet article, nous considérons ces travaux comme une base pour l'édition de signaux morphologiques. De plus, pour permettre une application du cadre proposé à la fois aux images colorées et aux maillages 3D, nous considérons un formalisme basé sur des signaux sur graphes [9].

*Ce travail de recherche a bénéficié de fonds de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR-14-CE27-0001 GRAPHSIP), et de l'Union Européenne FEDER/FSE 2014/2020 (projet GRAPHSIP-FEDER).

2 Morphologie mathématique pour signaux sur graphes

2.1 Notations

Un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est constitué d'un ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ et d'arêtes $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ connectant les noeuds. Un signal sur graphe est une fonction qui associe un vecteur à chaque noeud d'un graphe $f : \mathcal{G} \to \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{T}$ un ensemble fini de vecteurs. L'ensemble $\mathcal{T} = \{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ représente tous les vecteurs associés aux noeuds du graphe (nous utiliseront également la notation $\mathcal{T}[i] = \mathbf{v}_i = f(v_i)$).

2.2 Treillis complet de vecteurs

Le traitement morphologique de signaux sur graphes requiert la définition dun treillis complet $(\mathcal{T}, \leq)$ [7], c-a-d un ordre total entre les vecteurs de $\mathcal{T}$. Puisqu'il n'existe pas d'ordre universel entre vecteurs, le cadre des h-ordres [10] a été proposé comme alternative. Cela consiste à construire une projection bijective $h : \mathcal{T} \to \mathcal{L}$ où $\mathcal{L}$ est un treillis complet équipé de l'ordre total lexicographique [10]. Nous nommerons $\leq_h$ un h-ordre donné par $\mathbf{v}_i \leq_h \mathbf{v}_j \Leftrightarrow h(\mathbf{v}_i) \leq h(\mathbf{v}_j)$. Comme montré dans nos précédentes travaux [8], la projection h ne peut être linéaire car une distortion de l'espace initial est inévitable. Il est donc pré-

férable d'exploiter une projection non-linéaire h. Cette dernière sera construite par un apprentissage de l'ordre des vecteurs à partir d'un signal sur graphe et le treillis complet $(\mathcal{T}, \leq_h)$ en sera déduit.

2.3 Apprentissage de treillis complet

Étant donné un signal sur graphe qui fournit un ensemble $\mathcal{T}$ de m vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, un dictionnaire $\mathcal{D} = \{\mathbf{x}'_1, \cdots, \mathbf{x}'_p\}$ de $p \ll m$ vecteurs est construit par quantification vectorielle [11]. Une matrice de similarité $\mathbf{K}_\mathcal{D}$ qui contient les similarités entre tous les paires de vecteurs du dictionnaire est alors calculée à l'aide d'un noyau Gaussien. Le variété des vecteurs du dictionnaire est modélisée à l'aide de l'apprentissage non linéaire de variété par Laplacian Eigenmaps [12]. Ceci est effectué avec la décomposition $\mathbf{L} = \mathbf{\Phi}_\mathcal{D}\mathbf{\Pi}_\mathcal{D}\mathbf{\Phi}_\mathcal{D}^T$ de la matrice Laplacienne normalisée

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mathbf{D}_\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}_\mathcal{D}\mathbf{D}_\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}}$$

avec $\mathbf{\Phi}_\mathcal{D}$ et $\mathbf{\Pi}_\mathcal{D}$ ses vecteurs propres et valeurs propres, et $\mathbf{D}_\mathcal{D}$ la matrice diagonale des degrés de $K_\mathcal{D}$. La représentation obtenue n'étant valable que pour le dictionnaire $\mathcal{D}$, elle est extrapolée à tous les vecteurs de $\mathcal{T}$ par l'extension de Nyström [13] exprimée par

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{D}_{\mathcal{D}\mathcal{T}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{K}_{\mathcal{D}\mathcal{T}}^T\mathbf{D}_\mathcal{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{\Phi}_\mathcal{D}(\mathrm{diag}[\mathbb{1}] - \mathbf{\Pi}_\mathcal{D})^{-1}$$

où $\mathbf{K}_{\mathcal{D}\mathcal{T}}$ est la matrice de similarité entre les ensembles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ calculée à l'aide d'un noyau Gaussien, et $\mathbf{D}_{\mathcal{D}\mathcal{T}}$ sa matrice diagonale associée. Enfin, la projection bijective $h : \mathcal{T} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L} \subset \mathbb{R}^p$ sur la variété est définie comme $h(\mathbf{x}) = (\tilde{\phi}^1(\mathbf{x}), \cdots, \tilde{\phi}^p(\mathbf{x}))^T$ avec $\tilde{\phi}^k$ le k-ième vecteur propre. Le treillis complet $(\mathcal{T}, \leq_h)$ est obtenu en utilisant l'ordre lexicographique après cette projection.

2.4 Représentation d'un signal sur graphe

Après l'apprentissage du treillis complet $(\mathcal{T}, \leq_h)$, une nouvelle représentation du signal sur graphe peut être définie. Soit $\mathcal{P}$ une permutation triée des éléments de $\mathcal{T}$ selon l'ordre $\leq_h$ appris par apprentissage non linaire de variété. On a

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{v}'_1, \cdots, \mathbf{v}'_m\}$$

avec $\mathbf{v}'_i \leq_h \mathbf{v}'_v, \forall i \in [1, (m-1)]$. A partir de cet ensemble ordonné de vecteurs, il est possible de définir un signal sur graphe sous la forme d'un index. Soit $I : \mathcal{G} \rightarrow [1, m]$ qui désigne cet index. Ses éléments sont définis comme

$$I(v_i) = \{k \mid \mathbf{v}'_k = f(v_i) = \mathbf{v}_i\}$$

Par conséquent, à chaque sommet v_i du signal d'index I , on obtient le rang du vecteur original $f(v_i)$ dans $\mathcal{P}$, l'ensemble des vecteurs triés, que nous appellerons une palette. Une nouvelle représentation du signal sur graphe original f est alors obtenue et notée sous la forme de la paire $f = (I, \mathcal{P})$. La figure 1 présente une telle représentation pour un signal couleur sur le graphe grille d'une image. Le signal sur graphe original f peut être directement reconstruit parfaitement puisque $f(v_i) = \mathcal{P}[I(v_i)] = \mathcal{T}[i] = \mathbf{v}_i$.

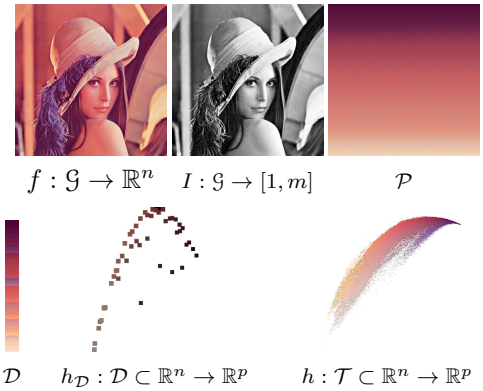

FIGURE 1 – Première ligne : un signal couleur ($n = 3$) sur le graphe grille d'une image avec $m_1 = 262144$, la représentation déduite avec l'index I et la palette $\mathcal{P}$ contenant les vecteurs triées (c-a-d le treillis complet). Seconde ligne : Le dictionnaire $\mathcal{D}$ avec $p = 64$ représentants, la projection $h_\mathcal{D}$ (montrée sur les trois premiers vecteurs propres) apprise à partir du dictionnaire $\mathcal{D}$, la projection finale h après interpolation à tous les vecteurs de f_1.

2.5 Traitement morphologique d'un signal sur graphe

Maintenant qu'une nouvelle représentation a été proposée pour représenter les signaux sur graphes, nous présentons comment les tâches de traitement morphologique peuvent être effectuées avec ces derniers. L'érosion et la dilatation d'un signal sur graphe f au sommet $v_i \in \mathcal{G}$ par un élément structurant $B_k \subset \mathcal{G}$ sont définies comme suit

$$\epsilon_{B_k}(f)(v_i) = \{\mathcal{P}[\wedge I(v_j)], v_j \in B_k(v_i)\} \tag{1}$$

$$\delta_{B_k}(f)(v_i) = \{\mathcal{P}[\vee I(v_j)], v_j \in B_k(v_i)\} \ . \tag{2}$$

Un élément structurant $B_k(v_i)$ de taille k défini à un sommet v_i correspond à l'ensemble des sommets accessibles à partir de v_i en k sauts :

$$B_k(v_i) = \begin{cases} \{v_j \sim v_i\} \cup \{v_i\} \text{ if } k = 1 \\ B_{k-1}(v_i) \cup \left(\cup_{\forall v_l \in B_{k-1}(v_i)} B_1(v_l)\right) \text{ if } k \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

Comme détaillé dans [14], le nombre de sommets dans un voisinage k-hop donné $B_k(v_i)$ est fortement dépendant du sommet v_i, mais l'érosion et la dilatation associées sont des opérateurs symétriques. La formulation des opérateurs morphologiques proposés montre qu'ils opèrent sur le signal d'index I, et le signal sur graphe traité est reconstruit à travers les vecteurs triés $\mathcal{P}$ qui représentent le treillis complet appris. Il est facile de voir que ces opérateurs héritent des propriétés algébriques standard des opérateurs morphologiques [15]. A partir de ces opérateurs de base, nous pouvons obtenir tous les filtres morphologiques standard pour les signaux sur graphes tels que les ouvertures $\gamma_{B_k}(f) = \delta_{B_k}(\epsilon_{B_k}(f))$ et les fermetures $\phi_{B_k}(f) = \epsilon_{B_k}(\delta_{B_k}(f))$.

3 Résultats

Pour manipuler un signal sur graphe dans le cadre de tâches d'édition, nous exploitons une décomposition morphologique hiérarchique du signal à différentes échelles. Nous adoptons la stratégie de [1] qui consiste à décomposer un signal en une couche de base et plusieurs couches de détails, chacune capturant une échelle donnée de détails. Nous proposons la décomposition morphologique multi-échelle suivante d'un signal sur graphe en l couches, comme indiqué dans l'algorithme 1. Pour extraire les couches successives de manière cohérente, la

Algorithm 1 Décomposition morphologique d'un signal

$d_{-1} = f, i = 0$
while $i < l$ **do**
  Calculer la représentation du signal au niveau $i-1$:
  $d_{i-1} = (I_{i-1}, \mathcal{P}_{i-1})$
  Filtrage Morphologique FM de d_{i-1} :
  $f_i = FM_{B_{l-i}}(d_{i-1})$
  Calcul du résidu :
  $d_i = d_{i-1} - f_i$
  Passer à l'échelle suivante :
  $i = i + 1$
end while

couche f_0 doit être la version la plus grossière du signal sur graphe, tandis que les résidus d_i doivent contenir des détails qui deviennent plus fins à travers les niveaux de décomposition. Cela signifie que la séquence d'échelles doit être décroissante et donc la taille de l'élément structurant dans le filtrage morphologique (FM) utilisé doit également diminuer. En termes de décomposition du signal, cela signifie qu'au fur et à mesure que le processus évolue, les décompositions successives extraient plus de détails du signal original. Dans l'algorithme 1, ceci est exprimé par B_{l-i} qui est une séquence d'éléments structurants de tailles décroissantes avec $i \in [0, l-1]$. Puisque chaque couche de détail d_i est composée d'un ensemble de vecteurs différents de la couche précédente d_{i-1}, la représentation du signal sur graphe $(I_i, \mathcal{P}_i)$ doit être calculée pour les couches successives à décomposer. Enfin, le signal peut alors être représenté par $f = \sum_{i=0}^{l-2} f_i + d_{l-1}$. Les f_i représentent donc différentes couches de f capturées à différentes échelles. Le filtre morphologique que nous avons considéré pour la décomposition est un Open Close Close Open. Le filtre OCCO est un opérateur auto-dual qui a d'excellentes capacités de décomposition de signal [16] : $OCCO_{B_k}(f) = \frac{\gamma_{B_k}(\phi_{B_k}(f)) + \phi_{B_k}(\gamma_{B_k}(f))}{2}$.

Pour manipuler un signal sur graphe, nous construisons tout d'abord la decomposition morphologique hiérarchique en l niveau de détails. Le signal peut ensuite être manipulé en affectant à chaque couche de détail un coefficient spécifique α_i avant de reconstruire le signal. Ceci est exprimé par :

$$\hat{f}(v_k) = f_0(v_k) + \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i f_i(v_k)$$

avec $f_{l-1} = d_{l-1}$. Dans la figure 2, nous présentons deux exemples pour des signaux sur graphes différents avec trois niveaux de décomposition et $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ (gauche : signal original, droite : signal manipulé).

Ceci peut également être exploité pour effectuer un tone mapping d'images HDR. L'approche proposée par [17] exploite un filtre bilatéral pour calculer la représentation hiérarchique du signal. Partant d'une image HDR, sa Log-Luminance est calculée et séparée en deux couches. L'image tone-mappée est alors construite en combinant le signal de base f_0 après augmentation de contraste avec la couche de détail f_1, le tout étant soumis à une correction gamma. Nous remplaçons le filtre bilatéral par notre décomposition morphologique hiérarchique en deux niveaux. La figure 3 montre le résultat obtenu et sa comparaison avec [17]. Comme on peut le voir, certains détails sont encore présents dans la couche de base avec le filtre bilatéral (dans le vitrail) et les bords ne sont pas toujours nets (livre et bureau). Ce n'est pas le cas avec notre décomposition, la couche de base est beaucoup plus constante par morceaux. Il en résulte une image tone-mappée plus contrastée et plus nette. Ceci est évalué par les valeurs de log-PSNR (une mesure de qualité pour les images HDR [18] [1]) : 154.12 dB pour [17] et 157.61 dB pour notre approche.

4 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle représentation de signaux sur graphes sous la forme d'un index et d'une palette de vecteurs. La palette est l'expression d'un treillis complet appris à partir de l'ensemble initial des vecteurs et est obtenue par un apprentissage non-linéaire de variété. La nouvelle représentation induite est exploitée afin de construire une décomposition morphologique hiérarchique du signal à des fins de manipulation de détail, tâche essentielle en édition d'images. Des exemples en sharpening et tone-mapping ont été présentés.

Références

[1] Z. Farbman, R. Fattal, D. Lischinski, and R. Szeliski, "Edge-preserving decompositions for multi-scale tone and detail manipulation," *ACM Trans. Graph.*, vol. 27, no. 3, 2008.

[2] Q. Zhang, X. Shen, L. Xu, and J. Jia, "Rolling guidance filter," in *ECCV*, 2014, pp. 815–830.

[3] H. Cho, H. Lee, H. Kang, and S. Lee, "Bilateral texture filtering," *ACM Trans. Graph.*, vol. 33, no. 4, pp. 128 :1–128 :8, 2014.

[4] E. S. L. Gastal and M. M. Oliveira, "Domain transform for edge-aware image and video processing," *ACM Trans. Graph.*, vol. 30, no. 4, p. 69, 2011.

[5] L. Xu, C. Lu, Y. Xu, and J. Jia, "Image smoothing via L_0 gradient minimization," *ACM Trans. Graph.*, vol. 30, no. 6, p. 174, 2011.

1. Disponible en ligne à http ://driiqm.mpi-inf.mpg.de

FIGURE 2 – Manipulation morphologique des détails de signaux sur graphes (image et maillage).

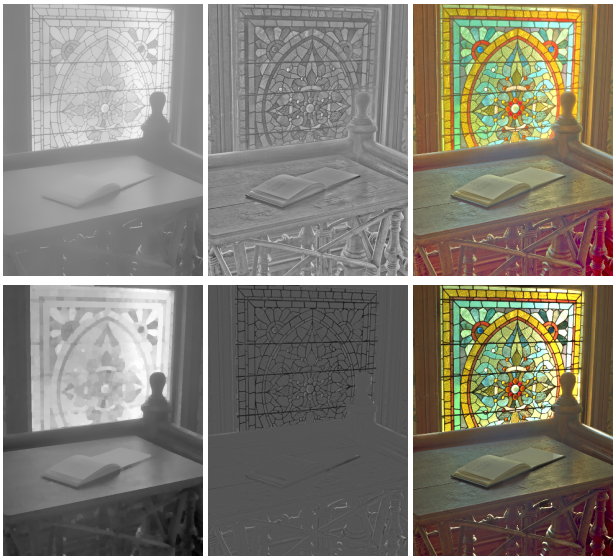

FIGURE 3 – Couche de base, couche de détail et image tone-mappée obtenues avec [17] (première ligne) et notre approche (seconde ligne).

[6] S. Fleishman, I. Drori, and D. Cohen-Or, "Bilateral mesh denoising," *ACM Trans. Graph.*, vol. 22, no. 3, pp. 950–953, 2003.

[7] C. Ronse, "Why mathematical morphology needs complete lattices," *Signal Processing*, vol. 21, no. 2, pp. 129–154, 1990.

[8] O. Lézoray, "Complete lattice learning for multivariate mathematical morphology," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 35, pp. 220–235, 2016.

[9] D. I. Shuman, S. K. Narang, P. Frossard, A. Ortega, and P. Vandergheynst, "The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 30, no. 3, pp. 83–98, 2013.

[10] J. Goutsias, H. Heijmans, and K. Sivakumar, "Morphological operators for image sequences," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 62, no. 3, pp. 326–346, 1995.

[11] A. Gersho and R. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*. Kluwer Academic, 1991.

[12] M. Belkin and P. Niyogi, "Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation," *Neural Comput.*, vol. 15, no. 6, pp. 1373–1396, 2003.

[13] A. Talwalkar, S. Kumar, M. Mohri, and H. A. Rowley, "Large-scale SVD and manifold learning," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 14, no. 1, pp. 3129–3152, 2013.

[14] H. J. A. M. Heijmans, P. F. M. Nacken, A. Toet, and L. Vincent, "Graph morphology," *J. Visual Communication and Image Representation*, vol. 3, no. 1, pp. 24–38, 1992.

[15] S. Velasco-Forero and J. Angulo, "Mathematical morphology for vector images using statistical depth," in *International Symposium on Mathematical Morphology*, vol. LNCS 6671, 2011, pp. 355–366.

[16] R. A. Peters, "A new algorithm for image noise reduction using mathematical morphology," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, no. 5, pp. 554–568, 1995.

[17] F. Durand and J. Dorsey, "Fast bilateral filtering for the display of high-dynamic-range images," *ACM Trans. Graph.*, vol. 21, no. 3, pp. 257–266, 2002.

[18] R. K. Mantiuk, K. Myszkowski, and H.-P. Sidel., "High dynamic range imaging," in *Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*. Wiley, 2015.