



**HAL**  
open science

## Lois de comportement d'interface

Françoise Baillot, Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Françoise Baillot, Roger Prud'Homme. Lois de comportement d'interface. Journées d'Etudes "Thermodynamique des interfaces fluide fluide", CNRS/Univ. P.M. Curie, Paris 6, Dec 1987, Meudon, France. pp. 23 34. hal-02270457

**HAL Id: hal-02270457**

**<https://hal.science/hal-02270457v1>**

Submitted on 17 Oct 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LOIS DE COMPORTEMENT D'INTERFACE

F. Baillot et R. Prud'homme<sup>1,2</sup>

*Résumé* - La notion d'interface est ici étendue à des milieux présentant des gradients normaux sur une épaisseur plus importante que l'échelle moléculaire, mais restant petite devant une échelle macroscopique significative de l'environnement interfacial. Des équations du bilan décrivant l'évolution des propriétés de surface sont établies, Il est nécessaire de trouver des lois de comportement complémentaires permettant de le fermer. Deux approches sont proposées : la première transpose les lois d'état et les relations, appliquées habituellement aux variables de volume, à celles de surface ; l'autre est une recherche directe de lois par l'analyse dimensionnelle.

*Abstract* - The notion of interface is extended here to domains which present strong normal gradients along a thickness larger than the molecular scale, but small enough in comparison with a macroscopic scale, significant to the interface surrounding. Some balance equations, describing the evolution of the surface proprieties are established. To directly solve the system with the surface variables, it is necessary to find some complementary constitutive equations, closing this one. Two ways are proposed: the first one is a transposition of some equations of state and relations, applied usually to volume variables, to surface ones. The second one is a direct research of some constitutive relations by a dimension analysis.

## Introduction

Ce présent travail a pour objectif la mise en évidence de lois de comportement de milieux matériels qui à l'échelle macroscopique peuvent être assimilés à des domaines bidimensionnels, mais qui à une échelle plus fine, pouvant aller jusqu'à la description microscopique, présentent sur une faible épaisseur de fortes variations de propriétés physiques normales. Ces milieux, assimilés à des interfaces, apparaissent comme des séparations réelles ou fictives de deux volumes matériels, amont (-) et aval (+), de nature différente ou non,

L'interface correspond donc à un lieu privilégié de contact et d'échanges avec ces derniers. Ceci lui confère des propriétés surfaciques internes  $(\wedge)_F$ , dépendances a priori des flux normaux des quantités  $F$  existant dans ces régions.

Selon la nature des interfaces étudiées, il a paru nécessaire d'envisager une méthodologie différente en vue d'obtenir les lois de comportement complémentaires. Véritables relations de fermeture, elles lient les différentes grandeurs surfaciques aux sauts  $[[f]]$  de densité volumique et  $[[J_{VF}]]$  de flux volumiques des quantités  $F$ , évalués de part et d'autre de l'interface. Il nous a semblé utile dans un premier temps de présenter la notion d'interface retenue et de rappeler succinctement la description choisie lors de son analyse à une échelle plus fine [1]. A l'aide de ces définitions, il est possible d'établir directement les équations de bilan des densités surfaciques  $\hat{\rho}_F$ , qui suivent leur évolution dans le mouvement propre de l'interface.

---

<sup>1</sup> Laboratoire d'Aérodynamique du CNRS, 4 ter, route des Gardes. F-92190 Meudon. France

<sup>2</sup> Cet article Publié aux Annales de Physique, Colloque n°2, supplément au n°3, vol. 13, juin 1988, a fait l'objet d'une présentation orale aux Journées d'Etudes "Thermodynamique des interfaces fluide-fluide", CNRS/Univ. P.M. Curie, Paris 6, Meudon, 7-8 décembre 1987

Le problème ayant été posé, nous avons traité de l'obtention des lois de comportement complémentaires. Deux voies sont alors proposées : l'une s'appuie sur la transposition de relations et de lois d'état appliquées habituellement aux variables de volume, aux variables surfaciques (relations de Gibbs, d'Euler, loi d'état des gaz parfaits à pression constante...) ; l'autre correspond à une recherche directe de lois linéaires entre  $\hat{\rho}_F$  ou  $\vec{J}_F$ , flux linéique associé à  $\hat{\rho}_F$  et  $[[f]]$  par l'analyse dimensionnelle. La première méthode définit ce que nous avons appelé une "interface de Gibbs". Quant à la seconde démarche, n'ayant pas fait à ce jour l'objet d'une démonstration générale, elle est illustrée par l'étude de deux cas particuliers significatifs, la flamme mince de prémélange à grande énergie d'activation et la couche limite développée au voisinage d'une paroi.

### Définition de l'interface et des propriétés surfaciques

A grande échelle, on définit l'interface comme étant une surface  $S$ , décrite sous forme implicite par son équation :

$$(1) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = 0$$

On suppose que  $\mathcal{F}$  possède toutes les propriétés de continuité et de dérivabilité requises. On peut alors calculer en chaque point  $\vec{x}$  et à tout instant  $t$  la normale unitaire  $\vec{N}$  que l'on choisit arbitrairement dirigée de l'amont (-) vers l'aval (+) :

$$(2) \quad \vec{N} = + \vec{\nabla} \mathcal{F} / |\vec{\nabla} \mathcal{F}|$$

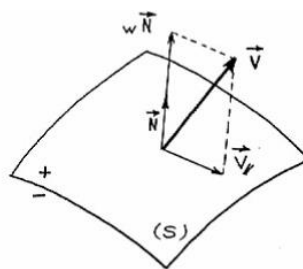


Figure 1

On suppose que l'interface ne suit pas forcément le mouvement barycentrique local  $\vec{v}$  et qu'elle peut donc être traversée par la matière. On définit alors un champ de vitesse arbitraire  $\vec{V}$  continu et dérivable dont la composante normale à la surface s'écrit :

$$(3) \quad \vec{V} \cdot \vec{N} = w = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} / |\vec{\nabla} \mathcal{F}|$$

la composante tangentielle  $\vec{V}_{//}$  étant choisie selon le cas étudié.

On se place par ailleurs, dans les hypothèses suivantes :

(i)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{N}$  et  $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$  sont  $O(1)$  à l'échelle hydrodynamique. (ii) On postule l'existence de grandeurs interfaciales  $\hat{\rho}_F$ , associées à  $F$  dont on suit l'évolution dans le mouvement de l'interface de vitesse  $\vec{V}$ . Nous effectuons, pour cela, le bilan intégral de  $F$  sur une portion de surface  $(\Sigma)$  limitée par la courbe  $(C)$ .

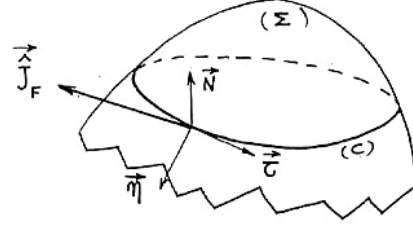


Figure 2

On a donc :

$$(4) \quad \frac{dv}{dt} \int_{\Sigma} \hat{\rho}_F d\Sigma + \int_{(C)} \vec{J}_F \cdot \vec{\eta} d\sigma + \int_{\Sigma} [[J_{VF\perp}]] d\Sigma = \int_{\Sigma} \hat{W}_F d\Sigma$$

$\hat{\rho}_F$  correspond à une densité surfacique de  $F$ ,  $\vec{J}_F$  à un flux linéique de  $F$  suivant  $(C)$ ,  $\hat{W}_F$  au taux de production surfacique et  $[[J_{VF\perp}]]$  au saut à travers  $\Sigma$  du flux normal.

$dv/dt$  ( $\cdot$ ) représente la dérivée particulière suivant le mouvement arbitraire de milieu continu de vitesse  $\vec{V}$  telle que :

$$(5) \quad \frac{d_v}{dt} (\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\cdot)$$

L'expression de la circulation  $\int_C \vec{J}_F \cdot \vec{\eta} d\sigma$  peut être transformée en intégrale de surface  $\int_{\Sigma} \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{J}_{F//} d\Sigma$ , ce qui après regroupement de certains termes permet d'en tirer l'équation d'évolution locale de  $\hat{\rho}_F$  :

$$(6) \quad \frac{d_v}{dt} \hat{\rho}_F + \hat{\rho}_F \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V} + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{J}_{VF} + [[J_{VF\perp}]] = \hat{W}_F$$

Le système d'équations aux  $\hat{\rho}_F$  établies pour l'ensemble des grandeurs  $F$ , n'a d'intérêt que s'il est accompagné de relations de fermeture, permettant de le résoudre. Il faut alors des lois de comportement complémentaires explicitant des relations entre  $\hat{\rho}_F$ ,  $\vec{J}_{VF}$  et  $\hat{W}_F$ .

Il nous apparaît utile de donner une expression explicite des grandeurs  $\hat{\rho}_F$  en fonction des grandeurs volumiques correspondantes  $\hat{\rho}_F$  de l'interface, considérée comme un domaine "épais" à petite échelle. Pour ce faire, nous rappelons brièvement les hypothèses faites sur la description de cette zone interfaciale.

A petite échelle, on admet que cette dernière ne nécessite pas une analyse moléculaire, ce qui permet de la représenter à l'aide des équations classiques des milieux continus.

A cette échelle, la couche interfaciale est comparée à un milieu particulier limité par deux surfaces  $(S_-)$  et  $(S_+)$  appartenant à une famille de surfaces  $(S)$  non sécantes, variant continûment dans le temps et l'espace animées en chacun de leur point d'une célérité  $\vec{V}$ . Nous supposons que ces surfaces  $(S)$  restent parallèles entre elles à tout instant. L'épaisseur de la couche, constante par hypothèse au cours du temps, est décrite par un système de

coordonnées curvilignes orthogonales  $(x_1, x_2, x_3)$  où l'équation  $x_3=Cte$  est celle d'une surface (S).

Soit  $(x, y, z)$  le triplet cartésien, Alors, on réalise le changement de coordonnées suivant

$$(7) \quad x = x(x_1, x_2, x_3, t), \quad y = y(x_1, x_2, x_3, t), \quad z = z(x_1, x_2, x_3, t),$$

Cette transformation définit le trièdre orthogonal  $(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3)$  dont les vecteurs  $\vec{h}_i$  admettent les composantes  $(x_i, y_i, z_i)$  et le trièdre orthonormé  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  qui se déduit du précédent par le relation :

$$(8) \quad \vec{h}_i = h_i \vec{e}_i, \quad \forall i$$

En particulier, l'hypothèse des surfaces parallèles entraîne la conservation de la normale  $\vec{N}$  aux surfaces (S) qui conduit aux égalités :

$$(9) \quad h_{3,1}=0, \quad h_{3,2}=0$$

ainsi que la conservation de  $\vec{V} \cdot \vec{N}$ ,  $\vec{V}_{//} \cdot \vec{V}$ .

Celle d'épaisseur constante impose à la vitesse normale de déplacement de la surface  $w\vec{N}$ , l'invariance avec  $x_3$ . Ainsi  $\vec{V}$  se conserve à la traversée de la couche interfaciale. Cette description curviligne permet entre autres de calculer les coefficients phénoménologiques des lois de comportement complémentaires, mis en évidence par l'analyse dimensionnelle [1] et d'exprimer les variables surfaciques  $\hat{\rho}_F$ ,  $\vec{\hat{J}}_{VF}$ ,  $\hat{W}_F$  en fonction de variables de volume. On a les relations suivantes :

$$(10) \quad \hat{\rho}_F = \int_{N^-}^{N^+} \rho_F dN, \quad (11) \quad \vec{\hat{J}}_{VF} = \int_{N^-}^{N^+} \vec{J}_{VF} dN, \quad (12) \quad \hat{W}_F = \int_{N^-}^{N^+} \hat{W}_F dN$$

Nous entendons par le terme  $\rho_F$  une quantité pouvant être égale au produit  $\rho f$  ou  $\rho(f - f_0)$ - grandeurs d'excès - où  $f$  représente le grandeur volumique associée à  $F$  et  $f_0$  la grandeur de référence de  $F$  du domaine tridimensionnel amont ou aval, variant peu ou pas à la traversée de l'interface.  $\vec{\hat{J}}_F$  se définit, quant à lui, à partir du flux barycentrique  $\vec{J}_F$  ( $\vec{J}_{F0}$  dans l'état de référence) comme suit :

$$(13) \quad \vec{\hat{J}}_{VF} = \vec{J}_F - \vec{J}_{F0} + \rho_F (\vec{v} - \vec{V})$$

### Interfaces de Gibbs

Pour qu'une interface soit dite de Gibbs, il faut qu'elle représente un système thermodynamique autonome. Cela nécessite l'existence et l'unicité de grandeurs de surface, telle la température  $\hat{T}$ , qui obéissent à des lois thermodynamiques analogues à celles que suivent les variables volumiques. Les grandeurs surfaciques sont alors autonomes par rapport à ces dernières. On peut donc adapter directement les lois et relations établies pour des domaine tridimensionnels à l'interface. En particulier, on obtient les relations d'Euler (14), de Gibbs (15) et du flux d'entropie (16) [2], vérifiées par les quantités interfaciales :

$$(14) \quad \hat{\rho}_S = \frac{1}{\hat{T}} \hat{\rho}_E - \frac{\sigma}{\hat{T}} - \sum_j \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \hat{\rho}_j$$

$$(15) \quad d\hat{\rho}_S = \frac{1}{\hat{T}} d\hat{\rho}_E - \sum_j \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} d\hat{\rho}_j$$

$$(16) \quad \vec{\hat{j}}_S = \frac{1}{\hat{T}} \vec{\hat{q}} - \sum_j \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \vec{\hat{j}}_j$$

où  $S$ ,  $E$ ,  $\sigma$ ,  $g_j$ ,  $\vec{\hat{j}}_j$ ,  $\vec{\hat{q}}$  sont les symboles de l'entropie de l'énergie interne, de la tension superficielle, des potentiels chimiques massiques, des flux massiques des constituants  $j$ , et du flux thermique. Cette interface suit le mouvement barycentrique local de la matière, Sa célérité est confondue avec la vitesse matérielle surfacique :

$$(17) \quad \vec{V} = \vec{v}$$

L'application de (6) à ce cas fournit l'équation de bilan suivante :

$$(18) \quad \frac{d\hat{\rho}_F}{dt} + \rho_F \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\hat{j}}_F + \llbracket \vec{\hat{j}}_{F\perp} + \rho f u_{\perp} \rrbracket = \hat{W}_F$$

où  $u_{\perp}$  représente la vitesse relative normale  $(\vec{v} - \vec{v}) \cdot \vec{N}$ .

La relation (18), appliquée aux différentes quantités  $F$  que sont la masse du fluide (19) ou d'un de ses constituants  $j$  (20), la quantité de mouvement (21), l'énergie interne (22), l'entropie (23), conduit au système mentionné ci-dessous :

$$(19) \quad d\hat{\rho}/dt + \hat{\rho} \cdot \vec{\nabla}_{//} \vec{v} + \llbracket \rho u_{\perp} \rrbracket = 0$$

$$(20) \quad d\hat{\rho}_j/dt + \hat{\rho}_j \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v} + \llbracket \vec{\hat{j}}_j + \rho_j u_{\perp} \rrbracket + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\hat{j}}_j = \hat{W}_j$$

$$(21) \quad d\hat{\rho}_j/dt + \hat{\rho}_j \cdot \vec{\nabla}_{//} \vec{v} + \llbracket \vec{P} \cdot \vec{N} + \rho \vec{v} u_{\perp} \rrbracket - \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{\sigma} = \sum_j \hat{\rho}_j \hat{f}_j$$

$$(22) \quad d\hat{\rho}_E/dt + \hat{\rho}_E \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{v} + \llbracket q_{\perp} + \rho_E u_{\perp} \rrbracket + \vec{\nabla}_{//} \vec{q} = \sum_j \hat{e}_j \hat{f}_j + \vec{\sigma} : \vec{v} - \llbracket 1/2 \rho (\vec{v}' - \vec{v})^2 u_{\perp} + (\vec{v}' - \vec{v}) \cdot \vec{P} \cdot \vec{N} \rrbracket$$

$$(23) \quad d\hat{\rho}_S/dt + \hat{\rho}_S \cdot \vec{\nabla}_{//} \vec{v} + \llbracket e_{S\perp} + \rho_S u_{\perp} \rrbracket + \vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{e}_S = \hat{W}_S$$

$\vec{P}$  représente le tenseur des pressions,  $\vec{\sigma}$  celui des tensions de surface,  $\vec{f}_j$  les forces extérieures surfaciques. Le système ainsi obtenu ne peut être résolu que s'il est complété par des lois de comportement complémentaires. Ces dernières se déduisent de l'expression du taux de production surfacique d'entropie à partir des équations précédentes en éliminant les variables entropiques

$$(24) \quad \hat{w}_s = \frac{1}{\hat{T}} \sum_i \vec{\hat{D}}_i + \hat{q} \cdot \vec{\hat{\nabla}} \left( \frac{1}{\hat{T}} \right) - \sum_j \left[ \vec{\hat{\nabla}}_j \left( \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \right) - \frac{\hat{f}_j}{\hat{T}} \right] \cdot \vec{\hat{e}}_j - \sum_j \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \hat{w}_j$$

$$+ \left[ \left( q_L + \rho_H u_L \right) \left( \frac{1}{\hat{T}} - \frac{1}{\hat{T}} \right) - \sum_j \left( \hat{e}_{jL} + \rho_j u_{jL} \right) \left( \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} - \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \right) - \frac{1}{\hat{T}} (\vec{v} - \vec{v}) \cdot \vec{\hat{\Pi}} \cdot \vec{N} \right]$$

avec

$$\rho_H = \rho_E + \rho = \rho h, \text{ densité d'enthalpie,}$$

$$\vec{\hat{\Pi}} = \vec{P} - p \cdot \vec{1}, \text{ tenseur des pressions visqueuses,}$$

$$\vec{\hat{\Sigma}} = \vec{\sigma} - \sigma (\vec{1} \cdot \vec{N} \otimes \vec{N}), \text{ tenseur des tensions visqueuses,}$$

$$\vec{\hat{D}} = 1/2 (\vec{\hat{\nabla}}_j \otimes \vec{v} + \vec{\hat{\nabla}}_j \otimes \vec{v}), \text{ tenseur des taux de déformation surfacique.}$$

L'expression (24) fait apparaître des forces généralisées

$$\vec{\hat{D}}/\hat{T}, \vec{\hat{\nabla}}_j \cdot (1/\hat{T}), \vec{\hat{\nabla}} \left( \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}} \right) - \frac{\hat{f}_j}{\hat{T}},$$

des flux généralisés  $\left( \vec{\hat{\Sigma}}, \vec{q}, \vec{J}, \vec{\hat{\Pi}} \cdot \vec{N} \right)$  et des affinités chimiques de surface

$$\left( \frac{1}{T} - \frac{1}{\hat{T}} \right), \frac{\hat{g}_j}{T} - \frac{\hat{g}_j}{\hat{T}}, -\frac{1}{\hat{T}} (\vec{v} - \vec{v})$$

Les lois complémentaires s'obtiennent, à l'exception de la cinétique chimique, en reliant linéairement flux et forces, supposées de faible intensité. La limite d'applicabilité de cette théorie interfaciale provient du fait que l'hypothèse, exigeant de l'interface d'être un système thermodynamique autonome, impose l'existence d'un état d'équilibre de référence, tel que les grandeurs  $\hat{\rho}_F$  soient des grandeurs thermodynamiques locales.

De très nombreux domaines peuvent être traités par cette approche. Citons les exemples des surfaces capillaires, des films élastiques et viscoélastiques, de certaines membranes, des phénomènes d'adsorption-désorption.

Mais il y a des processus, qui pour exister, nécessitent un état hors d'équilibre. C'est le cas des flammes minces de prémélange à grande énergie d'activation et des couches limites provoquées par des processus irréversibles, chimiques ou visqueux. Si on annule ces processus, les phénomènes disparaissent. Cela pose donc en particulier le problème de la validité de la température  $\hat{T}$  à l'équilibre. Nous avons alors recherché une autre approche pour modéliser ces types différents d'interface.

## Approche par l'analyse dimensionnelle

Les domaines d'étude étant assimilée à des interfaces dont les propriétés de surface suivent l'équation (6), on cherche à établir des relations linéaires entre  $(\hat{^})_F$  et  $[[f]]$  d'une grandeur  $F$  par une analyse dimensionnelle. Les coefficients de proportionnalité ainsi mis en évidence peuvent être obtenus par ailleurs, soit par un calcul complet de l'interface, considéré comme un espace tridimensionnel [1] soit à l'avenir expérimentalement. Deux cas se prêtent à cette approche, que nous allons présenter successivement.

### Flamme mince de prémélange à grande énergie d'activation

Nous traitons ici d'une flamme de prémélange monoréactive ( $A \rightarrow B$ ) à haute énergie d'activation  $E_a$ . La flamme est composée de deux régions actives: une zone de préchauffage

des mélanges gazeux initialement à la température  $T_0$ , où la conduction thermique, la diffusion et la convection sont significatives, suivie de la zone réactive proprement dite où les produits de combustion sont échauffés jusqu'à une température  $T_f$  inférieure ou égale à la température de fin de combustion adiabatique  $T_b$ .

L'hypothèse de grande énergie d'activation impose au rapport  $\beta$ , égal à  $E_a/RT_b$ , d'être grand devant l'unité. Si  $d_F$  et  $\delta$  représentent respectivement les épaisseurs de la zone de diffusion, associée à la propriété  $F$  (température  $T$  ou traction massique  $Y$  du réactant  $A$ ) et de la zone réactive, alors  $\delta/d_F$  est  $O(1/\beta)$ .

On définit  $d_F$  à partir du coefficient de diffusion  $D_F$  de  $F$ , de la vitesse relative normale de l'onde de déflagration  $u$  et de la masse volumique  $\rho$  du mélange gazeux :

$$(25) \quad d_F = D_F/\rho u \quad \text{et} \quad u = v_{\perp} - w$$

$D_F$  vaut  $\lambda/C_p$  si  $F$  représente  $T$  et  $\rho D$  si  $F$  représente  $Y$ .

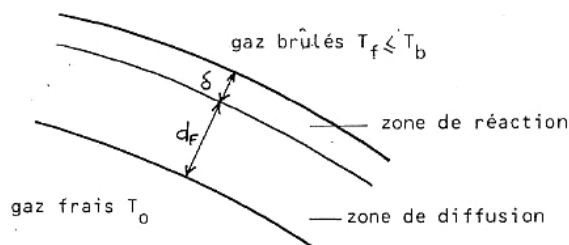


Figure 3

L'hypothèse (i) de large courbure impose à l'épaisseur  $d_F$  d'être petite devant les ondulations de la flamme dues aux effets extérieurs :

$$\epsilon = \frac{d_F}{\Lambda} \ll 1$$

La modélisation, originale par rapport aux travaux d'auteurs précédents [3] assimile les deux régions précitées en une même interface.

Celle-ci est animée d'une vitesse  $\vec{V}$  dont la composante tangentielle à la surface est prise égale à la composante tangentielle  $\vec{v}_{//}$  de la vitesse barycentrique du mélange et la composante normale à la célérité  $w\vec{N}$  définie ci-avant. A petite échelle, les gaz dans la couche interfaciale sont supposés suivre les lois d'état de gaz parfaits  $\rho = \rho_0 = Cte$  ou  $\rho T = \rho_0 T_0 = Cte$ .

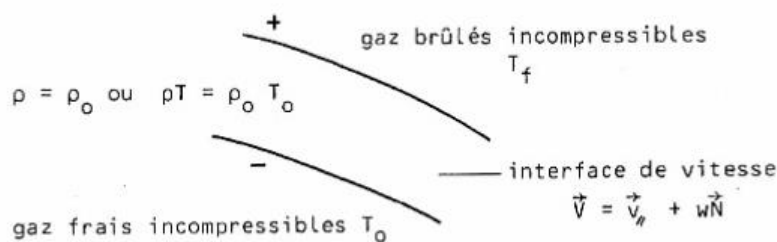


Figure 4



A grande échelle, l'interface possède des propriétés  $\hat{\rho}_F$  qui suivent l'équation (6). Dans ce cas-ci, les flux linéiques  $\vec{J}_F$  sont négligeables, ce qui ramène (6) à :

$$(27) \quad \frac{d\hat{\rho}_F}{dt} + \hat{\rho}_F \vec{\nabla}_{//} \vec{V} + \left[ \mathcal{D}_{F_0} + \rho_F (v_{\perp} - w) \right] = \hat{w}_F$$

$$\rho_F = \rho(f - f_o), f_o = \text{cste}$$

L'analyse dimensionnelle d'une grandeur dissipative  $F$  montre qu'il existe un nombre sans dimension  $L_F$  tel que :

$$(28) \quad L_F = \frac{\hat{\rho}_F}{\rho_o \llbracket f \rrbracket d_F}$$

où  $d$  est bien une épaisseur caractéristique de l'interface. Finalement, on trouve la relation caractéristique :

$$(29) \quad \hat{\rho}_F = L_F \rho_o \llbracket f \rrbracket \frac{D_F}{\rho u}$$

Si l'on désire obtenir des relations  $(\overline{\quad})$  sans dimension où par exemple  $T_o$ ,  $\rho_o$ ,  $\Lambda$  et  $u_b$  la vitesse relative normale de combustion laminaire adiabatique, servent de paramètres de référence, alors (29) se transforme ainsi :

$$(30) \quad \overline{\hat{\rho}_F} = L_F \epsilon C_p \frac{D_F \llbracket f \rrbracket}{\lambda \dot{m}}$$

$$\dot{m} = \rho (v_{\perp} - w) / \rho_o u_b$$

Dans le cas particulier de T et Y, on obtient

$$(31) \quad \overline{\hat{\rho}_Y} = -L_Y \frac{\epsilon}{Le \dot{m}}, \quad \overline{\hat{\rho}} = L_T \left( 1 - \frac{T_o}{T_b} \right) \frac{\epsilon}{\dot{m}}$$

$$Le = \rho \frac{\mathcal{D} C_p}{\lambda}, \text{ nombre de Lewis}$$

$L_Y$  et  $L_T$  sont semblables à des coefficients phénoménologiques. L'analyse de la couche interfaciale par la méthode des développements asymptotiques fournit par ailleurs l'expression explicite de  $L_T$  et  $L_Y$  [1].

Selon la loi d'état retenue on trouve les résultats suivants :

Loi d'état	$L_T$	$L_Y$
$\rho = \rho = \text{cste}$	1	1
$\rho T = \rho_0 T_0 = \text{cste}$	$T_0 / (1 - T_0) \cdot \ln(1/T_0)$	$\frac{Le \cdot T_0}{1 - T_0} \left[ \ln \frac{1}{T_0} \cdot (Le - 1) \left( \frac{T_0}{1 - T_0} \right)^{Le-1} \mathcal{L}(T_0) \right]$

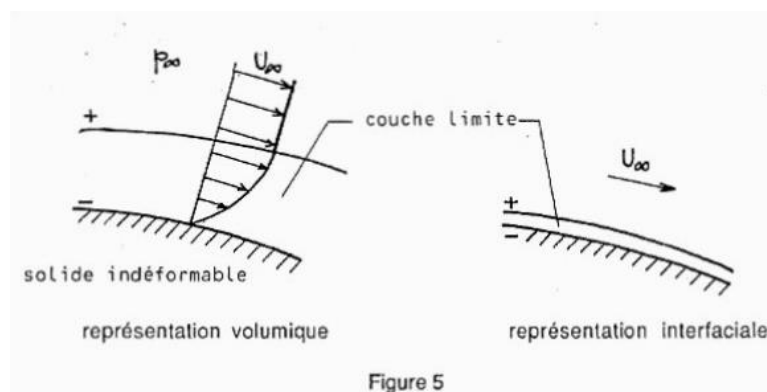
$$\mathcal{L}(T_0) = \int_0^{\frac{1-T_0}{T_0}} \frac{\ln(1+\xi)}{\xi^{2-Le}} d\xi$$

On remarque que  $L_Y$  et  $L_T$  caractérisent ce qui se passe dans la flamme par rapport au cas à densité constante.

Notons qu'il a été étudié également le cas d'une flamme stabilisée dans un écoulement à point d'arrêt où l'hypothèse  $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$  d'ordre 1 est remplacé par  $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{V}$  d'ordre  $1/\varepsilon$  [1]. Les lois complémentaires, qui relient entre elles les inconnues surfaciques permettent de fermer le système d'équations interfaciales et de le résoudre directement à raide de grandeurs  $(\hat{\cdot})_F$ .

### Couche limite au-dessus d'un obstacle rigide

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la modélisation sous forme d'interface de couches limites développées au-dessus d'un solide indéformable. Les surfaces limitantes amont (-) et aval (+) sont respectivement la paroi et la limite supérieure de la couche. Le fluide est incompressible :



On choisit comme célérité  $\vec{V}$  de l'interface la vitesse du fluide à la paroi. Contrairement à l'exemple précédent où l'on a négligé l'influence du terme  $\vec{\nabla}_{//} \cdot \vec{J}_{VF}$  termes convectifs longitudinaux deviennent prépondérants. L'adhérence du fluide à la paroi étant retenue, la vitesse du fluide est égale à celle de la paroi, d'où

$$(32) \quad \vec{V} = \vec{v}_{\text{paroi}}$$

Ainsi dans un référentiel lié au solide  $\vec{V}$  est nul. On introduit ces grandeurs de surface comme des grandeurs d'excès calculées avec ta valeur de référence de  $F$  à aval de l'interface

$$(33) \quad \hat{\rho}_F = \int_{N^-}^{N^+} \rho(f-f_0) dN$$

D'après ces remarques l'équation d'évolution de la propriété  $\hat{\rho}_F$  dans un référentiel lié à l'obstacle se réduit à :

$$(34) \quad \frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial t} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{J}_F + \llbracket J_{VE} \rrbracket = \hat{W}_F$$

Illustrons plus précisément notre propos à l'aide de trois exemples significatifs.

- *Couche limite stationnaire au-dessus d'une plaque plane*

L'écoulement de fluide est supposé bidimensionnel plan à pression constante  $p$ . On définit Un repère cartésien  $(x, y)$  tel que la plaque est située en  $y=0$  et  $x>0$ .

La vitesse du fluide à l'infini rotée  $U_\infty$  est constante et parallèle à l'axe  $x$ . On désigne  $\nu$  par sa viscosité cinématique. Une couche limite caractérisée par un fort gradient de vitesse longitudinale suivant l'axe  $y$ , se développe depuis le bord d'attaque de la paroi le long de cette dernière, avec une épaisseur  $\delta$  dont l'ordre de grandeur est donné à partir des paramètres caractéristiques  $\nu, x, U_\infty$  :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$$

De façon plus précise,  $\delta$  se calcule à l'aide des équations volumiques du bilan écrites à l'intérieur de la couche. L'analyse dimensionnelle à échelle simple fait intervenir trois grandeurs de référence,  $\rho, U_\infty$  et  $x$ . Si l'on exprime les autres paramètres en fonction de ces dernières, il apparaît trois groupements sans dimension caractéristiques :

$$(48) \quad \Pi_{\mathcal{D}} = \frac{\mu}{\rho \mathcal{D}} = Sc, \quad \Pi_{\mu} = \frac{\rho U_\infty x}{\mu} = Re_x, \quad \Pi_J = \frac{\hat{J}_Y}{\rho U_\infty x \llbracket Y \rrbracket}$$

Il existe une relation exprimant l'un d'eux en fonctions des deux autres :

$$(49) \quad \pi_J = -K_Y \Psi (Re_x, Sc)$$

La fonction  $\Psi$  obtenue semi-empiriquement, est généralement un produit de puissances, de sorte que la loi de comportement est :

$$(50) \quad \hat{J}_Y = -K_Y \rho U_\infty x \llbracket Y \rrbracket Re_x^a Sc^b$$

Les résultats théoriques et expérimentaux renseignent sur les valeurs de  $a$  et  $b$ .

laminaire	$a = -1/2$	$Sc \ll 1$	$b = -1/2$
turbulent	$-1/4 \leq a \leq 0$	$Sc \gg 1$	$b = -2/3$

Dans le cas laminaire et Schmidt petit, on peut calculer exactement  $K_Y$  qui vaut  $\sqrt{4/\pi}$ . Le système en  $J_Y$  à résoudre est le suivant :

$$(51) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{J}_Y}{\partial x} + \llbracket J_{Yx} \rrbracket &= \hat{W}_Y \\ \hat{J}_Y &= -K_Y \rho U_\infty x \llbracket Y \rrbracket Re_x^a Sc^b \\ \llbracket Y \rrbracket &= Y_+ - Y_- \end{aligned}$$

## Intérêt de la méthode interfaciale

L'obtention de lois complémentaires avec la mise en évidence de paramètres  $L_F$  et  $K_F$  tels que

$$\hat{p}_F = L_F \llbracket f \rrbracket \text{ et } \hat{J}_F = K_F \llbracket f \rrbracket$$

permet de résoudre le système en variables de surface, sans passer par la connaissance 'exacte' de la couche interfaciale. Les résultats obtenus redonnent ceux des méthodes classiques. On peut penser qu'elle restera valable dans des situations plus complexes.  $K_F$  et  $L_F$  ayant été recherchés par ailleurs par le calcul ou l'expérience, pour une classe de problèmes donnée, le système en variables de surface pourra être traité directement.

Cette approche s'inspire de celle utilisée en mécanique des milieux continus classiques où les coefficients de transfert intervenant dans les lois de comportement volumiques sont calculés par la théorie moléculaire.

## Bibliographie

- [1] R. Prud'homme, F. Baillet, D. Durox, Modélisation interfaciale des flammes minces. Journées de Mécanique Théorique et Appliquée, numéro spécial, 1986.
- [2] I. Prigogine, *Introduction to thermodynamics of irreversible Processes*. 2nd ed. Interscience Publishers. J. Wiley, 1961.
- [3] F. Williams, *Combustion theory*, 2nd ed., Benjamin/Cumming Publ. Cy. Inc., 1985.