



HAL
open science

Méthode approchée de calcul des écoulements relaxés

Roger Prud'Homme

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme. Méthode approchée de calcul des écoulements relaxés. Entropie: thermodynamique – énergie – environnement – économie, 1965, 5, pp.21-34. hal-02270446

HAL Id: hal-02270446

<https://hal.science/hal-02270446v1>

Submitted on 6 Apr 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode approchée de calcul des écoulements relaxés

R. PRUD'HOMME
Ingénieur ENICA
Licencié ès sciences
Ingénieur à l'ONERA

On donne une méthode de calcul des écoulements relaxés pour un mélange gazeux composé d'une molécule diatomique et des atomes issus de sa dissociation. Ensuite sont indiquées les principales formules utilisées pour l'application de la méthode au cas d'un mélange comportant un nombre quelconque d'espèces et de réactions chimiques. Des résultats de calcul concernant l'hydrogène sont donnés, montrant l'évolution en écoulement relaxé des principaux paramètres et des fonctions entrant dans la méthode proposée.

A method is given for calculating the free flow of gaseous mixtures consisting of a diatomic molecule together with atoms generated by its dissociation. Following this, the principal formulas are given for use in applying the method to a mixture consisting of a given number of chemical species and reactions. Computation results are provided for hydrogen, showing the tendency toward free flow of the principal parameters and functions involved in the suggested method.

Es wird ein Verfahren zur Berechnung der relaxierten Strömungen bei einem Gasgemisch beschrieben, welches aus einer zweiatomigen Molekel und den durch deren Dissoziation entstehenden Atomen besteht. Dann werden die wichtigsten Formeln angegeben, die zur Anwendung des Berechnungsverfahrens bei einem aus irgendeiner Anzahl chemischer Gattungen und Reaktionen zusammengesetzten Gasgemisch gebraucht werden. Es werden Berechnungsergebnisse für Wasserstoff mitgeteilt, die die Entwicklung der hauptsächlichsten im vorgeschlagenen Verfahren eingesetzten Parameter und Funktionen zu einer relaxierten Strömung nachweisen.

Se describe un método de cálculo de los flujos liberados, para una mezcla gaseosa compuesta por una molécula diatómica y los átomos formados por su disociación. A continuación se especifican las fórmulas principales utilizadas para la aplicación del método para una mezcla conteniendo un número cualquiera de especies y reacciones químicas. Finalmente se indican los resultados de cálculos relativos al hidrógeno, los cuales muestran la evolución en flujo liberado de los principales parámetros y de las funciones contenidas en el método propuesto.

1 PRÉAMBULE

Le calcul des performances d'un moteur de fusée peut se faire de différentes manières suivant les hypothèses admises a priori.

Des méthodes très simples ont déjà été appliquées : ainsi connaissant par exemple, la température, la pression et la composition du mélange gazeux au niveau du foyer, les impulsions spécifiques et les vitesses caractéristiques ont été calculées pour une tuyère donnée en supposant l'écoulement isentropique, la composition chimique restant invariable. Cet écoulement appelé « figé » est très facile à analyser. De même, des écoulements ont été déterminés en supposant que les différentes espèces composantes du mélange gazeux réagissaient entre elles, la composition étant en tout point celle de l'équilibre chimique, l'entropie étant toujours constante. Ce type d'écoulement est appelé évolution avec équilibre de composition ou plus simplement écoulement en équilibre. La détermination des conditions au col de la tuyère, où la vitesse de l'écoulement est supposée égale à celle du son, est le seul calcul un peu délicat.

Cependant les performances ainsi obtenues sont ou trop pessimistes pour l'écoulement figé, ou optimistes pour l'écoulement en équilibre dans la plupart des cas, la réalité se situant entre les deux. Cela est dû

à de nombreux phénomènes qui sont ignorés lorsque nous faisons l'une des deux hypothèses précédentes.

Ainsi, l'écoulement est supposé unidimensionnel, et on fait abstraction des phénomènes dus à l'existence d'une couche limite, des transferts de chaleur, des vitesses des réactions chimiques, des vitesses de vibration des molécules.

En particulier, dans les ordres de température envisagés, les phénomènes de relaxation chimique prennent de l'importance. C'est à leur étude que nous nous limiterons ici.

En fait les phénomènes de relaxation ne sont pas importants partout le long de la tuyère [1].

Nous distinguons trois zones dans un écoulement : tout d'abord dans le foyer et dans une bonne partie du convergent, l'écoulement est pratiquement en équilibre, ensuite apparaît une zone de relaxation chimique plus ou moins étendue et pouvant comprendre le col, et enfin, l'écoulement devient figé dans le divergent et jusqu'à la section de sortie.

BRAY [2] suppose que la zone de relaxation est extrêmement réduite, l'évolution en équilibre se figeant soudain, le point de figeage étant déterminé par un critère portant sur les vitesses de dissociation et de recombinaison. Cela permet de remplacer l'évolution réelle par la succession de deux écoulements, l'un en équilibre et l'autre figé. Par sa conception

même, la méthode de BRAY ignore toute variation d'entropie due aux réactions chimiques.

Pour notre part, nous nous proposons, au contraire, de calculer le plus exactement possible l'écoulement en supposant que les phénomènes de relaxation interviennent tout le long de la tuyère avec plus ou moins d'intensité. Dans un problème de ce type, nous nous heurtons à certaines difficultés, en particulier, si pour l'écoulement figé et l'écoulement en équilibre les équations étaient simples puisque aucune équation différentielle n'intervenait, pour l'écoulement relaxé, au contraire, nous sommes en présence d'un système différentiel assez difficile à résoudre par intégration numérique, principalement dans la première zone où l'écoulement est près de l'équilibre. De plus les courbes solutions du système présentent un point singulier quelque part dans le divergent de la tuyère qu'il est impossible de déterminer exactement. Nous sommes donc amenés à faire des hypothèses restrictives et à utiliser une méthode approchée de calcul.

Notre but est donc de trouver une méthode approchée de calcul qui tienne compte au maximum des phénomènes de relaxation chimique et donne pour l'évaluation des performances d'un moteur de fusée, des résultats meilleurs que ceux de l'écoulement figé ou en équilibre.

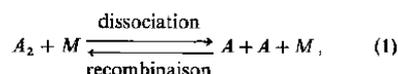
2 PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

A, A_2, M	Espèces en présence
$\Sigma_{(x)}$	Aire d'une section droite de tuyère
B	Paramètre sans dimension égal à $1 - \frac{nn_{A_2}}{pK_{A_2}n_A^2}$
B_c	Nombre constant
C_{pA}, C_{pA_2}	Chaleur spécifique molaire à pression constante des espèces respectives A et A_2
C_{pF}	Chaleur spécifique par unité de masse du mélange à pression et composition constantes
$f(i)$	Fonction caractérisant une évolution (i)
h	Enthalpie massique
H_T^0	Enthalpie molaire standard
k_D, k_R	Vitesses spécifiques de dissociation et de recombinaison respectivement
K_{A_2}	Constante d'équilibre des pressions
M_A, M_{A_2}	Enthalpies libres des espèces A et A_2
M_T^0	Enthalpie libre standard molaire
n_A, n_{A_2}	Nombres de moles respectifs des espèces A et A_2 contenus dans l'unité de masse du mélange
n	Nombre total de moles par unité de masse du mélange
\dot{m}	Débit massique
p	Pression statique
Q	Quantité de chaleur

R	Constante des gaz parfaits
S_T^0	Entropie molaire standard
s	Entropie massique du mélange
T	Température absolue statique
t	Temps
V	Vitesse mécanique de l'écoulement
W_A	Masse atomique de A
x	Abscisse d'une section droite de tuyère
ρ	Masse volumique du mélange
*	Exposant indiquant une matrice
ln	Indique le logarithme népérien
dét.	Indique le déterminant d'une matrice carrée
t	Exposant indiquant la transposition d'une matrice
-1	Exposant désignant l'inverse d'une matrice ou d'un opérateur
(i)	Indice désignant une évolution de la famille (i)
e'	Indice se rapportant à un pseudo-équilibre
f'	Indice se rapportant à un pseudo-figé
e	Indice se rapportant à un écoulement en équilibre

3 MÉTHODE DE CALCUL DES ÉCOULEMENTS AVEC RELAXATION CHIMIQUE

L'étude que nous nous proposons de faire porte sur un écoulement gazeux dans une tuyère de révolution. Le mélange gazeux envisagé est composé de molécules diatomiques A_2 et des atomes A obtenus par dissociation des molécules A_2 , les réactions de dissociation et de recombinaison qui ont lieu étant du type :



l'espèce M pouvant être une molécule A_2 ou un atome A ou encore une espèce neutre ne participant pas à la réaction.

Le mélange gazeux est supposé obéir à la loi des mélanges de gaz parfaits; il est issu d'un foyer où les gaz sont supposés au repos et l'écoulement qui suit s'effectue sans échange de chaleur avec le milieu extérieur. Enfin, le phénomène sera supposé unidimensionnel, c'est-à-dire qu'en un point quelconque d'une section droite de la tuyère d'abscisse x et d'aire $\Sigma_{(x)}$, toutes les variables thermodynamiques, ainsi que la composition du mélange gazeux, seront supposées être les mêmes.

3.1 Étude cinétique des phénomènes chimiques

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier ce qui est à l'origine de la relaxation chimique, c'est-à-dire les vitesses des réactions. La cinétique

chimique classique [3] nous enseigne qu'à volume constant, la vitesse d'apparition de l'espèce A dans les deux réactions (1) est la suivante :

$$\frac{d\rho n_A}{dt} = 2[k_D \rho n_{A_2} - k_R (\rho n_A)^2] \rho n, \quad (2)$$

à condition de supposer que les vitesses spécifiques de recombinaison k_R , et par conséquent les vitesses spécifiques de dissociation k_D , sont les mêmes en présence de l'espèce A_2 ou de l'espèce A .

Cette égalité, qui fait intervenir la masse volumique ρ , les compositions en nombre de moles par unités de masse n_A et n_{A_2} , le nombre de moles total par unité de masse n et le temps t , peut être remplacée par la suivante dans le cas d'une évolution dynamique à débit massique constant telle que celle que nous envisageons :

$$V \frac{dn_A}{dx} = 2(k_D n_{A_2} - k_R \rho n_A^2) \rho n, \quad (3)$$

où le temps n'intervient plus explicitement, mais où l'abscisse x et la vitesse V de l'écoulement apparaissent. Nous remarquons que si la forme de l'équation (3) est bien définie, il n'en est pas de même des fonctions k_R et k_D de la température T ; et c'est là un premier problème posé par l'étude des écoulements relaxés. Plusieurs théories donnent le moyen de déterminer les vitesses spécifiques k_R et k_D . Ainsi, la théorie des collisions [4, 5], ou celle du complexe activé [6] aboutissent à des expressions de la forme :

$$k = a e^{-E/RT}, \quad (4)$$

pour k_R et k_D ; dans cette expression, E est l'énergie d'activation de la réaction, R est la constante des gaz parfaits, T , la température absolue et a le facteur d'Arrhénius, fonction de la température et dont l'expression généralement admise est de la forme :

$$a = \bar{A} T^{-\bar{s}}, \quad (5)$$

les constantes \bar{A} et \bar{s} différant suivant les auteurs.

Nous n'entrerons pas ici dans le détail de ces diverses théories, nous retiendrons simplement qu'il n'est pas rare qu'une vitesse spécifique soit définie à un facteur multiplicatif 100 près.

A titre d'exemple, la figure 1 montre l'évolution de la vitesse spécifique de recombinaison de l'hydrogène telle que la donnent divers auteurs.

Dans nos calculs, nous utiliserons des valeurs moyennes mais nous ne connaissons pas actuellement l'influence des erreurs commises sur k_R et k_D sur l'écoulement relaxé.

3.2 Équations générales

3.2.1 Équations de composition chimique

Les relations suivantes, faisant intervenir les compositions et la masse atomique W_A de l'élément A , sont évidentes :

$$n = n_A + n_{A_2} \quad (\text{conservation des espèces}), \quad (6)$$

$$1/W_A = n_A + 2n_{A_2} \quad (\text{conservation de la masse}). \quad (7)$$

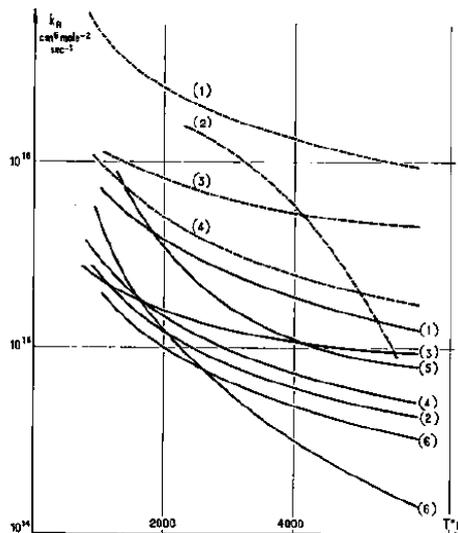
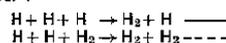


Fig. 1 Vitesses spécifiques de réaction en fonction de la température pour :



d'après les formules données par différents auteurs. (1) Patch, (2) Sutton, (3) Eschenroeder, (4) Rink, (5) Gardiner, (6) Westenberg.

Une troisième relation lie les compositions, la température T et la pression p , dans le cas de l'équilibre chimique : c'est la loi d'action de masses où intervient la constante d'équilibre des pressions K_{A_2} :

$$\frac{n \cdot n_{A_2}}{n_A^2} = p K_{A_2}, \quad (8)$$

dans le cas de l'écoulement relaxé nous écrivons par analogie :

$$\frac{n \cdot n_{A_2}}{n_A^2} = p K_{A_2} (1 - B), \quad (9)$$

relation qui fait intervenir le paramètre adimensionnel B que nous exprimerons, dans ce qui suit, en fonction de la vitesse de réaction.

3.2.2 Équation donnée par la cinétique chimique

En tenant compte de la relation d'équilibre

$$\frac{k_R}{k_D RT} = K_{A_2},$$

et en posant :

$$\Lambda = - \frac{V}{2\rho^2 k_R n \cdot n_A^2}, \quad (10)$$

la vitesse d'apparition de l'espèce A s'écrit finalement :

$$\frac{dn_A}{dx} = \frac{B}{\Lambda}. \quad (11)$$

3.2.3 Conservation du débit

Le débit massique \dot{m} se conserve lors de l'écoulement, d'où :

$$\rho V = \frac{\dot{m}}{\Sigma(x)} \quad (12)$$

3.2.4 Conservation de l'énergie

Pour un écoulement adiabatique, la conservation de l'énergie s'exprime par une relation entre l'enthalpie massique h en un point de l'écoulement, la vitesse V et l'enthalpie massique dans le foyer; on obtient :

$$h_0 = h + \frac{1}{2} V^2 \quad (13)$$

L'expression de l'enthalpie massique h étant la suivante :

$$h = n_A(H_T^0)_A + n_{A_2}(H_T^0)_{A_2} \quad (14)$$

$(H_T^0)_A$ et $(H_T^0)_{A_2}$ étant les enthalpies molaires standard respectives des espèces A et A_2 .

3.2.5 Adiabaticité

La tuyère joue le rôle d'une paroi adiabatique; en écoulement permanent, la conservation de la quantité de chaleur Q se réduit à :

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (15)$$

Dans ces conditions, la formule de GIBBS [7], donnant la variation élémentaire de l'entropie massique, prend la forme suivante :

$$\frac{ds}{dx} = -R \left(M_A \frac{dn_A}{dx} + M_{A_2} \frac{dn_{A_2}}{dx} \right) \quad (16)$$

Les enthalpies libres M_A et M_{A_2} s'expriment en fonction des enthalpies libres standard au moyen des égalités suivantes :

$$\begin{cases} M_A = (M_T^0)_A - \ln \frac{n_A}{n} p, \\ M_{A_2} = (M_T^0)_{A_2} - \ln \frac{n_{A_2}}{n} p. \end{cases} \quad (17)$$

Compte tenu des équations (7) et (9) ainsi que de la relation :

$$\ln K_{A_2} = 2(M_T^0)_A - (M_T^0)_{A_2} \quad (18)$$

nous obtenons finalement :

$$\frac{ds}{dx} = \frac{R}{2} \ln(1-B) \frac{dn_A}{dx} \quad (19)$$

Pour compléter l'équation (19), nous donnons maintenant l'expression de l'entropie massique du mélange :

$$s = n_A(S_T^0)_A + n_{A_2}(S_T^0)_{A_2} - R \left(n_A \ln \frac{n_A}{n} + n_{A_2} \ln \frac{n_{A_2}}{n} + n \ln p \right) \quad (19')$$

$(S_T^0)_A$ et $(S_T^0)_{A_2}$ étant les entropies molaires standard de A et de A_2 .

3.3 Étude du système définissant l'écoulement relaxé

La suite d'équations indépendantes suivantes résume les résultats précédents et définit complètement l'écoulement relaxé :

$$a) \quad n = n_A + n_{A_2} \quad (20)$$

$$b) \quad \frac{1}{W_A} = n_A + 2n_{A_2}$$

$$c) \quad \frac{n n_{A_2}}{n_A^2} = p K_{A_2} (1-B)$$

$$d) \quad B = \Lambda \frac{dn_A}{dx}$$

$$e) \quad \Lambda = - \frac{V}{2\rho^2 k_R n n_A^2}$$

$$f) \quad \rho V = \frac{\dot{m}}{\Sigma(x)}$$

$$g) \quad h = n_A(H_T^0)_A + n_{A_2}(H_T^0)_{A_2}$$

$$h) \quad h_0 = h + \frac{1}{2} V^2$$

$$i) \quad \frac{p}{\rho} = nRT$$

$$j) \quad s = n_A(S_T^0)_A + n_{A_2}(S_T^0)_{A_2} - R \left(n_A \ln \frac{n_A}{n} + n_{A_2} \ln \frac{n_{A_2}}{n} + n \ln p \right)$$

$$k) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{R}{2} \ln(1-B) \frac{dn_A}{dx}$$

3.3.1 Élimination des variables ρ et V

Les équations $g)$ et $h)$ donnent pour la vitesse V l'expression suivante :

$$V = \sqrt{2(h_0 - (H_T^0)_A n_A - (H_T^0)_{A_2} n_{A_2})} \quad (21)$$

Lorsque nous écrivons V dans les équations qui suivent, il est entendu qu'il s'agit de l'expression (21) où V est donné en fonction de la température T et des compositions.

Dans ces conditions, le système (20) se réduit, après élimination de ρ et V , aux trois équations suivantes :

$$C_{nf} \frac{d \ln T}{dx} - Rn \frac{d \ln p}{dx} + \frac{H}{T} \frac{dn_A}{dx} = 0 \quad (22)$$

$$\left(1 + \frac{TC_{pf}}{V_2} \right) \frac{d \ln T}{dx} - \frac{d \ln p}{dx} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V_2} \right) \frac{dn_A}{dx} = \frac{d \ln \Sigma}{dx} \quad (23)$$

$$\frac{B}{\Lambda} = \frac{dn_A}{dx} \quad (24)$$

auxquelles il faut ajouter les équations c) et e) qui définissent B, et les égalités de définitions qui suivent :

$$H = (H_T^0)_A - \frac{1}{2}(H_T^0)_{A_2}, \quad (25)$$

et

$$C_{p_f} = n_A C_{p_A} + n_{A_2} C_{p_{A_2}}, \quad (26)$$

où C_{p_A} et $C_{p_{A_2}}$ représentent les chaleurs spécifiques à pression constante de A et de A_2 . C_{p_f} sera appelée chaleur spécifique à compositions et pression constantes ou plus simplement chaleur spécifique figée.

Des équations (22), (23) et (24) nous déduisons les équations et systèmes d'équations suivants dans lesquels la matrice ω^* est la suivante :

$$\omega^* = \begin{bmatrix} C_{p_f} & -Rn \\ 1 + \frac{TC_{p_f}}{V^2} & -1 \end{bmatrix}; \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^* \begin{bmatrix} \frac{d \ln T}{dx} \\ \frac{d \ln p}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{H}{T} \frac{dn_A}{dx} \\ -\left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2}\right) \frac{dn_A}{dx} + \frac{d \ln \Sigma}{dx} \end{bmatrix}, \\ \frac{dn_A}{dx} = \frac{B}{\Lambda}, \end{array} \right. \quad (28)$$

qui est un système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^* \begin{bmatrix} d \ln T \\ d \ln p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{H}{T} dn_A \\ -\left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2}\right) dn_A + d \ln \Sigma \end{bmatrix}, \\ dn_A = \frac{B}{\Lambda} dx, \end{array} \right. \quad (29)$$

système d'équations liant des formes différentielles, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^* \begin{bmatrix} \Delta \ln T \\ \Delta \ln p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{H}{T} \Delta n_A \\ -\left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2}\right) \Delta n_A + \Delta \ln \Sigma \end{bmatrix}, \\ \Delta n_A = \frac{B}{\Lambda} \Delta x, \end{array} \right. \quad (30)$$

Système d'équations, liant au second ordre près, les variations $\Delta \ln T$, $\Delta \ln p$, Δn_A et Δx , et que nous utiliserons dans une méthode approchée de calcul.

3.3.2 Étude générale

Les équations f) et i) permettent d'exprimer la pression p en fonction de la température T, de l'abscisse

x et des compositions, si bien que B/Λ peut être considéré comme une fonction de ces variables :

$$\frac{B}{\Lambda} = -\frac{2\rho^2 k_R n n_A^2}{V} \left[1 - \frac{n n_{A_2}}{p K_{A_2} n_A^2} \right], \quad (31)$$

et après élimination de dp/dx, le système (28) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(\omega_{(n_A, T)}^*) \frac{d \ln T}{dx} = Rn \frac{d \ln \Sigma}{dx} - \left[\frac{H}{T} \left(\frac{nRT}{V^2} - 1 \right) + \frac{R}{2} \right] \left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(n_A, T, x)}, \\ \frac{dn_A}{dx} = \left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(n_A, T, x)}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Lorsque la quantité $\det(\omega^*)$ est non nulle, ce système satisfait aux conditions de LIPSCHITZ [8] et admet donc une seule solution $(T(x), n_{A(x)})$ si l'on s'est fixé deux conditions initiales $T_0 = T(x_0)$ et $n_{A_0} = n_{A(x_0)}$ par exemple.

Les calculs prouvent qu'il existe un point de la tuyère que nous noterons F où $\det(\omega^*)$ s'annule; cela entraîne en général que dT/dx est infini. Le point F se situe en aval du col géométrique.

Nous admettons que l'écoulement réel permanent ne comprend aucun point où le gradient de température est nul ou infini, cela exige donc qu'au point F les conditions suivantes soient vérifiées simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(\omega^*) = 0, \\ Rn \frac{d \ln \Sigma}{dx} - \left[\frac{H}{T} \left(\frac{nRT}{V^2} - 1 \right) + \frac{R}{2} \right] \frac{B}{\Lambda} = 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

Ces conditions peuvent s'interpréter de diverses manières. Ainsi WESTENBERG [9] considère le débit m comme une inconnue a priori, la valeur propre du débit satisfaisant aux conditions (33) pouvant être déterminée par approximation. Dans ce qui suit, nous admettons que le débit m est choisi a priori et est voisin du débit réel et nous verrons comment il est possible de résoudre le problème dans le cas où l'écoulement est voisin d'un écoulement en équilibre dans le convergent.

3.3.3 Étude de la stabilité du système linéarisé

Bien que les méthodes de linéarisation soient contestables dans un cas tout à fait général, l'étude de la stabilité du système linéarisé donne, dans notre cas, des indications qui sont bien vérifiées par le calcul.

Nous supposons donc connu un écoulement relaxé et en un point d'abscisse x_1 nous provoquons les écarts suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{T}_1 = \ln T'_1 - \ln T_1, \\ \bar{p}_1 = \ln p'_1 - \ln p_1, \\ \bar{n}_{A_1} = n'_{A_1} - n_{A_1}. \end{array} \right. \quad (34)$$

et nous nous proposons de suivre les variations des

écarts \bar{T} , \bar{p} et \bar{n}_A , qui différentient le système perturbé de température T' , de pression p' et de composition n'_A de l'écoulement relaxé donné de température T , pression p et composition n_A . Nous noterons \bar{x} la différence $x - x_1$. Enfin nous tirerons des conclusions quant à la stabilité du système linéarisé.

Le système (28) linéarisé s'écrit :

$$\begin{cases} C_{p_f} \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} - Rn \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + \frac{H}{T} \frac{d\bar{n}_A}{d\bar{x}} = 0, \\ \left(1 + \frac{TC_{p_f}}{V^2} \right) \frac{d\bar{T}}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + \left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2} \right) \frac{d\bar{n}_A}{d\bar{x}} = 0, \\ \Lambda \frac{pK_{A_2} n_A^2}{n n_{A_2}} \frac{d\bar{n}_A}{d\bar{x}} + \frac{2H}{RT} T - \bar{p} - \frac{1}{2\pi} n_A = 0, \end{cases} \quad (35)$$

π étant égal à $W_A^2 n n_A n_{A_2}$.

En définissant les matrices suivantes :

$$\begin{cases} \bar{X}^* = \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \bar{p} \\ \bar{n}_A \end{bmatrix}, \\ A^* = \begin{bmatrix} C_{p_f} & -Rn & \frac{H}{T} \\ 1 + \frac{TC_{p_f}}{V^2} & -1 & \frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2} \\ 0 & 0 & \Lambda \frac{pn_A^2 K_{A_2}}{n n_{A_2}} \end{bmatrix}, \\ C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2H}{RT} & -1 & -\frac{1}{2\pi} \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (36)$$

nous obtenons l'équation matricielle à coefficients constants suivante :

$$A^* \frac{d\bar{X}^*}{d\bar{x}} + C^* \bar{X}^* = 0, \quad (37)$$

Cette équation différentielle admet la solution générale suivante :

$$\bar{X}^* = a_1 X_1^* + a_2 X_2^* + a_3 X_3^* e^{-\lambda \bar{x}}, \quad (38)$$

où les coefficients constants a_1 , a_2 et a_3 sont fixés par l'écart initial.

X_1^* et X_2^* sont des matrices colonnes associées à deux vecteurs fixes indépendants perpendiculaires au vecteur de composantes :

$$\frac{2H}{RT}, -1, -\frac{1}{2\pi};$$

X_3^* est la matrice colonne :

$$X_3^* = \begin{bmatrix} Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ les quantités } Y \text{ et } Z \text{ étant définies par les}$$

égalités :

$$\begin{cases} Y = -\frac{H \left(\frac{nRT}{V^2} - 1 \right) + \frac{R}{2}}{\det(\omega^*)}, \\ Z = \frac{H - C_{p_f}}{T} \frac{1}{2n}, \end{cases} \quad (39)$$

λ est la seule valeur propre non nulle de l'équation caractéristique associée au système (37); elle a pour expression :

$$\lambda = \frac{1}{2\pi\Lambda} \frac{n n_{A_2}}{p K_{A_2} n_A^2} \frac{\det(\Omega^*)}{\det(\omega^*)}, \quad (40)$$

où Ω^* est la matrice suivante :

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} C_{p_f} & -\frac{2\pi H}{T} & -\frac{2\pi H}{T} - nR \\ -\frac{2H}{RT} & -1 & 0 \\ 1 + \frac{TC_{p_f}}{V^2} & -\pi \left(\frac{1}{n} + \frac{2H}{V^2} \right) & -1 - \pi \left(\frac{1}{n} + \frac{2H}{V^2} \right) \end{bmatrix} \quad (41)$$

dont nous verrons plus loin la signification précise. Les calculs effectués pour l'hydrogène montrent que $\det(\Omega^*)$ s'annule en un point E situé en amont du col géométrique et reste négatif en amont de E et positif en aval de E. λ est donc négatif entre les points E et F et positif ailleurs.

Lorsque λ est négatif, le système est instable; lorsque λ est positif, les deux éventualités suivantes peuvent ne produire :

1° a_1 et a_2 ne sont pas tous deux nuls, lorsque \bar{x} devient infini, l'écart \bar{X}^* tend vers $a_1 X_1^* + a_2 X_2^*$ matrice colonne non nulle. Le nouvel écoulement ne rejoint pas l'écoulement initial mais se stabilise sur une nouvelle évolution.

2° $a_1 = a_2 = 0$.

Lorsque \bar{x} devient infini, tous les écarts tendent vers zéro; il y a stabilité. La stabilité de l'oscillateur linéaire associé aux équations de l'écoulement relaxé a donc lieu lorsque λ est positif et lorsque les écarts initiaux sont proportionnels respectivement à Y pour \bar{T}_1 , à Z pour \bar{p}_1 et à l'unité pour \bar{n}_A .

Cette dernière conclusion est importante pour la méthode que nous allons exposer, car les écarts satisfaisant aux relations de proportionnalité précédentes sont précisément ceux qui sont rendus possibles lors des erreurs éventuelles du premier ordre que peut introduire notre méthode de calcul.

Nous voyons donc qu'une étude sommaire de la stabilité du système linéarisé peut quand même donner des renseignements intéressants au sujet du système réel.

Nous voyons que le point E, défini dans l'étude de la stabilité, est tel que $(pV)_c$ y est maximum et nous l'appellerons pour cette raison *col du pseudo-équilibre*.

Nous constatons d'autre part que, en faisant $B_c = 0$ dans les équations (50), (51) et (52), le pseudo-équilibre devient une évolution en équilibre, s'étant l'entropie; si nous voulons adapter cet équilibre à la tuyère, le débit \dot{m} ne sera pas quelconque mais défini par la condition de vitesse du son au col géométrique. Il en sera de même si nous voulons adapter le pseudo-équilibre à la tuyère. Mais dans ce qui suit nous n'avons pas à nous préoccuper de cette question, car le débit choisi sera celui de l'écoulement relaxé et nous n'avons pas à considérer un pseudo-équilibre pour toute la tuyère mais une série de pseudo-équilibres utilisés dans des intervalles de petite longueur Δx .

Nous allons maintenant donner les expressions des corrections qui satisfont à l'équation matricielle (48). Nous obtenons, en posant $B_c = B_{(x_1)}$, les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} (\Delta \ln T)_c^{e1} = Y \cdot \left[\left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{c'(x_1)} \right] \Delta x, \\ (\Delta \ln p)_c^{e1} = Z \cdot \left[\left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{c'(x_1)} \right] \Delta x, \\ (\Delta n_A)_c^{e1} = \left[\left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{c'(x_1)} \right] \Delta x, \end{cases} \quad (53)$$

où Y et Z sont définis par les égalités (39).

Les égalités (47) nous donnent enfin les valeurs de T, p et n_A à l'abscisse $x_1 + \Delta x$.

En fait le calcul du pseudo-équilibre est plus facile en se fixant une température qu'une abscisse, si bien que nous ne nous donnerons pas $x_1 + \Delta x$ mais plutôt $T_c(x_1 + \Delta x)$ que nous écrirons :

$$T_c(x_1 + \Delta x) = T(x_1) - \Delta T. \quad (54)$$

Cette remarque ne modifie en rien notre méthode.

Enfin le système (53) montre qu'en vertu de l'égalité (38), une erreur sur la valeur

$$\left[\left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{c'(x_1)} \right] \Delta x$$

a peu d'importance puisque l'écoulement relaxé est stable vis-à-vis de tels écarts.

3.4.2 Utilisation pratique de la méthode des corrections avec pseudo-équilibre

Deux problèmes se posent :

1° Si nous nous fixons le débit massique \dot{m} et les conditions initiales, l'évolution obtenue ne correspondra pas en général à un écoulement réel.

2° Pour appliquer la méthode des corrections, il faut au moins connaître les conditions réelles en un point d'abscisse x.

Ces deux problèmes vont nous obliger à faire des hypothèses restrictives qui limiteront le domaine d'application de notre méthode.

a) Première hypothèse

Nous admettons qu'entre le foyer et le col géométrique de la tuyère l'écoulement réel est voisin de l'écoulement en équilibre. Cela signifie que l'équation (43) doit être vérifiée au second ordre près par les valeurs de l'équilibre, c'est-à-dire que nous devons avoir :

$$\left(\frac{n n_{A_2}}{p K_{A_2} n_{A_1}^2} \right)_c - 1 + \Lambda_c \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_c = 0, \quad (55)$$

ou compte tenu de l'équation (8) :

$$\Lambda_c \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_c \simeq 0. \quad (56)$$

Alors seulement nous pourrions admettre que l'écoulement en équilibre constitue une bonne approximation de l'écoulement relaxé. Pour préciser l'équation (56), nous écrivons que dans le convergent de tuyère l'inégalité suivante doit être vérifiée :

$$\Lambda_c \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_c < \varepsilon, \quad (57)$$

où ε est un nombre positif donné à l'avance et toujours très inférieur à l'unité.

Comme

$$\Lambda_c \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_c$$

est une fonction croissante de l'abscisse x, il suffira donc que l'inégalité (57) soit vérifiée au col.

Dans ces conditions, nous admettrons que l'on peut choisir comme débit massique \dot{m} la valeur \dot{m}_c du débit massique de l'écoulement en équilibre adapté à la tuyère donnée. Cette première hypothèse restrictive est satisfaite lorsque la température T dans le convergent est suffisamment élevée pour que l'équilibre chimique y soit pratiquement réalisé.

Remarquons que le premier membre de l'inégalité (57) est analogue à celui utilisé dans le critère de BRAY [2]. Cependant, lorsque l'inégalité (57) est réalisée avec ε voisin de l'unité et même parfois égal à 2, BRAY admet que l'équilibre chimique a lieu et que l'écoulement devient figé lorsque

$$\Lambda_c \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_c$$

devient supérieur à la valeur ε choisie.

Notre méthode diffère donc sensiblement de celle proposée par BRAY.

b) Seconde hypothèse

Pour résoudre le second problème, il est nécessaire de connaître, à l'entrée de la tuyère, les conditions réelles.

Or seules nous sont données les conditions dans le foyer où nous admettrons que l'équilibre thermodynamique est rigoureusement réalisé à vitesse nulle. Pour exprimer notre seconde hypothèse, nous allons revenir aux équations de base de l'écoulement relaxé.

3.4 La méthode des corrections

La forme particulière de l'équation matricielle du système (28) va nous permettre d'envisager une famille d'évolutions le long de la tuyère. En effet, nous pouvons considérer l'ensemble des évolutions satisfaisant à l'équation matricielle du système (28), la seconde équation :

$$\frac{dn_A}{dx} = \frac{B}{\Lambda}$$

étant remplacée par une relation du type :

$$f(i) \left(T, p, n_A, \frac{d \ln T}{dx}, \frac{d \ln p}{dx}, \frac{dn_A}{dx}, x \right) = 0, \quad (42)$$

l'indice i désignant l'évolution considérée.

L'écoulement relaxé fait partie de la famille d'évolutions (i) , la fonction $f(i)$ ayant une forme particulière f_{rel} ; la relation (42) devient :

$$f_{rel} = \frac{nn_{A_2}}{pK_{A_2}n_A^2} - 1 + \Lambda \frac{dn_A}{dx} = 0, \quad (43)$$

Ainsi une évolution (i) sera caractérisée par les deux équations suivantes :

$$\omega^* \begin{bmatrix} \frac{d \ln T_{(i)}}{dx} \\ \frac{d \ln p_{(i)}}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{H}{T} \frac{dn_{A(i)}}{dx} \\ -\left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2}\right) \frac{dn_{A(i)}}{dx} + \frac{d \ln \Sigma}{dx} \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$f_i \left(T, p, n_A, \frac{d \ln T}{dx}, \frac{d \ln p}{dx}, \frac{dn_A}{dx}, x \right) = 0, \quad (45)$$

et nous supposons en outre qu'elle satisfait aux équations du système (20), sauf en général les équations $c)$ $d)$ $e)$ et $k)$ qui sont particulières à l'écoulement relaxé.

Nous nous proposons d'utiliser une évolution (i) dans le calcul de l'écoulement relaxé entre les abscisses x_1 et $x_1 + \Delta x$.

Pour cela, supposons qu'à l'abscisse x_1 , les température, pression et compositions soient les mêmes pour les deux écoulements; alors les dérivées sont différentes et un calcul limité au premier ordre des variations $\Delta \ln T$, $\Delta \ln p$ et Δn_A donnera des valeurs différentes de T , p et n_A à l'abscisse $x_1 + \Delta x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{En posant : } (\Delta \ln T)_{(i)}^{rel} = (\Delta \ln T)_{rel} - (\Delta \ln T)_{(i)}, \\ (\Delta \ln p)_{(i)}^{rel} = (\Delta \ln p)_{rel} - (\Delta \ln p)_{(i)}, \\ (\Delta n_A)_{(i)}^{rel} = (\Delta n_A)_{rel} - (\Delta n_A)_{(i)}, \end{array} \right. \quad (46)$$

Les valeurs en $x_1 + \Delta x$ seront les suivantes au second ordre près :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{rel}(x_1 + \Delta x) = T_{(i)}(x_1 + \Delta x) + T_{rel}(x_1)(\Delta \ln T)_{(i)}^{rel}, \\ p_{rel}(x_1 + \Delta x) = p_{(i)}(x_1 + \Delta x) + p_{rel}(x_1)(\Delta \ln p)_{(i)}^{rel}, \\ n_{A,rel}(x_1 + \Delta x) = n_{A(i)}(x_1 + \Delta x) + (\Delta n_A)_{(i)}^{rel}. \end{array} \right. \quad (47)$$

Dans ce qui suit, les premiers membres du système (46) seront appelés corrections. Les corrections vérifient donc l'égalité matricielle suivante au second ordre près :

$$\omega^* \begin{bmatrix} (\Delta \ln T)_{(i)}^{rel} \\ (\Delta \ln p)_{(i)}^{rel} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{H}{T} (\Delta n_A)_{(i)}^{rel} \\ -\left(\frac{1}{2n} + \frac{H}{V^2}\right) (\Delta n_A)_{(i)}^{rel} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Nous voyons donc que si nous savons calculer l'évolution (i) , nous aurons une approximation de l'écoulement relaxé en utilisant (47) et (48).

La question qui se pose maintenant est de déterminer l'évolution (i) qui soit la plus acceptable pour nos calculs.

Dans les paragraphes 2.4.1 et 2.4.3 nous proposons deux évolutions que nous allons étudier et que nous appelons respectivement «pseudo-équilibre» et «pseudo-figé». Les valeurs relatives à ces évolutions seront affectées respectivement des indices (e') et (f') .

L'avantage que présentent ces deux évolutions réside dans le fait que les systèmes différentiels qui leur sont associés possèdent des intégrales premières simples qui rendent leur calcul aussi aisé que les calculs d'écoulement en équilibre ou d'écoulement figé.

D'autre part, elles sont définies dans de larges zones de la tuyère et sont assez voisines de l'écoulement relaxé. Comme elles ne présentent pas de problèmes d'instabilité, nous disons qu'elles constituent un support stable à l'écoulement relaxé.

3.4.1 Pseudo-équilibre

Nous appellerons pseudo-équilibre une évolution (e') dont la fonction $f_{(e')}$ associée est la suivante :

$$f_{(e')} = \frac{nn_{A_2}}{pK_{A_2}n_A^2} - 1 + B_e = 0, \quad (49)$$

B_e étant un nombre constant pouvant être choisi entre 0 et 1. Une telle évolution possède les intégrales premières suivantes :

$$s' = n_A(S_T^0)_A + n_{A_2}(S_T^0)_{A_2} - R \left(n_A \ln \frac{n_A}{n} + n_{A_2} \ln \frac{n_{A_2}}{n} + n \ln p(1 - B_e) \right), \quad (50)$$

$$\dot{m} = \frac{pV}{nRT} \cdot \Sigma(x), \quad (51)$$

$$B_e = 1 - \frac{nn_{A_2}}{pK_{A_2}n_A^2}, \quad (52)$$

où s' , \dot{m} et B_e sont des constantes.

Les équations (50) et (52) permettent le calcul de toutes les fonctions thermodynamiques au moyen de la seule température T .

En particulier, il est possible de déterminer le maximum de l'impulsion $(pV)_{e'}$; nous constatons que ce maximum est atteint lorsque

$$\det(\Omega^*) = 0.$$

En effet, nous pouvons déduire du système (30) l'égalité matricielle suivante :

$$\Omega^* \begin{bmatrix} \Delta \ln T \\ \Delta \ln [K_{A_2}(1-B)] \\ \Delta \ln p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta B}{1-B} \\ \Delta \ln \Sigma \end{bmatrix}, \quad (58)$$

Ω^* étant la matrice définie par l'égalité (41).

Dans le cas du pseudo-équilibre nous trouvons une équation de la même forme :

$$\Omega^* \begin{bmatrix} (\Delta \ln T)_{e'} \\ (\Delta \ln [K_{A_2}(1-B)'])_{e'} \\ (\Delta \ln p)_{e'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta \ln \Sigma \end{bmatrix}, \quad (59)$$

par soustraction membre à membre de (58) et (59) nous déduisons l'équation suivante, à condition de supposer qu'au point d'abscisse x_1 considéré les valeurs sont choisies comme dans le paragraphe 3.4.1 :

$$\Omega^* \begin{bmatrix} (\Delta \ln T)_{e'}^{e1} \\ (\Delta \ln [K_{A_2}(1-B)'])_{e'}^{e1} \\ (\Delta \ln p)_{e'}^{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta B}{1-B} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (60)$$

L'égalité (60) nous permet de calculer les corrections de température et de pression au moyen de la variation du paramètre B et indépendamment de l'abscisse x .

Nous obtenons finalement les expressions suivantes pour les corrections :

$$\begin{cases} (\Delta \ln T)_{e'}^{e1} = -2\pi \frac{\det(\omega^*)}{\det(\Omega^*)} Y \frac{\Delta B}{1-B}, \\ (\Delta \ln p)_{e'}^{e1} = -2\pi \frac{\det(\omega^*)}{\det(\Omega^*)} Z \frac{\Delta B}{1-B}, \\ (\Delta n_A)_{e'}^{e1} = -2\pi \frac{\det(\omega^*)}{\det(\Omega^*)} \frac{\Delta B}{1-B}. \end{cases} \quad (61)$$

Notre seconde hypothèse consiste à admettre qu'entre le foyer et un point voisin de l'entrée de tuyère d'abscisse x_1 , les valeurs de B sont égales à celles du produit

$$\Lambda_e \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_e.$$

Partant du foyer, où la vitesse est nulle, nous obtenons finalement la suite d'égalités suivante où les valeurs au foyer sont affectées de l'indice (0) :

$$\frac{\Delta B}{1-B} = \Lambda_{e(x_1)} \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{e(x_1)}, \quad (62)$$

$$\begin{cases} T_{(x_1)} = T_{e(x_1)} + T_0 \left(\frac{-2\pi \frac{H}{T}}{C_{p_f} + \frac{4\pi H^2}{RT^2}} \right)_{(0)} \Lambda_{e(x_1)} \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{e(x_1)}, \\ p_{(x_1)} = p_{e(x_1)}, \\ n_{A(x_1)} = n_{Ae(x_1)} + \left(\frac{2\pi \frac{H}{T}}{C_{p_f} + \frac{4\pi H^2}{RT^2}} \right)_{(0)} \Lambda_{e(x_1)} \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{e(x_1)}. \end{cases} \quad (63)$$

A partir du point d'abscisse x_1 nous sommes donc en mesure d'appliquer la méthode des corrections pas à pas. Ci-dessous nous indiquons le schéma du calcul effectué entre les points d'abscisses respectives x_n et x_{n+1} .

Valeurs connues en X_n : tous les paramètres thermodynamiques et leurs dérivées premières par rapport à x , toutes les compositions et leurs dérivées premières.

- 1° Détermination du pseudo-équilibre par le calcul de $B_{e'}$ et de s' .
- 2° Calcul de $p_{e'(x_{n+1})}$ et $(n_A)_{e'(x_{n+1})}$ pour $T_{e'(x_{n+1})} = T_{(x_n)} - \Delta T$ à l'aide des équations (50) et (52).
- 3° Calcul de $\Sigma(x_{n+1})$ à l'aide de l'équation (51), puis calcul de x_{n+1} .
- 4° Calcul des corrections à l'aide du système (53).
- 5° Calcul de $T(x_{n+1})$, $p(x_{n+1})$, $n_A(x_{n+1})$ à l'aide du système (47) et détermination de $B(x_{n+1})$ au moyen de l'équation c) du système (20).

Nous constatons qu'il est impossible d'appliquer notre méthode entre les points E et F et qu'au voisinage de ces points les corrections sont tellement imprécises qu'il n'est pas à conseiller de l'appliquer non plus. Ceci est d'ailleurs valable pour toutes les méthodes approchées.

Ainsi choisirons-nous deux points E' et F' d'abscisses respectives $x_{E'} < x_E$ et $x_{F'} > x_F$ et nous admettrons que les valeurs en $x_{F'}$ sont déduites de celles obtenues en x_E par un calcul de pseudo-équilibre sans correction. Les points E' et F' seront choisis assez voisins du col géométrique et leur choix sera conditionné par les signes respectifs des quantités $\det(\omega^*)$ et $\det(\Omega^*)$.

Les valeurs trouvées en F' sont fausses, mais la zone E'F' étant assez petite, les valeurs de T , p et n_A varient peu et de plus les erreurs commises satisfont aux conditions de stabilité du système linéarisé.

3.4.3 Pseudo-figé

Nous appellerons « pseudo-figé » une évolution satisfaisant à l'égalité (44) et à la suivante :

$$f_{F'} \left(T, p, n_A, \frac{d \ln T}{dx}, \frac{d \ln p}{dx}, \frac{dn_A}{dx}, x \right) \equiv \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{F'} = 0. \quad (64)$$

Nous supposons que l'évolution (f') satisfait en outre aux autres conditions définissant une évolution (i) (voir paragraphe 2.4). Le système d'équations associé à cette évolution possède les trois intégrales premières suivantes :

$$s'' = n_A(S_T^0)_A + n_{A_2}(S_T^0)_{A_2} - Rn \ln p, \quad (65)$$

où s'' est une constante

$$\dot{m} = \frac{pV}{nRT} \Sigma_{(x)}, \quad (66)$$

$$\text{constante} = n_A. \quad (67)$$

Comme dans le cas du pseudo-équilibre, les équations (65) et (67) permettent de déterminer tous les paramètres thermodynamiques indépendamment de l'abscisse x et en fonction de la seule température T .

Nous voyons d'autre part que la quantité $(\rho V)_{f'}$ est maximale lorsque l'égalité suivante est réalisée :

$$\text{dét}(\omega^*) = C_{p_f} \left(\frac{nRT}{V^2} - 1 \right) + Rn = 0, \quad (68)$$

c'est-à-dire au point F que nous appellerons pour cette raison col du pseudo-figé.

Les corrections obtenues en utilisant le pseudo-figé sont les suivantes :

$$\begin{cases} (\Delta \ln T)_{f'}^{\text{rel.}} = Y \left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} \Delta x, \\ (\Delta \ln p)_{f'}^{\text{rel.}} = Z \left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} \Delta x, \\ (\Delta n_A)_{f'}^{\text{rel.}} = \left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} \Delta x. \end{cases} \quad (69)$$

Des erreurs éventuelles sur les valeurs de

$$\left(\frac{B}{\Lambda} \right)_{(x_1)} \Delta x$$

ne seront pas inquiétantes car elles satisfont aux conditions de stabilité. Le calcul lui-même s'effectue de la même façon qu'avec le pseudo-équilibre.

En général les valeurs de B/Λ décroissent assez rapidement au fur et à mesure que l'on avance dans le divergent de la tuyère et il sera intéressant d'utiliser la méthode des corrections avec pseudo-figé à partir d'une certaine abscisse pour laquelle nous aurons :

$$\left| \frac{B}{\Lambda} \right| < \left| \frac{B}{\Lambda} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{e'} \right|, \quad (70)$$

(voir figure 2),

Le pseudo-figé sans correction remplacera d'ailleurs avantageusement l'écoulement relaxé pour les grandes abscisses où B est voisin de l'unité.

L'utilisation du pseudo-figé à partir du point E' du paragraphe précédent donne en F' des résultats assez différents de ceux obtenus au moyen d'un pseudo-équilibre, mais les valeurs se rejoignent au bout d'une certaine abscisse comme le montrent les calculs effectués pour l'hydrogène. Ce fait est très encourageant et peut être considéré comme une confirmation de la stabilité de l'écoulement relaxé.

3.4.4 L'écoulement réel

Compte tenu de nos hypothèses et des résultats obtenus dans le cas de l'hydrogène, il est probable que l'évolution trouvée par la méthode du pseudo-équilibre avec corrections est voisine de l'évolution en relaxé.

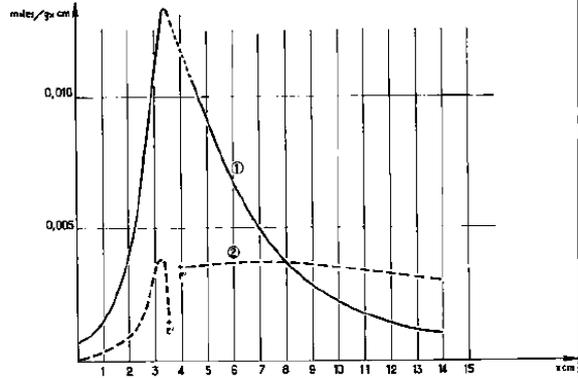


Fig. 2 ① Evolution de $\frac{B}{\Lambda}$ le long de la tuyère.

$$\textcircled{2} \text{ Evolution de } \left| \frac{B}{\Lambda} - \left(\frac{dn_A}{dx} \right)_{e'} \right|$$

dans le cas de l'hydrogène avec $T^0 = 4000^\circ K$ et $p = 10 \text{ atm}$.

Cependant la zone du col géométrique, c'est-à-dire la zone de tuyère comprise entre les points E' et F', reste indéterminée. Nous avons utilisé un pseudo-équilibre pour déterminer les conditions en F', connaissant celles existant en E', mais il n'en reste pas moins que nous ne savons rien de l'évolution entre ces deux points. En effet, il n'y a aucune raison pour que le pseudo-équilibre utilisé soit adapté à la tuyère envisagée, le maximum de la quantité $(\rho V)_{e'}$ n'étant probablement pas égal à $\dot{m}/\Sigma_{e'}$, rapport du débit massique à l'aire de la section de tuyère au col géométrique C.

Si nous admettons qu'entre E' et F' le pseudo-équilibre est une bonne approximation du relaxé, il nous faut donc modifier la forme de tuyère entre ces deux points et en particulier le rayon de la section droite au col de façon que le pseudo-équilibre se trouve adapté à la nouvelle tuyère ainsi obtenue.

Pour connaître l'aire de la section droite $\Sigma_{(x)}$, il suffit de rechercher le point où $(\rho V)_{e'}$ est maximum, c'est-à-dire le point où $\text{dét}(\Omega^*)_{e'}$ est nul. Ce calcul est analogue à celui effectué pour déterminer les valeurs des paramètres thermodynamiques au col dans le cas de l'écoulement en équilibre.

Alors n'importe quel profil de tuyère, tangent à l'ancien profil aux points d'abscisses $x_{E'}$ et $x_{F'}$ et satisfaisant à la condition précédente, conviendra. Le point F sera déterminé en écrivant que $\text{dét}(\omega^*)_{e'}$ y est nul et les conditions simultanées (33) y seront vérifiées avec $B = B_{e'}$, car pour l'équilibre comme pour

le pseudo-équilibre, il n'y a pas d'indétermination au col figé.

En remplaçant l'écoulement relaxé par un pseudo-équilibre entre E' et F', nous avons donc éliminé le problème posé par le col figé, une autre condition apparaît alors :

$$\begin{cases} d\text{ét}(\Omega^*)_{x'} = 0, \\ \frac{d \ln \Sigma}{dx} = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Enfin, nous admettons que le rayon de courbure du profil de tuyère doit être continu en E' et en F'.

4 RÉSULTATS OBTENUS DANS LE CAS D'UN ÉCOULEMENT D'HYDROGÈNE

La figure 3 montre l'allure du profil de la tuyère envisagée. Les réactions qui ont lieu sont du type (1), l'élément A étant l'atome d'hydrogène; la vitesse

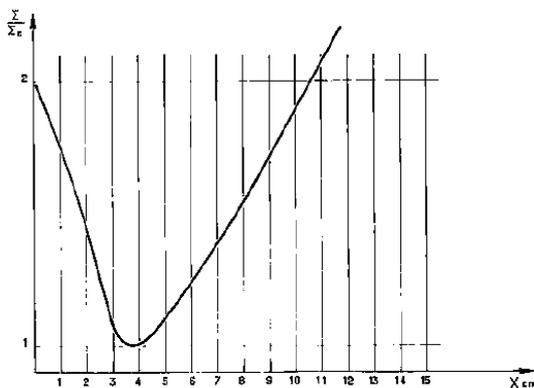


Fig. 3 Évolution du rapport de section en fonction de l'abscisse pour la tuyère d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \frac{2,125 t - 0,03 t^2 + 0,0012889 t^3}{1 + 0,0012889 t^2}, \text{ abscisse,} \\ r = 70,71067812 + \frac{0,26794919 t^3 - 27,00004119 t^2 - 65113583000}{t^2 + 931,3691427} \end{cases}$$

rayon de section droite.

spécifique de recombinaison est celle utilisée par WESTENBERG [9] :

$$k_R = 2.10^{18} T^{-1} \text{ cm}^6 \text{ mole}^{-2} \text{ sec}^{-1}. \quad (72)$$

Nous avons étudié plus spécialement le cas où la température dans le foyer est de 4 000°K et la pression de 10 atm. Ce cas satisfait bien aux hypothèses du paragraphe 3.4.2 avec $\varepsilon = 0,3$; le pas choisi en température est $\Delta T = 5^\circ\text{K}$. Les résultats obtenus sont portés sur les figures 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Les résultats nous ont amené à faire les constatations suivantes : tout d'abord, lorsque l'abscisse x_1 du point de démarrage des calculs

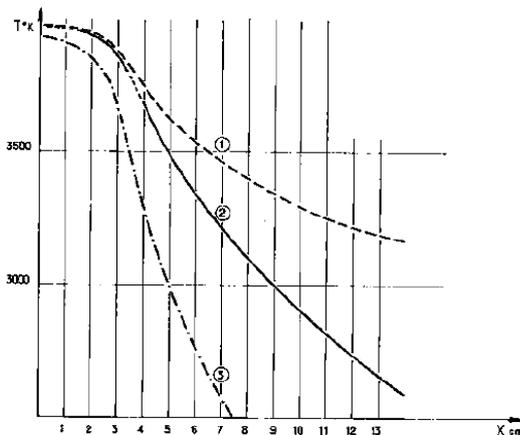


Fig. 4 $T^\circ = 4000^\circ\text{K} - p^\circ = 10 \text{ atm}$.

- ① équilibre
- ② relaxé
- ③ figé à partir du foyer

est assez faible, l'écoulement est alors très voisin d'un écoulement en équilibre, et nous constatons que les valeurs obtenues oscillent de façon importante jusqu'à une certaine abscisse et finissent par se stabiliser. Ce fait nous a semblé d'abord inquiétant, mais nous avons remarqué, qu'en utilisant divers points de démarrage, les courbes représentatives convergent vers une courbe unique.

Le choix de pas importants pour la température (initialement nous avons choisi $\Delta T = 5^\circ\text{K}$, puis $\Delta T = 100^\circ\text{K}$) modifie peu l'écoulement dans le convergent, et si, dans le divergent nous utilisons à nouveau des pas $\Delta T = 5^\circ\text{K}$, nous remarquons que l'écoulement est identique au précédent.

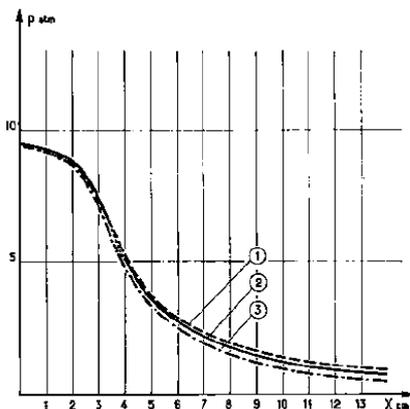


Fig. 5 $T^\circ = 4000^\circ\text{K} - p^\circ = 10 \text{ atm}$.

- ① équilibre
- ② relaxé
- ③ figé

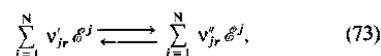
La figure 2 montre qu'à partir de l'abscisse $x = 8$ cm nous avons intérêt à utiliser la méthode des corrections de l'écoulement « pseudo-figé », les corrections étant dans ce cas moins grandes.

5 EXTENSION DE LA MÉTHODE DES CORRECTIONS A PLUSIEURS RÉACTIONS

Lorsque le mélange gazeux comprend N espèces chimiques formées à partir de L éléments et que K réactions sont possibles, notre méthode se généralise très bien; cela est dû au caractère linéaire des équations.

Le détail de la théorie fera l'objet d'une publication ultérieure. Nous donnons néanmoins ici les principales équations obtenues.

La r -ème réaction entre les espèces \mathcal{E}^j s'écrit :



ν_{jr}^{\prime} et $\nu_{jr}^{\prime\prime}$ étant les coefficients stoechiométriques relatifs aux espèces \mathcal{E}^j dans les deux membres de la réaction.

Il est toujours possible de choisir L espèces chimiques indépendantes, c'est-à-dire dont aucune d'entre elles ne peut être obtenue par une réaction entre les $L - 1$ autres.

n_j étant le nombre de moles des espèces \mathcal{E}^j par gramme de mélange, nous désignerons par α^* la matrice colonne des autres espèces numérotées de $L + 1$ à N .

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} n_{L+1} \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}, \quad (74)$$

les L espèces indépendantes sont alors déterminées par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_L \end{bmatrix} = (D^*)^{-1} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n_1^0 \\ \vdots \\ n_L^0 \end{bmatrix} - E^* \alpha^* \right\}, \quad (75)$$

en fonction de α^* . Les quantités n_i^0 représentent le nombre d'atomes grammes d'élément A^i contenus dans un gramme de mélange.

Les matrices D^* et E^* sont les suivantes, α_{ij} désignant le nombre d'atomes de l'élément A^i contenus dans la formule pondérale de l'espèce \mathcal{E}^j :

$$D^* = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{L1} & \dots & \alpha_{LL} \end{bmatrix}, \quad (76)$$

la matrice D^* est inversible,

$$E^* = \begin{bmatrix} \alpha_{1,L+1} & \dots & \alpha_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{L,L+1} & \dots & \alpha_{LN} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

En définissant de plus la matrice H^* comme étant la suivante :

$$H^* = \begin{bmatrix} (H_T^0)_{L+1} \\ \vdots \\ (H_T^0)_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} (H_T^0)_1 \\ \vdots \\ (H_T^0)_L \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Nous obtenons une égalité de formes différentielles tout à fait comparable à l'égalité matricielle du système (29) obtenue pour la molécule A_2 :

$$\omega^* \begin{bmatrix} d \ln T \\ d \ln p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(H^*)^t}{T} d\alpha^* \\ -\frac{1}{n} dn - \frac{(H^*)^t}{V^2} d\alpha^* + d \ln \Sigma \end{bmatrix}. \quad (79)$$

L'écoulement relaxé est alors parfaitement défini si nous adjoignons à l'équation (79), les équations suivantes :

$$B^* = -(G^*)^t \left\{ \begin{bmatrix} M_{L+1} \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_L \end{bmatrix} \right\}, \quad (80)$$

$$\frac{d\alpha^*}{dx} = \psi^*(B^*), \quad (81)$$

B^* est une matrice colonne à $N - L$ lignes correspondant à $N - L$ réactions indépendantes numérotées de 1 à $N - L$, c'est-à-dire dont la matrice des coefficients stoechiométriques G^* suivante est inversible :

$$G^* = \begin{bmatrix} (\nu_{L+1,1}^{\prime} - \nu_{L+1,1}^{\prime\prime}) & \dots & (\nu_{L+1,N-L}^{\prime} - \nu_{L+1,N-L}^{\prime\prime}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\nu_{N1}^{\prime} - \nu_{N1}^{\prime\prime}) & \dots & (\nu_{N,N-L}^{\prime} - \nu_{N,N-L}^{\prime\prime}) \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Les termes M_j de l'équation (80) sont aux signes près les enthalpies libres des espèces \mathcal{E}^j divisées par le produit RT .

La fonction vectorielle ψ^* dépend des vitesses spécifiques des réactions, des fonctions thermodynamiques et des compositions.

Tout comme dans le cas de la molécule diatomique A_2 , nous pouvons faire intervenir une famille (i) d'évolutions qui satisfont à l'équation (79) et à $N - L$ équations supplémentaires du type :

$$f_{(i)} \left(T, p, \alpha^*, \frac{d \ln T}{dx}, \frac{d \ln p}{dx}, \frac{d \alpha^*}{dx}, x \right) = 0. \quad (83)$$

Deux évolutions fictives de la famille (i) ont été choisies :

— le pseudo-équilibre défini par l'égalité (79) et l'équation matricielle :

$$B_{e^*}^* + (G^*)^t \left\{ \begin{bmatrix} M_{L+1} \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_L \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

où $B_{e^*}^*$ est une matrice colonne constante;

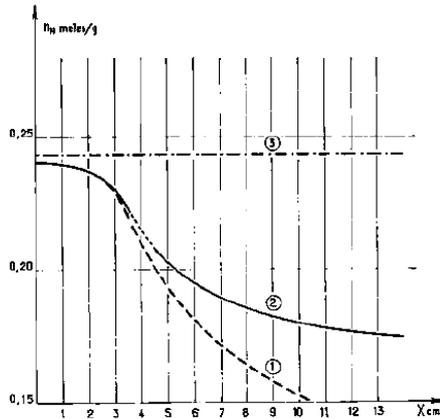


Fig. 6 $T_0 = 400^\circ K - p_0 = 10 \text{ atm.}$
 ① équilibre
 ② relaxé
 ③ figé

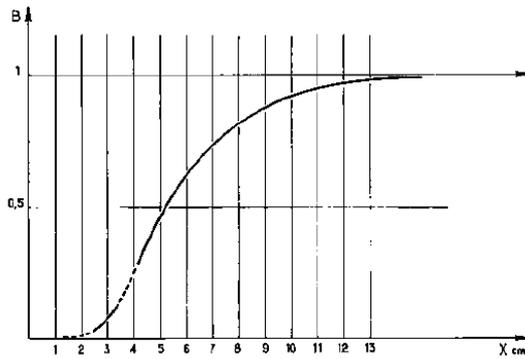


Fig. 7 $T_0 = 400^\circ K - p_0 = 10 \text{ atm.}$
 Evolution du paramètre B en écoulement relaxé.

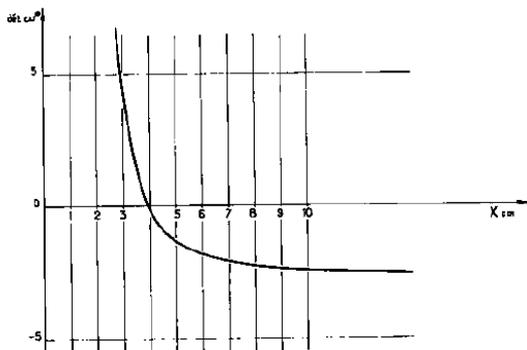


Fig. 8 $T_0 = 400^\circ K - p_0 = 10 \text{ atm.}$
 Evolution de dét (ω^*) en écoulement relaxé

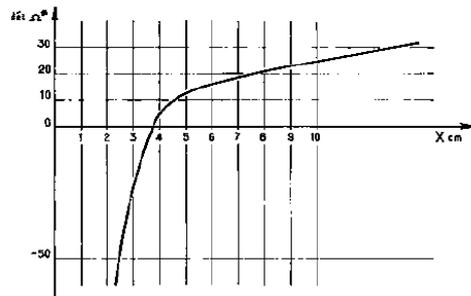


Fig. 9 $T_0 = 4000^\circ K - p_0 = 1 \text{ atm.}$
 Evolution de dét (Ω^*) en écoulement relaxé

Ainsi, la détermination des paramètres thermodynamiques dans le convergent se fait assez rapidement, sans qu'il soit nécessaire d'utiliser des pas resserrés. Au contraire, dans le divergent nous sommes contraints d'utiliser des pas assez petits, car les corrections deviennent importantes et la précision des résultats dépendra du pas.

Dans la zone aval du divergent, le paramètre B tend asymptotiquement vers l'unité, il y a donc assez rapidement « figeage » et nous pouvons remplacer avantageusement notre évolution par un écoulement pseudo-figé à partir de $B = 0,99$, par exemple.

Nous avons fait également des calculs dans des cas qui ne satisfaisaient pas aux hypothèses du paragraphe 2.4.2. Ainsi, en conservant une température de foyer de $4000^\circ K$ mais en prenant des pressions de 1 atm ou de 0,1 atm, l'écoulement obtenu ne correspond vraisemblablement plus à l'écoulement réel, et en particulier le débit \dot{m} choisi est sûrement faux; mais nous avons constaté que les critères de stabilité étaient bien vérifiés.

Cependant, il semble que dans l'état actuel d'élaboration de notre méthode, nous devons nous limiter à des cas vérifiant les hypothèses restrictives du paragraphe 2.4.2.

La figure 10 montre la modification du profil de tuyère dans la zone du col comme il est indiqué au paragraphe 2.4.4.

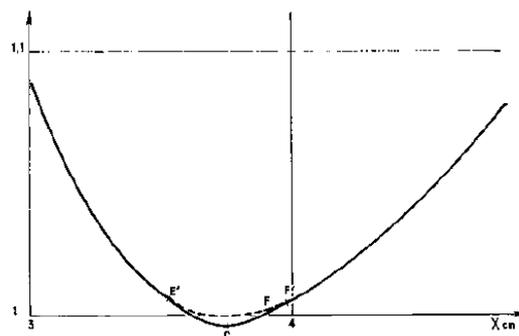


Fig. 10 Modification de la tuyère entre les points E' et F'

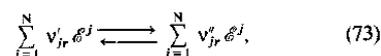
La figure 2 montre qu'à partir de l'abscisse $x = 8$ cm nous avons intérêt à utiliser la méthode des corrections de l'écoulement « pseudo-figé », les corrections étant dans ce cas moins grandes.

5 EXTENSION DE LA MÉTHODE DES CORRECTIONS A PLUSIEURS RÉACTIONS

Lorsque le mélange gazeux comprend N espèces chimiques formées à partir de L éléments et que K réactions sont possibles, notre méthode se généralise très bien; cela est dû au caractère linéaire des équations.

Le détail de la théorie fera l'objet d'une publication ultérieure. Nous donnons néanmoins ici les principales équations obtenues.

La r -ème réaction entre les espèces \mathcal{E}^j s'écrit :



ν_{jr}^{\prime} et $\nu_{jr}^{\prime\prime}$ étant les coefficients stoechiométriques relatifs aux espèces \mathcal{E}^j dans les deux membres de la réaction.

Il est toujours possible de choisir L espèces chimiques indépendantes, c'est-à-dire dont aucune d'entre elles ne peut être obtenue par une réaction entre les $L - 1$ autres.

n_j étant le nombre de moles des espèces \mathcal{E}^j par gramme de mélange, nous désignerons par α^* la matrice colonne des autres espèces numérotées de $L + 1$ à N .

$$\alpha^* = \begin{bmatrix} n_{L+1} \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix}, \quad (74)$$

les L espèces indépendantes sont alors déterminées par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_L \end{bmatrix} = (D^*)^{-1} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} n_1^0 \\ \vdots \\ n_L^0 \end{bmatrix} - E^* \alpha^* \right\}, \quad (75)$$

en fonction de α^* . Les quantités n_i^0 représentent le nombre d'atomes grammes d'élément A^i contenus dans un gramme de mélange.

Les matrices D^* et E^* sont les suivantes, α_{ij} désignant le nombre d'atomes de l'élément A^i contenus dans la formule pondérale de l'espèce \mathcal{E}^j :

$$D^* = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1L} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{L1} & \dots & \alpha_{LL} \end{bmatrix}, \quad (76)$$

la matrice D^* est inversible,

$$E^* = \begin{bmatrix} \alpha_{1,L+1} & \dots & \alpha_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{L,L+1} & \dots & \alpha_{LN} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

En définissant de plus la matrice H^* comme étant la suivante :

$$H^* = \begin{bmatrix} (H_T^0)_{L+1} \\ \vdots \\ (H_T^0)_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} (H_T^0)_1 \\ \vdots \\ (H_T^0)_L \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Nous obtenons une égalité de formes différentielles tout à fait comparable à l'égalité matricielle du système (29) obtenue pour la molécule A_2 :

$$\omega^* \begin{bmatrix} d \ln T \\ d \ln p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(H^*)^t}{T} d\alpha^* \\ -\frac{1}{n} dn - \frac{(H^*)^t}{V^2} d\alpha^* + d \ln \Sigma \end{bmatrix}. \quad (79)$$

L'écoulement relaxé est alors parfaitement défini si nous adjoignons à l'équation (79), les équations suivantes :

$$B^* = -(G^*)^t \left\{ \begin{bmatrix} M_{L+1} \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_L \end{bmatrix} \right\}, \quad (80)$$

$$\frac{d\alpha^*}{dx} = \psi^*(B^*), \quad (81)$$

B^* est une matrice colonne à $N - L$ lignes correspondant à $N - L$ réactions indépendantes numérotées de 1 à $N - L$, c'est-à-dire dont la matrice des coefficients stoechiométriques G^* suivante est inversible :

$$G^* = \begin{bmatrix} (\nu_{L+1,1}^{\prime} - \nu_{L+1,1}^{\prime\prime}) & \dots & (\nu_{L+1,N-L}^{\prime} - \nu_{L+1,N-L}^{\prime\prime}) \\ \vdots & & \vdots \\ (\nu_{N1}^{\prime} - \nu_{N1}^{\prime\prime}) & \dots & (\nu_{N,N-L}^{\prime} - \nu_{N,N-L}^{\prime\prime}) \end{bmatrix}. \quad (82)$$

Les termes M_j de l'équation (80) sont aux signes près les enthalpies libres des espèces \mathcal{E}^j divisées par le produit RT .

La fonction vectorielle ψ^* dépend des vitesses spécifiques des réactions, des fonctions thermodynamiques et des compositions.

Tout comme dans le cas de la molécule diatomique A_2 , nous pouvons faire intervenir une famille (i) d'évolutions qui satisfont à l'équation (79) et à $N - L$ équations supplémentaires du type :

$$f_{(i)} \left(T, p, \alpha^*, \frac{d \ln T}{dx}, \frac{d \ln p}{dx}, \frac{d \alpha^*}{dx}, x \right) = 0. \quad (83)$$

Deux évolutions fictives de la famille (i) ont été choisies :

— le pseudo-équilibre défini par l'égalité (79) et l'équation matricielle :

$$B_0^* + (G^*)^t \left\{ \begin{bmatrix} M_{L+1} \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix} - (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_L \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

où B_0^* est une matrice colonne constante;

— le pseudo-figé pour lequel les $N-L$ égalités (83) se résument par l'équation matricielle :

$$\frac{d\alpha^*}{dx} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Le col du pseudo-équilibre satisfait à l'équation :

$$\begin{bmatrix} C_{p_f} & -R\eta & \frac{(H^*)^t}{T} - R(U^*)^t \\ 1 + \frac{TC_{p_f}}{V^2} & -1 & \frac{(H^*)^t}{V^2} \\ \frac{H^*}{RT} & -U^* & -\Gamma^* \end{bmatrix} = 0, \quad (86)$$

avec les définitions suivantes :

$$U^* = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - (E^*)^t (D^*)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (87)$$

$$\Gamma^* = \begin{bmatrix} n_{L+1}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & n_N^{-1} \end{bmatrix} + (E^*)^t [(D^*)^{-1}]^t \begin{bmatrix} n_1^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & n_L^{-1} \end{bmatrix} (D^*)^{-1} E^*. \quad (88)$$

Le col du pseudo-figé satisfait à l'équation :

$$\det(\omega^*) = 0.$$

Tout laisse donc prévoir que l'écoulement relaxé pourra être déterminé, moyennant des hypothèses restrictives, à partir de calculs de pseudo-équilibres pas plus compliqués que les calculs d'équilibre et des corrections.

Donnons enfin la relation qui lie les corrections :

$$\omega^* \begin{bmatrix} (\Delta \ln T)_e^{rel.} \\ (\Delta \ln p)_e^{rel.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(H^*)^t}{T} (\Delta \alpha^*)_e^{rel.} \\ -\frac{1}{n} (\Delta n)_e^{rel.} - \frac{(H^*)^t}{V^2} (\Delta \alpha^*)_e^{rel.} \end{bmatrix},$$

Nous pourrions également utiliser le pseudo-figé.

6 CONCLUSION

Les premiers résultats de calcul laissent prévoir que la méthode des corrections proposée conduit à la détermination approchée des écoulements relaxés.

Pour l'écoulement d'hydrogène, le calcul a été effectué au moyen d'une IBM 610.

Le calcul d'un point par la méthode des corrections avec pseudo-équilibre dure environ vingt minutes, par la même méthode avec pseudo-figé, il ne dure que dix minutes.

La méthode des corrections utilise des programmes de calcul des performances avec écoulement en équilibre et écoulement figé, de sorte que le temps de calcul peut être considérablement réduit avec une machine plus puissante.

Cependant nous pensons avoir atteint notre but qui était la détermination approchée des performances d'une fusée dans l'hypothèse de l'écoulement relaxé : en effet la méthode proposée conduit au calcul de l'impulsion spécifique et de la vitesse caractéristique en particulier.

Nous pensons pouvoir déterminer par la suite les erreurs causées par notre approximation du premier ordre, et aussi connaître l'influence des valeurs de la vitesse spécifique K_R sur l'écoulement relaxé, ce qui fera l'objet de calculs ultérieurs.

Enfin, les calculs d'écoulements relaxés dans le cas de plusieurs espèces feront l'objet d'une publication ultérieure.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BARRÈRE, *Influence des réactions chimiques sur l'écoulement*, Symposium AGARD, 1-5 avril 1963, Londres.
- [2] K. N. C. BRAY, *Atomic recombination in a hypersonic wind tunnel nozzle*, "Journal of Fluid Mechanics", vol. 6, part. 1, juillet 1959.
- [3] S. PENNER, *Introduction to the study of chemical reaction in flow systems*, Butterworths, 1955.
- [4] S. W. BENSON and T. FUENO, *Mechanism of atom recombination by consecutive vibrational deactivations*, "The Journal of Chemical Physics", vol. 36, n° 6, mars 1962.
- [5] S. W. BENSON, G. C. BEREND and C. WU, *Classical Model for vibrational and rotational excitation of diatomic molecules by collision*, "The Journal of Chemical Physics", vol. 37, n° 7, octobre 1962; vol. 38, n° 1, janvier 1963.
- [6] S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER and H. EYRING, *The theory of rate processes*, McGraw Hill Book Company, 1941.
- [7] S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of irreversible processes*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951.
- [8] J. BASS, *Cours de mathématiques*, Masson & Co, 1957.
- [9] A. A. WESTENBERG and S. FAVIN, *Complex kinetics in supersonic nozzle flow*, compte rendu du 9^e Symposium sur la Combustion, Ithaca, août 1962.