



**HAL**  
open science

**Equations de bilan d'interface pour les flammes de prémélange C.R. Acad. Sc., t. 304, II, n° 17, pp. 1047-1050.**

Roger Prud'Homme, Françoise Baillot

► **To cite this version:**

Roger Prud'Homme, Françoise Baillot. Equations de bilan d'interface pour les flammes de prémélange C.R. Acad. Sc., t. 304, II, n° 17, pp. 1047-1050.. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1987. hal-02268475

**HAL Id: hal-02268475**

**<https://hal.science/hal-02268475>**

Submitted on 27 Apr 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**AÉROTHERMOCHEMIE. — Équations de bilan d'interface pour les flammes de prémélange.** Note de Roger Prud'homme et Françoise Baillet, présentée par Marcel Barrère.

Les flammes de prémélange étudiées ces dernières années par la méthode des développements asymptotiques raccordés à un ou deux paramètres vérifient en fait des équations de bilan interfaciales. Les quantités surfaciques intervenant dans ces équations sont calculables très simplement. Ce résultat, déjà établi avec l'hypothèse de la densité constante est ici étendu au cas d'un mélange fluide dilatable. La résolution du système obtenu conduit à des résultats identiques à ceux de la méthode classique avec un gain important de simplicité.

**AEROTHERMOCHEMISTRY. — Interface balance equations for premixed flames.**

*Premixed flames have been studied last years by the method of matched asymptotic expansion with one or two parameters. They obey in fact the interfacial balance equations. Surface quantities which appear in these equations can be easily determined. This result, already established assuming a constant density, is extended here to the case of an expansible fluid mixture. The resolution of the obtained system leads to results which are identical to those of the classical theory, but the gain of simplicity is important.*

Les études théoriques sur les flammes minces de prémélange ont progressé ces dernières années. La configuration la plus étudiée correspond à une grande énergie d'activation de la réaction de combustion. La méthode utilisée est celle des développements asymptotiques raccordés à échelles multiples. L'échelle hydrodynamique  $\Lambda$  correspond à l'extérieur de la flamme proprement dite, la diffusion et la conduction thermique y sont négligeables ainsi que la production chimique. L'échelle de diffusion  $d$  correspond à la partie de la flamme où la convection, la diffusion et la conduction thermique sont importantes mais où les taux de production chimique sont encore négligeables. C'est la zone de préchauffage, en aval de laquelle se trouve la partie réactive d'épaisseur  $d/\beta$  où  $\beta$  est le rapport de la température d'activation de la réaction à la température des gaz brûlés de la flamme plane adiabatique.

Les premières études fondées sur ce type d'analyse ont porté sur des écoulements à densité constante ([1], [2]). Un seul petit paramètre  $1/\beta$  était utilisé, ce qui revenait à supposer que la seule origine des perturbations était la présence de la flamme. L'hypothèse de la densité constante a été levée ensuite et il a été supposé que la masse volumique variait par dilatation à l'intérieur de la flamme.

L'analyse à deux petits paramètres  $\varepsilon = d/\Lambda$  et  $1/\beta$  permet d'envisager des perturbations hydrodynamiques en plus des perturbations dues à la combustion. Les résultats sont limités au cas où le nombre de Lewis est proche de l'unité [3].

Ces études montrent l'influence de propriétés locale surfaciques, telles que le taux d'étirement du front de flamme, sur la vitesse de combustion. Le rôle joué par le taux d'étirement avait été présumé depuis plus de 20 ans [4]. Certains auteurs, dans le cadre de ces méthodes d'analyse, considèrent la zone réactive comme une interface et écrivent le taux de production chimique sous forme de fonction de Dirac, égale au saut de flux de transfert. Néanmoins, le comportement de l'ensemble de la flamme, zone de préchauffage comprise, n'est pas décrit comme résultant d'équations de bilan d'interface.

Or, on peut démontrer que les flammes de ce type obéissent à des équations d'interface. La thermodynamique de ces interfaces n'obéit pas à la loi de Gibbs, cependant, les résultats acquis grâce à l'analyse asymptotique permettent de déduire les lois de comportement thermodynamique de ces flammes.

Dans tous les cas, les flammes considérées vérifient des équations de bilan du type :

$$(1) \quad \frac{d_v \hat{\rho}_F}{dt} + \hat{\rho}_F \mathbf{V}_{//} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}_{//} \cdot \mathbf{J}_{vF//} + [\mathbf{J}_{vF \perp}] = \hat{W}_F$$

avec les définitions suivantes :

(//) signifie parallèlement à l'interface et ( $\perp$ ) perpendiculairement à celle-ci. Si  $\mathbf{v}$  désigne la vitesse locale du fluide,  $\mathbf{V}$  est défini par :

$$(2) \quad \mathbf{V} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{w}$$

où  $\mathbf{w} = w\mathbf{N}$  est la vitesse normale d'avancement du front de flamme,  $\mathbf{N}$  étant la normale unitaire à celui-ci, orientée du côté (-) vers le côté (+), gaz frais vers gaz brûlés,  $[[ \ ]]$  désigne le saut d'une grandeur entre (-) et (+). Dans chacun des cas examinés le vecteur  $\mathbf{v}_{//}$  est conservatif à la traversée de la flamme :

$$(3) \quad [[\mathbf{v}_{//}]] = 0$$

de sorte que  $\mathbf{V}$  est également conservatif, ce qui permet d'assurer que  $\nabla_{//} \cdot \mathbf{V}$  est bien le taux d'étirement de l'interface.

Pour définir les différentes autres quantités intervenant dans l'équation générale de bilan de la propriété  $F$ , de valeur massique  $f$ , on considère d'abord le champ des valeurs  $f_0(\mathbf{x}, t)$  dans les gaz frais. On définit alors :

$$(4) \quad \rho_F = \rho(f - f_0)$$

densité volumique d'excès de  $F$ . La densité de flux de  $F$  étant  $\mathcal{J}_F$  par rapport au mouvement de vitesse  $\mathbf{v}$ , on a alors :

$$(5) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}F} = \mathcal{J}_F - \mathcal{J}_{F_0} + \rho_F(\mathbf{v} - \mathbf{V}).$$

Soit  $N$  la coordonnée normale à la surface du front de flamme à l'échelle hydrodynamique et  $n = \varepsilon^{-1} N$ . La densité surfacique d'excès de  $F$  est égale à :

$$(6) \quad \hat{\rho}_F = \int_{N^-}^{N^+} \rho_F dN = \varepsilon \int_{-\infty}^0 \rho_F dn$$

en positionnant le front de flamme en  $n=0$ .

Le flux  $\mathbf{J}_{\mathbf{v}F}$  est égal à :

$$(7) \quad \mathbf{J}_{\mathbf{v}F} = \int_{N^-}^{N^+} \mathbf{J}_{\mathbf{v}F} dN.$$

Le taux de production  $\hat{W}_F$  est le suivant :

$$(8) \quad \hat{W}_F = \int_{N^-}^{N^+} \left[ \dot{W}_F - \dot{W}_{F_0} - \left( \rho \frac{dv f_0}{dt} - \rho_0 \frac{dv_0 f_0}{dt} \right) \right] dN$$

où  $\dot{W}_F$  est le taux de production volumique. Enfin,  $d_v/dt$  désigne la dérivée temporelle en suivant le mouvement de vitesse  $\mathbf{V}$ .

Ces quantités ont des expressions particulièrement simples que l'on peut déduire des résultats de l'analyse asymptotique.

Les équations sans dimension sont obtenues en prenant comme grandeurs de référence  $A$  pour les distances,  $u_i$  : vitesse de combustion adiabatique de la flamme plane,  $T_b$  : température de fin de combustion adiabatique,  $\rho_0$  : masse volumique des gaz frais supposée uniforme et constante. Lorsque le taux d'étirement  $\nabla_{//} \cdot \mathbf{V}$  et la courbure  $\nabla \cdot \mathbf{N}$  sont  $O(1)$ , on obtient la série d'équations :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d_v \hat{\rho}_F}{dt} + \hat{\rho}_F \nabla_{//} \cdot \mathbf{V} + [[\rho_F u_{\perp}]] = \hat{W}_F, \\ \rho_F = -1 - \rho, \quad \hat{W}_F = [[u_{\perp}]], \quad u_{\perp} = v_{\perp} - V_{\perp} \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \frac{d_v \hat{\rho}_Y}{dt} + \hat{\rho}_Y \nabla_{//} \cdot \mathbf{V} + [\rho_Y u_{\perp}] = -\hat{W}, \quad \rho_Y = Y - 1, \quad \hat{W} = e^{\beta/2} (T_+ - 1)$$

$$(11) \quad \frac{d_v \hat{\rho}_T}{dt} + \hat{\rho}_T \nabla_{//} \cdot \mathbf{V} + [\rho_T u_{\perp}] = (1 - T_0) \hat{W}, \quad \rho_T = \rho(T - T_0)$$

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d_v \hat{\rho}_v}{dt} + \hat{\rho}_v \nabla_{//} \cdot \mathbf{V} + [\rho v u_{\perp}] = \hat{W}_v \\ \rho_v = \rho(v - v_0), \quad \hat{W}_v = O(\varepsilon) \end{cases}$$

où  $T_0$  est la température des gaz frais supposée uniforme,  $Y$  la fraction massique de réactants. La viscosité est négligée.

Les densités surfaciques d'excès sont déterminées à partir des résultats de l'analyse asymptotique à l'ordre zéro en  $\varepsilon$  qui fournit dans tous les cas :

$$(13) \quad Y = 1 - e^{\mathcal{L}_\varepsilon m}, \quad m = \rho u_{\perp}$$

(débit de combustion conservatif à la traversée de la flamme à l'ordre zéro en  $\varepsilon$ ).

$$(14) \quad T = T_0 + (1 - T_0) e^{\mathcal{L}_\varepsilon m}$$

Ainsi, avec l'hypothèse de la densité constante, on trouve :

$$(15) \quad \begin{cases} [[m]] = [[u_{\perp}]] = 0, \quad \hat{\rho}_v = 0, \quad \hat{\rho}_Y = -\frac{\varepsilon}{\mathcal{L}_\varepsilon u_{\perp}}, \\ \hat{\rho}_T = (1 - T_0) \frac{\varepsilon}{u_{\perp}}, \quad \hat{\rho}_v = 0, \end{cases}$$

alors que dans l'hypothèse du fluide dilatable de loi d'état :

$$(16) \quad \rho T = T_0$$

on obtient :

$$(17) \quad \begin{cases} [[m]] = [[\rho u_{\perp}]] = 0, \quad \hat{\rho}_v = \frac{\varepsilon}{m} \text{Log} \frac{1}{T_0}, \\ \hat{\rho}_T = \frac{\varepsilon}{m} T_0 \text{Log} \frac{1}{T_0}, \quad \hat{\rho}_v = O(\varepsilon). \end{cases}$$

L'expression de  $\hat{\rho}_Y$  est un peu plus complexe du fait que :

$$(18) \quad \hat{\rho}_Y = \varepsilon \int_{-\infty}^0 \rho(Y-1) dn = \varepsilon \int_{-\infty}^0 T_0 \frac{Y-1}{T} dn$$

On obtient :

$$(19) \quad \hat{\rho}_Y = -\frac{\varepsilon}{m} \frac{T_0}{1-T_0} \left[ \text{Log} \frac{1}{T_0} - (\mathcal{L}_\varepsilon - 1) \left( \frac{T_0}{1-T_0} \right)^{\mathcal{L}_\varepsilon - 1} \int_0^{(1-T_0)/T_0} \frac{\text{Log}(1+\xi)}{\xi^{2-\mathcal{L}_\varepsilon}} d\xi \right]$$

Compte tenu de ces lois de comportement, la résolution des équations d'interface s'avère notablement plus facile que celle des équations volumiques. On retrouve des résultats identiques à ceux des théories classiques à un ou deux petits paramètres.

Ainsi, l'analyse à deux petits paramètres  $\varepsilon$  et  $1/\beta$  [3] nous donne ici :

$$(20) \quad \hat{W} = 1 + \varepsilon \frac{\beta}{2} T_+^1 + O(\varepsilon^2)$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$(21) \quad \begin{cases} m^0 = 1 \\ [\mathbf{v}_{//}^0] = 0 \\ [\rho^0] = m^0 [\mathbf{u}_\perp^0] = 0 \end{cases}$$

L'analyse à l'ordre 1 montre que  $\mathcal{L}_\varepsilon - 1 = O(1/\beta) = l/\beta$  et conduit au résultat de Clavin et Joulin :

$$(22) \quad m_- = 1 - \varepsilon \left[ \frac{\text{Log } 1/T_0}{1 - T_0} + l \frac{T_0}{2} \int_0^{(1-T_0)/T_0} \frac{\text{Log}(1+\xi)}{\xi} d\xi \right] \mathbf{v}_{//} \cdot \mathbf{V}^0 + O(\varepsilon^2)$$

Lorsque le taux d'étirement  $\mathbf{v}_{//} \cdot \mathbf{V}$  est  $O(\varepsilon^{-1})$  des résultats satisfaisants sont obtenus également avec des équations du type (1) [5].

Deux avantages peuvent être tirés de cette modélisation théorique.

(1) Une analyse simplifiée de manière appréciable (2) la possibilité d'inclure ces équations dans les calculs d'écoulement présentant des flammes plissées.

La détermination expérimentale des grandeurs d'interface peut être envisagée.

Reçue le 16 mars 1987.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. I. SIVASHINSKY, Structure of Bunsen flames, *J. Chemical Physics*, 62, 2, 1975, p. 638-643.
- [2] G. S. S. LUDFORD et S. SCHEURER, *Problèmes mathématiques en combustion*, Écoles C.E.A.-I.N.R.I.A.-E.D.F., 7-13 décembre 1982, I.N.R.I.A.
- [3] P. CLAVIN et G. JOULIN, Premixed flames in large and high intensity turbulent flow, *Le Journal de Physique Lettres*, 44, n° 1, janvier 1983, p. L1-L12.
- [4] A. M. KLIMOV, *Zhur. Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.*, 49, n° 3, 1963, p. 49-58.
- [5] R. PRUD'HOMME, F. BAILLOT et D. DUROX, Modélisation interfaciale des flammes minces, *J. Mécanique théorique et appliquée*, numéro spécial, 1986, p. 193-223.

*Laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S., 4 ter, route des Gardes, 92190 Meudon.*