



HAL
open science

Preuve et démonstration en mathématiques au collège

Nicolas Balacheff

► **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1982, 3 (3), pp.261-304. hal-02266891

HAL Id: hal-02266891

<https://hal.science/hal-02266891>

Submitted on 16 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PREUVE ET DEMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES AU COLLEGE¹

Nicolas Balacheff
Laboratoire I.M.A.G.
Grenoble

ABSTRACT

The research presented here, is a contribution to the study of the relations which pupils make between the construction of explanations in mathematics, demonstrations, and the notion of proof. For this we have used an experimental situation involving interaction and communication between the pupils in the solving of a combinatory problem.

In the first part of the article we approach the question of the didactic transposition of the notion of demonstration in French education.

In the second part, after looking closely at the experimental method and its application, we give an account of the analysis of the results concerning pupils in the *Sixième* (11 - 12 year olds) and in the *Troisième* (14 - 15 year olds). Finally we present our conclusions with reference to two aspects: firstly, the links between the solution of the problem and the formulation of the solution, and secondly, the relation between proof and demonstration; in the latter case we develop hypotheses on the nature of obstacles to learning in the *Sixième* and the *Troisième*.

RESUMEN

La investigación presentada aquí, es una contribución al estudio de las relaciones que los alumnos, de 10 a 16 años, establecen entre la elaboración de las explicaciones, la demostración et la noción de prueba en matemáticas. Para lo cual, nosotros hemos utilizado una situación experimental de interacción y de comunicación entre los alumnos a propósito de la resolución de un problema de combinatoria.

En la primera parte del presente artículo, nosotros abordamos el problema de la transposición didáctica de la noción de demostración en la enseñanza francesa.

En la segunda parte, luego de un examen preciso del dispositivo experimental y de su funcionamiento, nosotros presentamos el análisis de las observaciones concernientes a los alumnos de *Sixième* (11 - 12 años) y de *Troisième* (14 - 15 años).

Finalmente, nosotros presentamos nuestras conclusiones relativas a dos aspectos: por una parte, los lazos entre la resolución del problema y la formalización de su solución, y por otra parte, las relaciones entre prueba y demostración, en este último caso nosotros formulamos hipótesis.

1. Etablissement où est dispensé l'enseignement de la seconde partie de l'enseignement obligatoire français. Les élèves ont entre 10 et 16 ans. Il y a quatre niveaux: 6^e, 5^e, 4^e, 3^e.

sis sobre la naturaleza de los obstaculos en el aprendizaje en el *Sixième* y el *Troisième*.

RESUME

La recherche présentée ici, est une contribution à l'étude des rapports que les élèves de 10 à 16 ans établissent entre l'élaboration d'explications, la démonstration et la notion de preuve en mathématiques. Pour cela nous avons utilisé une situation expérimentale d'interaction et de communication entre les élèves à propos de la résolution d'un problème combinatoire.

Dans la première partie du présent article nous abordons la question de la transposition didactique de la notion de démonstration dans l'enseignement français.

Dans la seconde partie, après un examen précis du dispositif expérimental et de son fonctionnement, nous rapportons l'analyse des observations concernant des élèves de sixième (11 - 12 ans) et de troisième (14 - 15 ans). Enfin, nous présentons nos conclusions relativement à deux aspects: d'une part les liens entre la résolution du problème et la formulation de sa solution, d'autre part les rapports entre preuve et démonstration; dans ce dernier cas nous formulons des hypothèses sur la nature des obstacles à l'apprentissage en sixième et en troisième.

Précisions sur le vocabulaire

« Expliquer pourquoi » est souvent compris dans l'énoncé des exercices ou des problèmes mathématiques dans le sens de « démontrer que ». En fait, une telle acception est trop étroite : nous dirons avec Piaget (1970) qu'expliquer, sur le terrain des sciences déductives, c'est d'abord dégager les « raisons » pour « répondre à la question du pourquoi ». Mais les raisons en tant qu'elles sont liées aux significations peuvent échapper à une démonstration par ailleurs très convaincante du point de vue de la logique (voir à ce sujet Halbwachs 1981); c'est par exemple l'aveu de Cantor quand il interpelle Dedekind à propos d'une démonstration qu'il vient d'écrire : « Je le vois mais je ne le crois pas »².

De même nous avons pu noter que les mots preuve, démonstration, raisonnement sont souvent utilisés comme synonymes dans l'enseignement des mathématiques. Aussi, avant d'entrer dans le corps même de cet article, nous avons voulu faire quelques mises au point sur ce vocabulaire.

Nous appellerons *explication* un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat.

Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées. Ainsi certaines explications sont reçues pour *preuve* c'est-à-dire acceptées, d'autres ne le sont pas. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.

Parmis les preuves, certaines ont une forme particulière, elles sont une suite d'énoncés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est obtenu à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appellerons *démonstrations* ces preuves.

Nous réservons le mot *raisonnement* pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

2. Lettre du 29 juin 1877, reproduite dans J. Cayrolles, *Philosophie mathématique*, Hermann 1962.

Enfin, nous appelons *résolution* l'activité du sujet entre l'instant où le problème lui est formulé et celui où il prend la décision qu'il est résolu. Nous parlerons de *processus de résolution* pour désigner l'organisation de cette activité. On peut identifier dans le processus de résolution différentes séquences, en particulier : activités de recherche, activités de formulation, démarches de preuve associées à des prises de décision. Il est fréquent, par exemple en situation scolaire, de considérer la rédaction de la solution d'un problème hors de la résolution, ceci ne nous paraît pas pertinent. En effet le processus de résolution s'appuie sur une dialectique recherche-validation qui implique la formulation, y compris celle de la solution : rédiger la solution d'un problème conduit à son analyse et donc à son éventuelle remise en cause ; la formulation est associée à l'administration de la preuve.

I. Introduction

L'un des buts clairement affirmés de l'enseignement des mathématiques au collège, en particulier à partir de la classe de 4^e est, pour reprendre les termes des programmes de juillet 1971 : « de faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et leur apprendre à en rédiger ». Une telle citation suffirait à affirmer que la démonstration constitue un objet de l'enseignement mathématique ; en fait l'expression « faire comprendre » renvoie à des interprétations possibles suffisamment différentes pour que l'on se penche sur ce qu'elle veut dire. Nous allons ici relever deux significations dont on trouve l'origine dans le monde des mathématiciens.

— d'une part, la démonstration est en mathématiques l'outil privilégié de preuve. Elle renvoie à une pratique dans la communauté des mathématiciens qui permet à la fois la communication et l'évaluation ;

— d'autre part, la démonstration est un objet mathématique pour le logicien. Elle reçoit alors une définition précise dans le cadre des théories formalisées. C'est en fait une modélisation de la pratique évoquée plus haut, dans le cadre de la logique considérée comme science des méthodes

en mathématiques.

Nous nous posons la question de savoir de quel poids pèsera chacune de ces significations dans la réalisation de l'objectif d'enseignement : « faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations » ; nous aborderons ce point dans la première partie de cet article.

« Comment apprend-on les démonstrations ? Généralement on fait des démonstrations devant les élèves, on leur demande ensuite de faire pareil. Chacun sait les difficultés rencontrées »³

Ce témoignage constitue l'introduction la plus simple à la raison de nos travaux. Pour lever les difficultés évoquées, il nous faut étudier les conditions didactiques qui conduisent les élèves à la prise de conscience de la nécessité de prouver, et ensuite à la maîtrise de cette activité. Auparavant, il est utile de savoir quelles conceptions de la preuve en mathématiques se forgent actuellement les élèves des collèges.

— En particulier, *quels rapports établissent les élèves entre l'élaboration d'explications en mathématiques, la démonstration et la notion de preuve ?*.

Notre objet dans la seconde partie de cet article est d'aborder cette question à partir d'une étude expérimentale concernant la résolution d'un problème combinatoire en géométrie.

II. Preuve et démonstration dans l'enseignement

1. L'introduction d'un savoir ou d'un savoir faire parmi les objectifs d'un enseignement peut rarement consister en un simple transfert du corps des connaissances scientifiques vers celui des connaissances enseignées. Il est nécessaire de spécifier les contenus d'enseignement relativement au contexte dans lequel ils vont prendre place ; c'est-à-dire en tenant compte des contenus déjà existants, de leur structure, ainsi que des caractéristiques du milieu où se situe cet enseignement, en particulier celles du public visé. La transformation adaptative que subit le contenu de connaissance

3. Compte rendu du groupe Géométrie premier cycle ; Journées Nationales de l'APMEP, Grenoble 1979.

scientifique pour devenir un contenu d'enseignement constitue la transposition didactique (Chevallard 1980). Par ailleurs, la pratique de l'enseignement, les conceptions et les modèles cognitifs de l'enseignant, impliquent une reprise des contenus d'enseignement et éventuellement une transformation de fait qui se compose avec la transposition didactique.

Il importe pour conduire l'étude de l'acquisition par l'élève de savoirs ou de savoir-faire de déterminer ce qu'ils sont en tant que contenus d'enseignement. En particulier pour pouvoir déterminer, du point de vue épistémologique, les rapports qu'entretiennent les connaissances construites par l'élève avec les connaissances mathématiques et identifier si les contradictions éventuellement mises en évidence trouvent leur source dans l'apprentissage, dans l'enseignement mis en œuvre, ou dans la définition même des contenus d'enseignement.

Nous abordons ici ces questions, pour la notion de démonstration, par l'étude des textes officiels (programmes, instructions, commentaires...). Du fait de l'organisation du système éducatif français ces textes déterminent la transposition didactique⁴. Ils sont la référence de la plupart des autres discours sur les contenus d'enseignement, en particulier de leur explication, de leur approbation ou de leur critique. Les manuels scolaires, quant à eux, constituent autant de réalisations de cette transposition, ils peuvent de ce fait introduire de nouvelles transformations en particulier de par leur double finalité d'exemple pour l'enseignant, et d'outil pour l'élève.

Nous présentons ci-dessous les traits les plus manifestes, les lignes de force de la transposition de la notion de démonstration, qui se dégagent des principaux textes officiels français publiés depuis 1925 concernant l'enseignement des mathématiques aux élèves âgés de 11 à 14 ans.⁵

Soulignons d'abord que le contexte de cet enseignement n'est pas réduit à la formation mathématique mais est

4. Pour Chevallard il s'agit ici de la « transposition didactique stricto-sensu ».

5. Il s'agit respectivement des âges normaux d'entrée en 6^e et en 3^e.

explicitement celui, plus général, de la formation intellectuelle des individus à laquelle concourent les mathématiques :

« apprendre à démêler le vrai du faux, à travers les contradictions des hommes, à examiner toutes choses en les rapportant à leurs principes et à raisonner sur des faits bien et dûment constatés » (Instruction du 1^{er} octobre 1946)

ou encore :

« On attend également de l'enseignement mathématique qu'il contribue pour une large part à la formation intellectuelle de l'élève de collège. Cet enseignement doit notamment :

[...]

c) Entraîner l'élève à la pensée déductive, l'inciter à la rigueur logique, lui apprendre à bâtir une chaîne de déductions, à déceler éventuellement une faille dans un raisonnement ; développer — de façon constructive — son esprit critique ; lui montrer par exemple les incertitudes que comporte une induction non contrôlée ; ... » (Circulaire du 29 avril 1977)

*
**

1925

La démonstration apparaît comme un outil de preuve :

« Il importe de faire sentir très tôt la différence entre la certitude que donne la méthode géométrique et celle qui résulte de la méthode expérimentale : c'est à cette condition que se développera le besoin de la démonstration » (Instructions du 2 septembre 1925)

Il est reconnu que la réalisation de cet objectif peut se heurter à divers obstacles ; il est en particulier relevé un obstacle d'ordre psychologique : le manque de maturité des élèves, et un autre d'ordre didactique : « la foi dans la justesse de la règle et la confiance dans l'autorité du maître contribuent à retarder l'éveil du sens critique ».

Mais les indications données pour les surmonter contiennent des éléments propres à modifier profondément la notion de démonstration, l'éloignant de fait, de sa fonction de moyen de preuve en induisant une confusion entre démonstration et processus de résolution :

« Les hypothèses ou les données étant consignées sur la figure même, par les moyens les plus propres à en assurer la vision et la portée immédiates, le maître déduirait lentement avec l'aide de la classe si possible; il résumerait à chaque instant les résultats acquis et les ferait formuler par les élèves eux-mêmes. Ceux-ci ne seraient plus déconcertés par l'assemblage des termes accumulés dans des énoncés synthétiques dont la formation serait en partie leur œuvre. On s'arrêterait davantage aux plus importants : les théorèmes prendraient corps au moment opportun; on les fixerait d'ailleurs dans la mémoire par les procédés habituels. »
 (Instruction du 2 septembre 1925)

1938

Une telle confusion se retrouve dans les Instructions Générales de 1938, lors d'un essai d'explication de ce qu'est une démonstration en recourant à une analogie avec l'arithmétique, du fait en particulier du rapprochement des deux mots « démonstration » et « raisonnement » (comme suite de déductions).

Ces textes peuvent conduire l'enseignant à présenter la démonstration comme modèle de l'activité mathématique, et donc à enfermer les élèves dans une conception strictement déductiviste de la résolution de problème, inhibitrice de la plupart des comportements heuristiques.

1946

Les Instructions Générales de 1946 pour l'enseignement des mathématiques, très nettement tournées vers la formation d'un « esprit scientifique » au sens des sciences expérimentales, explicitent une conception tout à fait à l'opposé de celle qui pourrait être induite par les textes précédents. Dans un paragraphe intitulé « Apprentissage du travail intellectuel » la résolution de problème n'est pas présentée comme un processus au déroulement linéaire, mais au contraire y sont soulignés la part du tâtonnement, de possibles retours en arrière; la mise en forme et la présentation de la solution sont considérés en dehors de la résolution.

La démonstration apparaît comme une type de preuve propre aux mathématiques; dans cette discipline « les faits ne sont pas imposés, mais se démontrent par un enchaînement logique auquel l'esprit donne son adhésion ».

1960

La démonstration qui, pour reprendre l'expression de Ch. Brunold (1960), « emporte l'adhésion de l'esprit et dispense, *pour toujours*, de toute constatation expérimentale », est désignée en tant que tel comme objectif de l'enseignement mathématique :

« Le succès sera atteint lorsque l'élève, ayant pris conscience de la différence qui sépare une vérification expérimentale, même recommencée cent fois, d'une démonstration, en viendra à ne pas se contenter de la première et à exiger la seconde. » (Arrêté du 20 juillet 1960)

Cependant, comme en 1925 et 1938, les indications pratiques données pour l'enseignement tendent à faire de la démonstration le modèle de l'activité mathématique :

« Guidé par le maître et réalisant d'abord des opérations concrètes appliquées à des objets donnés, l'enfant arrivera à acquérir la notion abstraite d'une opération de nature bien définie mais portant sur un élément indéterminé. Puis il deviendra capable d'imaginer qu'il applique une autre opération au résultat de la première sans l'avoir réalisée. Enfin, concevant la suite des mécanismes des opérations ainsi définies, il pourra prévoir certaines propriétés des résultats : il aura réalisé sa première démonstration. » (ibid.)

1971

La réforme dite *Mathématique Moderne*, reste dans le cadre des « indications permanentes de pédagogie mathématique contenues dans les instructions générales de 1946 [...] ». Suivant les Instructions de Novembre 1971, les programmes de 4^e et 3^e visent « à faire prendre conscience aux élèves, selon leur âge, de la puissance du raisonnement déductif et à leur apprendre à l'exprimer. » La démonstration figure alors, fait unique, dans le texte même des programmes. Le trait dominant de cette réforme est la construction axiomatique s'appuyant, pour semble-t-il satisfaire des exigences psychologiques de l'apprentissage, sur une pratique expérimentale ou des manipulations concrètes. En particulier, la géométrie « née de l'expérience, devra apparaître aux élèves comme une véritable théorie mathématique » à la fin de la 4^e (Arrêté du 22 juillet 1971). En fait cette pratique expérimentale reste extérieure à la mathématique.

que elle-même, en son sein la démarche intellectuelle est déductive : de points de départ d'origine expérimentale sont issus les *axiomes* desquels « seront alors déduits d'autres relations entre les êtres mathématiques [...] ; ces relations *démontrées* sont énoncées sous forme de théorèmes » (circ. 22 novembre 1971). On demande « au développement de la géométrie une formation de l'esprit par un entraînement au raisonnement déductif » (*ibid.*)

1977

Lors de la réforme suivante, fin des années 70, la démonstration est évoquée comme outil de preuve dans un paragraphe sur l'initiation au raisonnement des Instructions d'avril 1977, en indiquant que l'on montrera « la différence entre une démonstration et une simple constatation expérimentale » ; si elle apparaît dans la circulaire fixant les objectifs, c'est pour préciser qu'« habituer l'élève à s'exprimer clairement » recouvre entre autres choses : « exposer une démonstration ».

Par contre, on trouve dans ces textes, exprimés en termes d'objectifs généraux de la formation intellectuelle, des éléments constitutifs de la démarche de preuve : inciter à la rigueur logique, déceler une faille dans un raisonnement, développer l'esprit critique, trouver des contre-exemples pour infirmer une proposition.

Ces textes restent cependant largement marqués par une conception déductiviste de la démarche en mathématiques, dont on dit dans les premières lignes des Instructions d'avril 1977 qu'elle a nécessairement un caractère quasi linéaire. Les commentaires de l'Académie des Sciences introduisent l'idée, reprise par les Instructions de novembre 1978, de la compréhension, par l'élève de « règles du jeu » qui organisent l'activité mathématique. Dans une telle conception, produire une démonstration c'est satisfaire à une de ces règles. La démonstration n'apparaîtra pas comme un outil de preuve pour l'élève mais comme la formulation d'un raisonnement déductif, comme le produit de l'application de règles déterminées ; on rejoint en fait la conception déductiviste.

Cet examen des textes officiels confirme que la notion de démonstration appartient aux contenus de l'enseignement des mathématiques au collège. Cependant, elle apparaît rarement dans la nomenclature même des programmes. Nous pensons que cela tient au fait que cette notion est fortement rattachée à un objectif plus global, qui est celui de la formation des élèves à la méthode en mathématique, dont la présentation trouve plus naturellement sa place dans le développement des commentaires ou des instructions.

La transposition didactique déterminée par ces textes conserve bien à la démonstration les caractéristiques et le sens qu'elle a dans la communauté mathématique, en particulier elle est introduite en tant qu'outil de preuve dans l'activité du mathématicien. Mais ces mêmes textes sont à l'origine d'une transformation de fait par la pratique de l'enseignement qui consiste en une réduction de la démonstration à un calcul logique.

En effet les indications pratiques données pour l'enseignement ne prennent pas en compte l'engagement social de la démonstration, condition nécessaire à son existence en tant qu'outil de preuve. Seule est retenue la présentation de sa structure en tant que calcul : identification des hypothèses, de la conclusion, règles de déduction, exigence d'explicitation des théorèmes utilisés...

La consultation de manuels scolaires récents, destinés à la classe de quatrième, indique qu'assez largement cette réduction est réalisée. Il reste à faire une étude détaillée pour savoir, suivant les niveaux scolaires et les époques, quelle image ils donnent de la notion de preuve en mathématique et plus particulièrement de la démonstration.

Enfin il faut relever que cette réduction va de pair avec une présentation de l'activité mathématique à travers le filtre déductiviste. Mais il s'agit peut être moins là d'un effet didactique que d'un effet épistémologique.

II. Cadre théorique et de méthode pour une approche expérimentale

1. *Prouve et situation*

Nous avons besoin d'élaborer des preuves principalement dans deux types de circonstances : avant de prendre une décision importante, pour transmettre à autrui le caractère de vérité d'un énoncé qui est déjà acquis pour nous-mêmes. Dans les deux cas l'action est liée à un enjeu : le risque qu'il peut y avoir à se tromper, celui que l'on court à ne pas convaincre. En fait apparaissent ici deux aspects majeurs de la preuve :

- la nécessité de *prouver est liée à la situation* dans laquelle on se trouve ;
- *la preuve est un acte social*, elle s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) que l'on veut convaincre.

Ces aspects sont en général effacés par la pratique de l'enseignement. En effet cette pratique est le plus souvent associée à un contrat didactique, qui reste implicite, suivant lequel le maître reçoit l'explication en tant qu'objet (qu'il va accepter ou rejeter) et non pas en tant qu'instrument de preuve. Dans ces circonstances l'élève a toutes chances de se forger une image de la preuve qui la détourne de sa fonction, comme en témoigne par exemple ces propos d'élèves relevés lors d'une enquête anglaise (Galbraith, 1979) :

— Prouver quelque chose en math signifie que vous avez su le faire et cela prouve combien vous êtes bon pour ces questions et que vous les avez comprises. (13 ans)

— Cela signifie montrer, peut-être de différentes façons, quelque chose que quelqu'un a déjà montré, mais ça ne montre rien de nouveau. (15 ans)

On peut remarquer que dans un tel contexte, l'élève risque moins de percevoir son propre discours comme une explication que comme une description, pour montrer à l'enseignant son savoir, du processus mis en œuvre ou des connaissances utilisées.

Une autre conséquence peut être que l'élève cherche à reproduire un modèle (modèle-maître ou modèle-manuel), pour résoudre un problème ou formuler sa solution, ceci

pouvant aller jusqu'à la perte du sens. Une expérience telle que celle de « l'âge du capitaine » (IREM de Grenoble, 1980) est un indice spectaculaire de ce phénomène⁶.

Aussi, pour étudier les conceptions de la preuve en mathématiques que se constituent les élèves actuellement, la question du choix d'une situation expérimentale et l'analyse de ses caractéristiques sont fondamentales. Elles sont des éléments déterminants de l'attribution d'une signification aux faits qui seront observés.

2. Approche expérimentale par des situations d'interactions

L'étude bibliographique de Stein (1981) sur la preuve dans l'enseignement mathématique montre qu'il existe assez peu de recherches de type expérimentale sur le fonctionnement de cet enseignement, sur l'apprentissage ou sur les conceptions des élèves, et que la plupart sont assez récentes.

Les premiers travaux, comme ceux de Reynolds (1967) et Bell (1976), reposent en général sur l'analyse de tests de type « papier-crayon » auxquels sont soumis les élèves. Reynolds recourt aussi à des entretiens cliniques de type piagétien, mais la notion de preuve est réduite à la démonstration et une bonne partie de ses recherches porte en fait sur les opérations élémentaires de la logique.

Dans les approches de type « papier-crayon » l'interlocuteur de l'élève est l'observateur-enseignant et l'épreuve peut lui apparaître comme une interrogation de type scolaire. Nous avons reproduit (Balacheff, 1979) certaines expériences de Bell et nous avons pu constater que la plupart des élèves ne dépassaient pas le niveau de l'affirmation d'une conviction, éventuellement fondée sur l'observation de quelques cas particuliers. En fait, quelques observations cliniques complémentaires nous ont permis de constater un décalage important entre ce que l'élève fait effectivement pour s'assurer d'un résultat et ce qu'il formule pour l'enseignant.

D'ailleurs des travaux plus récents de chercheurs de Nottingham recourent à des entretiens cliniques en complément

6. « Sur un bateau il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ? » *Ibid.* p. 235.

de l'utilisation de tests (Galbraith 1979, Jeffery 1978). Cependant nous faisons une réserve sur ces approches dans la mesure où l'observateur y intervient dans l'activité de l'élève. Il peut ainsi agir sur ses choix, attirer son attention sur des faits qu'il avait négligés ou introduire de nouvelles informations, et donc il est susceptible de modifier de façon profonde le comportement de l'élève.

L'élaboration d'explications n'a de sens que s'il peut s'établir un échange entre les interlocuteurs, et le fait qu'une explication constitue une preuve doit pouvoir être défendu. Une dialectique de la preuve ne peut se développer si l'observateur (ou l'enseignant) apparaît à la fois comme interlocuteur et juge. Dans une expérience d'enseignement sur ce sujet Jeffery (1978) note que les élèves organisés en groupes de travail, ne discutaient des conjectures contradictoires émises par différents groupes qu'après que l'enseignant les y ait incité.

Une condition minimale, que nous voulons réaliser dans notre approche expérimentale, est que l'observateur organise la situation, c'est-à-dire les relations entre les individus, mais qu'il reste extérieur à son fonctionnement. C'est dans la situation elle-même que doit se trouver le moteur de la prise de conscience de la nécessité de la preuve et les critères de décision, et non dans l'attente et la compétence de l'observateur.

Pour réaliser cette condition nous utilisons des *situations d'interaction et de communication* dans lesquelles les élèves ont pour tâche commune la résolution d'un problème. Les interlocuteurs étant des pairs, nous nous attachons à ce que la situation ne confère pas a priori de pouvoir ou d'autorité à l'un d'entre eux.

Le dispositif que nous envisageons a pour première caractéristique d'être une *situation de formulation* (Brousseau 1978); les élèves ne peuvent satisfaire à la consigne de résoudre en commun un problème sans recourir à la verbalisation ou à des représentations.

La communication n'est alors possible que s'ils parviennent à s'accorder sur un langage commun. Ceci peut provoquer une dialectique de la formulation dans laquelle nous verrons se préciser les notions utilisées.

Nous voulons de plus, que le dispositif expérimental ait pour autre caractéristique d'être une *situation de validation*. Le conflit à la fois social et cognitif qui peut naître de la présence « dans une même situation et en même temps de deux centrations opposées, ne peut être nié aussi facilement qu'un conflit résultant d'oscillations entre centrations individuelles provisoires et successives » (Mugny et Doise 1981). Ainsi à l'occasion, par exemple, du choix d'une stratégie, de celui d'une opération à réaliser, ou à propos de la signification d'un concept, les élèves auront à déterminer des critères communs pour accepter ou refuser une assertion. Ces conflits les engagent dans une *dialectique de la validation* (Brousseau 1978) et des processus de preuve au terme desquels ils doivent parvenir à un consensus sur la validité des décisions qui sont prises.

3. *Spécifications pour l'expérimentation*

Le seul fait de placer les élèves dans une situation d'interaction ne garantit pas le fonctionnement d'une dialectique de la validation. Il peut apparaître des phénomènes, de type social ou affectif, assez puissants pour déplacer le débat hors du domaine cognitif qui nous intéresse. En particulier, dans la démarche de preuve, des arguments d'autorité peuvent se substituer à une argumentation portant sur les contenus ; du fait d'un engagement socio-affectif important, des élèves peuvent délibérément soutenir des propositions fausses ou refuser des énoncés vrais.

Pour que soit engagé un processus de preuve lors de la résolution du problème, il faut qu'il y ait *un risque dû à l'incertitude* et donc un *enjeu* qui vaille la peine que l'on cherche à s'assurer du résultat. Pour que les interlocuteurs aient intérêt à formuler la solution élaborée et à la discuter, il faut que la situation contienne *un enjeu à la contradiction* ; ce qui suppose aussi *un enjeu à admettre* sans lequel le refus de la contradiction peut devenir une stratégie de défense. Ainsi la situation doit à la fois justifier et susciter la prise de conscience du risque qu'il y a à admettre un théorème faux et de celui qu'il y a à refuser un théorème vrai.

Enfin la durée de fonctionnement d'une telle situation

doit être assez longue pour permettre l'accomplissement des interactions. *Le temps est une variable déterminante* pour que puisse se développer une dialectique de la validation ; pour que le refus de propositions puisse être suivi d'un retour sur les objets et les opérations en jeu dans la résolution du problème ; pour que puisse venir à maturité un code commun de communication.

4. Cadre pour l'analyse

4.a Quelques remarques

Dans la communauté des mathématiciens domine un point de vue sur l'activité mathématique que l'on pourrait qualifier de classique. La conception développée par Poincaré dans sa conférence sur « L'invention mathématique » (1908) en est un exemple célèbre ; la résolution d'un problème est composée de trois grands moments : la maturation qui est une phase de travail sur le problème, la découverte, résultat d'une inspiration ou d'une intuition, la vérification c'est-à-dire l'élaboration de la démonstration.

La conséquence de la dominance de ces points de vue est le développement de deux grandes familles de travaux sur la résolution de problèmes : d'une part, ceux qui s'occupent du « travail » effectué sur le problème et se désintéressent de la « vérification », (on trouve ici les recherches du type « information-processing ») ; d'autre part, ceux qui renoncent à étudier ce « travail », parce que frappé d'irrationalité, et ne se placent que du point de vue du calcul logique pour aborder l'étude de l'élaboration de la démonstration (vérification).

L'attention, dans les travaux relevant de cette seconde approche, est le plus souvent centrée sur les dysfonctionnements logiques des élèves. La réduction est trop forte, comme en témoignent les travaux de Siwek (1973) qui montrent bien qu'un renforcement de l'enseignement de la logique ne suffit pas à modifier sensiblement les performances des élèves dans la résolution de problèmes mathématiques.

La première approche fait le plus souvent référence aux travaux de Pólya pour, en général, n'en retenir qu'une taxonomie. Comme le remarque Kilpatrick (1981), dans

hypothèse jusque là implicite, récusation de la contradiction, reconnaissance d'exceptions, formulation de conditions...

En fait, ceci revient à considérer que « la résolution du problème prendra pour l'élève l'allure d'une sorte de démarche expérimentale » (Brousseau 1976). Il y a là une difficulté importante, relevée déjà dans Lakatos (Hersh 1978), du fait de la nature des objets concernés : il s'agit d'objets mathématiques et non d'objets du monde physique. La nature même des contradictions en est affectée, en effet un rôle prépondérant est de ce fait donné aux conceptions des élèves, disons grossièrement aux « arguments intellectuels » contre les « arguments matériels ». Ainsi l'étude de la résolution de problème ne peut être menée de façon indépendante des contenus mis en jeu, d'une part pour leur spécificité mathématique, mais surtout parce que notre connaissance des conceptions des élèves tient une place déterminante dans la signification que nous pourrions donner aux faits observés.

III. Le cas d'un problème combinatoire en géométrie

1. Description du dispositif expérimental

La situation expérimentale que nous avons utilisée organise les interactions et la communication entre huit élèves répartis en deux équipes de quatre. Chaque équipe est à son tour composée de deux binômes (c'est-à-dire une paire d'élèves) qui ne peuvent communiquer que par écrit, pour cela chacun est placé dans une salle différente (figure page 283).

La consigne pour chaque équipe est de donner une solution commune, avec la meilleure explication possible, à un problème. Ce problème est le même pour les deux équipes. La décision sur la meilleure explication, pour le choix de l'équipe gagnante, doit être prise à la suite d'un débat entre les élèves à la fin de la séquence.

Cette situation expérimentale réalise une situation d'interaction et de communication telle que nous l'envisageons plus haut. Elle se présente comme une situation de jeu. L'enjeu social et affectif lié au fait de gagner, et donc la

une réflexion sur les travaux américains, le nom de Pólya est invoqué pour autant qu'il permet l'économie d'une réelle analyse des processus de résolution. Trop souvent des grilles d'analyse, authentifiées par le nom de leurs auteurs, servent de cadre théorique alors qu'elles n'en sont que le produit. Les catégories de Pólya constituent un outil qui n'a de sens que si on le replace dans le cadre où il a été élaboré, faute de quoi les recherches débouchent sur des résultats dont on ne peut évaluer ni la signification, ni la pertinence.

4.b *Le modèle de Lakatos*

Lorsque Glaeser (1976) aborde ces questions, il est clair qu'il prend l'expression « résolution de problème » dans le sens que nous lui avons donné au début de cet article. Il souligne alors fortement la structure cyclique du processus de résolution. Au terme de chaque cycle, il place une phase de vérification : ce fait est fondamental. Nous voudrions aller plus loin et affirmer *la dépendance* des cycles, la vérification joue certainement un rôle central dans les processus intellectuels associés au passage d'un cycle à un autre.

Nous postulons que *le moteur de la résolution d'un problème se trouve dans les processus dialectiques de validation qu'il requiert.*

L'idée est déjà dans les ouvrages de Pólya et trouve un développement épistémologique essentiel chez Lakatos (1976). La thèse développée par Lakatos est que la pratique des mathématiques, l'activité des mathématiciens et donc les processus qui soustendent la découverte en mathématique, relèvent d'une dialectique preuve-réfutation. Il décrit un modèle des rapports entre la génération de preuves et leur contradiction à l'aide de contre-exemples qui va au-delà de la dualité vrai/faux.

C'est en nous plaçant dans ce cadre que nous analysons les conduites observées chez les élèves. En particulier en examinant le fait qu'ils prennent ou non conscience de contradictions ; en examinant leurs comportements, lorsqu'ils relèvent une contradiction, relativement à l'ensemble des comportements possibles tels que Lakatos les envisage : rejet d'une conjecture, mise en évidence d'une

perception du risque de perdre, doivent être suffisants pour les élèves (ils ont entre dix et seize ans) pour qu'avant de prendre une décision ils cherchent à *réduire leur incertitude* en s'engageant dans une démarche de preuve. Par ailleurs soulignons qu'au sein de chaque équipe (il n'y a pas de communication entre les deux équipes), les élèves n'ont pas intérêt à soutenir des propositions fausses, ni à refuser des propositions vraies, une telle attitude les conduisant à perdre au jeu dans lequel ils sont solidaires.

La séparation physique des binômes d'une même équipe oblige les élèves à la formulation par écrit de leurs propositions, de leurs critiques ou de leurs réponses à des critiques. De plus, cette contrainte va provoquer un ralentissement du déroulement des échanges et donc faciliter leur analyse; le phénomène dans le dynamisme de l'échange oral est observable dans le cours du fonctionnement de chaque binôme. Des obstacles vont certainement être attachés à l'expression écrite; leur dépassement, c'est-à-dire le fonctionnement de la formulation, fait partie du processus que nous voulons étudier.

Enfin, la durée de l'expérience n'est pas fixée a priori. Ce sont les élèves, dans chaque équipe, qui décident de son interruption lorsqu'ils estiment avoir accompli la tâche proposée. Ceci permet en particulier de ne pas interrompre prématurément, et de façon arbitraire, le processus de résolution dont la fin naturelle est le fait d'une décision de ceux qui l'ont engagé.

Nous rappelons ici notre hypothèse, au vue de l'analyse théorique et méthodologique développée plus haut, que cette situation expérimentale est bien propre à l'étude des conceptions qu'ont les élèves de la preuve en mathématique et en particulier qu'elle nous permettra d'examiner les rapports entre élaboration de l'explication, démonstration et preuve.

2. *Mise en place des observations*

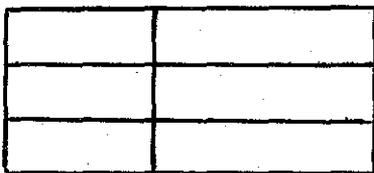
Les observations que nous rapportons ici ont eu lieu au cours du premier trimestre de l'année 1980 dans un collège de la région de Grenoble. Elles ont porté sur deux groupes

de huit élèves volontaires : un groupe d'élèves de sixième, un groupe d'élèves de troisième.

2.a *Le problème*

Le problème retenu prend place dans un univers conceptuel familier aux élèves concernés, c'est celui des figures élémentaires de la géométrie plane. Il est assez « facile » pour que tous les élèves puissent en aborder la résolution, par ailleurs il sort des types de problèmes habituellement rencontrés en classe donnant ainsi aux élèves une certaine liberté dans l'analyse de la situation. Son énoncé est le suivant :

Combien y a-t-il de rectangles dans cette figure ?



L'un des rectangles de la figure proposée est un carré. Nous voulons observer, dans le cas où ce fait est perçu par des élèves, s'il est l'objet d'un conflit de conceptions (la séparation en deux classes disjointes des rectangles et des carrés est très répandue) et comment ce conflit est éventuellement réglé.

La résolution de ce problème dépend de façon essentielle des conceptions que l'on a des objets à dénombrer et de l'analyse faite de la figure. Nous relevons ci-dessous les cas qui correspondent aux usages les plus fréquemment rencontrés dans l'enseignement :

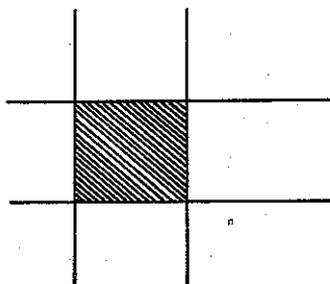
— le rectangle comme élément d'un pavage ; une solution consiste à définir a priori un mode de structuration de l'ensemble des solutions qui permette de ramener le problème à celui d'un dénombrement dans des classes plus petites. Un critère naturel est celui de la taille des rectangles en nombre de rectangles élémentaires ;

— le rectangle comme intersection de deux bandes ; chaque bande étant complètement déterminée par deux points sur le côté qu'elle coupe ; dans le cas général s'il y a n points

sur la longueur et m points sur la largeur alors il y a $C_n^2 C_m^2$ rectangles dans la figure;

— le rectangle comme ensemble de quatre points; on est alors ramené à un dénombrement de nœuds sur un quadrillage;

— le rectangle comme ensemble de segments; ceci oriente éventuellement vers des formules de récurrence, telle que par exemple $f(n+1, p) = f(n, p) + (n+1) C_{n+2}^2$ pour une figure à $n+1$ lignes horizontales et p lignes verticales.



En fait c'est le premier type de solution qui domine dans les observations cliniques que nous avons faites avant l'expérience comme pendant l'expérience elle-même. Vraisemblablement parce qu'elle correspond à une approche perceptive de la figure et que sa mise en œuvre ne présente pas de difficultés mathématiques particulières.

2.b Présentation de la situation aux élèves

Phase I:

Ils sont avertis que leur activité va être observée, que leurs dialogues vont être enregistrés, que notre but est d'observer leur activité mathématique.

Le jeu est ensuite présenté:

- il oppose deux équipes de quatre élèves;
- l'objectif est: « résoudre un problème en proposant la meilleure explication possible ». L'animateur insiste sur le fait que toute l'équipe doit se mettre d'accord sur la solution du problème et la meilleure explication;
- l'organisation en équipe, en binôme dans les équipes et de la communication au sein des équipes est décrite;
- l'équipe gagnante sera celle qui aura résolu le problème et donné la meilleure explication. (L'animateur insiste sur ce dernier point).

Après avoir laissé les élèves poser des questions à propos

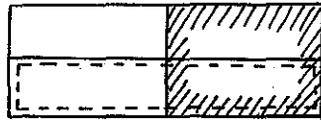
de cette présentation, on leur demande de se concerter pour former eux-mêmes les deux équipes.

Phase II:

Un animateur prend à part une équipe, un autre animateur s'occupe de l'autre. Il s'agit de reprendre les consignes avec les élèves et de s'assurer qu'ils ont compris le but et l'organisation du jeu. Nous laissons ensuite les élèves poser les questions qu'ils désirent puis se concerter pour constituer les binômes. Les salles sont alors attribuées à chaque binôme, ensuite les élèves sont regroupés pour la phase suivante.

Phase III:

Le problème est présenté aux élèves. La figure ci-dessous est dessinée au tableau; l'animateur montre, en marquant deux exemples à la craie de couleur, qu'on peut y découvrir des rectangles. Il énonce ensuite: « On va vous donner une feuille avec un dessin de ce genre, il faut trouver combien il y a de rectangles dans la figure ».



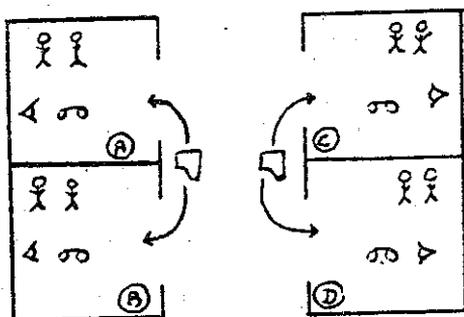
La figure tracée au tableau est effacée, les feuilles annoncées sont distribuées, puis les élèves se dispersent dans les salles qui leur ont été attribuées.

2.c Quelques remarques pratiques

Le schéma ci-dessous fait apparaître les moyens que nous avons utilisés pour le recueil des données: enregistrement et tenue d'une chronique pour chaque binôme, chronique des échanges.

De plus, chaque observateur met à la disposition des élèves, à volonté, du papier blanc ou du papier portant le dessin de la figure. Il leur fournit des feutres pour écrire, ceci de façon à ce que dans une même équipe les deux binômes utilisent des couleurs différentes. Il possède une pochette de 12 crayons de couleur dissimulée aux élèves jusqu'à ce qu'ils en manifestent le besoin. Ce dernier détail a été introduit à la suite des pré-expérimentations réalisées

pour régler le dispositif expérimentale : mise au point de la consigne, du comportement des observateurs...

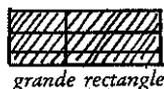
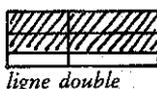
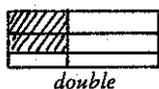
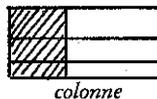
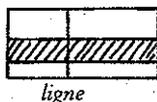
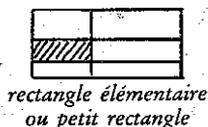


X : élève, 4 : observateur,
 S : magnétophone, M transport de messages

Dans les limites du temps dont nous disposons, nous n'avons pas pu assurer un déroulement satisfaisant à la dernière partie de la séquence (débat sur les explications proposées). Elle n'apparaîtra donc pas dans notre analyse. La durée nécessaire à la résolution du problème et à l'élaboration de l'explication n'a pas été fixée à l'avance, chaque équipe décidant à son gré de la fin de cette phase. Pour chaque expérience, cette durée a été d'environ 1h 20.

Remarque :

Dans la suite, nous utiliserons pour désigner les rectangles le vocabulaire suivant, assez voisin de celui utilisé par les élèves :



3. *Le cas des élèves de sixième*

Nous rendons compte ici des résultats tirés de l'étude faite sur les élèves de sixième, l'analyse détaillée et les protocoles⁷ sont disponibles sous forme d'un rapport de recherche (Balacheff 1980).

3.a *Recherche de la solution, démarche de preuve*

Après une tentative d'énumération empirique, la plupart des élèves mettent en œuvre une procédure soustendue par une structuration a priori de l'ensemble des solutions : petits rectangles, lignes, colonnes, rectangles doubles, grand rectangle. Les classes de rectangles-solutions qu'ils dégagent ainsi proviennent d'une analyse perceptive de la figure.

Cela signifie qu'ils retiennent un critère de classification, cependant ils ne le prolongent pas en une procédure d'énumération systématique explicite. Même dans le cas où les élèves identifient a posteriori leur classification :

« On les a comptés un par un, puis deux par deux, trois par trois, puis on a compté le grand » (B3)⁸.

par opposition à une procédure empirique :

« Au début on a compté quoi ? ... à vue d'œil »

(Les élèves cités dans cet exemple sont parvenus à énumérer 16 rectangles, ils ne tirent pas parti de leur observation pour une exploration systématique. C'est dans un échange avec leurs partenaires qu'ils obtiendront les deux rectangles manquants).

Tous les élèves, à un moment ou à un autre de la séquence, se posent la question de savoir s'il y a « d'autres rectangles ». Cette incertitude sur le résultat acquis comme résultat définitif les renvoie en général à une reprise des recherches et non à une réflexion sur la procédure utilisée.

Un obstacle à cette réflexion se trouve peut être dans la perception par les élèves du type de problème que nous avons choisi pour cette étude : il n'y a pas contradiction entre deux résultats successifs R_1 , R_2 si $R_2 > R_1$, ce qui est en général le cas, simplement R_1 passe du statut de résultat

7. Transcription des enregistrements et leurs commentaires.

8. Référence permettant de retrouver la citation dans le rapport de recherche.

à celui de résultat intermédiaire. Lorsque cet événement s'est produit plusieurs fois, les élèves marquent leur incertitude, mais dans le même temps tout se passe comme si la tâche : « Trouver tous les rectangles dans la figure », était transformée en la tâche : « Trouver le plus possible de rectangles dans la figure ». Le but essentiel est alors de trouver de nouveaux rectangles et non de fonder le résultat obtenu jusque là. Ils ne parviendront pas à formuler la conjecture : il n'y a pas d'autres rectangles ; mais à partir d'un certain moment ils avoueront leur incapacité à en trouver d'autres. Les élèves peuvent alors rendre leur réponse en ayant satisfait à la consigne telle que nous pensons qu'ils l'interprètent.

A l'incertitude fondamentale : a-t-on dénombré tous les rectangles et eux seulement ? Est substituée une incertitude sur le résultat intermédiaire qui s'exprime par deux questions :

— N'y a-t-il pas de solutions oubliées ? Ou encore la procédure, (telle qu'elle a été perçue) a-t-elle été correctement mise en œuvre ?

— N'y a-t-il pas de solutions comptées en double ?

Il est suffisant d'avoir des réponses positives pour être assuré que le résultat obtenu est un résultat intermédiaire : le mieux que l'on obtienne pour l'instant. Une vérification par réexécution de la procédure d'énumération apparaît alors suffisante pour contrôler sa bonne mise en œuvre et, vu leur faible nombre, pour constater qu'il n'y a pas de rectangles cités deux fois. La première question n'exprime pas une exigence suffisante pour que la procédure soit autrement examinée.

Si notre propos était de décrire une genèse de la notion de preuve, nous désignerions ces comportements de vérification comme une étape importante de cette genèse. Mais il ne s'agit pas d'une véritable démarche de preuve en ce qu'il n'y a pas d'examen du caractère de nécessité du résultat, même après la manifestation d'une incertitude. Nous avons cependant pu observer des comportements qui seront fondamentaux dans la recherche et l'élaboration de preuves, dans deux circonstances :

La recherche de nouveaux rectangles :

Lorsque les élèves ont pour projet, en particulier explicite, de trouver de nouveaux rectangles, leurs tentatives passent souvent par un *retour sur la procédure*. Il semble que cette procédure soit perçue globalement et non comme articulation d'opérations élémentaires, ce qui constitue un obstacle majeur à l'aboutissement d'une démarche de preuve. Ce fait contraste avec les remarques du type : « *C'est mieux de procéder par ordre* » (A5), qui montrent que le caractère systématique de la procédure est cependant perçu.

Le rejet des carrés

Les élèves font aussi un *retour sur les objets* à énumérer pour en découvrir de nouveaux (tentative d'un élève pour retenir dans l'énumération la feuille rectangulaire qui constitue le support matériel de la figure donnée) ou pour en éliminer certains. Ainsi le rejet ou l'acceptation des carrés est l'occasion d'un débat s'appuyant sur des arguments renvoyant à des propriétés mathématiques :

« Un carré c'est un rectangle qui a quelque chose de particulier... dont la largeur est égale à la longueur » (A12).

ou à des vérifications par mesure (cas le plus fréquent). Le plus souvent les décisions sont prises non pas à la suite d'un consensus sur les rapports qu'entretiennent les objets carré et rectangle, mais sous la pression d'arguments d'autorité.

— J'te dis qu'c'en est un. Ça en est un.

— J'te dis non !

— Aïe, ça sert à rien de me taper, j'le sais qu'ça en est un. Ça... ça ! en est un. Toutes façons les autres hein, ils en ont bien mis qu'il y en avait 11... 1... 2... 3...

— Eux c'est eux, nous c'est nous...

— Eh ouais... mais on travaille ensemble (D)

3.b L'élaboration d'explications

Nous retrouvons sur l'analyse de la production d'explication ce que nous avons observé avec des élèves un peu plus jeunes (Balacheff 1979) :

Expliquer c'est d'abord *formuler un texte*. Il en découle, pour satisfaire à la consigne un effort important pour s'exprimer correctement :

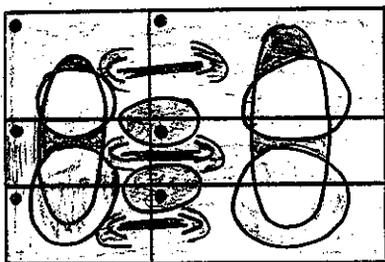
— Il faut faire des phrases en français parce que... quand on fait un

problème, comme réponse on marque pas... euh...

— Machin... égale... euh... petit rond... » (A13).

ou pour réaliser une bonne présentation (soin de l'écriture, de la mise en page).

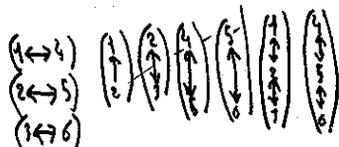
Expliquer le résultat du dénombrement, c'est *montrer comment il a été obtenu*: les élèves visent à décrire la procédure qu'ils ont utilisée. On retrouve ici la difficulté relevée dans le paragraphe précédent, décrire la procédure exigerait qu'elle soit décomposée en opérations élémentaires puis reconstituée en faisant apparaître les articulations de ces opérations; ceci n'est pas réalisé et en fait les élèves donnent une description des rectangles énumérés en faisant apparaître la classification associée à la procédure adoptée. Voici, ci-dessous, les explications retenues par chacune des équipes :



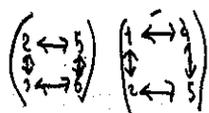
petit rond = $\overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ} = 6$ rectangles
 rond moyen = $\overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ}, \overset{1}{\circ} = 4$ rectangles
 grand rond-ovale = $\text{---}, \text{---} = 2$ rectangles
 flèche = $\leftarrow, \rightarrow, \leftarrow, \rightarrow = 3$ rectangles
 grand rectangle = $\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = 1$ rectangle
 ovale moyen : $\text{---}, \text{---} = 2$ rectangles
 $6 + 4 + 2 + 3 + 1 + 2 = 18$
 Dans la forme il y a 18 rectangles

Texte final de l'équipe A-B

1	4
2	5
3	6



(toute la figure)



il y a 18 rectangles: regardez cela que l'on
vous a fait: rendez la feuille en marquant oui ou

~~non~~ nom vous avez raison

Bravo

Conclusion:
il y a 18 rectangles dans cette figure

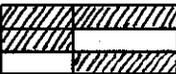
Texte final de l'équipe C-D

Lors de l'élaboration de l'explication nous observons le fonctionnement d'une dialectique de la formulation qui atteste que la situation expérimentale construite réalise bien une situation de formulation. Il s'agit, pour l'énumération que les élèves veulent formuler, de mettre au point un codage dont les exigences sont :

- l'absence d'ambiguïté ;
- la possibilité d'être décodé.

Voici un exemple dans lequel l'interaction entre les élèves

pour la mise au point d'un code s'appuie sur l'utilisation de contre-exemples :

Bertrand	<i>Et c'ui-là, comment on peut le dire c'ui-là? ... et c'ui-là.</i>	Il s'agit des lignes doubles.
Eric	<i>Quel c'ui-là? Comment?</i>	
B	<i>C'ui-là comment on pourrait le dire? Le décrire?</i>	
E	<i>4 ensembles groupés ... 4 ré ... 4 rectangles groupés.</i>	Énoncé d'une désignation
B	<i>Ouais, ben ... ça pourrait être 1 - 2 - 3 - 4</i>	Contre-exemple:
E	<i>Groupés, j'ai dit!</i>	
B	<i>1, 2, 3, quat'.</i>	Le contre-exemple est récusé.
E	<i>C'est ... ça forme pas un rectangle</i>	Contre-exemple:
B	<i>Non, ben ...</i>	
E	<i>Eh ben, j'ai mis 4 rectangles groupés formant un rectangle.</i>	Modification de la désignation pour écarter le contre-exemple.
B	<i>4 rectang' ... 4 vides groupés.</i>	

Un tel processus, que nous n'avons observé qu'une seule fois, suppose un niveau de socialisation important des élèves, or nous avons pu relever que cela n'est pas le cas pour la plupart d'entre eux.

La plupart des élèves ne parviennent pas à se décentrer, c'est-à-dire à prendre leur propre activité comme objet de réflexion. Certes, la nécessité d'être compris par les partenaires est explicitée :

- Comment on va leur montrer ça ? ...
- Ouais on va leur y faire ... mais pour qu'ils comprennent mieux ça va être dur » (C).

mais cela ne débouche pas sur l'analyse de la formulation en cherchant à découvrir les problèmes éventuels de décodage. L'élève tire sa confiance en l'explication qu'il formule de son propre sentiment de clarté : ce qui est suffisamment évident pour lui le sera nécessairement pour les autres.

De cette marque d'égoïsme découle un refus d'auto-critique qui débouche sur l'utilisation massive d'arguments d'autorité :

- Moi j' trouve qu' c'est mieux comme ça.
- Ouais mais on est deux contre un ».

ou sur des situations de blocage dans lesquelles chacun reste sur sa position. Ces comportements sont renforcés par l'importance qu'a l'évaluation des partenaires, l'estime, qui fait que certains ne seront pas a priori écoutés.

4. *Le cas des élèves de troisième*

Les protocoles de l'observation dont nous rendons compte ici, et l'analyse détaillée sont publiés sous forme d'un rapport de recherche (Balacheff 1981).

4.a *La résolution du problème, démarche de preuve*

Le problème est abordé par les élèves de deux façons très différentes :

— les uns énoncent une stratégie globale avant d'aborder l'énumération :

« On commence par le plus grand et puis on va jusqu'au plus petit » (A2).

« ... qu'on parte tout d'abord des plus grandes figures ... puis après on verra combien y en a d'dans » (B1).

Cependant, au-delà de ce plan grossier, les élèves gardent dans leur première approche une démarche empirique.

— les autres commencent d'emblée le comptage des rectangles-solutions d'une façon empirique ou structurée, mais sans que dans ce dernier cas la structure elle-même soit explicitée.

Tous les élèves évoluent vers l'énonciation d'une procédure d'énumération faisant apparaître son caractère systématique. Cependant, dans les premières communications entre binômes, il se peut que seule l'énumération soit énoncée, elle est alors considérée comme témoin de la procédure utilisée. C'est principalement dans la phase d'élaboration d'une explication que les élèves seront conduits à expliciter par écrit la procédure utilisée, et même à l'améliorer, sous la pression des exigences de la communication.

En voici un exemple constitué d'extraits des discussions au sein d'un binôme qui a numéroté les rectangles élémentaires de 1 à 6.

1	2
3	4
5	6

« Si tu commences à prendre 1-4, t'en finiras plus, t'auras 1-2, 1-3, 1-4, ça t'en fras 3. Tu fais ça avec chaque, ça fait 1, 2, 3, 4, 5 et 6... ça fait 18 rien qu' pour les paires ». (D10)

« Il faut dire qu'on prend chaque nombre l'un après l'autre avec 1... toutes les solutions dans... un ensemble, avec 2, avec 3, avec 4, avec 5, avec 6... » (D11).

« Tu mets 1-2 pareil que... équivalent à 2-3, euh... 3-4 équivalent à 4-3. Tout le long on mettra comme ça. C'est pas grave ça, après au bout d'un moment t'as pas b'soin de le lui mettre, il comprend l'mec » (D12).

Dans tous les binômes la certitude dans le résultat (18) du dénombrement obtenu est acquise assez rapidement par au moins un élève. Pour deux binômes il n'y a pas de motifs explicités, mais il est vraisemblable que comme pour les deux autres la conviction soit fondée sur la reconnaissance du caractère systématique de la procédure :

« J'en suis sûre... non, tu commences par le plus simple : les couples de 1, puis de 2... de 3 et de 4... et de 5... de 6 plutôt, regarde : 1, 2, 3, 4, 5, 6 » (A5).

Il apparaît que ce résultat est bien la réponse à la requête « dénombrer tous les rectangles » et non à : « trouver le plus grand nombre possible de rectangles », comme nous l'avions observé pour les élèves de sixième. Il y a cependant

pour deux binômes un glissement du problème de dénombrement vers le problème d'énumération qu'il recouvre : ils n'énonceront pas le résultat dans leur explication.

La question de la preuve du résultat obtenu n'est pas abordée de façon explicite ; elle n'est pas envisagée pour répondre à une nécessité relative à l'activité de résolution du problème mais pour satisfaire à la consigne donnée pour cette épreuve :

« [montrer] Comment est-ce qu'on a trouvé 18 » (B3) « ... Qu'est-ce qu'on va démontrer là d'dans... » (C1) « ... mais mathématiquement comment il faut mettre » (D2).

4.b *L'élaboration d'explications*

Le débat au cours de l'élaboration de l'explication se développe autour de deux thèmes : celui de son statut relativement aux mathématiques, celui de son intelligibilité.

Le statut de l'explication et ses conséquences

Les élèves prennent clairement comme référence pour rédiger leur explication les types de textes qu'ils rencontrent dans la classe de mathématique ; ceci fait peser sur leurs productions de sérieuses contraintes de forme :

— S'agissant d'une explication mathématique, elle devrait pouvoir s'exprimer dans le cadre de l'arithmétique : « *Moi, c'que j'vois pas, c'est comment on peut y démontrer par chiffres* » (C7), « *On va y faire ça en multipliant* » (D2) ; dans le cadre de la géométrie : « *p't'être avec des droites, mais ça va être compliqué* » (B6) ; ou bien en recourant à des outils ayant un statut mathématique. « *J'pense qu'il faut faire un arbre comme on avait vu dans j'sais pas quelle classe...* » (C10).

— L'exigence d'un texte mathématique s'oppose à l'usage de la langue courante :

— Et si on te demande de parler avec des chiffres, et ben... ben oui, on a la figure sous les yeux. Tu comprends ?

— Ah oui.

— Imagine qu'on est en train de faire une démonstration, comme on fait en classe en ce moment.

— C'est pas une démonstration ! C'est expliquer... » (B6).

— Ben on fait l'explication en français ou en mathématiques ?

— Ben, eh, les deux.

— Si tu veux... j' préfère les mathématiques. Mais enfin... (D7).

Elle s'oppose aussi à l'usage des schémas: «...au lieu qu'ça soit directement des rectangles sous forme physique, ben on y fait sous forme mathématique...» (D10).

— L'explication doit être verbale, c'est-à-dire être intelligible lors d'une lecture, ce qui disqualifie d'une autre façon l'usage des schémas: «Même oralement il doit comprendre. Une bonne explication c'est ça» (D8). En fait, une telle exigence ne sera pas satisfaite car alors l'identification des rectangles solutions devient très lourde et complexe.

— L'explication doit être logique, c'est-à-dire que les énoncés qui la composent doivent respecter des relations de dépendance qui lui donneront une structure de type déductif:

«Si tu parles du grand tu peux pas parce que tu l'as pas encore annoncé au début» (A12).

«C'est plus logique de partir par les droites que par les plus petites parties» (B15) (c'est-à-dire par décomposition).

Le rôle de l'explication

Dans tous les binômes, l'explication retenue est en fait une description de l'énumération pour montrer «*Comment est-ce qu'on a trouvé 18*» (B3). Un seul élève, Pascal, ne se rallie pas à cette position, nous examinerons son cas plus loin.

Certaines expressions relevées peu après la découverte du résultat (18): «*Pourquoi on a trouvé 18*» (B3), «*Qu'est-ce qu'on peut démontrer là-dedans...*» font penser que les élèves vont élaborer une preuve. En fait, il n'en est rien, la question de savoir s'il y a plus de 18 rectangles n'est pas évoquée. Lors de la formulation de leur explication, les élèves sont exclusivement centrés sur des problèmes de forme. Ainsi, même lorsque la procédure d'énumération est exprimée comme articulation d'opérations élémentaires, ils rationalisent le processus de production des solutions sans l'analyser en ce qu'il fonde le caractère de nécessité du résultat obtenu.

Nous donnons ci-après les explications retenues par chacune des équipes:

1	2
3	4
5	6

On numérote les parties les plus visibles dont est composé la plus grande figure. J'appellerai ces parties : rectangles de base.

On peut donc voir 6 rectangles de base étant ● - ● - ● - ● - ● - ●

6. - Maintenant à partir de ces 6 rectangles de base je compose une seconde série formée de 8 rectangles de base.

Les triangles

12 13

34 24

56 35

46

- puis je compose une troisième série formée de 3 rectangles de base

135

246

- puis je compose une quatrième série formée de 4 rectangles de base

1234

3456

- puis enfin, avec les 6 rectangles de bases ^{je compose} le plus grand rectangle possible 123456

Explication.

Chaque rectangle obtenu est constitué par 6 rectangles de bases formant la figure étudiée.

schéma:

1	2
3	4
5	6

Sachant que les six figures sont placés ainsi, on ~~on~~ fait des assemblages ~~de rectangles des plus simple~~ ~~des couples~~ ~~combinaison~~ ~~généralisé par plus couples~~. Il y a donc 5 sortes de couples. Dans chaque classe,

on ne doit pas retrouver des couples comportant des mêmes chiffres, quelle - qu'en soient l'ordre. Avec chaque nombre, on cherche toute les solutions possibles (en regardant la figure) qui donneront des ~~triangles~~ ^{rectangles} différents.

on obtient donc:

classe des singletons	classe des paires	3 éléments	4 éléments	5 éléments
1.	1.2	1.3.5	1.2.3.4	1.2.3.4.
2.	1.3	2.4.5	3.4.5.6	5.6
3.	2.4			
4.	3.4			
5.	3.5			
6.	4.6			
	5.6			
Totaux	6	7	2	2
il y a donc : $6 + 7 + 2 + 2 + 1$ triangles ^{rectangles} $\Rightarrow 18$ rectangles				

Dialectique de la formulation

Dans le cours de l'élaboration de l'explication, les élèves prennent en compte leurs partenaires comme de véritables interlocuteurs avec qui ils recherchent des interactions pour la mise au point de la formulation. De même lorsqu'une explication leur est soumise, ils l'étudient d'assez près pour en faire une critique :

« elle part des 6 p'tits, puis elle en fait un grand puis après elle revient sur les plus p'tits... c'est pas bien logique » (A12).

« ...on ne doit pas appeler couple car cela pourrait être 1-4 qui n'est pas un rectangle » (C18).

1	2
3	4
5	6

Lors de la mise au point de leur formulation, les élèves en font une analyse qui montre qu'ils envisagent les difficultés potentielles du décodage. On observe, dans cette situation, que les débats se fondent sur une argumentation qui prend en compte le contenu mathématique. La critique de la formulation du codage est faite à l'aide de contre-exemples qui peuvent provoquer une modification du texte (par ex. C18 ci-dessus).

La recherche d'un moyen de désignation des rectangles-solutions conduit les élèves à élaborer des codages qui sont ensuite à l'origine de nouvelles procédures d'énumération :

— Vaudra mieux faire toutes les solutions avec 1, toutes les solutions avec 2, toutes les solutions avec 3... et pas reprendre les mêmes, c'est-à-dire si tu prends 1-2, t'as pas le droit de prendre 2-1...

—...Tous ceux où il y a 2 chiffres, tous ceux où il y a 3 chiffres, etc. » (D4).

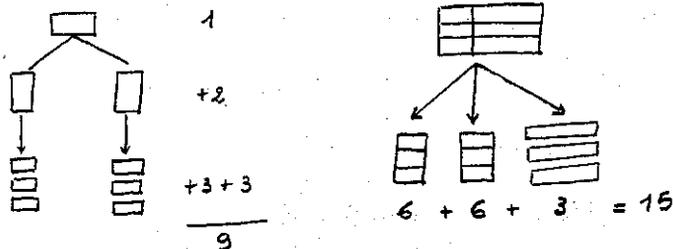
L'amélioration de l'explication conduit les élèves à perfectionner la procédure d'énumération, en particulier en précisant les opérations élémentaires mises en œuvre.

4.c Le cas de Pascal

Pascal est un garçon âgé de 15 ans, il est associé dans cette expérience à un autre garçon : Philippe.

Après une énumération empirique, les deux élèves parviennent à un premier résultat : 16 rectangles. Lorsque Pascal énonce : « *Qu'est ce qu'on peut démontrer là de-dans ?* » il s'agit moins que poser un problème de preuve que d'une référence à la consigne « donner une bonne explication ».

Ils essaient de découvrir un mode de décomposition systématique de la figure qui conduirait à l'énumération des rectangles ; les schémas suivants sont une illustration⁹ de ces tentatives :



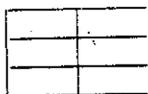
Pascal constatant leur échec change d'approche. Cependant que Philippe poursuit la recherche d'une décomposition, il examine les figures suivantes :



5
5



12
9



17 segments
16 rectangles

Pascal cherche une relation entre le nombre des segments et le nombre des rectangles qui composent le figure. Cette tentative est abandonnée car « ça fournit rien ».

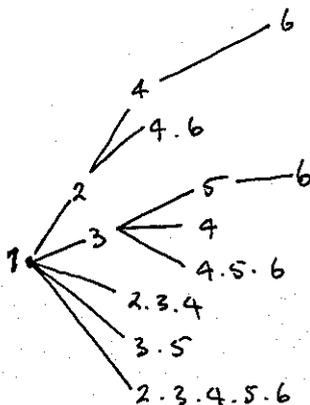
Le résultat (18) n'est pas découvert par les deux élèves

9. Il ne s'agit pas de schémas produits par Pascal.

mais leur est fourni par leurs partenaires. Ils l'acceptent après une vérification de l'énumération donnée en justification.

Pascal se met alors à la recherche d'une explication de ce résultat à laquelle il reconnaisse le caractère mathématique, par exemple une procédure arithmétique dont le résultat serait le nombre des rectangles. C'est à l'occasion d'une proposition d'énumération soumise par leurs partenaires que Pascal explicite pourquoi il ne veut pas s'engager dans cette voie : énumérer les rectangles « *c'est bon quand on fait à la main* ».

Il franchit un premier pas dans ce sens lorsqu'il se souvient avoir utilisé des arbres d'énumération en classe de 5^e. Il essaie alors d'en construire un (voir ci-contre) de façon empirique. Il échoue à tout énumérer, mais il a une conviction : « *c'est un truc comme ça qu'il faut faire, j'pense...* »

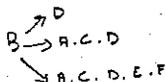


Un second pas est franchi lorsqu'il remarque l'égalité $6 \times 3 = 18$, et que 6 est le nombre des pavés dans la figure. Il examine alors la figure suivante constituée de 6 pavés, mais avec une autre configuration :



Cette tentative n'étant pas fructueuse, il reviendra sur l'arbre d'énumération. Pascal explicite son projet : « *On voit qu'y a 6 machins et on trouve en tout 18 qu' c'est 6 fois 3, donc logiquement dans chaque machin on doit faire 3 rectangles différents* ». A la suite de quoi il élabore le texte suivant sans toutefois le mener à son terme, chaque arbre est complété de façon empirique :

Nous avons 6 petits rectangles. Trouvant comme résultat 18 on
 on en conclut qu'avec chaque petit rectangle on en fait 3 qui
 sont chaque fois différents.



A	B
C	D
E	F

Imaginons un moment que nous recueillons ce texte sans informations sur le travail dont il est l'aboutissement... *Le cas de Pascal souligne la difficulté et le risque, pour l'étude qui nous intéresse, qu'il y a à conduire l'analyse des productions d'élèves sans prendre en compte leurs conditions d'élaboration.*

Par ailleurs, ce cas illustre bien comment la démonstration en mathématique, reçue par des élèves comme une norme de l'explication, peut falsifier leur comportement jusqu'à les conduire à des productions qui ne sont pas sans rappeler celles observées dans « l'âge du capitaine ». Pascal glisse de « expliquer les 18 rectangles » vers « donner une explication mathématique », il y a une véritable perte de sens relativement à la résolution du problème.

IV. Conclusion

Le problème que nous avons choisi pour cette expérience, relève d'un domaine que les élèves français ne rencontrent habituellement pas en classe : la combinatoire. En particulier ils n'ont pas disposé d'emblée d'un cadre mathématique pour fournir une démonstration.

Si d'une façon générale la résolution d'un problème requiert la maîtrise des procédures et des objets en jeu, en combinatoire leur identification explicite joue un rôle décisif dans la construction d'une preuve. Ainsi, dans notre étude, l'apport spécifique de la combinatoire a été de faciliter, lors de l'analyse, l'identification des éventuelles démarches de preuve dans la résolution du problème ou dans l'élaboration de l'explication.

Pour ce qui est du dispositif expérimental utilisé, nous avons pu constater qu'il a effectivement réalisé une situation d'interaction et de communication.

1. Formulation et résolution

L'explicitation des conceptions des élèves à travers leurs débats, l'effacement de l'observateur en tant que tiers dans la situation, ont permis de mettre en évidence le décalage qui peut exister entre la formulation de la solution du problème et, à la fois, le processus de résolution et les intentions sous-jacentes à cette formulation. Le cas de Pascal en est un exemple particulièrement frappant.

Par ailleurs le *temps* a joué un rôle important dans cette expérience : la durée non limitée a priori a permis la maturation des problèmes de formulation et de leurs solutions. Ainsi nous avons pu observer, particulièrement en troisième, une relation étroite entre l'évolution de la procédure d'énumération et celle du code de désignation des objets : la mise au point de la formulation a favorisé la structuration de la procédure.

Ceci vient confirmer l'observation de Guillerault et Laborde (1981) faite lors de l'étude d'une situation de communication en géométrie, où ils relèvent que l'évolution de la description d'une figure est directement liée à une évolution des conceptions des élèves et de leur analyse de cette figure. Ainsi, comme le disent Brun et Schubauer-Leoni (1981), il n'y a pas, dans l'activité de formulation en mathématique, un simple *passage au symbolisme* mais « l'activité de symbolisation est liée au sens attribué aux exigences cognitives de la situation et à l'identification que l'élève est à même de faire de la connaissance en jeu ».

2. Preuve et démonstration

Tant pour les élèves de sixième que pour les élèves de troisième que nous avons observés l'explication du résultat du dénombrement est l'énoncé de l'énumération des objets à dénombrer. Mais alors que la preuve du résultat implique l'examen de l'exhaustivité et de la non-redondance de la procédure d'énumération, ces questions ne sont pas examinées par les élèves.

L'observation de l'élaboration des explications nous conduit à formuler l'hypothèse de trois types d'obstacles à l'émergence des comportements attendus :

— *un obstacle lié à la situation mathématique* : en sixième, le problème a glissé de « dénombrer tous les rectangles » vers « dénombrer le plus de rectangles possible », dans ce cas des vérifications suffisent à réduire l'incertitude sur le résultat obtenu et l'énumération constitue une preuve suffisante du résultat avancé. En troisième, le résultat apparaît évident aux élèves, la reconnaissance du caractère systématique de la procédure d'énumération renforce ce sentiment, aussi ce résultat n'est pas autrement examiné. La complexité de la figure utilisée est une variable importante de la situation, le fait d'avoir recherché une figure commune pour les deux niveaux scolaires nous a conduit à une complexité insuffisante pour les élèves les plus âgés.

— *un obstacle psycho-génétique* que nous relevons pour les élèves de sixième. En effet ils manifestent les indices d'une prise de conscience de la nécessité d'explicitier la procédure utilisée pour fonder le résultat obtenu, mais leur incapacité à la saisir comme articulation d'opérations élémentaires les en empêche. Ainsi ils n'ont pas le moyen de réduire leur incertitude lorsqu'ayant trouvé 18 rectangles, ils se demandent s'il y en a d'autres. La possibilité de prendre le processus de résolution, et donc en particulier la procédure d'énumération, comme objet d'analyse est une condition nécessaire à l'élaboration d'une preuve.

— *un obstacle didactique*, c'est-à-dire qui est dû à l'enseignement reçu par les élèves (Brousseau 1976). L'image que les élèves de troisième se sont constitués de l'explication en mathématique les détourne d'un comportement de preuve

(établir la vérité d'une proposition). Elaborer une explication leur apparaît comme étant d'abord la construction d'un discours satisfaisant à une rhétorique particulière : structure logique, utilisation d'outils ayant un statut mathématique. Le modèle de cette rhétorique est la démonstration qui n'existe pas ici en tant qu'outil de preuve mais comme norme du discours. Cette réduction dont nous faisons l'hypothèse, à la suite de l'examen des programmes, s'accomplit effectivement dans les conceptions des élèves.

La question est ouverte, de savoir construire des situations didactiques qui permettent de surmonter ces obstacles, les analyses que nous avons faites pour la construction de la situation expérimentale apportent peut-être des éléments de réponse.

BIBLIOGRAPHIE

- BALACHEFF N. (1979): Quelques aspects du sens donné à l'explication en mathématiques par des élèves de 10-11 ans. *Séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques*, n° 7, Labo IMAG, Grenoble.
- BALACHEFF N. (1980): *Elaboration d'explications par des élèves de 6° à propos d'un problème combinatoire*. Rapport de recherche n° 224, Laboratoire IMAG, Grenoble.
- BALACHEFF N. (1981): *Etude de l'élaboration d'explication par des élèves de 3°, à propos d'un problème combinatoire*. Rapport de Recherche n° 224, Laboratoire IMAG, Grenoble.
- BELL A.W. (1976): *The learning of general mathematical strategies*. Shell centre for mathematical education, Nottingham.
- BELL A.W. (1976): A study of pupil's proof explanation in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 7, n° 1-2, p.23-40
- BROUSSEAU G. (1976): Les obstacles épistémologiques et les problèmes de mathématique. *Actes de la XXVIII^e rencontre CIAEM*, ed. VANHAMME, Louvain la neuve, Belgique.
- BROUSSEAU G. (1978): Etude locale des processus d'acquisition en situations scolaires, *cahier n° 18 de l'IREM de Bordeaux*, p. 7-21
- BRUN J., SCHUBAUER-LEONI M. (1981): La représentation symbolique d'opérations additives en situation d'interaction et de communication. *Actes de V^e colloque du groupe Psychology of Mathematical Education*, Laboratoire IMAG, Grenoble.
- BRUNOLD Ch. (1960): *L'enseignement scientifique du second degré*, INRP Paris.
- CHEVALLARD Y. (1980): *La transposition didactique* Cours de l'Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques. Chamrousse (à paraître).
- DOISE W., MUGNY G. (1981): *Le développement social de l'intelligence*. Inter éditions, Paris.
- GALBRAITH P.L. (1979): *Pupils proving* Shell centre for mathematical education, Nottingham.
- GLAESER G.(1976): Heuristique générale: estimation de la difficulté d'un problème. *Actes de la XXVIII^e rencontre CIAEM*, ed. VANMAMME, Louvain la neuve, Belgique.
- GUILLERAULT M., LABORDE C. (1981): Une situation de communication en géométrie. *Actes du V^e colloque du groupe Psychology of Mathematical Education*, Laboratoire IMAG, Grenoble.
- GUROVA L. L. (1970): School children's unawareness of their own mental operations in solving arithmetical problems, *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, vol. III, ed. Kilpatrick-Wirszup, Université de Chicago.

- HALBWACHS F. (1981): Significations et raisons dans la pensée scientifique. *Archives de psychologie*, Genève, p. 199-229.
- HERSH R. (1978): Introducing Imre LAKATOS. *The mathematical Intelligencer*, vol. 1, n° 3.
- IREM de Grenoble (1980): Quel est l'âge du capitaine? *Bull de l'A.P.-M.E.P.*, n° 323, p. 235-243.
- JEFFERY R. (1978): *A study of the generalisation and explanation strategies of 10 and 11 year old children in mathematics*. University of Nottingham.
- KILPATRICK J. (1981): Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 2 n° 3, pp. 363-379.
- LAKATOS I. (1976): *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, 1977.
- PIAGET J. et al. (1970): *L'explication dans les sciences*. Flammarion.
- POINCARÉ (1908): L'invention mathématique. *Bull. de l'Institut Général Psychologique*, 8^e année, n° 3.
- REYNOLDS J. (1967): *The development of the concept of mathematical proof in grammar school*, University of Nottingham.
- SIWEK H. (1973): Logique formelle et raisonnement naturel des élèves dans l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 5, pp. 23-37.
- STEIN M. (1981): On the development of the concept of proof in mathematical textbooks. *Séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques*, n° 21, Laboratoire IMAG, Grenoble.
- STEIN M. (1981): Kommentierte bibliographie: zum beweisen in mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didactik der mathematik*, vol. 13, n° 2, pp. 63-75.