HAL
open science

Analyse de la méthode G–θ en 3D : cas des fissures planes à front droit

Alexandre Martin, Mathieu Le Cren, Claude Stolz

▶ **To cite this version:**

Alexandre Martin, Mathieu Le Cren, Claude Stolz. Analyse de la méthode G–θ en 3D : cas des fissures planes à front droit. CSMA 2019, 14ème Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Giens, France. hal-02266882

HAL Id: hal-02266882

https://hal.science/hal-02266882v1

Submitted on 1 Dec 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

Analyse de la méthode $G-\theta$ en 3D : cas des fissures planes à front droit.

A. Martin[1], M. Le Cren[1], C. Stolz[1,2]

[1] *IMSIA - UMR 9219, Université Paris-Saclay, alexandre.martin@cnrs.fr, matthieu-m.le-cren@edf.fr*
[2] *GeM - UMR 6183, École Centrale Nantes, claude.stolz@ec-nantes.fr*

Résumé — La méthode $G-\theta$ est une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte (FICs) répandue. Dans cette contribution, nous rappelons les frontements de la méthode et discutons sa mise en œuvre dans le cas tridimensionnel. Une analyse de convergence réalisée sur des cas-tests admettant une solution analytique montre que la méthode est précise. Les erreurs issues de choix de mise en œuvre naïfs sont également discutés. L'analyse est restreinte au cas des fissures planes à front droit.
Mots clés — Mécanique de la rupture, Taux de restitution d'énergie, FICs, Fissures planes à front droit.

1 Introduction

Afin de d'assurer la sûreté des centrales nucléaires, les ingénieurs doivent démontrer qu'une fissure postulée ne mène pas à la rupture. Les critères utilisés sont frontés sur la mécanique linéaire de la rupture. On doit par exemple montrer que le facteur d'intensité de contrainte en mode I est inférieur à la ténacité du matériau K_{Ic}. L'objectif de cette contribution est de s'assurer que les calculs du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité de contrainte par la méthode $G-\theta$ sont corrects. L'approche est d'évaluer la convergence au maillage sur des cas-tests admettant une solution analytique.

2 Position du problème

Soit un corps Ω de frontière $\partial\Omega$. La frontière $\partial\Omega$ est composée des ensembles Γ_u, Γ_t et de la fissure Γ tels que $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma$. Aucune force volumique n'est appliquée. Une traction $\boldsymbol{T^d}$ est appliquée sur Γ_t. Les lèvres de la fissure Γ sont libres de chargement. Le déplacement $\boldsymbol{u^d}$ est imposé sur Γ_u. Les notations précédentes sont illustrées Figure 1.

La formulation variationnelle du problème est : trouver le déplacement $\boldsymbol{u}$, tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u^d}$ sur Γ_u, qui

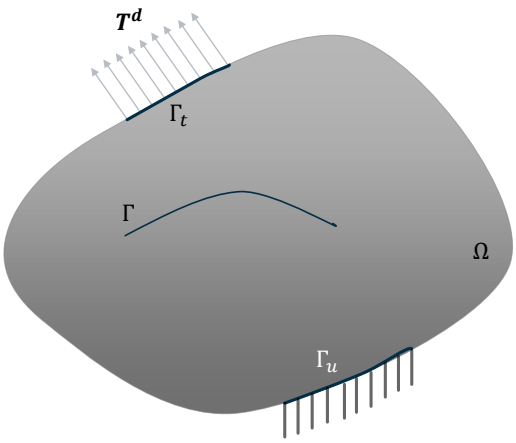

Figure 1 – Notations du problème.

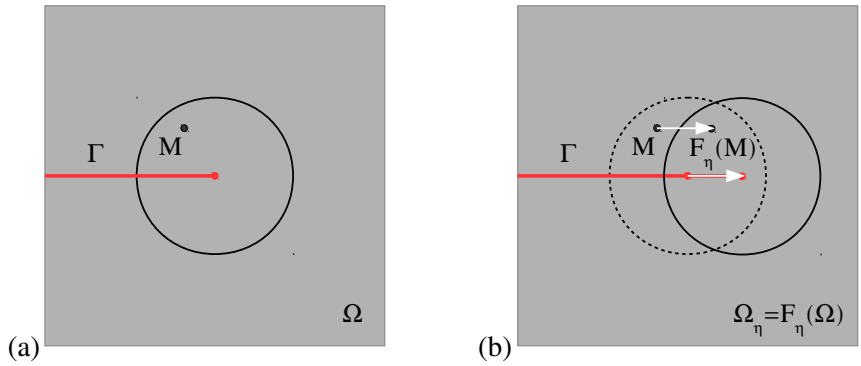

FIGURE 2 – Domaine Ω (a) et domaine Ω_η, image de Ω par la fonction $\mathcal{F}_\eta$ (b).

minimise l'énergie potentielle

$$W(\Omega,\boldsymbol{u}) = \int_\Omega w(\varepsilon(\boldsymbol{u}))\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{T^d}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Gamma,$$

où ε est le tenseur des déformations linéarisé et w est la densité d'énergie de déformation. Le matériau est élastique linéaire et la densité d'énergie de déformation s'écrit, en notant $\mathbb{C}$ est le tenseur de Hooke :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon.$$

3 La méthode $G-\theta$

La méthode $G-\theta$ a été introduite dans [4] par Destuynder et Djaoua. L'idée est de définir une famille de fonctions $(\mathcal{F}_\eta)_\eta$ qui transforment le domaine Ω en un domaine Ω_η et qui représentent le domaine fissuré actuel ou imposé. Les auteurs de [4] ont choisi des fonctions de la forme $\mathcal{F}_\eta : M \to M + \eta\boldsymbol{\theta}(M)$, pour un réel η et un champ de vecteurs $\boldsymbol{\theta}$ donnés (*cf.* FIGURE 2).

Le champ $\boldsymbol{\theta}$ est supposé suffisamment régulier et tangent au bord domaine, *i.e* $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, où $\boldsymbol{n}$ est la normale sortante. Cette dernière condition assure que les transformations $(\mathcal{F}_\eta)_\eta$ préservent la frontière du domaine.

La dérivée de l'énergie potentielle W par rapport à l'évolution du domaine, décrite par les transformations $(\mathcal{F}_\eta)_\eta$ est définie par :

$$\frac{\partial W}{\partial\Omega} = \lim_{\eta\to 0}\frac{W\left(\Omega_\eta,\boldsymbol{u}_\eta\right) - W\left(\Omega,\boldsymbol{u}\right)}{\eta}.$$

Destuynder et Djaoua ont prouvé que cette dérivée correspond à l'opposé du taux de restitution d'énergie G :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial\Omega} \equiv \mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}),$$

En supposant que θ est nul sur Γ_u et Γ_t, ils ont obtenu :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_\Omega \left[\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla u}\cdot\boldsymbol{\nabla\theta}\right) - w\mathrm{div}\boldsymbol{\theta}\right]\,\mathrm{d}\Omega,$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy.

En pratique, on choisit $\boldsymbol{\theta}$ dans la direction $\boldsymbol{N}$ normale au front de fissure, dans le plan de la fissure et nul loin de la fissure. Soient $0 < R_I < R_S$ et r la distance du point M au front de fissure. On pose $\boldsymbol{\theta}(M) = \theta_0(r)\boldsymbol{N}$, où θ_0 est la fonction définie par :

$$\theta_0(r) = \begin{cases} 1, \text{ si } r \le R_I, \\ \frac{R_S - r}{R_S - R_I}, \text{ si } r \in [R_I, R_S], \\ 0, \text{ si } r \ge R_S. \end{cases}$$

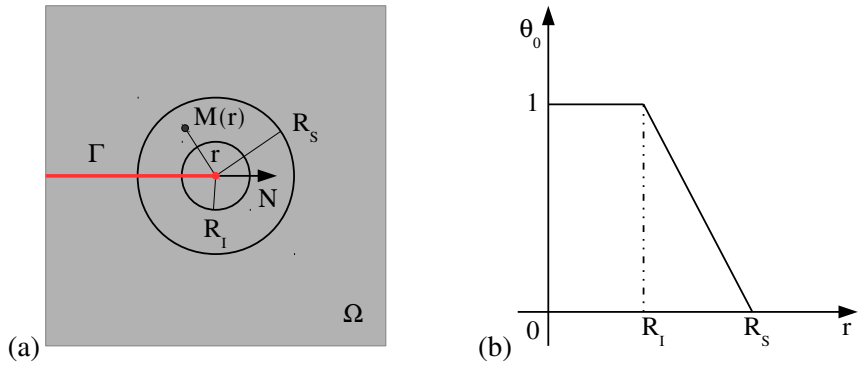

FIGURE 3 – (a) Représentation du domaine où $\boldsymbol{\theta}$ est non nul et (b) graphe de la fonction θ_0.

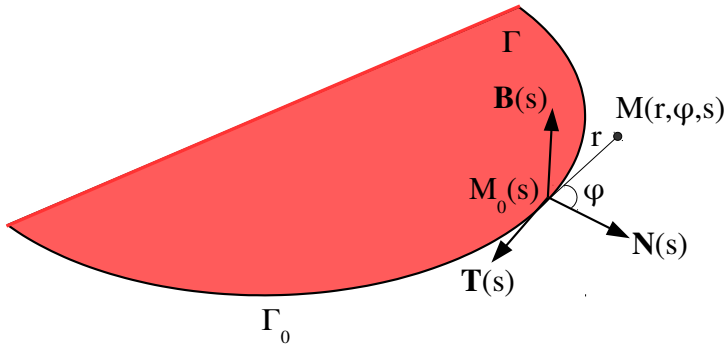

FIGURE 4 – Base locale pour un point M_0 du front de fissure, d'abscisse curviligne s.

Li *et al.* ont introduit la méthode des intégrales de domaine (*cf.* [7]), qui peut être vue comme une extension de la méthode $G-\theta$ au cas tridimensionnel. Soit $\boldsymbol{P}$ le tenseur d'Eshselby, défini par :

$$\boldsymbol{P} = w\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u},$$

où $\boldsymbol{I}$ est le tenseur identité. La transposée du tenseur d'Eshelby est à divergence nulle :

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{P}^T\right) = \boldsymbol{0}.$$

On a :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}\right)\,\mathrm{d}\Omega.$$

En utilisant les conditions aux limites et puisque $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, il vient :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Omega} \left[\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}\right) - w\operatorname{div}\boldsymbol{\theta}\right]\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{1}$$

À notre connaissance, les intégrales de surface sont discutées dans peu de références (*e.g.* [8, 2]).

Dans le cas tridimensionnel, un point M_0 sur le front de fissure Γ_0 est paramétré par son abscisse curviligne s (*cf.* FIGURE 4). Le taux de restitution d'énergie G et la direction de propagation $\boldsymbol{N}$ dépendent de l'abscisse curviligne s tandis que $\boldsymbol{\theta}$ dépend de la distance au front de fissure r et de l'abscisse curviligne s. L'avancée virtuelle de la fissure dans la direction normale au front de fissure et dans le plan de la fissure s'écrit dans ce cas $\boldsymbol{\theta}(M_0(s))\cdot\boldsymbol{N}(s)$. On a finalement :

$$\int_{\Gamma_0} G(s)\boldsymbol{\theta}(M_0(s))\cdot\boldsymbol{N}(s)\,\mathrm{d}s = \mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta}). \tag{2}$$

4 Mise en œuvre numérique

Le taux de restitution d'énergie est discrétisé sur une base de fonctions polynomiales :

$$G(s) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} G^j P_j(s). \tag{3}$$

Pour $i \in [0,\mathcal{N}]$, considérons $\boldsymbol{\theta_i}$ tel que : $\boldsymbol{\theta_i}(M_0(s)) \cdot \boldsymbol{N}(s) = P_i(s)$, sur Γ_0. L'équation (2) donne :

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \left(\int_{\Gamma_0} P_i(s) P_j(s) \, \mathrm{d}s \right) G^j = \mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta_i}).$$

Finalement, les composantes $\left(G^j\right)_j$ sont solutions des systèmes linéaires suivants :

$$[M]\{G\} = \{\mathcal{G}\},$$

où :

$$[M] = \left(\int_{\Gamma_0} P_i(s) P_j(s) \, \mathrm{d}s \right)_{ij}, \ \{G\} = \left(G^j\right)_j \text{ et } \{\mathcal{G}\} = (\mathcal{G}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\theta_i}))_i \, .$$

En pratique, on construit $\boldsymbol{\theta}_i$ tel que $\boldsymbol{\theta_i}(M_0(s)) \cdot \boldsymbol{N}(s) = P_i(s)$, sur le front de fissure et nul loin du front de fissure. Nous choisissons, pour $M = M_0(s) + r \, \boldsymbol{e_r}(\varphi,s)$:

$$\boldsymbol{\theta}_i(M) = \theta_0(r) \, P_i(s) \, \boldsymbol{N}(s).$$

Suivant l'approche d'Andersson (*cf.* [1]), utilisons des polynômes de Legendre définis sur le front de fissure Γ_0. Ces polynômes sont réguliers et forment une base orthonormée :

$$\int_{\Gamma_0} P_i(s) P_j(s) \, \mathrm{d}s = \begin{cases} 0, \text{ si } i \neq j \\ 1, \text{ si } i = j \end{cases} .$$

En accord avec [9], nous n'interpolons pas *directement* $\boldsymbol{\theta}_i$ pour préserver les propriétés des polynômes de Legendre :

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}_i)_M = \mathcal{I}(\theta_0)_M \, P_i(\mathcal{I}(s)_M) \, \mathcal{I}(\boldsymbol{N})_M,$$

où $\mathcal{I}(f)_M$ désigne l'interpolée de la fonction f évaluée au point M.

5 La méthode $G-\theta$: calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ de déplacements cinématiquement admissible et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v})$ un champ de contraintes statiquement admissible, associés par la loi de comportement. La forme bilinéaire g associée à $\mathcal{G}$ est :

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{4} \left[\mathcal{G}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) - \mathcal{G}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) \right].$$

Soient $\boldsymbol{v}^d$ la trace de $\boldsymbol{v}$ sur Γ_u et $\boldsymbol{T_v^d}$ la trace de $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v})$ sur Γ_t. En utilisant (1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Big[\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\nabla v} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\nabla u}) \cdot \boldsymbol{\nabla \theta} \right) - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) \right) \mathrm{div} \boldsymbol{\theta} \Big] \, \mathrm{d}\Omega \\ - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} \left(\boldsymbol{T^d} \cdot \boldsymbol{\nabla v} + \boldsymbol{T_v^d} \cdot \boldsymbol{\nabla u} \right) \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{n} \cdot \left(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{\nabla v^d} + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\nabla u^d} \right) \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \tag{4}$$

Le champ de déplacement $\boldsymbol{u}$ se décompose de la façon suivante :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_R} + \mathrm{K_I} \boldsymbol{u_I} + \mathrm{K_{II}} \boldsymbol{u_{II}} + \mathrm{K_{III}} \boldsymbol{u_{III}},$$

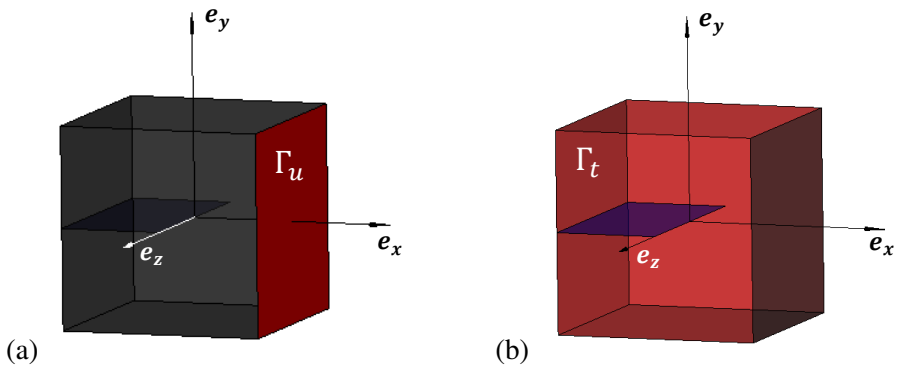

FIGURE 5 – Illustration des domaines : (a) domaine Γ_u (en rouge) et (b) domaine Γ_t (en rouge).

où $\boldsymbol{u_R}$ est la partie régulière du déplacement et K_α et $\boldsymbol{u_\alpha}$ sont respectivement le facteur d'intensité de contrainte et le champ de déplacement associé à la solution asymptotique de Westergaard pour le mode α [10]. Pour un champ de déplacement $\boldsymbol{v}$ de la forme :

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{K}_\mathrm{I}^* \boldsymbol{u_\mathrm{I}} + \mathrm{K}_\mathrm{II}^* \boldsymbol{u_\mathrm{II}} + \mathrm{K}_\mathrm{III}^* \boldsymbol{u_\mathrm{III}},$$

on obtient (*cf.* [3, 5]) :

$$g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{K}_\mathrm{I}\mathrm{K}_\mathrm{I}^* g(\boldsymbol{u_\mathrm{I}},\boldsymbol{u_\mathrm{I}},\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{K}_\mathrm{II}\mathrm{K}_\mathrm{II}^* g(\boldsymbol{u_\mathrm{II}},\boldsymbol{u_\mathrm{II}},\boldsymbol{\theta}) + \mathrm{K}_\mathrm{III}\mathrm{K}_\mathrm{III}^* g(\boldsymbol{u_\mathrm{III}},\boldsymbol{u_\mathrm{III}},\boldsymbol{\theta}).$$

Les quantités $g_\mathrm{I} = g(\boldsymbol{u_\mathrm{I}},\boldsymbol{u_\mathrm{I}},\boldsymbol{\theta})$, $g_\mathrm{II} = g(\boldsymbol{u_\mathrm{II}},\boldsymbol{u_\mathrm{II}},\boldsymbol{\theta})$ et $g_\mathrm{III} = g(\boldsymbol{u_\mathrm{III}},\boldsymbol{u_\mathrm{III}},\boldsymbol{\theta})$ sont des constantes qui sont évaluées en appliquant la formule d'Irwin [6].

Les facteurs d'intensité de contrainte K_I, K_II et K_III sont décomposés sur la même base de fonctions polynomiales (3) :

$$\mathrm{K}_\alpha(s) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{K}_\alpha^j P_j(s), \text{ pour } \alpha \in \{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}\}.$$

Finalement, les composantes $\left(\mathrm{K}_\alpha^j\right)_{\alpha j}$ sont solutions des systèmes linéaires suivants :

$$g_\mathrm{I}[M]\{\mathrm{K}_\mathrm{I}\} = \{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u_\mathrm{I}})\}, \quad g_\mathrm{II}[M]\{\mathrm{K}_\mathrm{II}\} = \{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u_\mathrm{II}})\}, \quad g_\mathrm{III}[M]\{\mathrm{K}_\mathrm{III}\} = \{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u_\mathrm{III}})\},$$

où,

$$\begin{aligned}
[M] &= \left(\int_{\Gamma_0} P_i(s)P_j(s)\,\mathrm{d}s\right)_{ij}, \\
\{\mathrm{K}_\alpha\} &= \left(\mathrm{K}_\alpha^j\right)_j, \text{ pour } \alpha \in \{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}\}, \\
\{g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\} &= \left(g(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\theta_i})\right)_i.
\end{aligned}$$

6 Simulations numériques

Considérons le cube unitaire traversé par une fissure plane à front droit. Deux problèmes sont étudiés :

— Le mode I pur dont la solution est : $\boldsymbol{u_S} = \boldsymbol{u_\mathrm{I}}$.

— Le mode II pur de solution : $\boldsymbol{u_S} = \boldsymbol{u_\mathrm{II}}$.

Pour chaque problème, les conditions aux limites sont :

$$\boldsymbol{u^d} = \boldsymbol{u_S}, \text{ sur } \Gamma_u, \quad \boldsymbol{T^d} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u_S}), \text{ sur } \Gamma_t.$$

Les domaines Γ_u et Γ_t sont illustrés FIGURE 5. Le module d'Young est E = 0.1 Mpa et le coefficient de Poisson est nul ($\nu = 0$).

Pour chaque problème, la solution analytique $\boldsymbol{u_S}$ vérifie l'hypothèse des contraintes planes *partout* dans le domaine et les facteurs d'intensité de contraintes sont donc uniformes le long du front de fissure.

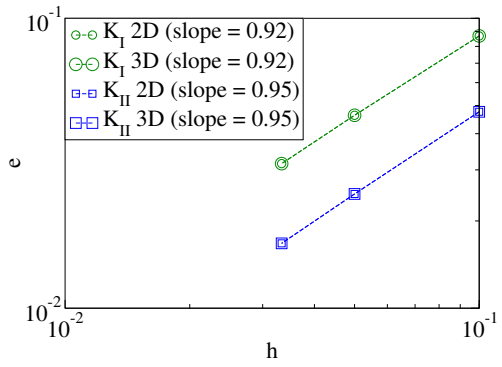

FIGURE 6 – Évolution de l'erreur en termes du facteur d'intensité en fonction de la taille de maille, en 2D et en 3D, pour le mode I pur (en vert) et le mode II pur (en bleu).

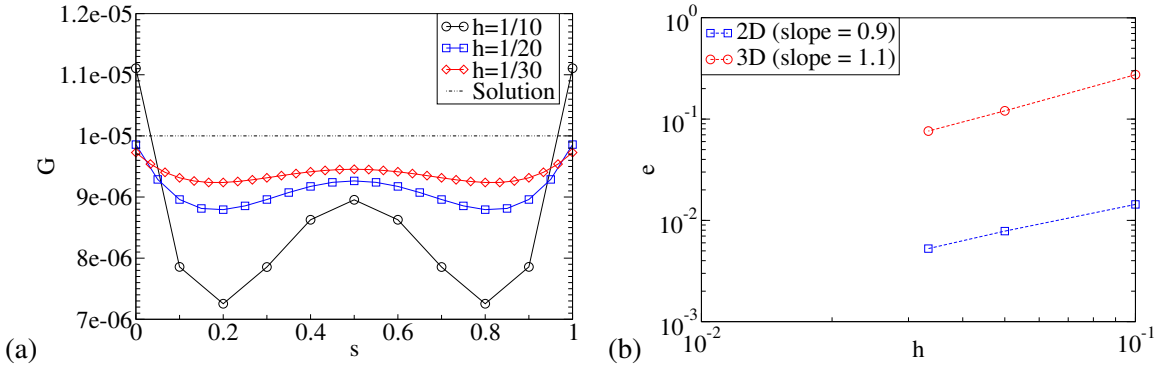

FIGURE 7 – Résultats obtenus en utilisant l'interpolation directe de $\boldsymbol{\theta_i}$: (a) Variation du taux de restitution d'énergie en fonction de l'abscisse curviligne, pour différentes tailles de maille. (b) Évolution de l'erreur en termes du taux de restitution d'énergie en fonction de la taille de maille, en 3D.

Chaque problème étant l'extrusion d'un problème bidimensionnel, il est possible de comparer les résultats obtenus en 2D et en 3D. Dans les courbes suivantes, l'erreur représentée correspond au maximum de l'écart observé entre la valeur estimée par la méthode G-θ et la valeur analytique, le long du front de fissure, rapporté à la valeur analytique.

La FIGURE 6 montre l'évolution de l'erreur obtenue en termes du facteur d'intensité en fonction de la taille de maille, pour chaque problème, en 2D et en 3D. Les courbes obtenues à partir des simulations 2D et 3D se superposent parfaitement grâce à l'interpolation du champ $\boldsymbol{\theta_i}$ qui préserve les propriétés des polynômes de Legendre. L'interpolation directe de $\boldsymbol{\theta_i}$:

$$\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta}_i)_M = \mathcal{I}(\theta_0 P_i \boldsymbol{N})_M,$$

conduit quant à elle à des oscillations parasites qui augmentent l'erreur dans le cas 3D, comme le montre la FIGURE 7.

Nous avons vérifié que les modes de rupture obtenus par la méthode $G-\theta$ sont découplés, *i.e.* :

— $K_{II} = K_{III} = 0$, pour le mode I pur,

— $K_I = K_{III} = 0$, pour le mode II pur.

La FIGURE 9 montre que les modes de rupture sont correctement découplés, pour le mode II pur.

Concentrons nous sur le mode II pur et considérons $g(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{II}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{III}, \boldsymbol{\theta})$, *i.e.* le second membre du système linéaire à résoudre pour calculer K_{III}. La FIGURE 8 illustre les domaines qui interviennent dans l'écriture des différents termes de $g(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{II}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_{III}, \boldsymbol{\theta})$.

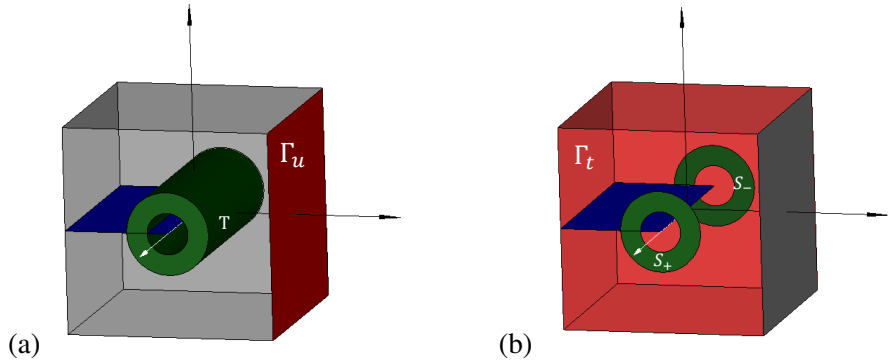

FIGURE 8 – Géométrie et conditions aux limites : (a) Γ_u (en rouge) et le domaine T, dans lequel $\boldsymbol{\theta}$ varie, (en vert) ; (b) l'intersection de Γ_t (en rouge) et T est l'union des surfaces S_+ et S_- (en vert).

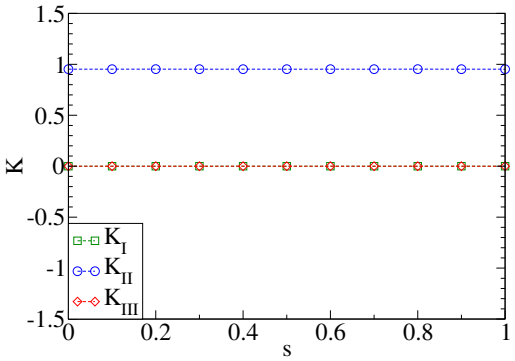

FIGURE 9 – Variation des facteurs d'intensité de contraintes K_I (en vert), K_{II} (en bleu) et K_{III} (en rouge) en fonction de l'abscisse curviligne, pour le mode II pur et pour un maillage donné (h = 1/10).

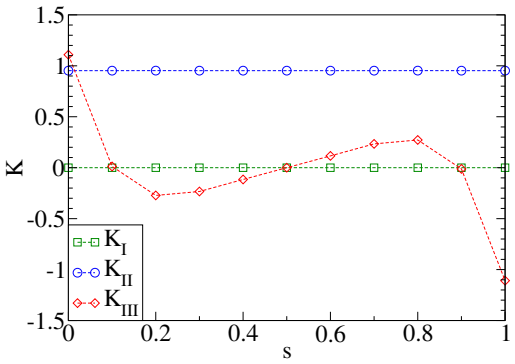

FIGURE 10 – Variations des FICs $K_I(s)$ (vert), $K_{II}(s)$ (bleu) et $K_{III}(s)$ (rouge), pour le mode II pur et pour un maillage donné (h = 1/10), obtenues sans les intégrales de surface.

D'une part, $\boldsymbol{\theta}$ est nul sur Γ_u et en conséquence, l'intégrale sur Γ_u est nulle. D'autre part, puisque le mode II de rupture est le cisaillement plan, $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u_{\mathrm{II}}}) = \boldsymbol{0}$ sur Γ_t, on a :

$$\int_{\Gamma_t} \boldsymbol{T^d} \cdot \boldsymbol{\nabla v} \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u_{\mathrm{II}}}) \cdot \boldsymbol{\nabla u_{\mathrm{III}}} \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma = 0.$$

La contribution des intégrales de surfaces semble être nulle à ce stade, mais ce n'est pas le cas ! Le mode III de rupture est le cisaillement hors plan et on peut montrer que :

$$\int_{\Gamma_t} \boldsymbol{T_v^d} \cdot \boldsymbol{\nabla u} \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u_{\mathrm{III}}}) \cdot \boldsymbol{\nabla u_{\mathrm{II}}} \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma \neq 0.$$

En réalité, cette intégrale de surface compense la contribution de l'intégrale de volume, non nulle (*cf.* (4)). Supposer que l'intégrale de surface $\int_{\Gamma_t} \boldsymbol{T_v^d} \cdot \boldsymbol{\nabla u} \cdot \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}\Gamma$ est nulle conduit à des facteurs d'intensité de contrainte erronés.

7 Conclusion

La méthode $G - \theta$ pour le calcul du taux de restitution d'énergie et des facteurs d'intensité des contraintes a été présentée. Des tests de convergence ont montré que la méthode est précise, dans le cas d'une fissure à front droit. L'importance de la contribution des intégrales de surface associées aux conditions aux limites a été discutée. Les erreurs issues d'une mise en œuvre *naïve* de la méthode ont également été discutées.

Références

[1] B. Andersson, U. Falk, I. Babuška et T. Von Petersdorff. Reliable stress and fracture mechanics analysis of complex components using a h–p version of FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(13) :2135–2163, 1995.

[2] J. Brochard, T. Charras, A. Combescure, X. Z. Suo et D. Uhlmann. Numerical evaluation of the energy release rate for nonlinear fracture mechanics formulation of G-θ method and application with CASTEM 2000. In *SISSI 94*, 2 :211 – 215, Saclay, 1994.

[3] H. D. Bui. Associated path independent J-integrals for separating mixed modes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(6) :439 – 448, 1983.

[4] P. Destuynder et M. Djaoua. Sur une Interprétation Mathématique de l'Intégrale de Rice en Théorie de la Rupture Fragile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 3(1) :70–87, 1981.

[5] M. Gosz et B. Moran. An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(3) :299 – 319, 2002.

[6] G. Irwin. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24 :361 – 364, 1957.

[7] F. Z. Li, C. F. Shih et A. Needleman. A comparison of methods for calculating energy release rates. *Engineering Fracture Mechanics*, 21(2) :405 – 421, 1985.

[8] C. F. Shih, B. Moran et T. Nakamura. Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body. *International Journal of Fracture*, 30(2) :79–102, 1986.

[9] H. Ozer, C. A. Duarte et I. L. Al-Qadi. Formulation and implementation of a high-order 3-D domain integral method for the extraction of energy release rates. *Computational Mechanics*, 49(4) :459–476, 2012.

[10] H. M. W. Westergaard. Bearing Pressures and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6 :A49–A53, 1939.