



**HAL**  
open science

# Sur les processus linéaires de naissance et de mort à coefficients périodiques

Nicolas Bacaër

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër. Sur les processus linéaires de naissance et de mort à coefficients périodiques. 2019. hal-02266099

**HAL Id: hal-02266099**

**<https://hal.science/hal-02266099>**

Preprint submitted on 13 Aug 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les processus linéaires de naissance et de mort à coefficients périodiques

Nicolas Bacaër \*

## Résumé

On obtient un développement limité pour la probabilité de non-extinction d'un processus linéaire de naissance et de mort à coefficients périodiques lorsque la période est grande ou petite.

Mots-clés : processus de naissance et de mort, cas périodique

## Abstract

An asymptotic expansion is obtained for the probability of non-extinction of a linear birth-and-death process with periodic coefficients when the period is large or small.

Keywords : birth-and-death process, periodic case

Classification AMS 2000 : 60G35, 92D25

## 1 Introduction

Pour un processus linéaire de naissance et de mort dans un environnement variable avec un taux de naissance  $a(t)$  et une mortalité  $b(t)$ , la probabilité de non-extinction si l'on part d'un individu au temps  $t_0$  est

$$p(t_0) = \frac{1}{1 + \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt}, \quad (1)$$

que l'intégrale au dénominateur soit finie ou infinie [1]. Ceci s'applique en particulier au cas où les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  sont périodiques de même période, disons  $T$ . Notons  $A(\tau)$  et  $B(\tau)$  les fonctions périodiques de période 1 telles que

$$a(t) = A(t/T), \quad b(t) = B(t/T).$$

---

\*Institut de recherche pour le développement, Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Les Cordeliers, 75006 Paris, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

Considérons les moyennes

$$\bar{a} = \int_0^1 A(\tau) d\tau, \quad \bar{b} = \int_0^1 B(\tau) d\tau.$$

Alors  $p(t_0)$  est identiquement égal à 1 si  $\bar{a} \leq \bar{b}$ ; c'est une fonction  $T$ -périodique strictement inférieure à 1 si  $\bar{a} > \bar{b}$  (voir [2, §5.2] et [3]). Plaçons nous donc désormais dans le cas surcritique où  $\bar{a} > \bar{b}$ .

La formule (1) se simplifie lorsque la période  $T$  est soit très petite, soit très grande, comme l'a remarqué récemment [4]. Si  $t_0/T = \tau_0 \in [0, 1]$  est fixé et si  $T \rightarrow 0$ , alors  $p(t_0) \approx 1 - \bar{b}/\bar{a}$ . Si  $t_0/T = \tau_0$  est fixé et si  $T \rightarrow +\infty$ , alors  $p(t_0) \approx 1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ , au moins pour certaines valeurs de  $\tau_0$  où  $A(\tau_0) > B(\tau_0)$ .

L'objectif ci-dessous est de préciser ces observations en proposant un développement limité ou un équivalent de la probabilité d'extinction  $p(t_0)$ . La limite  $T \rightarrow 0$  est la plus simple : on a

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left\{1 - \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{T}{\bar{a}} \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du \right] + o(T) \right\}. \quad (2)$$

Pour l'étude de la limite  $T \rightarrow +\infty$ , supposons que les fonctions  $A(\tau)$  et  $B(\tau)$  soient régulières (disons de classe  $C^1$ ) et envisageons deux cas :

- ou bien  $A(\tau) > B(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0, 1]$  (cas fortement surcritique) ;
- ou bien  $A(\tau) > B(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0, \tau_1 \cup ]\tau_2, 1]$  où  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  et  $A(\tau) < B(\tau)$  pour  $\tau \in ]\tau_1, \tau_2[$  (cas faiblement surcritique).

Sans perte de généralité, on peut supposer de plus dans le deuxième cas que  $\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$ . Il existe alors un unique  $\tau^* \in ]0, \tau_1[$  tel que  $\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = 0$ .

Dans le cas fortement surcritique pour tout  $\tau_0 \in [0, 1]$  et dans le cas faiblement sous-critique pour tout  $\tau_0 \notin ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0)}\right) \left\{1 - \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^2} + o(1/T)\right\}. \quad (3)$$

Dans le cas faiblement surcritique avec  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2]$ ,

$$p(t_0) \sim \frac{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}. \quad (4)$$

Cette dernière probabilité tend exponentiellement vite vers 0 quand  $T \rightarrow +\infty$ . En montrera aussi que  $p(\tau_2 T)$  tend vers 0 comme  $1/\sqrt{T}$ .

## 2 Calcul préliminaire

Considérons l'intégrale au dénominateur de la formule (1) et notons-la

$$J = \int_{t_0}^{\infty} b(t) \exp \left[ \int_{t_0}^t [b(s) - a(s)] ds \right] dt.$$

Par définition, on a

$$J = \int_0^\infty B((t_0 + t)/T) \exp \left[ \int_{t_0}^{t_0+t} [B(s/T) - A(s/T)] ds \right] dt.$$

Puisque  $t_0/T = \tau_0$ , posons  $u = t/T$  et  $v = s/T$ . Alors, en utilisant la périodicité des fonctions  $A(\tau)$  et  $B(\tau)$ , on obtient

$$\begin{aligned} J &= T \int_0^\infty B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u+n} [B(v) - A(v)] dv \right] du \\ &= T \sum_{n=0}^\infty \exp[nT(\bar{b} - \bar{a})] \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \end{aligned}$$

Ainsi

$$J = \frac{T}{1 - \exp[T(\bar{b} - \bar{a})]} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \exp \left[ T \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv \right] du. \quad (5)$$

### 3 La limite $T \rightarrow 0$

Avec le développement limité  $\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$  quand  $x \rightarrow 0$  dans le facteur devant l'intégrale et plus simplement  $\exp(x) = 1 + x + o(x)$  dans l'intégrale, on obtient

$$J = \left( \frac{1}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{T}{2} + o(T) \right) \left( \bar{b} + T \left[ \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [B(v) - A(v)] dv du \right] + o(T) \right).$$

On remarque qu'un terme s'intègre facilement :

$$\int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \left( \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} B(v) dv \right)^2 \right]_0^1 = \frac{\bar{b}^2}{2}.$$

On en déduit que

$$J = \frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}} + \frac{\bar{b}T}{2} + \frac{\bar{b}^2 T}{2(\bar{a} - \bar{b})} - \frac{T}{\bar{a} - \bar{b}} \int_0^1 B(\tau_0 + u) \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} A(v) dv du + o(T).$$

Puisque  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , on en déduit la formule (2).

## 4 La limite $T \rightarrow +\infty$

Reprenons la formule (5). L'intégrale est de la forme

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du$$

avec

$$G(u) = B(\tau_0 + u), \quad F(u) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+u} [A(v) - B(v)] dv.$$

On peut appliquer la méthode de Laplace puisque  $T \rightarrow +\infty$ . On a

$$F'(u) = A(\tau_0 + u) - B(\tau_0 + u), \quad F''(u) = A'(\tau_0 + u) - B'(\tau_0 + u).$$

### 4.1 Le cas fortement surcritique

Supposons tout d'abord que  $A(\tau) > B(\tau)$  pour tout  $\tau \in [0, 1]$ . Alors  $F'(u) > 0$  pour tout  $u \in [0, 1]$ ,  $F(u)$  a son minimum en  $u = 0$  et il vaut  $F(0) = 0$ . De plus,  $F(u) = \phi_0 u + \phi_1 u^2 + o(u^2)$  quand  $u \rightarrow 0$  avec  $\phi_0 = A(\tau_0) - B(\tau_0)$  et  $\phi_1 = [A'(\tau_0) - B'(\tau_0)]/2$ . Par ailleurs,  $G(u) = \psi_0 + \psi_1 u + o(u)$  quand  $u \rightarrow 0$  avec  $\psi_0 = B(\tau_0)$  et  $\psi_1 = B'(\tau_0)$ . D'après un théorème d'Erdélyi [5, p. 85],

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du = e^{-TF(0)} \left( \frac{c_0}{T} + \frac{c_1}{T^2} + o\left(\frac{1}{T^2}\right) \right) \quad (6)$$

avec  $c_0 = \psi_0/\phi_0$  et  $c_1 = (\phi_0\psi_1 - 2\phi_1\psi_0)/\phi_0^3$ . Ainsi, puisque  $\exp[T(\bar{b} - \bar{a})]$  est exponentiellement petit, la formule (5) donne

$$J = \frac{B(\tau_0)}{A(\tau_0) - B(\tau_0)} + \frac{A(\tau_0)B'(\tau_0) - A'(\tau_0)B(\tau_0)}{T[A(\tau_0) - B(\tau_0)]^3} + o(1/T).$$

Avec  $p(t_0) = 1/(1 + J)$ , on en déduit la formule (3).

### 4.2 Le cas faiblement surcritique

Supposons maintenant qu'il existe  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que  $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$  et

$$\begin{aligned} A(\tau) &< B(\tau) \text{ pour tout } \tau \in ]\tau_1, \tau_2[, \\ A(\tau) &> B(\tau) \text{ pour tout } \tau \in ]0, \tau_1[ \cup ]\tau_2, 1[. \end{aligned}$$

Comme  $\int_0^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau = \bar{a} - \bar{b} > 0$ , on a

$$\int_0^{\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\tau_2}^1 (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0. \quad (7)$$

Quitte à décaler dans le temps les fonctions  $A(\tau)$  et  $B(\tau)$ , supposons que la première inégalité soit vraie.

Il existe alors un unique  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  tel que

$$\int_{\tau^*}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du = 0.$$

En effet, notons  $h(\tau)$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0, \tau_1]$  par

$$h(\tau) = \int_{\tau}^{\tau_2} (A(u) - B(u)) du.$$

Alors  $h'(\tau) = B(\tau) - A(\tau) < 0$  pour  $\tau \in [0, \tau_1]$ . De plus,  $h(0) > 0$  d'après la première inégalité (7) et  $h(\tau_1) < 0$ . Il existe donc un unique  $\tau^* \in [0, \tau_1]$  tel que  $h(\tau^*) = 0$ .

Considérons d'abord le cas où  $0 < \tau_0 < \tau_1$ . La fonction  $F(u)$  est croissante pour  $u \in [0, \tau_1 - \tau_0]$ , décroissante pour  $u \in [\tau_1 - \tau_0, \tau_2 - \tau_0]$  et à nouveau croissante pour  $u \in [\tau_2 - \tau_0, 1]$ . La fonction  $F(u)$  a donc un minimum local en  $\tau_2 - \tau_0$ . Rappelons que  $F(0) = 0$ .

Si  $\tau_0 \in ]0, \tau^*[$ , alors  $F(\tau_2 - \tau_0) > 0$ . Donc  $u = 0$  reste le minimum global de  $F(u)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Le développement asymptotique (6) reste valide et la formule (3) aussi.

Si en revanche  $\tau \in ]\tau^*, \tau_1[$ , alors  $F(\tau_2 - \tau_0) < 0$ . Le minimum global de  $F(u)$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  est en  $u = \tau_2 - \tau_0$ ,  $F'(\tau_2 - \tau_0) = 0$ ,  $F''(\tau_2 - \tau_0) = A'(\tau_2) - B'(\tau_2)$  et

$$\int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2T[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-TF(\tau_2 - \tau_0)}$$

quand  $T \rightarrow +\infty$ , d'après la méthode de Laplace. Ainsi

$$J \sim \frac{B(\tau_0)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}} e^{-T \int_{\tau_0}^{\tau_2} [A(v) - B(v)] dv}$$

et  $p(t_0) = 1/(1 + J) \sim 1/J$  quand  $T \rightarrow +\infty$ , ce qui donne la formule (4).

Considérons maintenant le cas où  $\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$ . La fonction  $F(u)$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, \tau_2 - \tau_0]$  puis croissante sur l'intervalle  $[\tau_2 - \tau_0, 1]$ . Son minimum dans l'intervalle  $[0, 1]$  est donc atteint en  $u = \tau_2 - \tau_0$ , comme dans le cas précédent. Ainsi, la formule (4) est toujours valable.

Considérons enfin le cas où  $\tau_2 < \tau_0 < 1$ . La fonction  $F(u)$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 1 + \tau_1 - \tau_0]$ , décroissante sur l'intervalle  $[1 + \tau_1 - \tau_0, 1 + \tau_2 - \tau_0]$  puis croissante sur l'intervalle  $[1 + \tau_2 - \tau_0, 1]$ . Elle a donc un minimum local en  $1 + \tau_2 - \tau_0$  et

$$F(1 + \tau_2 - \tau_0) \geq \int_1^{1+\tau_2} (A(\tau) - B(\tau)) d\tau > 0$$

d'après la première inégalité (7). Son minimum global dans l'intervalle  $[0, 1]$  est donc atteint en  $u = 0$ . Ainsi, c'est la formule (3) qui s'applique.

## 5 Exemple

Prenons  $B(\tau) = \bar{b} > 0$  constant et

$$A(\tau) = \bar{a}(1 + k \cos(2\pi\tau))$$

avec  $\bar{a} > \bar{b}$  et  $0 \leq k \leq 1$ . Le cas fortement surcritique correspond à  $\bar{a}(1-k) > b$ . Si au contraire  $\bar{a}(1-k) < b$ , alors  $\tau_1 < \tau_2$  sont les deux solutions dans l'intervalle  $[0, 1]$  de l'équation  $\cos(2\pi\tau) = -(1 - \bar{b}/\bar{a})/k$ , à savoir

$$\tau_1 = \frac{\arccos(-(1 - \bar{b}/\bar{a})/k)}{2\pi} \in ]0, 1/2[, \quad \tau_2 = 1 - \tau_1.$$

Le seuil  $\tau^*$  est la solution dans l'intervalle  $[0, \tau_1]$  de l'équation

$$(\bar{a} - b)(\tau_2 - \tau^*) + \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau_2) - \sin(2\pi\tau^*)}{2\pi} = 0.$$

La formule (2) donne

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\bar{b}kT}{2\pi} \sin(2\pi\tau_0) + o(T)\right)$$

quand  $T \rightarrow 0$ . Si  $\bar{a}(1-k) > b$  ou si  $\bar{a}(1-k) < b$  et  $\tau_0 \notin [\tau^*, \tau_2]$ , alors la formule (3) donne

$$p(t_0) = \left(1 - \frac{\bar{b}}{A(\tau_0)}\right) \left(1 - \frac{2\pi\bar{a}\bar{b}k \sin(2\pi\tau_0)}{TA(\tau_0)[A(\tau_0) - \bar{b}]^2} + o(1/T)\right)$$

quand  $T \rightarrow +\infty$ . Si  $\bar{a}(1-k) < b$  et  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$ , La formule (4) donne

$$p(t_0) \sim \frac{2\sqrt{-\bar{a}k \sin(2\pi\tau_2)}}{\bar{b}\sqrt{T}} \exp \left[ T(\bar{a} - \bar{b})(\tau_0 - \tau_2) + \bar{a}kT \frac{\sin(2\pi\tau_0) - \sin(2\pi\tau_2)}{2\pi} \right]$$

quand  $T \rightarrow +\infty$ .

Prenons en particulier  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$  et  $k = 0,5$ . Alors  $\bar{a}(1-k) > \bar{b}$ . La figure 1 montre les résultats pour deux valeurs de la période :  $T = 0,5$  et  $T = 50$ . La probabilité de non-extinction  $p(t_0)$ , donnée par la formule (1), est estimée par intégration numérique avec le logiciel Scilab. On voit que les formules approchées (2) et (3) donnent de meilleures approximations de  $p(t_0)$  que les termes d'ordre 0. On notera cependant que pour  $T \rightarrow +\infty$ , l'approximation (3) s'écarte un peu de  $p(t_0)$  au voisinage du minimum de  $p(t_0)$ .

Prenons maintenant  $\bar{b} = 1$ ,  $\bar{a} = 3$  et  $k = 0,75$ . Alors  $\bar{a}(1-k) < \bar{b}$ ,  $\tau^* \simeq 0,347$ ,  $\tau_1 \simeq 0,424$  et  $\tau_2 \simeq 0,576$ . Les diverses formules approchées sont représentées dans la figure 2, notamment le formule (4) en vert. On remarque un problème classique de raccordement des approximations au niveau de  $\tau_0 = \tau_2$ , ce qui nous conduit à regarder de plus près ce qui se passe en ce point.

Comme dans le cas où  $\tau_2 < \tau_0 < 1$  de la section 4.2, on voit dans le cas spécial où  $\tau_0 = \tau_2$  que  $F(u)$  a son maximum global dans  $[0, 1]$  en  $u = 0$ . Mais cette fois-ci,  $F'(0) = A(\tau_2) - B(\tau_2) = 0$ . D'après le même théorème d'Erdélyi [5, p. 85],

$$J \sim T \int_0^1 G(u) e^{-TF(u)} du \sim \frac{B(\tau_2)\sqrt{\pi T}}{\sqrt{2[A'(\tau_2) - B'(\tau_2)]}}$$

de sorte que  $p(\tau_2 T) = 1/(1+J)$  tend vers 0, quand  $T \rightarrow +\infty$ , comme  $1/\sqrt{T}$ . La décroissance exponentielle vers 0 lorsque  $\tau_0 \in ]\tau^*, \tau_2[$  est remplacée par une décroissance en puissance au point  $\tau_2$ .

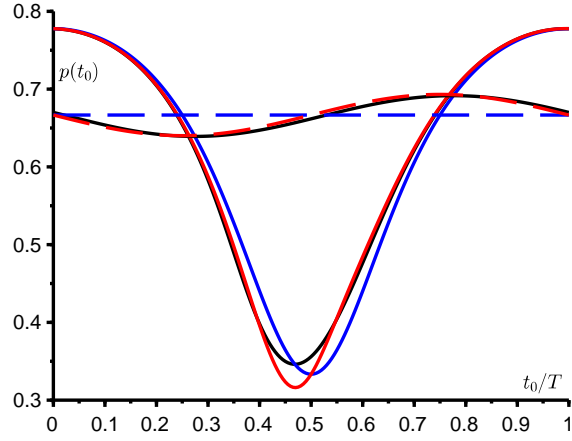


FIGURE 1 – Deux exemples :  $T = 0,5$  (pointillés) et  $T = 50$  (lignes continues). La probabilité de non-extinction  $p(t_0)$ , donnée par la formule (1), est en noir. En pointillé : la formule approchée (2) en rouge et le terme d'ordre 0,  $1 - \bar{b}/\bar{a}$ , en bleu. Lignes continues : la formule approchée (3) en rouge et le terme d'ordre 0,  $1 - B(\tau_0)/A(\tau_0)$ , en bleu.

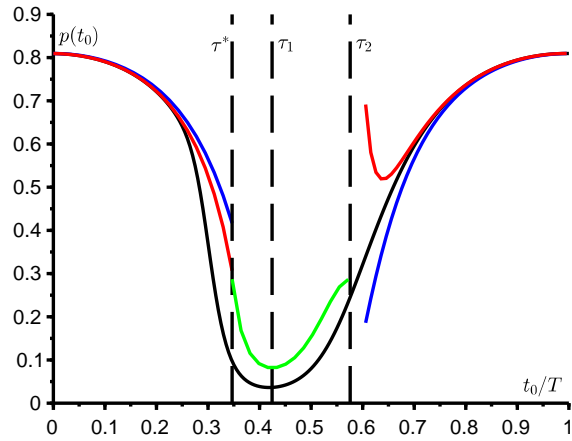


FIGURE 2 – Comme dans la figure 1 mais avec  $T = 50$  et  $k = 0,75$ . La formule approchée (4) est en vert.



## Références

- [1] D.G. Kendall, On the generalised birth-and-death process, *Ann. Math. Statist.* 19 (1948) 1-15.
- [2] N. Bacaër, Approximation of the basic reproduction number  $R_0$  for vector-borne diseases with a periodic vector population, *Bull. Math. Biol.* 69 (2007) 1067-1091.
- [3] N. Bacaër, E.H. Ait Dads, On the probability of extinction in a periodic environment, *J. Math. Biol.* 68 (2014) 533-548.
- [4] Ph. Carmona, Pathogen emergence in seasonal environments, Montpellier, 2019, <https://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~carmona/pages/pathemslides.pdf>
- [5] F.W.J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York, 1974.