HAL
open science

Surfaces quadratiques à base d'Algèbres Géométriques Conforme

Stéphane Breuils, Vincent Nozick, Laurent Fuchs

To cite this version:

Stéphane Breuils, Vincent Nozick, Laurent Fuchs. Surfaces quadratiques à base d'Algèbres Géométriques Conforme. GTMG 2019, Mar 2019, Toulouse, France. hal-02262159

HAL Id: hal-02262159

https://hal.science/hal-02262159v1

Submitted on 2 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Surfaces quadratiques à base d'Algèbres Géométriques Conforme

Stéphane Breuils[1], Vincent Nozick[1] et Laurent Fuchs[2]

[1]LIGM, Université Paris-Est Marne-la-Vallée
[2]XLIM-ASALI, Université de Poitiers, Poitiers

Résumé
Les Algèbres Géométriques constituent un outil intuitif et performant pour représenter et manipuler des objets géométriques ainsi que pour calculer les intersections entre plusieurs objets géométriques. Parmi les Algèbres Géométriques les plus courantes figure l'Algèbre Géométrique Conforme qui permet de représenter des objets ronds (cercles et sphères) et plats (droites et plans) de façon compacte et élégante. Dans l'Algèbre Géométrique Conforme, les objets plats se construisent comme un objet rond dont on a remplacé un point de construction par un point à l'infini. Cela a pour effet de voir les objets plats comme des objets ronds avec une courbure nulle. La structure de ces objets plats n'est pas différentes de celles des objets ronds (une droite et un cercle de courbure nulle). Tous ces objets se construisent avec le nombre minimum de points de contrôle nécessaires à leur définition, ou bien par leur formule implicite communément utilisée en algèbre linéaire. Mais, contrairement à l'algèbre linéaire, ces objets se manipulent (transformations rigides) tous avec exactement les mêmes opérateurs, indifféremment de leur type. Enfin, l'intersection entre ces objets se calcule elle aussi avec un unique opérateur.
En revanche, la diversité des objets exprimés dans cette algèbre se limite à quelques objets (sphères, plans, cercles, droites, ...). Dans cet article, nous nous intéressons à une extension de l'Algèbre Géométrique Conforme qui permet de représenter et manipuler les surfaces quadriques, l'Algèbre Géométrique Conforme Quadrique. Les surfaces quadratiques suscitent de plus en plus d'attention dans la communauté des Algèbres Géométriques et plusieurs algèbres ont été proposées pour représenter et manipuler ces surfaces. En nous plaçant dans l'Algèbre Géométrique Conforme Quadrique, nous étudions les objets ronds et plats de cette algèbre. L'objectif est, dans un premier temps, de retrouver les objets ronds et plats de l'Algèbre Géométrique Conforme et ensuite d'explorer quels sont les nouveaux objets ronds et plats que l'on peut définir et manipuler avec l'Algèbre Géométrique Conforme Quadrique.

Mots-clés : Surfaces quadratiques, Algèbres Géométriques Conformes

1. Introduction

Les Algèbres Géométriques sont un outil mathématique de représentation et de manipulation d'objets géométriques initialement conceptualisées par Hermann Grassmann en 1844. À la même époque, Wiliam Rowan Hamilton (1805-1865) développait l'algèbre des quaternions utilisée pour les rotations 3D. Enfin William Kingdon Clifford (1845-1879) produisit une algèbre permettant d'englober toutes les algèbres (Grassmann, quaternion, ...). Leurs travaux n'ont été repris seulement qu'à la fin du XXe siècle grâce à l'avènement de l'informatique. David Hestenes a remis au goût du jour ces algèbres en résolvant des problèmes de mécanique quantique avec les Algèbres Géométriques. Pour un historique plus complet, se référer à [DFM07] ou [Kan].

2. Algèbres Géométriques

Une Algèbre Géométrique est définie par une métrique, c'est-à-dire par une matrice symétrique déterminant le produit scalaire entre les vecteurs d'une base. On parlera ici de produit intérieur, ou *inner product*.

Habituellement, en algèbre linéaire, on utilise une métrique Euclidienne, où, pour une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on a $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ et $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$. Pour les Algèbres Géométriques, il est fréquent d'utiliser des métriques non-Euclidiennes. Pour

certains vecteurs de la base on peut alors avoir $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 0$ ou $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = -1$ en plus des relations précédentes. Dans ce papier, on utilise des métriques non-Euclidiennes.

Les Algèbres Géométriques se basent également sur un autre produit, le produit extérieur noté $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (lire " **a** *wedge* **b**", ou " **a** *exterieur* **b**"). En pratique, ce produit ressemble beaucoup au produit vectoriel, à la différence qu'il est définit en toutes dimensions et qu'il est associatif, i.e. $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$. Ce produit présente des propriétés intéressantes que le lecteur peut approfondir dans [DFM07].

Enfin, dans cet article, il sera souvent fait mention du concept de dual. C'est un concept que nous manipulons souvent dans $\mathbb{R}^3$ lorsque nous exprimons le vecteur normal à un plan. Dans notre cas, l'un est le dual de l'autre car ils expriment la même entité géométrique et définissent à eux deux les trois dimensions de $\mathbb{R}^3$. Dans la suite de ce papier, le dual de A se note A^* et sera toujours défini. Bien que cette notion de dual soulève quelques subtilités, son calcul est tout à fait trivial.

3. Algèbre Géométrique Conforme

L'Algèbre Géométrique Conforme trouve son origine au 19ième siècle et a depuis été perfectionnée par différents auteurs, notamment Hestenes [Hes01] et Li [LHR01]. Sa capacité à représenter facilement les droites, les plans, les cercles et les sphères ainsi que leurs transformations rigides (translations, rotations) comme des primitives géométriques (des éléments bien identifiés de l'algèbre), en fait l'une des Algèbres Géométriques la plus utilisée et étudiée. Elle est régulièrement utilisée en géométrie, par exemple par Anglès [Ang80].

Cette section présente ses caractéristiques principales. Pour davantage de détails, le lecteur peut se référer à [DFM07].

3.1. Caractéristiques

L'Algèbre Géométrique Conforme (CGA) de $\mathbb{R}^3$ se définit par la métrique suivante dans un espace à cinq dimensions dont une base $(\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e}_\infty)$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{e_0} & \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} & \mathbf{e}_\infty \\ \hline \mathbf{e_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \mathbf{e_1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{e_2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{e_3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{e}_\infty & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{1}$$

Si on considère un point Euclidien $\mathbf{x}_\epsilon \in \mathbb{R}^3$, tel que $\mathbf{x}_\epsilon = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, le point correspondant dans CGA est définit par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 + \underbrace{x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3}_{\mathbf{x}_\epsilon} + \frac{1}{2}\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\|\mathbf{x}_\epsilon\|^2}\mathbf{e}_\infty \tag{2}$$

Le vecteur $\mathbf{e}_0$ correspond à la coordonnée homogène que l'on retrouve habituellement en synthèse d'images ou en vision par ordinateur. Dans le cadre de CGA, on dit que $\mathbf{e}_0$ est le point à l'origine. En effet, si toutes les coordonnées de $\mathbf{x}_\epsilon$ sont nulles, il ne reste que $\mathbf{e}_0$.

Le vecteur $\mathbf{e}_\infty$ est moins habituel et représente le point à l'infini. Pour mieux comprendre cela, considérons le point $\mathbf{x}$ de CGA associé au point $\mathbf{x}_\epsilon$ de $\mathbb{R}^3$ de l'équation (2). Tout comme avec les coordonnées homogènes, $\mathbf{x}$ et $k\mathbf{x}$ ($k \in \mathbb{R}^*$) représentent le même point $\mathbf{x}_\epsilon$. En particulier, $\frac{\mathbf{2x}}{\|\mathbf{x}_\epsilon\|^2}$ représente aussi le point $\mathbf{x}_\epsilon$ et lorsque l'on translate $\mathbf{x}_\epsilon$ vers l'infini, la seule coordonnée de $\frac{\mathbf{2x}}{\|\mathbf{x}_\epsilon\|^2}$ qui ne s'annule pas est celle de $\mathbf{e}_\infty$. Ainsi, on voit que $\mathbf{e}_\infty$ correspond bien à un point à l'infini.

3.2. Les objets ronds

CGA permet de définir un certain nombre d'objets géométriques, parmi lesquels figurent les objets ronds de $\mathbb{R}^3$. Plus précisément, les objets ronds sont définis par l'ensemble des points situés à une distance r d'un centre $\mathbf{x}_c$. On obtient différents objets ronds lorsque l'on impose aux points situés à une distance r d'un centre $\mathbf{x}_c$ de rester dans un espace d'une dimension donnée $d \leq 3$. Pour $d = 3$, les points sont dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et on obtient une sphère. Si l'on choisit $d = 2$ et que les points sont contraint d'être dans un plan de $\mathbb{R}^3$, un objet rond dans ce plan sera un cercle et par conséquent un cercle dans $\mathbb{R}^3$. Lorsque $d = 1$ et que les points sont contraints à être sur une droite, on obtient un objet rond constitué d'une paire de points. En effet, lorsque l'on choisit un centre $\mathbf{x}_c$ sur une droite, il n'y a que deux points de cette droite qui sont situés à une distance r de $\mathbf{x}_c$.

La construction de ces objets ronds peut se faire simplement à partir de points de contrôle et du produit extérieur. Ces constructions sont données sur la figure 1.

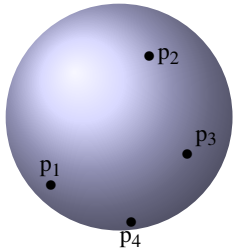
Le produit extérieur permet aussi de savoir si un point appartient ou non à un objet. Un point $\mathbf{x}$ de CGA se trouve sur un objet A de CGA si et seulement si $\mathbf{x} \wedge A = 0$. Cette équation est donc valable pour une sphère, un cercle ou une paire de points.

Quelque soit l'objet rond C, on peut retrouver facilement son rayon avec la formule :

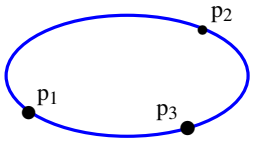
$$r^2 = -\frac{\mathrm{C}\hat{\mathrm{C}}}{(\mathbf{e}_\infty \cdot \mathrm{C})^2} \tag{3}$$

où interviennent des opérateurs non définis dans ce papier, mais qui se retrouvent usuellement dans la litérature [DFM07]. De même, le centre $\mathbf{x}_c$ de l'objet rond C se retrouve par une formule bien établie :

$$\mathbf{x}_c = \frac{\mathrm{C}}{\mathbf{e}_\infty \cdot \mathrm{C}} \tag{4}$$



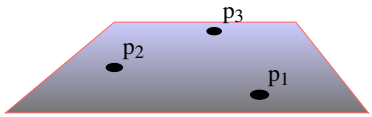
Sphère : $S = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{p}_4$



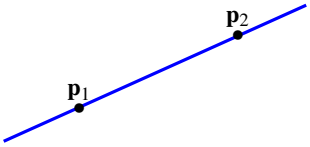
Cercle : $C = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3$

Paire de points : $P = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2$

Figure 1: *Construction d'objets ronds par points de contrôles.*



Plan : $M = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty$



Droite : $L = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty$

Point plat : $F = \mathbf{p} \wedge \mathbf{e}_\infty$

Figure 2: *Construction d'objets plats par points de contrôles.*

3.3. Les objets plats

À chaque objet rond correspond son équivalent plat. Leur construction se base sur le même schéma que les objets ronds, mais en remplaçant un des points de contrôle par le point à l'infini $\mathbf{e}_\infty$, comme illustré sur la Fig. 2.

Cette construction justifie le point de vue où l'on voit un plan comme une sphère de rayon infini et une droite comme un cercle de rayon infini.

À nouveau, un point $\mathbf{x}$ de CGA appartient au plan, à la droite ou au point plat si et seulement si $A \wedge \mathbf{x} = 0$, où A représente l'un de ces trois objets.

3.4. Intersections

L'intersection C entre deux objets A et B de CGA se calcule par la formule :

$$C = \left(A^* \wedge B^*\right)^* \tag{5}$$

où X^* correspond au dual de X.

La Figure 3 montre (en vert) le genre d'intersections que l'on peut calculer avec l'Eq (5). On peut remarquer que l'intersection de deux objets ronds donne un objet rond (intersection sphère-sphère ou bien sphère-cercle). De même, l'intersection entre deux objets plats donne un objet plat. Enfin, l'intersection entre un objet plat et un objet rond donne un objet rond (intersection plan-sphère ou bien droite sphère).

Pour une intersection correspondant à un objet rond C, cette intersection existe si son rayon r, calculé avec l'équation (3), est positif. Si le rayon est négatif, il s'agit d'un objet rond imaginaire.

Par exemple, deux sphères peuvent s'intersecter en formant un cercle. Si les sphères sont tangentes, ce cercle de rayon nul correspondra à un point orienté (bivecteur tangent). Enfin, si les sphères sont disjointes, leur intersection sera à nouveau un cercle, qui existe et qui a un sens du point de vue géométrique, mais de rayon négatif. Ce rayon négatif

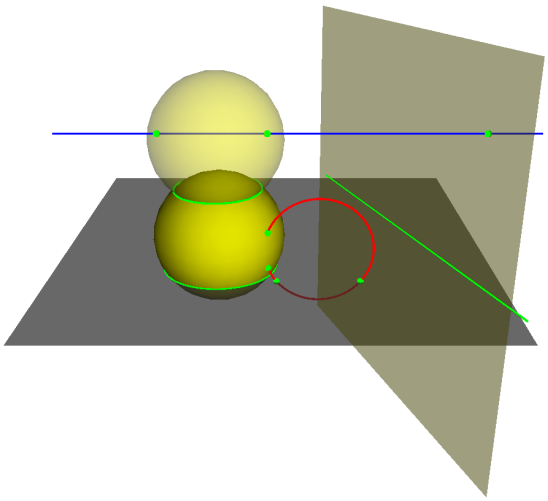


Figure 3: *Intersections (en vert) entre différents objets de CGA.*

qui peut surprendre est lié au fait que les Algèbres Géométriques représentent naturellement les nombres complexes, de façon transparente pour l'utilisateur, et ce même pour une Algèbre Géométrique Euclidienne.

En pratique, l'intersection entre une droite et une sphère donnera une paire de points P, dont on peut extraire les deux points $\mathbf{p}_\pm$ par la formule suivante :

$$\mathbf{p}_\pm = \frac{\mathrm{P} \pm \sqrt{\mathrm{P}^2}}{-\mathbf{e}_\infty \cdot \mathrm{P}} \tag{6}$$

Si le rayon de la paire de points est négatif, il n'y a pas d'intersection.

De même, l'intersection entre une droite et un plan donne un point plat P dont on peut extraire le point $\mathbf{p}$ par :

$$\mathbf{p} = -\frac{(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \cdot (\mathbf{e}_0 \wedge \mathrm{P})}{(\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_\infty) \cdot \mathrm{P}} \tag{7}$$

3.5. Transformations géométriques

L'Algèbre Géométrique conforme permet d'appliquer sur tous les objets géométriques qui la composent des transformations rigides (rotation, translation) ainsi que des réflexions et des homothéties. Ces transformations sont définies par des versors [DFM07] qui fonctionnent de façon similaire aux quaternions, par "sandwich". À noter qu'un versor est défini indépendamment de l'objet sur lequel il s'applique, contrairement à l'algèbre linéraire (e.g. la matrice de translation pour un plan de $\mathbb{P}^3$ n'est pas la même que celle d'un point pour une même translation). En Algèbre Géométrique, le même versor appliquera donc la même transformation géométrique quel que soit l'objet manipulé.

4. Quadric Conformal Geometric Algebra

L'algèbre "Quadric Conformal Geometric Algebra", notée QCGA et définie par Breuils et al. [BNSH18], est une extension de CGA permettant de construire et de manipuler des surfaces quadriques et des coniques. Elle inclut également tous les objets de CGA définis dans les sections 3.2 et 3.3.

4.1. Caractéristiques

L'algèbre QCGA de $\mathbb{R}^3$ est définie sur un espace vectoriel de dimension 15. Plus précisément, QCGA est basée sur la métrique présentée par le tableau (8). La dimension 15, qui peut surprendre et même rebuter, est en fait bien adaptée au traitement des quadriques et reste efficace numériquement.

Si on considère un point Euclidien $\mathbf{x}_\epsilon \in \mathbb{R}^3$, tel que $\mathbf{x}_\epsilon = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, le point correspondant dans QCGA est défini par :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{x}_\epsilon &+ \tfrac{1}{2}(x^2\mathbf{e}_{\infty 1} + y^2\mathbf{e}_{\infty 2} + z^2\mathbf{e}_{\infty 3}) \\ &+ xy\mathbf{e}_{\infty 4} + xz\mathbf{e}_{\infty 5} + yz\mathbf{e}_{\infty 6} \\ &+ \mathbf{e}_{o1} + \mathbf{e}_{o2} + \mathbf{e}_{o3}\end{aligned} \tag{9}$$

4.2. Les objets de CGA

Les objets de CGA définis dans les sections 3.2 et 3.3 sont également définis dans QCGA. Par soucis de lisibilité, nous définissons au préalable quelques constantes :

$$\mathbf{e}_\infty^{\triangleright} = \mathbf{e}_{\infty 1} + \mathbf{e}_{\infty 2} + \mathbf{e}_{\infty 3} \tag{10}$$

$$\mathbf{I}_o^{\triangleright} = (\mathbf{e}_{o1} - \mathbf{e}_{o2}) \wedge (\mathbf{e}_{o2} - \mathbf{e}_{o3}) \wedge \mathbf{e}_{o4} \wedge \mathbf{e}_{o5} \wedge \mathbf{e}_{o6} \tag{11}$$

$$\mathbf{I}_\infty^{\triangleright} = (\mathbf{e}_{\infty 1} - \mathbf{e}_{\infty 2}) \wedge (\mathbf{e}_{\infty 2} - \mathbf{e}_{\infty 3}) \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \tag{12}$$

Pour commencer, il est possible de convertir un point de QCGA en un point de CGA par l'opération suivante :

$$\mathbf{p}_{\mathrm{CGA}} = \mathbf{p}_{\mathrm{QCGA}} \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{13}$$

Par extension, tous les objets de CGA peuvent être construits dans QCGA. Les objets ronds :

$$\text{paire de points : P} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{14}$$

$$\text{cercle : C} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{15}$$

$$\text{sphère : S} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{16}$$

et les objets plats correspondants :

$$\text{points plats : F} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{e}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{17}$$

$$\text{droite : L} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{18}$$

$$\text{plan : M} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_\infty^{\triangleright} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{19}$$

Leur construction est très similaire à celle de CGA présentée dans les Figures 1 et 2.

4.3. Les surfaces quadriques

Les surfaces quadriques sont couramment définies de façon implicite sous la forme d'une équation à 10 coefficients :

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + \mathrm{d}xy + \mathrm{e}yz + \mathrm{f}zx + \mathrm{g}x + \mathrm{h}y + \mathrm{i}z + \mathrm{j} = 0. \tag{20}$$

Des contraintes sur ces paramètres caractérisent chaque type de quadrique [HCV99].

QCGA permet de définir une surface quadrique à partir de ces coefficients [BNSH18]. L'objet obtenu est le dual d'une quadrique de QCGA qu'il suffit de dualiser à nouveau pour obtenir sa version primale. QCGA permet également de définir une surface quadrique par le produit extérieur de 9 points de contrôle linéairement indépendants :

$$\mathrm{Q} = \mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_3 \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}_9 \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{21}$$

À nouveau, il suffit de calculer le dual Q^* de Q pour accéder aux coefficients de l'équation (20), comme spécifié dans [BNSH18].

5. Points à l'infini

QCGA inclut plusieurs sortes de vecteurs associés à une idée d'infini. Les premiers peuvent être mis en évidence de la même façon que pour CGA dans la section 3.1, en déplaçant

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{o1} & \mathbf{e}_{\infty 1} & \mathbf{e}_{o2} & \mathbf{e}_{\infty 2} & \mathbf{e}_{o3} & \mathbf{e}_{\infty 3} & \mathbf{e}_{o4} & \mathbf{e}_{\infty 4} & \mathbf{e}_{o5} & \mathbf{e}_{\infty 5} & \mathbf{e}_{o6} & \mathbf{e}_{\infty 6} \\
\hline
\mathbf{e}_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_2 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{\infty 1} & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{\infty 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{\infty 3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{\infty 4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{\infty 5} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\
\mathbf{e}_{o6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\
\mathbf{e}_{\infty 6} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0
\end{array}
\tag{8}
$$

un point vers l'infini. Contrairement à CGA, le choix de la direction peut mener à des résultats différents.

Si l'on considère un point $\mathbf{x}$ défini par l'équation (9), le déplacer sur l'axe des x vers l'infini annihile toutes ses composantes sauf $\mathbf{e}_{\infty 1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{x^2}\right) = \mathbf{e}_{\infty 1} \tag{22}$$

De même, le déplacer selon l'axe des y ou l'axe des z ne conserve qu'une seule composante :

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{y^2}\right) = \mathbf{e}_{\infty 2} \tag{23}$$

$$\lim_{z\to\infty}\left(\frac{\mathbf{x}}{z^2}\right) = \mathbf{e}_{\infty 3} \tag{24}$$

Un point déplacé à l'infini de façon isotrope aura la forme $\mathbf{x} = \mathbf{e}_\infty^{\triangleright} = \mathbf{e}_{\infty 1} + \mathbf{e}_{\infty 2} + \mathbf{e}_{\infty 3}$ défini dans l'équation 10. Plus généralement, un point à l'infini prendra la forme :

$$\begin{aligned}&\mathbf{x} = \delta_1\mathbf{e}_{\infty 1} + \delta_2\mathbf{e}_{\infty 2} + \delta_3\mathbf{e}_{\infty 3}\\ &\text{avec } \delta_1,\delta_2,\delta_3 \in \{0,1\} \text{ et } \delta_1,\delta_2,\delta_3 \text{ non tous nuls.}\end{aligned} \tag{25}$$

QCGA inclut également les vecteurs de base $\mathbf{e}_{\infty 4}$, $\mathbf{e}_{\infty 5}$ et $\mathbf{e}_{\infty 6}$ qui contribuent aux composantes croisées (xy, xz, yz) de la surface quadrique. On leur attribue ce qualificatif d'infini non pas parce qu'un point de QCGA déplacé vers l'infini les mettrait en évidence, mais parce que dans la metrique de QCGA du tableau (8), ils sont définis avec les mêmes propriétés que les vecteurs $\mathbf{e}_{\infty 1}$, $\mathbf{e}_{\infty 2}$ et $\mathbf{e}_{\infty 3}$.

6. Plat et rond de QCGA

Aplatir une quadrique de QCGA signifie construire cette quadrique par le produit extérieur de points de contrôle et de points à l'infini. Ces points à l'infini peuvent prendre l'une des deux formes spécifiées dans la section 5. Dans ce contexte, aplatir une quadrique de QCGA peut avoir un effet sur la position de la quadrique et aussi sur les symétries de cette surface.

Par le produit extérieur de six points avec $\mathbf{e}_{\infty 4}, \mathbf{e}_{\infty 5}$ et $\mathbf{e}_{\infty 6}$, on trouve la surface quadrique centrée en l'origine et alignée avec les axes et passant par les six points, soit la forme suivante :

$$\mathrm{Q}_c = \mathbf{p}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}_6 \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{26}$$

En remplaçant un des points à l'infini selon un des axes, on ajoute une contrainte de symétrie à la surface quadrique. Pour avoir une symétrie circulaire, on peut remplacer un des points par, au choix, $\mathbf{e}_{\infty 1}, \mathbf{e}_{\infty 2}, \mathbf{e}_{\infty 3}$. On peut ainsi obtenir le cylindre centré, dont la directrice sera l'axe choisi. Les cylindres de droites directrices resp. $(Ox), (Oy), (Oz)$ sont définis dans l'ordre par :

$$\mathrm{C}_c = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{e}_{\infty 3} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{27}$$

$$\mathrm{C}_c = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{e}_{\infty 2} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{28}$$

$$\mathrm{C}_c = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{x}_5 \wedge \mathbf{e}_{\infty 1} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{29}$$

Une illustration des objets ainsi obtenus est montrée Figure 4.

Il est possible d'ajouter d'autres types de symétries à la surface quadrique. On peut, par exemple, ajouter un autre plan de symétrie à la surface. La surface obtenue est une sphéroïde dont le plan principal est le plan choisi. Le plan de symétrie est obtenu par combinaison de $\mathbf{e}_{\infty 1}, \mathbf{e}_{\infty 2}, \mathbf{e}_{\infty 3}$, soulignée dans les équations suivantes des sphéroïdes de plan principal resp. $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$:

$$\mathrm{S}_c = \mathbf{p}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}_5 \wedge \underline{(\mathbf{e}_{\infty 1} - \mathbf{e}_{\infty 2})} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{30}$$

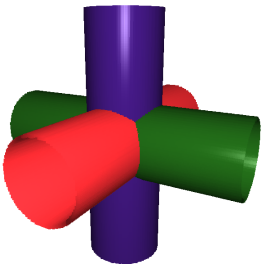


Figure 4: *Construction de trois cylindre d'axes resp.* (Ox, Oy, Oz). *Chaque cylindre est construit à partir de* 5 *points et est de même diamètre. Cet exemple est basé sur une bibliothèque efficace des Algèbres Géométriques [BNF].*

$$\mathrm{S}_c = \mathbf{p}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}_5 \wedge \underline{(\mathbf{e}_{\infty 1} - \mathbf{e}_{\infty 3})} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{31}$$

$$\mathrm{S}_c = \mathbf{p}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{p}_5 \wedge \underline{(\mathbf{e}_{\infty 2} - \mathbf{e}_{\infty 3})} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{32}$$

Le fait d'ajouter plus de contraintes de symétries rend la surface quadrique dégénérée. En effet, la surface obtenue en remplaçant deux des points par $\mathbf{e}_{\infty 1}$ et $\mathbf{e}_{\infty 2}$, correspond à une paire de plans M_c définie par :

$$\mathrm{M}_c = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \wedge \mathbf{e}_{\infty 1} \wedge \mathbf{e}_{\infty 2} \wedge \mathbf{e}_{\infty 4} \wedge \mathbf{e}_{\infty 5} \wedge \mathbf{e}_{\infty 6} \wedge \mathbf{I}_o^{\triangleright} \tag{33}$$

Une fois de plus, il suffit de calculer le dual des entités obtenues pour obtenir les coefficients de la forme implicite.

7. Conclusion

Cet article présente une extension de l'Algèbre Géométrique Conforme qui permet de représenter et manipuler les surfaces quadriques, l'Algèbre Géométrique Conforme Quadrique. Nous avons montré l'étendu des objets géométriques représentables à partir de QCGA. Dans cet article, nous avons commencé à explorer les nouveaux objets ronds et plats de cette algèbre. En particulier, le fait de remplacer des points de contrôle par certains vecteurs de base permet de définir des quadriques centrées, alignées. En allant plus loin, remplacer un point autorise également de nouvelles symétries à l'objet géométrique obtenu. Enfin, nous avons montré qu'il est même possible de construire des surfaces dégénérées à partir de points de contrôle.
Nous chercherons pour la suite à approfondir cette recherche d'objets plats de QCGA. Une méthode envisagée consiste à étudier l'étendue des surfaces quadriques obtenues en envoyant un point à l'infini selon la surface de départ.

Références

[Ang80] ANGLÈS P. : Construction de revêtements du groupe conforme d'un espace vectoriel muni d'une "métrique" de type (p,q). *Annales de l'Institut Henri Poincaré, section A : Physique théorique. Vol. XXXIII*, Num. 1 (1980), 33–51.

[BNF] BREUILS S., NOZICK V., FUCHS L. : Garamon : Geometric algebra library generator.

[BNSH18] BREUILS S., NOZICK V., SUGIMOTO A., HITZER E. : Quadric conformal geometric algebra of $\mathbb{R}^{9,6}$. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 28*, Num. 2 (Mar 2018), 35.

[DFM07] DORST L., FONTIJNE D., MANN S. : *Geometric Algebra for Computer Science : An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2007.

[HCV99] HILBERT D., COHN-VOSSEN S. : The second-order surfaces. *Geometry and the Imagination* (1999), 12–19.

[Hes01] HESTENES D. : Old wine in new bottles : A new algebraic framework for computational geometry. In *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*. Springer, 2001, pp. 3–17.

[Kan] KANATANI K. : *Understanding Geometric Algebra : Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics*. CRC Press, 2015.

[LHR01] LI H., HESTENES D., ROCKWOOD A. : Generalized homogeneous coordinates for computational geometry. In *Geometric Computing with Clifford Algebras*. Springer, 2001, pp. 27–59.