Surfaces Quadriques et Algèbres Géométriques

Stéphane Breuils, Vincent Nozick, Laurent Fuchs, Akihiro Sugimoto

Journées Françaises d'Informatique Graphique, Poitiers,
13 - 16 Novembre 2018

Surfaces Quadriques et Algèbres Géométriques

Stéphane Breuils[1], Vincent Nozick[1], Laurent Fuchs[2] et Akihiro Sugimoto[3]

[1] Université Paris-Est, Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge UMR 8049,
UPEM, ESIEE Paris, ENPC, CNRS.
[2] Université de Poitiers, Xlim, UMR 7252
[3] National Institute of Informatics, Tokyo, Japon

Résumé
L'algèbre géométrique est un outil permettant de représenter et manipuler les objets géométriques de manière générique, efficace et intuitive. Récemment, les surfaces quadriques ont suscité l'intérêt de la communauté et plusieurs modèles ont été proposés afin de les modéliser, les transformer, calculer leurs intersections et les étudier. Pour le moment, il se trouve qu'aucun des modèles ne permet de traiter l'ensemble des opérations nécessaire à la gestion complète de ces surfaces. Certains modèles ne permettent pas de créer une surface quadrique à partir de points de contrôles quand d'autres modèles ne permettent pas d'appliquer de transformation géométrique sur ces surfaces. Il se trouve toutefois qu'en considérant l'ensemble de ces algèbres, la totalité des manipulations majeures concernant ces surfaces quadriques sont couvertes. Cet article présente une unification de ces modèles aboutissant à la possibilité de représenter toute surface quadrique à partir de points de contrôle, de pouvoir les transformer, de calculer leurs intersections et d'en tirer facilement des propriétés géométriques.

Mots clé : Algèbres Géométriques, surfaces quadriques.

1. Introduction

L'algèbre géométrique est un outil mathématique de représentation et de manipulation d'objets géométriques initialement conceptualisé par Hermann Grassmann en 1844. À la même époque, Wiliam Rowan Hamilton (1805-1865) développait l'algèbre des quaternions utilisée pour les rotations 3D. Enfin William Kingdon Clifford (1845-1879) produisit une algèbre permettant d'englober toutes ces algèbres (Grassmann, quaternions, ...). Leurs travaux n'ont été repris seulement qu'à la fin du XX^e siècle grâce à l'avènement de l'informatique. David Hestenes a remis au goût du jour cette algèbre en résolvant des problèmes de mécanique avec l'algèbre géométrique. Au début du XXI^e siècle, l'algèbre géométrique s'est développée, et ainsi d'autres applications sont apparues, notamment l'algèbre espace-temps [DLL03] pour la physique, l'algèbre géométrique conforme pour les opérations géométriques usuelles et d'autres algèbres plus génériques, notamment utilisées dans la gestion des systèmes d'information géographique (GIS), voir [ZYL*18]. D'autres applications ont émergé en vision par ordinateur [Som13, Kan15] permettant de redéfinir les modèles de caméra projectives. Il se trouve que par leur caractère simple et unifiant une variété d'objets géométriques, les algèbres géométriques ont un fort potentiel en synthèse d'images.

Tout comme l'algèbre linéaire communément utilisée pour représenter les objets géométriques, cette algèbre est définie à partir d'un espace vectoriel. Sa spécificité est de pouvoir représenter des objets géométriques par des sous-espaces vectoriels engendrés par des opérateurs de l'algèbre.

Pour la suite de cet article, il est recommandé de se référer à une introduction générale des algèbres géométriques [DFM07]. Cependant, les exemples suivants donnent une compréhension générale des usages des algèbres géométriques, suffisante pour une première lecture. Dans l'espace de l'algèbre géométrique conforme relatif à $\mathbb{R}^3$, considérons 4 points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ de l'algèbre. Il est possible de définir la sphère $\mathbf{s}$ passant par ces 4 points de la manière suivante :

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{x}_4 \tag{1}$$

où $\wedge$ correspond au produit extérieur. Un point quelconque $\mathbf{x}$ appartient à la sphère si $\mathbf{x} \wedge \mathbf{s} = 0$.

Avec le même opérateur et en ne considérant que les trois premiers points, ainsi qu'un point à l'infini de vecteur $\mathbf{e}_\infty$ (similaire à la coordonnée homogène en géométrie projective), on détermine le plan π passant par ces trois points par la formule suivante :

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{x}_3 \wedge \mathbf{e}_\infty \tag{2}$$

Enfin, il est possible de calculer le dual $\mathbf{c}^*$ d'un objet $\mathbf{c}$, à partir d'une métrique. Ce dual, associé au produit extérieur, permet de calculer n'importe quelle intersection entre des objets géométriques de l'algèbre conforme, en gérant également les cas dégénérés. Ainsi, on calcule le cercle $\mathbf{c}$ obtenu par l'intersection entre le plan $\boldsymbol{\pi}$ et la sphère $\mathbf{s}$ par :

$$\mathbf{c}^* = \boldsymbol{\pi}^* \wedge \mathbf{s}^* \tag{3}$$

Ce même cercle peut également être construit par le produit extérieur de trois points appartenant au cercle.

Comme pour le plan, une droite est simplement obtenue par le produit extérieur de 2 points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ et un point à l'infini :

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{e}_\infty \tag{4}$$

mais aussi par l'intersection de deux plans $\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2$:

$$\mathbf{l}^* = \boldsymbol{\pi}_1^* \wedge \boldsymbol{\pi}_2^* \tag{5}$$

Ces exemples illustrent le caractère compact des expressions de l'Algèbre Géométrique pour la définition de primitives géométriques. Par ailleurs, les calculs effectifs produits par ces opérateurs sont, à l'image du produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$, extrêmement compacts. Tout ceci fait de l'Algèbre Géométrique un outil pratique et efficace pour la résolution des problèmes géométriques.

1.1. Définitions et notations

Les Algèbres Géométriques sont construites à partir d'un espace vectoriel de dimension d. Nous noterons tout vecteur de cet espace en gras et en lettre minuscule (vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}$). Cette algèbre est munie d'un produit extérieur, noté $\wedge$ construisant des sous-espaces de l'espace vectoriel de départ ainsi que d'une extension du produit scalaire appelé produit intérieur et noté $\cdot$. Nous noterons $\mathbb{R}^{p,q}, p+q=d$ l'espace vectoriel tel que p vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ vérifient $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$ et q vecteurs de base $\mathbf{e}_j$ vérifient $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = -1$. L'algèbre géométrique obtenue à partir de cet espace vectoriel sera notée $\mathbb{G}_{p,q}$.

1.2. Algèbres Géométriques et surfaces quadriques

L'expression et le traitement des coniques et des surfaces quadriques est également possible en utilisant une extension de l'algèbre géométrique conforme utilisée précédemment pour les sphères. Un premier modèle développé par Zamora [ZE14] supporte la construction de quadriques à partir de points de contrôle. Cependant cette dernière approche ne traite que les quadriques centrées et alignées. Cette représentation n'inclut donc pas toute forme de quadriques, appelées quadriques générales par la suite.

Il existe pour le moment trois approches permettant de traiter les quadriques générales. Présentée en 2017 par Easter et Hitzer, la première est DCGA [Eas17] (Double Conformal Geometric Algebra). Cette algèbre, définie par la métrique $\mathbb{G}_{8,2}$, construit les surfaces quadriques et certaines quartiques à partir des coefficients de leur forme implicite, c.-à-d. les coefficients présents dans l'équation de la surface. Ce modèle permet de représenter des surfaces et d'effectuer des transformations sur ces objets, cependant ce modèle ne permet pas de calculer l'intersection entre deux quadriques générales et ne construit pas de quadriques à partir de points de contrôles.

La deuxième approche, introduite par Parkin [Par12] en 2012 puis finalisée en 2017 par Du et al. [DGM17] utilise l'algèbre $\mathbb{G}_{4,4}$. Cette algèbre utilise deux copies de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$. De ce fait, elle est appelée Double Projective Geometric Algebra, notée DPGA dans cet article. DPGA permet de traiter les intersections entre quadriques et les coniques. Cette approche permet également d'effectuer des transformations sur des quadriques. Cependant, elle ne permet pas de construire des quadriques à partir de points de contrôle.

Enfin, la troisième approche introduite par Breuils et al. [BNSH18] en 2018 utilise l'algèbre $\mathbb{G}_{9,6}$ et est nommée Quadric Conformal Geometric Algebra, ou QCGA. Par une généralisation de [Per09], QCGA est capable de construire les quadriques générales à partir de points de contrôle mais également à partir de la forme implicite de la quadrique. Ce modèle permet de calculer l'intersection de quadriques. Il est également possible de représenter un plan tangent, un vecteur normal à une quadrique générale à partir d'un point de cette quadrique. Cependant cette approche ne permet pas de transformer les surfaces quadriques (c.-à-d. pas de rotation, translation, homothétie, ...).

1.3. Contributions

La contribution de cet article consiste à unifier ces trois algèbres. L'idée principale réside dans la mise en place d'une procédure permettant de convertir d'une algèbre vers une autre la représentation d'une surface quadrique et d'un point. Cette procédure permet non seulement de représenter toute surface quadrique à partir de points de contrôle mais aussi de transformer toute surface quadrique. Elle permet également de calculer les intersections entre quadriques ainsi que de représenter un plan tangent, un vecteur normal à une quadrique générale à partir d'un point de surface.

2. Représentation des quadriques

Les surfaces quadriques sont couramment définies de façon implicite sous la forme d'une équation à 10 coefficients :

$$\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}y^2 + \mathrm{c}z^2 + \mathrm{d}xy + \mathrm{e}yz + \mathrm{f}zx + \mathrm{g}x + \mathrm{h}y + \mathrm{i}z + \mathrm{j} = 0. \tag{6}$$

Des contraintes sur ces paramètres caractérisent chaque type de quadrique [HCV99]. C'est cette forme implicite des quadriques qui va nous servir de base commune pour unifier chacune des trois algèbres. Afin de pouvoir se ramener à cette équation, des opérateurs d'extraction des coefficients sont définis pour chaque algèbre.

2.1. Forme implicite dans DCGA

Conformément à [Eas17], l'algèbre DCGA est construite à partir de la base :

$$(\mathbf{e}_{o1}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{\infty 1}, \mathbf{e}_{o2}, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_{\infty 2}) \tag{7}$$

Quatre premiers opérateurs d'extraction des coefficients sont définis comme suit :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T}^{x^2} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 & \mathbf{T}_{y^2} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{T}^{z^2} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6 & \mathbf{T}_1 = \mathbf{e}_{o1} \wedge \mathbf{e}_{o2} \end{array} \tag{8}$$

et les 6 autres sont définis par :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{T}^{x} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{o2} + \mathbf{e}_{o1} \wedge \mathbf{e}_4 & \mathbf{T}^{y} = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_{o2} + \mathbf{e}_{o1} \wedge \mathbf{e}_5 \\ \mathbf{T}^{z} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_{o2} + \mathbf{e}_{o1} \wedge \mathbf{e}_6 & \mathbf{T}^{xy} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{T}^{xz} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_6 + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 & \mathbf{T}^{yz} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 \end{array} \tag{9}$$

Soit $\mathbf{q}_{DCGA}$ un élément de l'algèbre représentant la surface quadrique, les coefficients de l'équation implicite de la surface peuvent être extraits de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{a} = \mathbf{T}^{x^2} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{b} = \mathbf{T}^{y^2} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{c} = \mathbf{T}^{z^2} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} \\ \mathrm{d} = \mathbf{T}^{xy} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{e} = \mathbf{T}^{xz} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{f} = \mathbf{T}^{yz} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} \\ \mathrm{g} = \mathbf{T}^{x} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{h} = \mathbf{T}^{y} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & \mathrm{i} = \mathbf{T}^{z} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} \\ \mathrm{j} = \mathbf{T}^{1} \cdot \mathbf{q}_{DCGA} & & \end{array} \tag{10}$$

La construction d'un point de DCGA à partir de ses composantes Euclidiennes est définie dans [Eas17]. L'opération réciproque nécessite le calcul du point normalisé $\hat{\mathbf{x}}$ d'un point $\mathbf{x}$ de DCGA (comme en géométrie projective), que nous définissons de la façon suivante :

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{e}_{\infty 1} \wedge \mathbf{e}_{\infty 2})} \tag{11}$$

L'extraction des composantes Euclidiennes (x,y,z) d'un point normalisé $\hat{\mathbf{x}}$ de DCGA s'effectue de la manière suivante :

$$x = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_1, \quad y = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_2, \quad z = \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}_3 \tag{12}$$

2.2. Forme implicite dans DPGA

L'algèbre DPGA [DGM17] est construite à partir d'une base de l'espace projectif $\mathbb{P}^3$ et de sa base duale.

$$(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_0^*, \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_3^*)$$

Dans [DGM17], les auteurs définissent des opérateurs d'extraction des coefficients de l'équation implicite d'une quadrique, dont nous proposons une forme équivalente :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{W}^{x^2} = \mathbf{w}_0^* \wedge \mathbf{w}_0 & \mathbf{W}^{y^2} = \mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{W}^{z^2} = \mathbf{w}_2^* \wedge \mathbf{w}_2 & \mathbf{W}^{xy} = 2\mathbf{w}_1^* \wedge \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{W}^{xz} = 2\mathbf{w}_2^* \wedge \mathbf{w}_0 & \mathbf{W}^{yz} = 2\mathbf{w}_2^* \wedge \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{W}^{x} = 2\mathbf{w}_3^* \wedge \mathbf{w}_0 & \mathbf{W}^{y} = 2\mathbf{w}_3^* \wedge \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{W}^{z} = 2\mathbf{w}_3^* \wedge \mathbf{w}_2 & \mathbf{W}^{1} = \mathbf{W}_3^* \wedge \mathbf{w}_3 \end{array} \tag{13}$$

Pour $\mathbf{q}_{DPGA}$ de DPGA représentant une surface quadrique, les coefficients sont extraits de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{a} = \mathbf{W}^{x^2} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} & \mathrm{b} = \mathbf{W}^{y^2} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} \\ \mathrm{c} = \mathbf{W}^{z^2} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} & \mathrm{d} = \mathbf{W}^{xy} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} \\ \mathrm{e} = \mathbf{W}^{xz} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} & \mathrm{f} = \mathbf{W}^{yz} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} \\ \mathrm{g} = \mathbf{W}^{x} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} & \mathrm{h} = \mathbf{W}^{y} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} \\ \mathrm{i} = \mathbf{W}^{z} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} & \mathrm{j} = \mathbf{W}^{1} \cdot \mathbf{q}_{DPGA} \end{array} \tag{14}$$

Comme pour les points de la géométrie projective, la construction d'un point finis de DPGA nécessite simplement d'ajouter aux composantes euclidiennes une composante homogène à 1. La normalisation d'un point éventuellement non normé consiste donc à diviser toutes les composantes du vecteur par sa composante homogène $\mathbf{w}_3$ (ou $\mathbf{w}_3^*$ pour sa forme duale) si elle est non nulle.

2.3. Forme implicite dans QCGA

D'après [BNSH18], l'algèbre QCGA est construite à partir de la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{o1}, \mathbf{e}_{\infty 1}, \mathbf{e}_{o2}, \mathbf{e}_{\infty 2}, \mathbf{e}_{o3}, \mathbf{e}_{\infty 3}, \mathbf{e}_{o4}, \mathbf{e}_{\infty 4}, \mathbf{e}_{o5}, \mathbf{e}_{\infty 5}, \mathbf{e}_{o6}, \mathbf{e}_{\infty 6})$. Nous proposons les opérateurs d'extraction des coefficients suivants :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Q}^{x^2} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\infty 1} & \mathbf{Q}^{y^2} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\infty 2} & \mathbf{Q}^{z^2} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\infty 3} \\ \mathbf{Q}^{xy} = \mathbf{e}_{\infty 4} & \mathbf{Q}^{xz} = \mathbf{e}_{\infty 5} & \mathbf{Q}^{yz} = \mathbf{e}_{\infty 6} \\ \mathbf{Q}^{x} = \mathbf{e}_1 & \mathbf{Q}^{y} = \mathbf{e}_2 & \mathbf{Q}^{z} = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{Q}^{1} = \mathbf{e}_{o1} + \mathbf{e}_{o2} + \mathbf{e}_{o3} & & \end{array} \tag{15}$$

Étant donné un élément $\mathbf{q}^*$ de QCGA représentant la forme duale de la surface quadrique, tout coefficient de la surface peut être extrait de la façon suivante :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{a} = \mathbf{Q}^{x^2} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{b} = \mathbf{Q}^{y^2} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{c} = \mathbf{Q}^{z^2} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathrm{d} = \mathbf{Q}^{xy} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{e} = \mathbf{Q}^{xz} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{f} = \mathbf{Q}^{yz} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathrm{g} = \mathbf{Q}^{x} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{h} = \mathbf{Q}^{y} \cdot \mathbf{q}^* & \mathrm{i} = \mathbf{Q}^{z} \cdot \mathbf{q}^* \\ \mathrm{j} = \mathbf{Q}^{1} \cdot \mathbf{q}^* & & \end{array} \tag{16}$$

Si on considère un point $\mathbf{x}$ de QCGA, la normalisation $\hat{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}$ est réalisée par :

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{-3\mathbf{x}}{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{e}_{\infty 1} + \mathbf{e}_{\infty 2} + \mathbf{e}_{\infty 3})} \tag{17}$$

3. Complexité des modèles

Chacune des trois algèbres présentées dans ce papier possède ses forces et faiblesses, exprimées dans la Table 1 pour des opérations usuelles en géométrie et en particulier pour la synthèse d'images. Cette table met principalement en évidence l'intérêt de naviguer entre DPGA et QCGA pour les transformations, les intersections de surfaces quadriques ou leur construction à partir de points de contrôle. Ces conversions constituent un apport majeur dans l'unification de la gestion des quadriques en algèbre géométrique.

À noter que DCGA n'est jamais le plus efficace pour ces opérations usuelles, cependant une conversion vers DCGA peut avoir du sens pour un calcul temporaire impliquant des cyclides non supportées par les deux autres algèbres.

Opération	DPGA	DCGA	QCGA
construct. quadrique par points de contrôle	-	-	**∼ système lin.** 10×10
point $\in$ quadrique	**144**	750	**144**
plan tangent	**64**	541	180
intersection quadrique-droite	192	300	**144**
intersection quadrique-quadrique	-	-	**144**
transformations	**144**	750	-

Table 1: Nombre d'opérations arithmétiques requises pour des calculs usuels.

4. En pratique

Les trois algèbres décrites dans cet article sont dites de grandes dimensions, et une implantation standard ne fonctionnerait pas. Récemment, Breuils et al. [BNF17] ont présenté une reformulation des produits de l'algèbre géométrique permettant d'effectuer les produits récursivement avec une complexité en $O(3^d)$ au lieu de $O(4^d)$, où d est la dimension de l'espace vectoriel. Nous proposons une implantation C++ d'une variante de ces opérateurs, disponible sur internet : Garamon [1]. Ce code inclut entres autres l'unification des trois algèbres présentées dans cet article. La Figure 1 illustre le genre de résultats que nous obtenons.

Figure 1: Hyperboloïde généré à partir de la bibliothèque C++ Garamon.

5. Conclusion

Cet article présente un nouveau cadre de représentation et de manipulation de surfaces quadriques de l'algèbre géométrique. Cette approche permet de représenter efficacement les surfaces quadriques à partir de leur forme implicite ou de points de contrôle. Nous avons également montré que l'approche proposée permet de calculer les intersections entre quadriques ainsi que de représenter un plan tangent, un vecteur normal à une quadrique générale à partir d'un point de cette quadrique. Nous chercherons pour la suite à généraliser ce modèle à la représentation de surfaces cubiques et quartiques. Plusieurs modèles sont envisagés et tous ces modèles requièrent des espaces vectoriels générant des algèbres de grandes dimensions.

1. https ://git.renater.fr/garamon.git

Références

[BNF17] Breuils S., Nozick V., Fuchs L. : A geometric algebra implementation using binary tree. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 27*, Num. 3 (Sep 2017), 2133–2151.

[BNSH18] Breuils S., Nozick V., Sugimoto A., Hitzer E. : Quadric conformal geometric algebra of $\mathbb{R}^{9,6}$. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 28*, Num. 2 (Mar 2018), 35.

[DFM07] Dorst L., Fontijne D., Mann S. : *Geometric Algebra for Computer Science, An Object-Oriented Approach to Geometry*. Morgan Kaufmann, 2007.

[DGM17] Du J., Goldman R., Mann S. : Modeling 3D Geometry in the Clifford Algebra $\mathbb{R}^{4,4}$. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 27*, Num. 4 (Dec 2017), 3039–3062.

[DLL03] Doran C., Lasenby A., Lasenby J. : *Geometric algebra for physicists*. Cambridge University Press, 2003.

[Eas17] Easter, Robert Benjamin and Hitzer, Eckhard : Double conformal geometric algebra. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 27*, Num. 3 (2017), 2175–2199.

[HCV99] Hilbert D., Cohn-Vossen S. : The second-order surfaces. *Geometry and the Imagination* (1999), 12–19.

[Kan15] Kanatani K. : *Understanding Geometric Algebra : Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computer Vision and Graphics*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2015.

[Par12] Parkin S. T. : A model for quadric surfaces using geometric algebra.

[Per09] Perwass C. : *Geometric algebra with applications in engineering*, vol. 4 de *Geometry and Computing*. Springer, 2009.

[Som13] Sommer G. : *Geometric computing with Clifford algebras : theoretical foundations and applications in computer vision and robotics*. Springer Science & Business Media, 2013.

[ZE14] Zamora-Esquivel J. : G 6,3 geometric algebra ; description and implementation. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 24*, Num. 2 (Jun 2014), 493–514.

[ZYL*18] Zhu S., Yuan S., Li D., Luo W., Yuan L., Yu Z. : Mvtree for hierarchical network representation based on geometric algebra subspace. *Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 28*, Num. 2 (Apr 2018), 39.