



HAL
open science

Calcul de Mode NL de structure à non linéarités géométriques via un algorithme de continuation PGD/HBM en dimension réduite

Louis Meyrand, Emmanuelle Sarrouy, Bruno Cochelin

► To cite this version:

Louis Meyrand, Emmanuelle Sarrouy, Bruno Cochelin. Calcul de Mode NL de structure à non linéarités géométriques via un algorithme de continuation PGD/HBM en dimension réduite. 14ème Colloque National en Calcul des Structures (CSMA2019), May 2019, Giens, France. hal-02196546v2

HAL Id: hal-02196546

<https://hal.science/hal-02196546v2>

Submitted on 29 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Calcul de Mode NL de structure à non linéarités géométriques via un algorithme de continuation PGD/HBM en dimension réduite

L. Meyrand¹, E. Sarrouy¹, B. Cochelin¹

¹ Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA, Marseille, France {meyrand,sarrouy,cochelin}@lma.cnrs-mrs.fr

Résumé — Les modes non linéaires (MNLs) d'une structure permettent une meilleure compréhension des phénomènes vibratoires non linéaires et peuvent être exploités pour calculer les réponses forcées d'un système. Les méthodes numériques associées s'avèrent généralement coûteuses, justifiant ainsi le développement de modèles réduits. Ce travail revient d'une part sur un algorithme de continuation de MNL par PGD et HBM développé dans un précédent travail, et en montre d'autre part les avantages lorsqu'appliqué à un modèle classique à non linéarités géométriques, le portique de Roorda.

Mots clés — Mode non linéaire, Réduction de modèle, Non linéarités géométriques, Harmonic Balance Method (HBM), Proper Generalized Decomposition (PGD)

1 Introduction

La prise en compte des effets non linéaires des systèmes physiques va de paire avec la croissance de la puissance des calculateurs. Bien que les descriptions obtenues soient plus réalistes, des méthodes de réduction de modèle doivent être implémentées pour économiser les ressources numériques tout en préservant la précision des résultats.

C'est dans ce cadre que les modes non linéaires (MNLs) peuvent être exploités, à l'instar de ce qui peut être fait avec leurs équivalents linéaires [6]. Dans ce travail, on utilisera la définition des MNLs faite par Rosenberg [12]. Il s'agira d'une famille de solutions périodiques du système dynamique libre et non amorti. Plus de détails sur ces objets sont par exemple donnés dans les travaux de Shaw et Pierre [16, 17], Renson et Kerschen [11].

L'algorithme de continuation de branche de MNL présenté ici vient répondre aux constats suivants : ces objets demandent beaucoup de ressources numériques pour être calculés et nécessitent de stocker un nombre conséquent de descripteurs numériques [10, 11]. Le cadre méthodologique de la PGD (Proper Generalized Decomposition) se base sur une séparation des variables, laquelle permet ensuite de résoudre des systèmes de plus petite taille [5, 3, 2, 4, 9].

L'algorithme ici présenté combine une approche réduite par PGD, un traitement fréquentiel par équilibrage harmonique (HBM), ainsi que l'utilisation de schémas de continuation par prédiction-corrrection.

Les avantages de cette approche seront retrouvés et comparés au calcul de MNL dans un sous-espace incluant des dérivées modales [18]. Comme dans ce travail de référence réalisé par Sombroek et al., le portique de Roorda servira de modèle à non linéarités géométriques, lesquelles sont issues d'une cinématique de poutre de Von Kármán.

Nous portons à l'attention du lecteur que seules les étapes clés de la méthode sont rappelées ici et qu'une description détaillée en est donnée dans [7]. Les MNLs sont brièvement redéfinis en Sec. 2. Le solveur PGD/HBM permettant d'obtenir un cycle limite est ensuite expliqué dans la Sec. 3. Le schéma de continuation permettant la construction d'une branche de MNL est ensuite commenté en Sec. 4. Les avantages liés à la méthode sont explicités dans cette partie : l'amélioration de processus issus de la PGD via un couplage avec un schéma de continuation, ainsi que l'enrichissement d'une famille de modes PGD le long de la branche de solutions. Enfin, le gain numérique par rapport à une construction utilisant les dérivées modales est illustré en Sec. 5 dans le cadre du portique de Roorda.

2 Modèle mécanique discret et modes non linéaires

À l'issue d'un processus de discrétisation spatiale, classiquement par une méthode éléments finis, les équations de la dynamique peuvent se mettre sous la forme d'une équation différentielle ordinaire (ODE) d'ordre 2 à N degrés de liberté (DDLs) :

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} + \underline{f}_{nl}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}) = \underline{f}(t) \quad (1)$$

On retrouve dans l'Eq. (1) les matrices $\{\underline{M}, \underline{C}, \underline{K}\}$ de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})^3$, respectivement matrices de masse, d'amortissement, et de raideur linéaires. $\underline{f}(t)$ est le vecteur des forces extérieures appliquées au système, tandis que $\underline{f}_{nl}(\underline{u}, \dot{\underline{u}})$ est le vecteur des efforts non linéaires. Ce dernier terme, une fois séparé du système linéaire sous-jacent, permet de décrire une large gamme de problèmes mécaniques. L'apport de la présente méthode a déjà été montré sur des non linéarités polynomiales et des discontinuités modélisant du contact avec jeu [7]. Ici, une cinématique de Von Kármán sera la source de non linéarités géométriques réparties sur un système de poutres, et $\underline{f}_{nl}(\underline{u})$ sera généré par intégration exacte des efforts intérieurs à l'issue d'un processus éléments finis.

Les MNLs seront calculés d'après la définition donnée par Rosenberg, *i.e* une famille de cycles limites du système libre non amorti suivant :

$$\underline{R}(\underline{u}(t)) = \underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} + \underline{f}_{nl}(\underline{u}) = \underline{0} \quad (2)$$

Bien que les MNLs ne découplent pas les équations comme le font les modes linéaires, la relation fréquence-amplitude propre à ces solutions périodiques ainsi que la phénoménologie non linéaire qui en résulte (bifurcations, interactions modales, etc.) permettent une interprétation fine du comportement des structures en dynamique non linéaire. Les développements suivants présentent une méthode pour les calculer numériquement de manière économe.

3 Calcul d'un cycle limite par PGD/HBM

3.1 Équilibrage harmonique

Les MNLs sont des solutions périodiques de l'Eq. (2), ce qui justifie l'utilisation de l'équilibrage harmonique – HBM, pour *Harmonic Balance Method*. Plus de détails sur les avantages de cette approche fréquentielle sont donnés dans les travaux [8, 13]. Un des défauts inhérents à cette méthode est la troncature harmonique. Prendre en compte les termes d'ordre élevé fait croître le nombre de degrés de liberté (DDLs) traités, faisant ainsi chuter les performances algorithmiques. L'utilisation d'une technique de réduction de modèle dite PGD (*Proper Generalized Decomposition*) permettra par la suite de résoudre des systèmes plus petits sans perdre les avantages de la HBM.

Les notations utiles sont à présent définies. On cherche un signal $\underline{u}(t)$ T -périodique, avec $T = 2\pi/\omega$, tel que :

$$\underline{u}(t) = \frac{\underline{a}_0}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^H (\underline{a}_k \cos(k\omega t) + \underline{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (3)$$

Pour l'implémentation numérique, une écriture matricielle plus compacte est utilisée :

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_H \underline{h}_H(t, \omega), \text{ avec } \begin{cases} \underline{U}_H = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots] \\ \underline{h}_H = [1/\sqrt{2}, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \dots]^T \end{cases} \quad (4)$$

Connaître une solution $\underline{u}(t)$ est équivalent à connaître l'ensemble $\{\underline{U}_H, \omega\}$. La dérivée temporelle $\dot{\underline{u}}(t)$ est directement liée à $\underline{u}(t)$ via une matrice de dérivation \underline{D} connue analytiquement [7].

Après injection de la décomposition (3) dans (2) et après projection de Galerkin sur la base de Fourier orthonormée, on obtient le système algébrique non linéaire $\underline{H}(\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{b}_1, \dots, \omega) = \underline{0}$. Ce dernier comporte $N(2H + 1)$ équations et $N(2H + 1) + 1$ inconnues – la période du signal restant à déterminer.

En régime forcé, le système obtenu est rendu carré en imposant $\omega = \omega_{force}$. Cependant, pour le calcul des MNLs, une équation de phase est requise [15, 14]. Le système considéré étant conservatif, on

notera qu'annuler un sinus implique d'annuler tous les autres. Ainsi, seuls $(H + 1)$ coefficients \underline{a}_k seront à calculer.

La partie du système \underline{H} dépendant linéairement des coefficients de Fourier est connue analytiquement, et la partie non linéaire est traitée avec une méthode *Alternate Frequency Time* (AFT), méthode introduite par Cameron et Griffin [1]. Les expressions des matrices et les détails sur l'AFT sont donnés dans [13].

3.2 Réduction de modèle par PGD

Le processus PGD peut être divisé en trois grandes étapes : la séparation des variables (ici espace et temps), la définition d'un sous-problème par variable (problème spatial et problème temporel ici), et le traitement d'une boucle à directions alternées traitant à tour de rôle chaque sous-problème pendant que l'autre variable demeure fixe.

Le solveur PGD/HBM est obtenu en traitant le sous-problème temporel par HBM, comme décrit dans la Sec. 3.1.

La méthodologie PGD permet de nombreuses variantes. On décrira et utilisera ici la *progressive PGD* (pPGD), qui permet un traitement des sous-problèmes spatiaux plus léger qu'avec la méthode dite *optimized PGD* (oPGD) [5].

On se fixe un entier $m \ll N$. On cherche une solution $\underline{u}(t)$ de l'Eq. (2) telle que :

$$\underline{u}(t) \approx \sum_{j=1}^m \underline{p}_j q_j(t) \Leftrightarrow \underline{u}(t) \approx \underline{P} \underline{q}(t) \text{ avec } \underline{P} = [\underline{p}_1, \dots, \underline{p}_m] \in \mathcal{M}_{N,m} \quad (5)$$

On définit ainsi m modes PGD, ayant leurs formes \underline{p}_j et leurs évolutions $q_j(t)$ – assemblées dans $\underline{q}(t) \in \mathbb{R}^m$. Le choix de normer les \underline{p}_j à 1 est fait, de sorte que les informations liées à l'amplitude de la solution seront contenues dans les $q_j(t)$.

Au final, en se référant aux notations de la HBM et en notant \underline{Q}_H la matrice des coefficients de Fourier de $\underline{q}(t)$, calculer un point du MNL est équivalent à connaître l'ensemble $\{\underline{P}, \underline{Q}_H, \omega\}$ qui lui est associé.

3.3 Problème temporel \mathcal{T}_m

La résolution du sous-problème temporel \mathcal{T}_m doit donner $\{\underline{Q}_H, \omega\}$ sachant les formes des modes PGD contenues dans \underline{P} . Pour ce faire, une formulation faible est écrite sur la période $I_T = [0, 2\pi/\omega]$, avec la fonction test $\underline{u}^*(t) = \underline{P} \underline{q}^*(t)$:

$$\forall t \in I_T \quad \forall \underline{q}^*(t) \quad \int_{I_T} \underline{q}^{*T}(t) \underline{P}^T \underline{R}(\underline{P} \underline{q}(t)) dt = 0 \quad (6)$$

Le problème temporel final est établi à partir de (6) :

$$\forall t \in I_T \quad \underline{M}_r \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{K}_r \underline{q}(t) + \underline{f}_{nlr}(\underline{P} \underline{q}(t)) = \underline{0} \quad (7)$$

avec $\{\underline{M}_r = \underline{P}^T \underline{M} \underline{P}, \underline{K}_r = \underline{P}^T \underline{K} \underline{P}\} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})^2$ et $\underline{f}_{nlr} = \underline{P}^T \underline{f}_{nl} \in \mathbb{R}^m$. Ce système de m ODEs d'ordre 2 est résolu par HBM. Le nombre d'inconnues est donc $m \times (2H + 1) + 1$, et on devra définir une équation contrainte $c(\underline{Q}_H, \omega) \in \mathbb{R}$ pour rendre le système carré. $c(\underline{Q}_H, \omega)$ sera choisie comme critère géométrique lié à la continuation.

3.4 Problème spatial \mathcal{S}_m

La résolution du sous-problème spatial \mathcal{S}_m doit donner \underline{P} sachant la partie temporelle $\{\underline{Q}_H, \omega\}$. De manière analogue, une formulation faible obtenue avec la fonction test $\underline{u}^* = \sum_{k=1}^m \underline{p}_k^* q_k$ mène au système algébrique de taille $m \times N$ suivant :

$$\underline{S}_1 \tilde{\underline{p}} + \underline{S}_{nl}(\tilde{\underline{p}}) = \underline{0} \quad (8)$$

avec $\tilde{\underline{p}} = \{\underline{p}_1^T, \dots, \underline{p}_m^T\}^T \in \mathbb{R}^{N \times m}$ contenant les colonnes de \underline{P} , \underline{S}_1 contribution linéaire par rapport à $\tilde{\underline{p}}$, et $\underline{S}_{nl}(\tilde{\underline{p}}) = [\int_{I_T} q_k f_{nl}(\underline{P} \underline{q}(t)) dt]_{1 \leq k \leq m}$ contribution non linéaire. \underline{S}_{nl} est calculée par AFT, et \underline{S}_1 s'exprime analytiquement :

$$\underline{S}_1 = \underline{I}_2 \otimes \underline{M} + \underline{I}_0 \otimes \underline{K}, \text{ avec } \underline{I}_k = \pi \omega^{k-1} \underline{Q} \underline{D}^k \underline{Q}^T \quad (9)$$

3.4.1 Progressive PGD

Le sous-problème spatial \mathcal{S}_m est numériquement plus coûteux à résoudre que \mathcal{T}_m car sa taille est proportionnelle à $N \gg m$. Ce constat motive l'utilisation de la variante appelée *progressive PGD* (pPGD), dans laquelle un problème spatial \mathcal{S}_m plus petit est obtenu.

Pour ce faire, on choisit de fonctionner à formes \underline{P} bloquées le long de la branche construite : le problème spatial n'est calculé que lorsque le critère d'erreur n'est pas satisfait après calcul de \mathcal{T}_m et que l'on choisit donc d'ajouter un nouveau mode PGD \underline{p}_{m+1} à la description de la solution. À ce moment, seul \underline{p}_{m+1} est calculé par \mathcal{S}_m , les autres formes n'étant pas modifiées. Le système en question est cette fois de taille N et peut être obtenu simplement par projections de Galerkin [5].

Finalement, le problème spatial est plus petit et est traité moins de fois. Cependant, une fois qu'une déformée de mode PGD est calculée, elle est bloquée durant le reste de la continuation, ce qui amène généralement à ajouter plus de descripteurs qu'avec une matrice \underline{P} entièrement recalculée à chaque itération (*i.e.* avec la oPGD). Ce constat sera retrouvé pour le portique de Roorda présenté en Sec. 5.

3.4.2 Normalisation de \mathcal{S}_m

Lors de l'ajout d'un nouveau mode PGD \underline{p}_{m+1} , il est possible qu'après \mathcal{T}_m le nouveau contenu harmonique soit très faible en norme. Le membre de gauche de l'Eq. (8) est alors numériquement proche de zéro. Pour palier ce problème, le problème spatial est divisé par la norme au carré de q_{m+1} . Le carré est justifié par les expressions analytiques de \underline{I}_0 et \underline{I}_2 .

3.5 Solveur PGD/HBM à directions alternées

La dernière étape consiste à intégrer les deux sous-problèmes dans un solveur constitué d'une boucle à directions alternées. Les détails de l'algorithme utilisé sont donnés dans [7]. On notera le choix d'un critère d'erreur physique ε : il s'agira du rapport entre la norme du vecteur résidu $\underline{R}(\underline{u}(t))$ – avec $\underline{u}(t) = \underline{P} \underline{Q} \underline{h}_H(t, \omega)$ – et $\|\underline{K} \underline{u}(t)\|$ sur une période I_T .

Lorsque la boucle ne converge pas au bout d'un nombre limite d'itérations, on fait le choix d'ajouter un nouveau mode PGD en entrée de boucle : une nouvelle colonne \underline{p}_j est ajoutée à \underline{P} et une nouvelle ligne à \underline{Q}_H . Partant du constat qu'il est difficile d'initialiser \underline{Q}_H avec une nouvelle information temporelle pertinente, le sous-problème temporel est traité d'abord en utilisant une initialisation en espace. Le nouveau vecteur spatial \underline{p}_j est initialisé avec la déformée du $(n_0 + m)$ -ème mode linéaire, n_0 étant l'indice du MNL que l'on est en train de calculer. L'accès aux modes linéaires est simple et ces derniers ont l'avantage de constituer une base, ce qui rend leurs formes pertinentes en tant qu'initialisation.

4 Continuation de MNL par PGD/HBM avec enrichissement modal

L'algorithme complet permettant de continuer la branche principale du n_0 -ème MNL d'un système est entièrement détaillé dans [7]. Seules les principales idées liées à l'ajout d'un schéma de continuation au solveur PGD/HBM sont exposées dans la présente section.

Pour des bas niveaux d'énergie, les premiers points du n_0 -ème MNL sont cherchés à un seul mode PGD ($m = 1$), lequel est initialisé avec la déformée du n_0 -ème mode linéaire sous-jacent. Lorsque l'énergie mécanique croît et que le comportement du système devient de plus en plus non linéaire, de nouveaux modes PGD sont ajoutés à la description des solutions périodiques, via le choix algorithmique évoqué en Sec. 3.5. On notera l'obtention d'un schéma de continuation à dimension variable. La taille m de la représentation PGD n'est augmentée que lorsque cela est nécessaire le long de la branche suivie. Elle est gardée la plus petite possible (*vis-à-vis* du critère d'erreur choisi).

Bien que des schémas de continuation plus complexes puissent être choisis, l'algorithme implémenté dans ce travail se base sur une simple prédiction sécante. La méthode de correction se base sur le solveur PGD/HBM décrit en Sec. 3, dans lequel l'équation contrainte $c(\underline{Q}_H, \omega) = 0$ est choisie en tant que condition géométrique correspondant à une méthode correction classique (*i.e.* par longueur d'arc ou pseudo longueur d'arc).

5 Le portique de Roorda – un système à non linéarités géométriques

Le portique de Roorda est un système constitué de deux poutres identiques, à section rectangulaire, connectées en angle droit de manière rigide, tel que représenté en Fig. 1. Les extrémités sont des pivots. C'est une structure classiquement étudiée en flambement [20] lorsqu'on y applique une force $-F\mathbf{e}_y$ au noeud formant l'angle droit.

Chaque poutre est discrétisée en 25 éléments d'Hermite, pour un total de 149 DDLs. Les déplacements axial u_i et transverse w_i sont interpolés respectivement linéairement et cubiquement. Les propriétés géométriques et mécaniques choisies sont celles utilisées par Sombroek et al. [18] et sont récapitulées dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Propriétés géométriques, mécaniques et dynamiques du portique de Roorda

Module de Young E (GPa)	Masse volumique ρ (kg/m ³)	L (m)	h (m)	b (m)	Puls. propres ω_{1-3} (rad.s ⁻¹)
210	7800	0.1	1×10^{-3}	5×10^{-4}	{739.15 ; 1154.6 ; 2956.4}

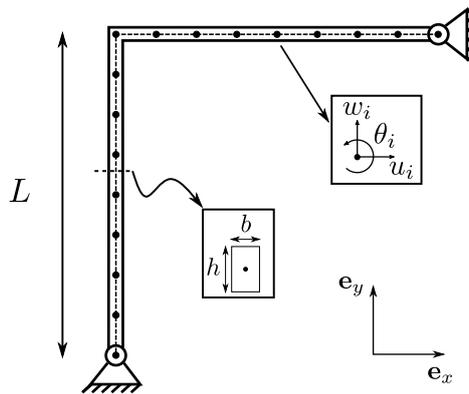


FIGURE 1 – Modèle de portique de Roorda

Une cinématique de Von Kármán telle que formulée dans [19] est utilisée. Elle se base sur des rotations modérées de la fibre neutre ($\sin(\theta) \approx \theta, \cos(\theta) \approx 1$) ainsi qu'une déformation axiale de la poutre simplifiée ($e \approx u_{,x_i} + \frac{1}{2}w_{,x_i}^2$). L'effort non linéaire $\underline{f}_{nl}(\underline{u})$ qui résulte de ces hypothèses est intégré exactement sur chaque élément puis assemblé.

5.1 Construction du premier MNL

Le diagramme Fréquence-Énergie correspondant au MNL1 est représenté sur la Fig. 2. Il est tracé jusqu'à $\omega = 760$ rad.s⁻¹, comporte 142 points calculés en un temps CPU de l'ordre de 1300 s, en choisant une correction par longueur d'arc.

Ce graphe ainsi que la référence tracée à partir de la *Méthode Asymptotique Numérique* (MAN) sont tous deux obtenus avec $H = 15$ harmoniques. Ce nombre est jugé suffisant car permettant de retrouver le même diagramme Fréquence-Énergie de référence que celui obtenu en modèle complet temporel par Sombroek et al.

Pour un critère d'erreur $\varepsilon_{max} = 0.5\%$, la continuation par PGD/HBM permet l'obtention du résultat obtenu par la MAN. Seuls quelques écarts peuvent être notés en les points qui précèdent l'introduction

d'un nouveau mode PGD. En effet, ces points en fin de tronçons de taille m présentent l'erreur ε la plus grande, bien qu'en dessous du seuil fixé. Ce comportement correspond à celui attendu et déjà trouvé pour une telle approche [7].

Les descriptions temporelles des déplacements transverse en milieu de poutres en quelques points sont également fournies en Fig. 2 pour montrer leur similitude avec celles de Sombroek et al. Le lecteur peut se référer à leur travail pour retrouver les diverses interprétations physiques sous-jacentes ainsi que leurs liens avec les modes linéaires.

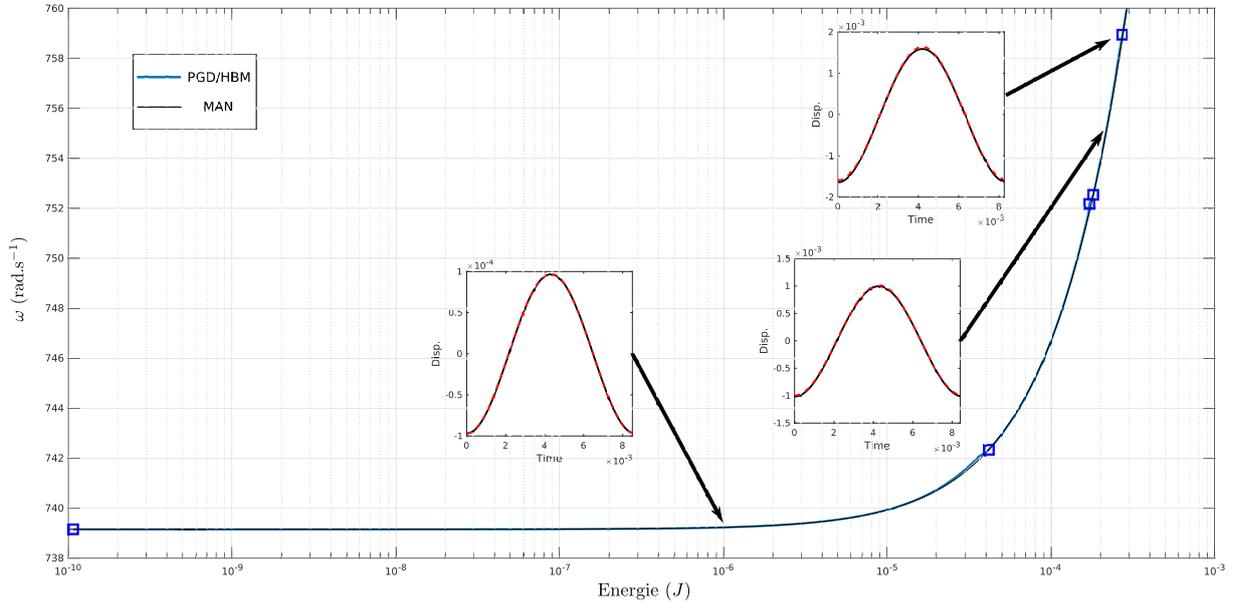


FIGURE 2 – Diagramme Fréquence-Energie du MNL1 du portique de Roorda, par PGD/HBM (bleu) et par MAN (noir). Carrés : points où un mode PGD est ajouté. Les évolutions de x_{13} (noir) et y_{39} (rouge) représentent le déplacement transverse en milieux de poutres.

5.2 Contenu des modes PGD

Seulement 6 modes PGD sont nécessaires pour obtenir la Fig. 2 en utilisant la pPGD. Leurs déformées, bloquées dans \underline{P} une fois calculées, sont celles représentées en Fig. 3. On reconnaît le premier mode linéaire en tant que mode PGD 1. Le mode PGD 2, introduit à très basse énergie, est caractéristique du comportement non linéaire du portique de Roorda et traduit le déplacement du coin. Il porte l'information de la dérivée modale θ_{11} utilisée par Sombroek et al. dans le cadre de leur modèle réduit. On notera que cette forme a été obtenue via la distortion spatiale issue de \mathcal{S}_m à partir de la forme du deuxième mode linéaire, signe d'une certaine adaptativité de l'algorithme. Les modes PGD d'ordre supérieur deviennent nécessaires à plus haute énergie pour tenir compte non seulement des effets non linéaires en flexion mais aussi des effets de traction/compression.

Les modes PGD ajoutés sont tous fortement couplés au regard de la base des modes linéaires. On illustrera uniquement le cas du mode PGD 2 en Fig. 4, lequel présente des couplages significatifs au-delà du mode 50. On constate que la description par PGD/HBM est beaucoup plus compacte que si l'on utilisait comme sous-espace de projection de Galerkin la base des 50 premiers modes linéaires.

Par soucis de concision, on ne représentera pas ici le détail du contenu harmonique de chacun des modes PGDs. Le mode PGD 1 est quasi-intégralement régi par l'harmonique fondamentale. Le mode PGD 2 est composé d'une contribution statique et d'une contribution en $H = 2$. Le mode PGD 3 a deux contributions majeures en $H = 1$ et $H = 3$. Le contenu harmonique des modes PGD 4, 5 et 6 est plus difficilement interprétable : aucun des coefficients de Fourier n'est prépondérant devant les autres, et même les plus hautes harmoniques ont des contributions non négligeables. Ces amplitudes sont presque toujours plus faibles que celles des 3 premiers modes PGD. Ceci confirme le rôle mineur de ces formes dans la physique du système, bien qu'elles soient indispensables à sa résolution numérique.

Par ailleurs, si on recalcule un problème spatial complet en chaque point, ce qui ne bloque pas les

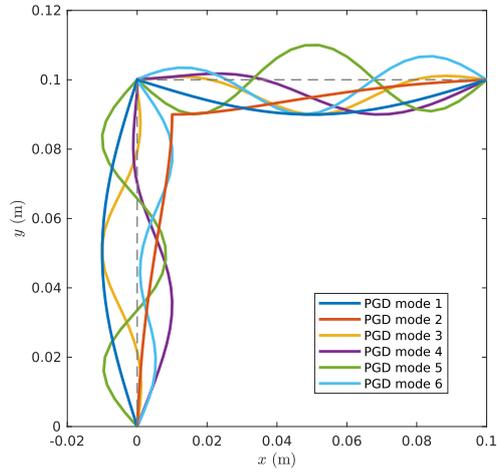


FIGURE 3 – Modes PGD : Contenu de la matrice spatiale \underline{P} en pPGD - Normalisation à 1cm du max. en flexion

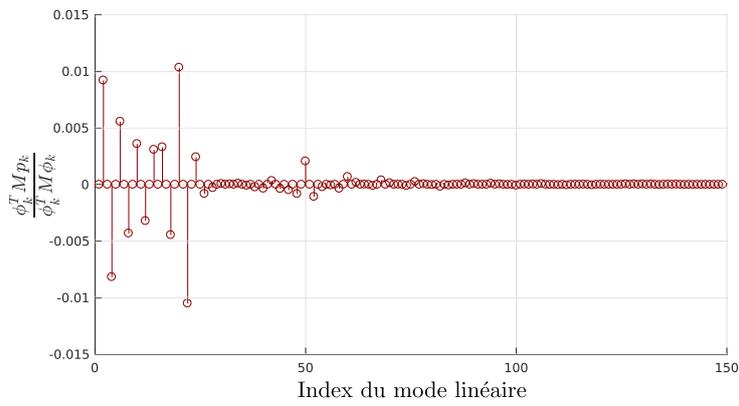


FIGURE 4 – Participations des modes linéaires pour le mode PGD 2

formes introduites comme en pPGD, le nombre m_{max} se réduit encore et se limite à deux. Les deux déformées correspondantes sont très proches des modes PGD 1 et 2 obtenus par pPGD. Le mode PGD 1 ne varie quasiment pas en forme le long de la continuation. Le mode PGD 2 varie peu, comme illustré en Fig. 5. Cependant, les distortions du mode le long de la branche de MNL permettent de compenser l'introduction des 4 modes PGD d'ordre supérieurs en pPGD. Il convient cependant de noter que pour ce calcul, la performance algorithmique est moins bonne qu'en pPGD ($t_{CPU} \approx 950s$ pour 76 points solutions) de par la nature même du sous-problème spatial.

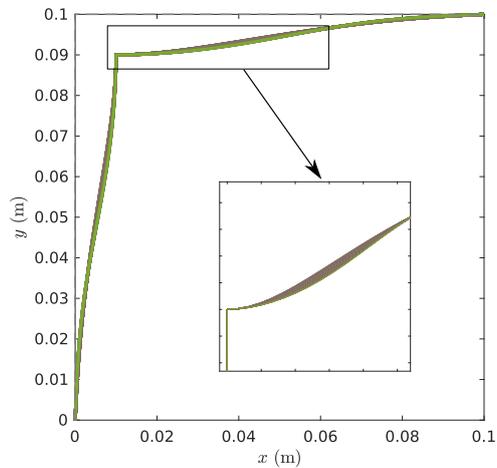


FIGURE 5 – Évolution du mode PGD 2 obtenu sans blocage des formes - Normalisation à 1cm du max. en flexion

6 Conclusion

Seulement 6 modes PGD ont été nécessaires pour construire le premier MNL du portique de Roorda en utilisant la variante dite pPGD de l'algorithme de continuation par PGD/HBM. D'après Sombroek et al., l'utilisation d'un sous-espace fixe incluant modes linéaires et dérivées modales permet de construire la même branche à l'aide de 20 descripteurs : les 5 premiers modes propres ainsi que leurs dérivées modales.

Cette description est donc plus compacte, ne nécessite pas le calcul des dérivées modales, et exploite pleinement les avantages de la continuation par PGD/HBM introduits dans [7] dans le cadre d'un système à non linéarités géométriques au comportement complexe.

Références

- [1] T. M. Cameron, J. H. Griffin. *An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems*, Journal of Applied Mechanics, 56 : 149-154, 1989.
- [2] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto. *Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models*, Archives of Computational Methods in Engineering, 17 : 327-350, 2010.
- [3] F. Chinesta, P. Ladeveze, E. Cueto. *A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition*, Archives of Computational Methods in Engineering, 18 : 395-404, 2011.
- [4] F. Chinesta, A. Leygue, F. Bordeu, J. V. Aguado, E. Cueto, D. Gonzalez, I. Alfaro, A. Ammar, A. Huerta. *Pgd-based computational vademecum for efficient design, optimization and control*, Archives of Computational Methods in Engineering, 20 : 31-59, 2013.
- [5] A. Grolet, F. Thouverez. *On the use of the proper generalised decomposition for solving nonlinear vibration problems*, in ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 4 : 913-920, 2012.
- [6] G. Kerschen, M. Peeters, J. Golinval, A. Vakakis. *Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist*, Mechanical Systems and Signal Processing, 23 : 170-194, 2009.
- [7] L. Meyrand, E. Sarrouy, B. Cochelin, G. Ricciardi. *Nonlinear normal mode continuation through a Proper Generalized Decomposition approach with modal enrichment*, Journal of Sound and Vibration, Elsevier, 443 : 444-459, 2018.
- [8] A. H. Nayfeh, D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*, Wiley, 1995.
- [9] A. Nouy. *A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 : 1603-1626, 2010.
- [10] M. Peeters, R. Vigiúí, G. Sérandour, G. Kerschen, J.-C. Golinval. *Nonlinear normal modes, part ii : Toward a practical computation using numerical continuation techniques*, Mechanical Systems and Signal Processing, 23 : 195-216, 2009.
- [11] L. Renson, G. Kerschen, B. Cochelin. *Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering*, Journal of Sound and Vibration, 364 : 177-206, 2016.
- [12] R. Rosenberg. *On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom*, Advances in Applied Mechanics, 9 : 155-242, 1966.
- [13] E. Sarrouy, J.-J. Sinou. *Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - on the use of the harmonic balance methods*, in Advances in Vibration Analysis Research, InTech, 2011.
- [14] E. Sarrouy, O. Dessombz, J.-J. Sinou. *Stochastic study of a non-linear self-excited system with friction*, European Journal of Mechanics - A/Solids, 40 : 1-10, 2013.
- [15] R. Seydel. *From Equilibrium to Chaos, Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Elsevier, 1988.
- [16] S. Shaw, C. Pierre. *Non-linear normal modes and invariant manifolds*, Journal of Sound and Vibration, 150 : 170-173, 1991.
- [17] S. Shaw, C. Pierre. *Normal modes for non-linear vibratory systems*, Journal of Sound and Vibration, 164 : 85-124, 1993.
- [18] C.S.M. Sombroek, P. Tiso, L. Renson, G. Kerschen. *Numerical computation of nonlinear normal modes in a modal derivative subspace*, Computers & Structures, 195 : 34-46, 2018.
- [19] O. Thomas, A. Sénéchal, J.-F. Deü. *Hardening/softening behavior and reduced order modeling of nonlinear vibrations of rotating cantilever beams*, Nonlinear Dynamics, 86 : 1293-1318, 2016.
- [20] P. Tiso. *Finite element based reduction methods for static and dynamic analysis of thin-walled structures*, TU Delft, Faculteit der Luchtvaart-en Ruimtevaarttechniek, 2006.