HAL
open science

Démodulation cohérente par analyse multi-résolution en présence de bruit parasite coloré et gaussien

Céline Lemoine, Dominique Pastor

To cite this version:

Céline Lemoine, Dominique Pastor. Démodulation cohérente par analyse multi-résolution en présence de bruit parasite coloré et gaussien. Traitement du Signal, 1998. hal-02196087

HAL Id: hal-02196087

https://hal.science/hal-02196087v1

Submitted on 26 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Démodulation cohérente par analyse multi-résolution en présence de bruit parasite coloré et gaussien

A New Data Transmission, in Additive Colored and Gaussian Noise, Based on Multi-Resolution Transform

par Céline LEMOINE*, Dominique PASTOR**

* Université Bordeaux I
351 Cours de la Libération 33405 Talence Cédex
** Sextant-Avionique
Rue Toussaint Catros BP 91 33166 St Médard en Jalles

résumé et mots clés

Nous proposons dans cet article un nouveau système de transmission numérique fondé sur l'Analyse Multi-Résolution
• dont la structure est identique que le bruit de transmission soit blanc ou non
• dont les performances, *dans le cas d'un bruit blanc,* sont inférieures à celles du filtrage adapté (optimal par définition), mais suffisamment proches de celles-ci pour lui être assimilées
• dont les performances, *dans le cas d'un bruit non blanc,* peuvent être estimées, sans que soit utilisé un modèle de bruit trop particulier : ces performances sont analysées et comparées avec les techniques plus classiques telle la méthode de Karhunen-Loève.
Plusieurs simulations valident alors ce système dans le cas d'une transmission dans un canal infini.

Analyse multi-résolution, décomposition en ondelettes orthogonales, algorithme de Mallat, Processus aléatoire, principe du maximum de vraisemblance, théorie de la décision, transmission en bande de base, transmission sur onde porteuse.

abstract and key words

This paper describes a digital communication processing, involving multi-resolution transform and whose effectiveness is studied if the signal is corrupted either by additive gaussian white noise or by additive gaussian colored noise.
When the transmission is corrupted by gaussian white noise, the performances are similar to those obtained by classical data transmission system.
The system is evaluated in a presence of colored additive noise whose spectral density has no particular properties, and compared with a technique using Karhunen-Loeve expansion.
We also present experimental results which show the validity of the proposed processing, for transmission in ideal channel.

Multi-resolution transform, orthogonal wavelet decomposition, mallat algorithm, random processes, maximum-likelihood, decision theory, digital line transmission, carrier-modulated data transmission.

1. introduction

Les récepteurs à maximum de vraisemblance sont évidemment bien connus en télécommunications numériques, tant sur le plan théorique que pratique (*cf.* [1],[4]), et, si le cas académique d'un bruit de transmission blanc et gaussien n'est hélas pas toujours celui rencontré dans la pratique, la littérature propose cependant des techniques permettant de s'y ramener, à l'aide d'un filtre blanchissant, voire d'une décomposition de type Karhunen-Loève (*cf.* [9]).

Cependant, ces solutions, pour efficaces qu'elles soient, requièrent une connaissance préalable du bruit. Cette connaissance

doit être suffisamment précise pour permettre, non seulement, de définir le prétraitement à la réception, mais aussi, de modifier les signaux attendus sur lesquels s'effectue la projection induite par la règle de décision.

Peut-on alors imaginer un traitement différent que ceux habituellement proposés, tel que :

- La structure serait identique que le bruit soit blanc ou non,
- Les performances, *dans le cas d'un bruit blanc*, seraient inférieures à celles du filtrage adapté (optimal par définition), mais suffisamment proches de celles-ci pour lui être assimilées,
- Les performances, *dans le cas d'un bruit non blanc*, pourraient être calculées, ou du moins approchées, sans que soit utilisé un modèle de bruit trop particulier. Ces performances devraient être suffisamment précises et significatives pour permettre une comparaison et une analyse avec les techniques plus classiques (Karhunen-Loève, filtre blanchissant, ...).

Sans prétendre répondre à toutes les questions que soulèverait ce programme très ambitieux, notre objectif est de présenter cependant quelques éléments de réponse susceptibles d'être une alternative aux traitements effectués dans le cas d'un bruit non blanc, dans lesquels les connaissances sur ce dernier se limitent à sa nature stationnaire au sens large, bande étroite et gaussienne. D'autre part, les performances de cette solution doivent évidemment être calculées et commentées dans le cas d'un bruit blanc et non blanc, puis comparées avec des solutions plus classiques.

Le traitement proposé a été élaboré à partir de propriétés remarquables de la décomposition en ondelettes d'un signal borné et d'un processus stationnaire bande étroite, en vertu notamment des résultats et conclusions fournies par [6]. Ces propriétés seront rappelées, leurs conséquences seront décrites, illustrées et démontrées.

La démarche procède par étapes successives : après quelques préliminaires associés à la décomposition en ondelettes orthonormales et aux propriétés remarquables de celle-ci, nous étudierons le cas académique de la transmission en bande de base dans un canal idéal. Puis, nous prolongerons la réflexion par l'étude d'une modulation dans un canal idéal : l'enveloppe complexe classique permettant de se ramener à la bande de base, restera compatible avec ce qui aura été fait précédemment.

La conclusion de l'article s'attachera à mettre en évidence les potentialités, mais aussi les contraintes de la méthode.

2. présentation inductive et heuristique de la démarche

Dans ce paragraphe, conformément à l'introduction, nous exposons une démarche inductive basée sur les comportements de l'analyse par ondelettes orthonormales.

Considérons la figure 1 où un signal localement constant sur une fenêtre de durée finie et nul en dehors de celle-ci, est décomposé

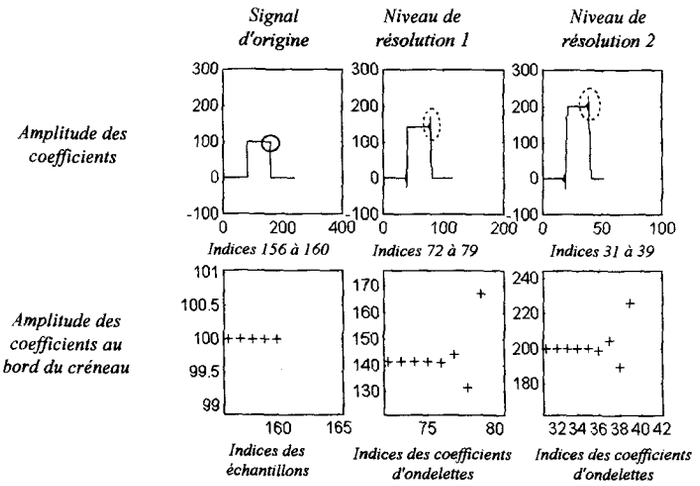

Figure 1. – Décomposition en ondelettes d'un créneau (niveaux de résolution 1 et 2).

en ondelettes orthonormales (utilisant un filtre de Daubechies de régularité 6 (*cf.* [2])) à la résolution 1 puis à la résolution 2. Nous constatons que nous conservons l'allure générale de ce signal aux effets de bord près, en accroissant l'amplitude des coefficients tout en diminuant leur nombre (de moitié aux effets de bord près). Un effet de zoom sur les coefficients au bord des fenêtres temporelles où le signal passe d'un niveau haut à un niveau bas illustre les phénomènes transitoires engendrés par la décomposition.

Cette constatation traduit simplement la nature limitée dans le temps de l'analyse issue de filtres à support compact : la décomposition en ondelettes d'un signal constant sur une durée T supérieure à la taille de la réponse impulsionnelle du filtre, verra ce signal comme infiniment constant pendant une durée inférieure au palier; lorsque le filtre atteindra les discontinuités locales du signal, les effets de bord viendront alors traduire la durée finie du palier où le signal est constant. Nous verrons donc comment la nature compacte des supports des filtres de Daubechies s'accommode très bien d'une gestion précise de ces effets de bord et qu'un calcul simple permet de localiser dans le temps les régimes transitoires et les régimes établis. Quant à l'augmentation de l'amplitude, celle-ci est trivialement due à la somme des échantillons de la réponse impulsionnelle du filtre égale à $\sqrt{2}$.

Maintenant, si nous bruitons ce même signal constant par morceaux par un bruit blanc, la figure 2 montre que la forme globale du signal et l'accroissement du niveau haut sont conservés, sans que toutefois le niveau de bruit ait visiblement augmenté. Une estimation de la corrélation des coefficients d'ondelettes du bruit suggère que ceux-ci forment une suite décorrélée (*cf.* figure 3 et 4). La justification de ces phénomènes est immédiate étant donné qu'il est connu que les composantes d'un bruit blanc calculées à l'aide d'une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ forment une suite décorrélée de même variance que le bruit d'origine. La décomposition orthonormale conservera donc à chaque étage la nature blanche des coefficients en entrée ainsi que leur variance.

Effectuons alors le même type de calcul en utilisant un bruit à bande limitée dont la densité spectrale est celle de la figure 6.

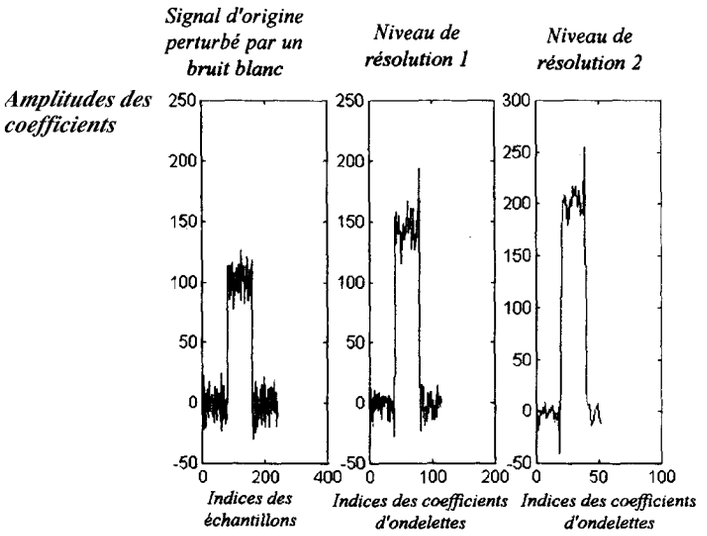

Figure 2. – Décomposition en ondelettes d'un créneau perturbé par un bruit blanc.

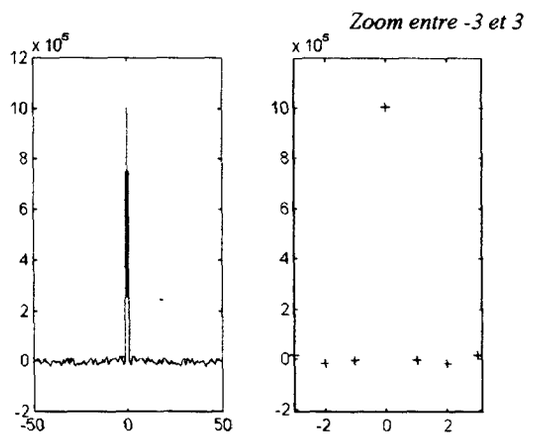

Figure 3. – Fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc.

L'allure des coefficients d'ondelettes (figure 5) est globalement conservée (augmentation de l'amplitude des niveaux haut et effets de bord identiques). Mais au niveau de résolution 4, une décorrélation significative des coefficients d'ondelettes apparaît (*cf.* figure 8) par rapport à la corrélation d'origine des échantillons du bruit d'origine en entrée (*cf.* figure 7). Ce phénomène est inhérent à l'analyse par ondelettes et se justifie très simplement par des arguments « physiques » classiques en Traitement du Signal : lorsque le spectre de bruit n'est pas plat dans la bande analysée, et lorsque le niveau de résolution croît, la bande des filtres d'analyse devient suffisamment étroite pour atteindre les blancheurs « locales » du bruit en entrée. Le sous-échantillonnage systématique par 2 permet de périodiser ces spectres localement « blancs » issus des filtres d'analyse et de retrouver in fine, un spectre plat sur toute la bande utile.

Une rapide démonstration, présentée à l'*annexe A-1* et extraite de [6], formalise ce mécanisme en montrant la décorrélation asymptotique, lorsque la résolution croît, des coefficients d'ondelettes issus de l'Analyse Multi-Résolution d'un processus à bande

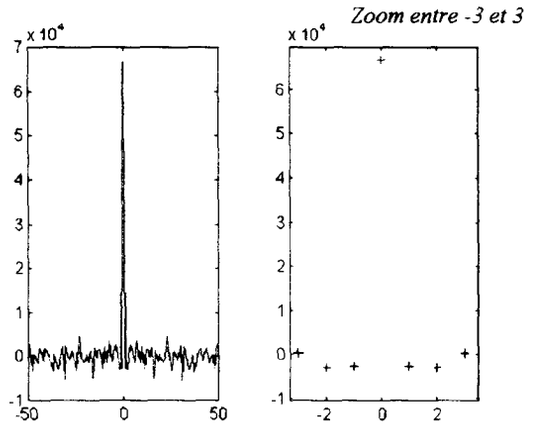

Figure 4. – Fonction d'autocorrélation de la décomposition d'un bruit blanc (niveau de résolution 4).

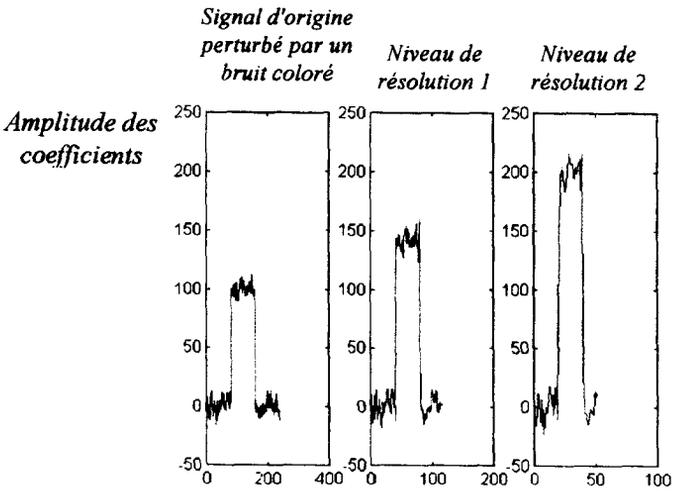

Figure 5. – Décomposition en ondelettes d'un créneau perturbé par un bruit coloré (niveaux de résolution 1 et 2).

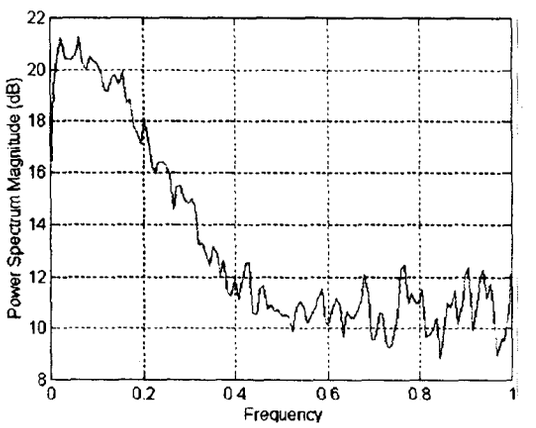

Figure 6. – Densité spectrale du bruit coloré.

limité. L'*annexe A-1* rappelle aussi que la variance asymptotique de ces coefficients d'ondelettes est égale à la valeur de la densité spectrale à l'origine.

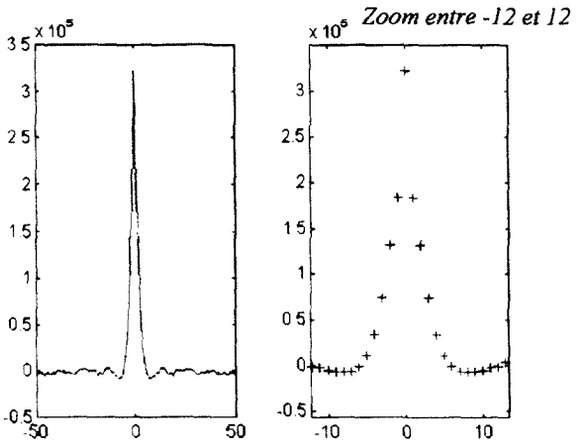

Figure 7. – Fonction d'autocorrélation du bruit coloré.

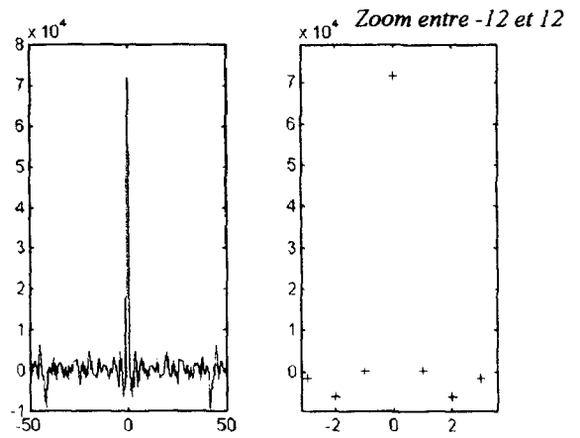

Figure 8. – Fonction d'autocorrélation de la décomposition du bruit coloré (niveau d'analyse 4).

D'après ce qui précède, l'emploi de ces propriétés dans le cas des transmissions numériques binaires perturbées par un bruit parasite blanc ou coloré apparaît naturel désormais :

- le blanchiment serait réalisé par la décomposition en ondelettes elle-même,
- la décision s'effectuerait, non pas sur les échantillons, mais sur les coefficients d'ondelettes selon une règle de décision classique (c'est-à-dire par application du principe du maximum de vraisemblance),
- cette décision serait *identique que le bruit soit blanc ou non* et pourrait être effectuée de manière indépendante symbole par symbole, grâce à la gestion des effets de bord.

Bien entendu, cette approche doit être validée théoriquement par une comparaison avec les méthodes classiques, par une analyse éventuelle du coût de calculs et, surtout, par la mise en évidence d'éventuelles contraintes, suivant notamment les caractéristiques pratiques de tel ou tel cas de figure rencontré dans la réalité.

Cependant, avant de rentrer dans le coeur même du travail, remarquons tout de suite qu'à y regarder de plus près, l'utilisation de l'analyse par ondelettes n'a finalement rien de bien étonnant. En effet, la décomposition de Karhunen-Loève et l'emploi qui en est fait dans le traitement des transmissions numériques, vise essentiellement à décomposer le signal sur une *base orthonormale* issue de la décomposition en valeurs propres du bruit. Il en va de même en ce qui concerne la décomposition en ondelettes orthonormales, à ceci près, et la différence est de taille, que les bases utilisées dans la décomposition de K.L., sont adaptées au signal alors qu'elles en sont indépendantes dans le cas de la décomposition sur une base d'ondelettes.

3. développement théorique

3.1. préliminaires

Ce paragraphe est une justification formelle synthétique des constatations « expérimentales » du paragraphe 2. Aussi, après quelques rappels théoriques sur l'analyse multi-résolution, nous retrouvons les trois thèmes qui sous-tendent ce travail : les effets de bord, le comportement de l'analyse multi-résolution face à un signal constant par morceaux, et le comportement statistique des coefficients de la décomposition en présence d'un processus aléatoire à bande limitée.

3.1.1. *décomposition en ondelettes orthogonales sur les espaces des tendances*

Dans ce paragraphe, nous rappelons les notions fondamentales associées à la décomposition en ondelettes orthonormales selon l'algorithme de Mallat (*cf.* [5]), en limitant ces rappels à la projection du signal selon l'espace des tendances puisque les espaces de fluctuation ne seront pas utilisés (*cf.* paragraphe 3.1.3.). En d'autres termes, nous nous contentons ici d'une analyse multi-résolution qu'englobe la décomposition en ondelettes orthonormales.

L'analyse multi-résolution consiste à introduire une suite de sous-espaces emboîtés et fermés $(V_p)_{p\geq 0}$:

$$V_p = \mathrm{Clos}_{L^2(\mathbb{R})}\left\{\tau_{2^p k_p}\mu_p : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

dont $(\tau_{2^p}\mu_p)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale : τ_k, $k \in \mathbb{Z}$ désigne classiquement l'opérateur de retard qui associe à f de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ la fonction $(\tau_k f)(t) = f(t-k)$ de $L^2(\mathbb{R})$, et les fonctions μ_p sont obtenues grâce à la récurrence :

$$\mu_p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_0(k)(\tau_{2^{p-1}k}\mu_{p-1})$$

où $(h_0(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre d'échelle $m_0(\xi)$.

La projection d'une fonction f de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ sur un espace V_p est alors parfaitement connue par ses composantes sur chacune des fonctions de base de cet espace. Si on désigne par $C_p = (c_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ la suite de ces coefficients, on obtient alors la suite $C_{p+1} = (c_k^{p+1})_{k\in\mathbb{Z}}$

des coefficients de la projection de f sur V_{p+1} en appliquant l'opérateur de décomposition W qui à une suite $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ associe la suite $y = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $y_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_0(n-2k)x_n$.

Ainsi $C_{p+1} = W(C_p)$ et la projection de f sur V_p à partir de celle sur V_0 consiste donc à appliquer successivement cet opérateur à partir de la suite $C^0 = (f|\tau_n\mu)_{n\in\mathbb{Z}}$: $C^p = (c_n^p)_{n\in\mathbb{Z}} = W^p(C^0)$ avec $W^p = \underbrace{W \circ \ldots W}_{p \text{ fois}}$.

Dans la pratique, les fonctions que l'on analyse sont généralement à bande limitée et connues à travers leurs échantillons. L'espace V_0 qui apparaît donc comme le plus « naturel » pour initialiser une analyse multi-résolution à partir des échantillons mêmes de telles fonctions est évidemment l'espace des fonctions à spectre à support compact. Partir de cet espace est alors tout à fait possible puisque le filtre d'échelle n'est en rien lié à la fonction μ_0 dont les translatées dans le temps engendrent une base orthonormale de V_0. On peut donc choisir $\mu_0 = \sin c$ et bâtir ainsi une multitude d'analyses multi-résolution de l'espace des fonctions à spectre à support compact, en choisissant différents filtres d'échelles.

Nous énonçons maintenant les résultats qui justifient les propriétés énoncées au paragraphe 2 et qui sont à la base même de nos réflexions.

3.1.2. gestion des effets de bord

Nous étudions tout d'abord la gestion des effets transitoires induits par l'emploi de l'opérateur de décomposition W et des filtres de Daubechies :

• *Pour un ensemble fini d'instants d'échantillonnage* $\{0, \ldots, f_0T_e\}$, *où* T_e *est la période d'échantillonnage et les instants d'échantillonnage sont tous les* nT_e *, avec* n *compris entre 0 et* f_0, *nous calculons les indices* $\{0, \ldots f_p\}$ *des coefficients dans l'espace des tendances qui correspondent à ces échantillons à la résolution* p *(en fonction du filtre* h_0*), tout en assurant l'indépendance de ces coefficients par rapport à la valeur du signal hors de la période de temps finie considérée (le support compact des filtres de Daubechies est évidemment l'élément essentiel du calcul).*

Notons F l'ensemble des indices des échantillons de la réponse impulsionnelle m_0 du filtre de Daubechies : $F = 0, ..., h_{\max}$ où la borne $h_{\max}$ est telle que $h_{\max} > 0$.

Nous procédons alors par récurrence : connaissant l'ensemble $E^r = \{0, \ldots, f_r\}$ des indices des coefficients relatifs à la décomposition d'une fonction dans $V_r^S (r \geq 0)$, nous cherchons l'ensemble $E^{r+1} = \{0, \ldots, f_{r+1}\}$ des indices des coefficients de la projection de cette même fonction sur l'espace V_{r+1}^S, lorsque l'opérateur W est appliqué.

Pour que tous les coefficients $(c_\ell^{r+1})_{\ell\in E^{r+1}}$ soient exacts, il faut, d'une part, que tous les coefficients du filtre h_0 apparaissent dans le calcul de chacun des coefficients $c_\ell^{r+1} (\ell \in E^{r+1})$ puis, d'autre part, que tous les coefficients c_n^r intervenant dans le calcul de chacun des coefficients $c_\ell^{r+1} (\ell \in E^{r+1})$ existent. On obtient alors facilement la borne supérieure des indices des coefficients de la projection sur l'espace V_{r+1}^S :

$$f_{r+1} = \text{partie entière de } \frac{f_r - h_{\max}}{2}$$

à condition d'avoir à chaque étape de la décomposition :

$$f_r \geq h_{\max} \tag{1}$$

Dès que r devient trop grand, cette condition n'est plus vérifiée et représente donc un critère d'arrêt de la décomposition.

Les indices des coefficients relatifs à l'espace $V_p^S (p \geq 0)$ sont donc obtenus en initialisant la procédure avec : $E^0 = \{0, \ldots, f_0\}$ et en itérant le calcul précédent p fois tant que la relation (1) est vérifiée.

• *Inversement, à partir de l'ensemble d'indices* $\{0, \ldots, f_0\}$ *des coefficients d'ondelettes dans l'espace des tendances, nous calculons l'ensemble* $\{0, \ldots, f_0'\}$ *des instants d'échantillonnage nécessaires et suffisants pour obtenir les coefficients d'ondelettes d'indices* $\{0, \ldots, f_p\}$ *sans avoir à connaître le signal en dehors de la plage temporelle couverte par* $\{0, \ldots, f_0'\}$.

• En effet, d'après ce qui précède, il apparaît que $E^0 = \{0, \ldots, f_0\}$ est un ensemble d'indices suffisant pour obtenir E^p, mais non forcément nécessaire. On peut donc chercher quels sont les indices de E^0 qui sont nécessaires (et donc suffisants) pour obtenir les indices $\{0, \ldots, f_p\} = E^p$. Il est alors simple de montrer que lorsque $\{0, \ldots, f_p\}$ est connu, cet ensemble d'indices nécessaires est :

$$S^0(E^p) = \{0, \ldots, f_0'\} \tag{2}$$

avec $f_0' = 2^p f_p + h_{\max}(2^p - 1)$, et l'on vérifie que $S^0(E^p) \subset E^0$.

L'application des résultats précédents, concernant la gestion des effets de bord, nous permet alors de connaître la relation existant entre :

• le nombre d'éléments constituant la suite des instants d'échantillonnage du signal,

• le niveau de résolution de l'analyse, noté p,

• la borne $h_{\max}$ des indices des échantillons de la réponse impulsionnelle du filtre m_0, de telle sorte que la décomposition de cette suite d'échantillons, au niveau de résolution p, selon le filtre de support $\{0, \ldots, f_{\max}\}$, aboutisse à un et un seul coefficient d'ondelettes significatif, c'est-à-dire à un unique coefficient dont le calcul ne fait pas intervenir d'échantillons issus de valeurs extérieures au support initial analysé.

Afin d'obtenir cette relation, il suffit de choisir $f_p = 0$ (ie $E^p = \{0\}$) dans la relation (2) et l'on aboutit à :

$$S^0(E^p) = \{0, \ldots, h_{\max}(2^p - 1)\} \tag{3}$$

et le cardinal de cet ensemble est : $\text{card}(S^0(E^p)) = h_{\max}(2^p - 1) + 1$.

Cela signifie que le nombre d'échantillons nécessaires et suffisants pour n'obtenir qu'un seul coefficient d'ondelettes est :

$$E = h_{\max}(2^p - 1) + 1$$

Remarques :

1. Ces résultats se généralisent au cas d'un filtre miroir en quadrature autre qu'un filtre de Daubechies pour lequel la borne inférieure $h_{\min}$ des indices des échantillons n'est pas nulle.

2. Dans la suite de l'étude, le niveau de résolution sera noté $p\max$ et l'indice du coefficient de la décomposition exact, selon l'arborescence V_{pmax}^s, sera noté q. Cet indice q vérifie alors $q = e_{p\max} = f_{p\max}$.

En pratique, il sera donc indispensable d'analyser une période T_{ond} telle que le nombre d'échantillons correspondant à l'échantillonnage de cette zone temporelle soit exactement égal à :

$$E = h_{\max}(2^{p\max} - 1) + 1 \tag{4}$$

Dans la pratique, si tel n'est pas le cas, il faudra s'y ramener pour appliquer les résultats précédents, quitte à perdre quelques échantillons avant la décomposition en ondelettes.

Remarque :

Afin de simplifier les notations, nous travaillerons, dans la suite de l'étude, avec une fréquence d'échantillonnage normalisée. La période d'analyse requise par la décomposition sera alors égale à :

$$T_{\text{ond}} = h_{\max}(2^{p\max} - 1) + 1 \tag{5}$$

Cette période dépend donc des deux paramètres de l'analyse par ondelettes :

- le niveau de résolution de la décomposition
- la borne supérieure du support de la réponse impulsionnelle du filtre, qui est directement liée à la régularité du filtre de Daubechies.

Trois cas de figure doivent alors être considérés :

1. Le couple $(p\max, h_{\max})$ est imposé : on en déduit alors la valeur de la période d'observation grâce à l'expression (5)

2. Une période d'observation T et la borne $h_{\max}$ sont imposées : ce cas de figure est plus complexe que le précédent car, la régularité du filtre étant fixée, il n'existe pas forcément un niveau de résolution tel que T puisse s'exprimer sous la forme (5). On cherche alors le niveau de résolution $p\max$ tel que, T et $h_{\max}$ étant fixés

$$T_{\text{ond}} = h_{\max}(2^{p\max} - 1) + 1 \leq T \leq h_{\max}(2^{p\max+1} - 1) + 1 \tag{6}$$

La valeur du niveau de résolution s'obtient très facilement à partir de la relation (6) :

$$p\max = \text{partie entière de } \log_2\left(\frac{T - 1 + h_{\max}}{h_{\max}}\right)$$

et l'analyse par ondelettes se fera non pas sur la période T mais sur la période T_{ond}.

3. Une période d'observation T et un niveau de résolution $p\max$ sont imposés. Nous ne développons pas davantage ce cas de figure qui n'a pas un grand intérêt pratique.

3.1.3. décomposition d'une suite d'échantillons constants

L'opérateur de projection de l'analyse multi-résolution peut évidemment être appliqué à une suite d'échantillons constants par morceaux, issus de l'échantillonnage d'un signal lui-même constant par morceaux : en dehors des effets de bord, le filtre d'échelle à support compact voit les morceaux constants du signal comme infiniment constants. La somme des coefficients de la réponse impulsionnelle de ce filtre étant égale à $\sqrt{2}$, la valeur des coefficients de projection subit une amplification égale à $\sqrt{2}$. En cumulant les projections sur les sous-espaces emboîtés, on accroît ce gain jusqu'à $2^{p/2}$ *sur les coefficients significatifs*.

Le même type de raisonnement permet de justifier pourquoi une analyse multi-résolution nous suffit et pourquoi nous n'utiliserons pas les espaces de fluctuations : la somme des coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre miroir en quadrature du filtre d'échelle est nulle ; de fait, en dehors des effets de bord, les espaces de fluctuations ne conserveront absolument pas l'information constante par morceaux. Ceci est d'ailleurs caractéristique de l'analyse par ondelettes qui s'exprime à travers les espaces de fluctuations et qui est dédiée aux irrégularités d'un signal et non à ces régularités.

3.1.4. décomposition d'un processus stochastique

Comme *l'annexe A-1* le rappelle selon une démonstration édulcorée par rapport à celles plus générales de [6], les coefficients d'ondelettes associés à la décomposition d'un processus $b(t)$ d'ordre 2, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, de densité spectrale γ_b appartenant à $L^\infty(\mathbb{R})$ et à support compact, constituent une suite de variables aléatoires hilbertiennes (dont les propriétés statistiques sont les suivantes :

$$E[c_k^p(b)] = m_b m_0(0)^p (p \in \mathbb{N}) \text{ et } \lim_{p\to\infty} E[c_k^p(b)\overline{c_\ell^p}(b)] = \gamma_b(0)\delta_{k,\ell}$$

où

- m_b est la moyenne du processus b
- m_0 est le filtre en quadrature intervenant dans la décomposition en ondelettes
- p est le niveau de résolution
- γ_b est la densité spectrale, continue en 0, du processus b
- l'on choisit comme convention $+\infty \times 0 = 0$

Ce résultat montre que, pour un processus centré, la suite des coefficients obtenus par décomposition tend vers une suite d'échantillons décorrélés, lorsque le niveau de résolution est suffisamment grand. Dans le cas d'un bruit blanc, le résultat n'est plus seulement asymptotique mais vérifié à tout niveau de résolution.

3.2. transmission dans un canal idéal

Nous allons étudier la transmission en bande de base et la transmission sur onde porteuse, à partir de la modélisation d'une chaîne de transmission *idéale* utilisée classiquement (*cf.* [1]).

Certes le modèle de canal idéal n'est pas réaliste, mais il représente une excellente approximation du canal réel pour un grand nombre de transmissions (faisceaux hertziens, dans les systèmes de télécommunication par satellites...). Grâce à ce modèle, le signal utile restera constant dans les équations sur toute la durée d'émission d'un symbole.

Comme souligné en conclusion, l'étape suivante de l'étude serait celui d'une transmission à bande limitée affectant la forme d'onde du signal émis et générant des problèmes classiques d'interférences entre symboles.

Dans le cas de la transmission en bande de base, le signal est représenté sous la forme d'un code en lignes à deux états :

$$s(\cdot) = \sum_{k \in Z} a_k \chi(\cdot - kT) \quad \text{où} \quad a_k \in \{a^0, a^1\}$$

alors que dans le cas d'une transmission sur onde porteuse, c'est l'enveloppe complexe du signal modulé qui sera considérée sous forme de code en ligne (*cf.* [1]). La généralisation à plusieurs états ne nous apparaît pas immédiate et fera l'objet d'éventuels développements ultérieurs.

Remarque :

La notation T sera réservée à la durée d'émission d'un élément binaire, et nous réserverons la notation T_{ond} pour la durée utile lors d'une décomposition en ondelettes (*cf.* paragraphe 3.1.2.).

3.2.1. transmission en bande de base

Dans le cas d'une transmission en bande de base, le récepteur fonctionne séquentiellement et décompose son décodage en une suite de décisions résolues successivement dans le temps et indépendamment les unes des autres. Le signal reçu n'est donc pas décomposé dans son ensemble : chacune des zones temporelles élémentaires (une zone élémentaire correspond à la durée d'émission d'un symbole) est projetée sur les espaces des tendances récurrents liés à l'analyse par ondelettes orthonormales, séparément des autres périodes d'observation et ce successivement dans le temps. La décomposition se fait jusqu'au niveau de résolution où il n'existe plus qu'un seul coefficient d'ondelettes significatif, grâce à la gestion des effets de bord présentée au paragraphe 3.1. Il existe deux motivations essentielles à ce choix d'analyse :

- La décorrélation des coefficients d'ondelettes du bruit est d'autant plus grande que le niveau de décomposition est élevé. Les calculs de performances seront donc d'autant plus précis.
- Enfin, amenés dans la suite à considérer le cas d'une transmission sur onde porteuse et des coefficients d'ondelettes complexes, la manipulation de variables aléatoires complexes est grandement simplifiée par rapport à celle de vecteurs multidimensionnels aléatoires complexes. Il est dès lors pertinent de poursuivre la décomposition des échantillons jusqu'à n'obtenir qu'un seul coefficient.

Pour chaque symbole binaire a_k représentatif d'une zone temporelle élémentaire, on obtient, après décomposition au niveau de résolution $p\max$ où seul le coefficient $c_q^{p\max}$ est exact, la variable aléatoire observée *monodimensionnelle* suivante :

$$c_q^{p\max}(x) = a_k 2^{\frac{p\max}{2}} + c_q^{p\max}(b) \tag{7}$$

où

- la variable aléatoire a_k prend aléatoirement et de manière équiprobable la valeur a^0 ou a^1
- le paramètre $p\max$ est le niveau de résolution tel qu'il n'y ait qu'un seul coefficient d'ondelettes représentatif de la zone temporelle T', où $T' \leq T$ en vertu de (5)
- la variable $c_q^{p\max}(p)$ est une variable aléatoire réelle, gaussienne et centré car la décomposition en ondelettes orthogonales est une transformation linéaire qui conserve la normalité du processus initial b. Ses caractéristiques d'ordre 2 sont définies par :

$$E[(c_q^{p\max}(b))^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu^{S,p\max})(\xi)|^2 \gamma_b(\xi) d\xi$$

avec $\lim_{p\max \to \infty} E[(c_q^{p\max}(b))^2] = \gamma_b(0)$

L'application directe du critère du maximum de vraisemblance conduit alors à la décision :

$$\textit{La décision } a_k = a^0 \textit{ est prise si } c_q^{p\max}(x) < \sqrt{2^{p\max}} \frac{(a^1 + a^0)}{2}$$

$$\textit{La décision } a_k = a^1 \textit{ est prise si } c_q^{p\max}(x) > \sqrt{2^{p\max}} \frac{(a^1 + a^0)}{2} \tag{8}$$

Afin de mesurer les performances du récepteur, nous calculons la probabilité de décision correcte relative à la règle de décision décrite précédemment :

$$P_c^{\text{ond}} = \frac{1}{2}[Pr\{c_q^{p\max}(b) < 2^{\frac{p\max}{2}-1}|a^1 - a^0|\} + Pr\{-c_q^{p\max}(b) > 2^{\frac{p\max}{2}-1}|a^1 - a^0|\}] \tag{9}$$

Or la variable $c_q^{p\max}(b)$ est une variable aléatoire réelle et gaussienne de propriétés stochastiques :

- $E[c_q^{p\max}(b)] = 0$
- $E[c_q^{p\max}(b)^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu^{S,p\max})(\xi)|^2 \gamma_b(\xi) d\xi$

  avec $\lim_{p\max \to \infty} E[(c_q^{p\max}(b)^2] = \gamma_b(0)$

L'expression (9) de la probabilité de décision correcte peut s'écrire sous la forme :

$$p_c^{\text{ond}} = 1 - \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{|a^1 - a^0|\sqrt{2^{p\max}}}{2\sqrt{2E[(c_q^{p\max}(b))^2]}}\right)$$

où $E[(c_q^{p\max}(b))^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu^{S,p\max})(\xi)|^2 \gamma_b(\xi) d\xi$ vérifie $\lim_{p\max \to \infty} E[(c_q^{p\max}(b))^2] = \gamma_b(0)$

Ainsi, quel que soit le réel ε positif, il existe un niveau de résolution à partir duquel la probabilité d'erreur peut être encadrée par :

$$\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{|a^1 - a^0|\sqrt{2^{p\max}}}{2\sqrt{2(\gamma_b(0) - \varepsilon)}}\right) \leq P_e^{\text{ond}} \leq \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{|a^1 - a^0|\sqrt{2^{p\max}}}{2\sqrt{2(\gamma_b(0) + \varepsilon}}\right)$$

Afin de comparer par la suite avec les méthodes classiques, nous supposons que le niveau de résolution est suffisamment grand pour pouvoir estimer la probabilité d'erreur par l'expression :

$$P_e^{\text{ond}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d_{\text{ond}}}{\sqrt{2\gamma_b(0)}}\right) \tag{10}$$

où la quantité d_{ond} représente la moitié de la distance entre les deux vecteurs observés possibles. Cette distance est égale à $\frac{1}{2}|a^1 - a^0|\sqrt{2^{p\max}}$.

Nous insistons sur le fait que la règle de décision décrite en (8) est censée être optimale que le bruit soit blanc ou coloré, car le récepteur est indépendant de l'allure spectrale du bruit parasite.

3.2.2. *transmission sur onde porteuse*

Dans le cas d'une transmission sur onde porteuse, l'enveloppe complexe du signal modulé pourra s'exprimer sous la forme :

$$x_e(\cdot,t) = \sum_{k\in Z} a_k \chi(t-kT) + b_e(\cdot,t)$$

où

• la variable aléatoire a_k est une variable aléatoire complexe, telle que ses parties réelle et imaginaire (notées respectivement b_k et c_k) peuvent prendre de façon équiprobable, respectivement, les valeurs b^0 et b^1 puis c^0 et c^1.

• le processus $b_e(\cdot,t)$ est l'enveloppe complexe d'un processus stochastique réel $b(\cdot,t)$ dont les propriétés sont identiques à celles exposées au paragraphe 3.1.4.

Toutefois, le raisonnement est analogue au précédent car

• l'enveloppe complexe du bruit parasite qui n'est plus un processus réel mais complexe vérifie toutes les hypothèses nécessaires à sa décomposition en ondelettes orthogonales (grâce aux propriétés de la transformée de Hilbert qui constitue en partie le signal analytique).

• la propriété de circularité vérifiée par l'enveloppe complexe du bruit (*cf.* [3], [7]) et par sa décomposition en ondelettes, permet de définir entièrement les caractéristiques stochastiques du premier et second ordre de la décomposition en ondelettes, comme dans le cas réel.

• les parties réelle et imaginaire de la décomposition en ondelettes de l'observée vérifient chacunes séparément exactement les mêmes propriétés que celles de la variable aléatoire définie dans l'expression (7), du fait que le niveau de résolution $p\max$ permet de ne conserver qu'un seul coefficient observée : dans le cas monodimensionnel, les parties réelle et imaginaire de la décomposition du bruit sont indépendantes et de même variance (*cf.* [7]).

Les propriétés de l'enveloppe complexe du bruit permettent de se ramener à deux règles de décision (relatives respectivement à la partie réelle puis à la partie complexe de la variable aléatoire issue de la décomposition de la constante bruitée) identiques chacune à celle obtenue dans le cas d'une transmission en bande de base

La décision $b_k = b^0$ est prise si : $Re(c_q^{p\max}(x_e)) < 2^{\frac{p\max}{2}-1}(b^1+b^0)$

La décision $b_k = b^1$ est prise si : $Re(c_q^{p\max}(x_e)) > 2^{\frac{p\max}{2}-1}(b^1+b^0)$

La décision $c_k = c^0$ est prise si : $Re(c_q^{p\max}(x_e)) < 2^{\frac{p\max}{2}-1}(c^1+c^0)$

La décision $c_k = c^0$ est prise si : $Re(c_q^{p\max}(x_e)) > 2^{\frac{p\max}{2}-1}(c^1+c^0)$

et les performances du récepteur sont représentées par l'expression :

$$P_e = P_e^b + P_e^c - P_e^b P_e^c$$

où

• $P_e^b = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{2^{\frac{p\max+1}{2}}|b^1-b^0|}{2\sqrt{2E\left[|c_q^{p\max}(b_e)|^2\right]}}\right)$

$$P_e^c = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{2^{\frac{p\max+1}{2}}|c^1-c^0|}{2\sqrt{2E\left[|c_q^{p\max}(b_e)|^2\right]}}\right)$$

• $E\left[|c_q^{p\max}(b_e)|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu^{S,p\max})(\xi)|^2 \gamma b_e(\xi) d\xi$

et $\lim_{p\max\to\infty} E\left[|c_q^{p\max}(b_e)|^2\right] = 4\gamma_b(\xi_0)$

4. comparaison avec les méthodes classiques

Nous rappelons que la méthode utilisée classiquement en transmission numérique (application du filtrage adapté) est optimale dans le cas d'une transmission dont le bruit parasite est blanc alors que dans le cas d'un bruit parasite coloré, une telle méthode n'est plus adaptée : l'application de la décomposition de Karhunen-Loève ou d'un filtre blanchissant convient alors parfaitement à ce type de transmission.

Afin de comparer notre méthode avec la méthode utilisée classiquement, nous avons étudié séparément le cas d'un bruit parasite blanc puis le cas d'un bruit parasite coloré.

4.1. bruit parasite blanc

Dans le cas particulier d'un bruit parasite blanc et gaussien, la probabilité d'erreur relative respectivement à la règle de décision classique et à la technique utilisant les ondelettes s'exprime en fonction de la densité monolatérale du bruit blanc N_0 (*cf.* [1]) :

	Maximum de vraisemblance	**Technique des ondelettes**
Distance	$a_{\mathrm{clas}} = \frac{1}{2}\lvert a^1-a^0\rvert\sqrt{T}$	$d_{\mathrm{ond}} = \frac{1}{2}\lvert a^1-a^0\rvert\sqrt{2^{p\max}}$ avec $h_{\max}(2^{p\max}-1)+1 \leq T$
Probabilité d'erreur	$P_e^{\mathrm{clas}} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{d_{\mathrm{clas}}}{\sqrt{N_0}}\right)$	$P_e^{\mathrm{ond}} = \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{d_{\mathrm{ond}}}{\sqrt{N_0}}\right)$

où T représente la durée de l'observation.

La borne supérieure $h_{\max}$ du support du filtre étant toujours supérieure ou égale à 1, quelle que soit la régularité du filtre de Daubechies, on vérifiera sans peine que la distance entre signaux qu'utilise l'Analyse Multi-Résolution est inférieure à celle employée par le récepteur à Maximum de Vraisemblance. Le maximum de vraisemblance, optimal par construction vis à vis d'un bruit blanc, restera donc naturellement plus performant que la méthode proposée.

A y regarder de plus près, cette différence entre les deux méthodes est tout simplement due aux effets de bord liés à l'Analyse Multi-Résolution puisque ceux-ci conduisent à n'utiliser qu'une partie des coefficients d'ondelettes et donc à travailler sur une durée « utile » $T_{\mathrm{ond}} = h_{\max}(2^{p\max}-1)+1$ réduite par rapport à la durée

T disponible en réalité et qu'exploite complètement le récepteur à Maximum de Vraisemblance.

Pour que la décision après Analyse Multi-Résolution présente les mêmes performances qu'après réception par Maximum de Vraisemblance, il faudrait donc exploiter complètement la durée T disponible pour un symbole, et donc choisir les paramètres de manière à ce que la durée « utile » de cette méthode coïncide avec la durée T.

Il existe donc deux cas exclusifs p max : le premier, qui tient plutôt du hasard, est celui où il existe $h_{\max}$, tel que T soit exactement égal à $h_{\max}(2^{p\max}-1)+1$; le second, plus réaliste et fréquent, est celui où T n'est pas de cette forme. On pourrait alors imaginer réduire T à la valeur T_{ond} de la forme $h_{\max}(2^{p\max}-1)+1$ la plus proche de T, mais procéder ainsi conduirait à augmenter la largeur de bande et se priver, de toute manière, d'exploiter complètement une durée T disponible.

En conservant donc T tel quel, il est alors très aisé de vérifier que la seule solution envisageable dans tous les cas consiste à choisir le filtre de Daubechies de régularité 1 dont la réponse impulsionnelle est constituée de 2 échantillons à la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il y aura toujours un effet de bord, mais celui-ci disparaît dans le sous-échantillonnage. On peut penser que choisir le filtre de Daubechies le plus sommaire risque d'induire une dégradation des résultats expérimentaux par rapport aux théoriques : notamment, la très mauvaise localisation en fréquence de ce filtre risque de freiner le processus de décorrélation asymptotique des coefficients d'ondelettes. On se placera donc dans ce cas extrême dans les simulations présentées au chapitre 5 afin de défavoriser l'Analyse Multi-Résolution en présence de bruit coloré.

4.2. bruit parasite coloré

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe précédent, dans le cas d'un bruit additif coloré, l'application de la méthode classique dont nous venons d'analyser les performances n'est plus adaptée au type de transmission étudiée. Afin de valider notre théorie, nous avons donc comparé les performances de la méthode par ondelettes avec celles obtenues à partir de la méthode de Karhunen-Loève (KL), utilisée classiquement dans ce cas de figure.

Conformément aux présentations de la méthode de K.L. faites usuellement, (cf [9]), nous allons supposer que le bruit parasite, noté n, est la somme d'un bruit blanc, noté w, de densité monolatérale N_0 et d'un bruit coloré, noté n_c, de fonction d'autocorrélation R_c et de densité spectrale γ_c.

Nous rappelons que les performances de la méthode de K.L. dépendent de la fonction d'autocorrélation :

	Méthode de K.L.	Technique des ondelettes
Distance	$d_{kl}=\frac{1}{2}\lvert a^1-a^0\rvert\sqrt{T}$	$d_{\text{ond}}=\frac{1}{2}\lvert a^1-a^0\rvert\sqrt{2^{p\max}}$ avec $h_{\max}(2^{p\max}-1)+1\leq T$
Probabilité d'erreur	$P_e^{kl}(^*)=\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d_{kl}}{\sqrt{N_0}}\right)$	$P_e^{\text{ond}}=\frac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{d_{\text{ond}}}{\sqrt{N_0}+2\gamma_c(0)}\right)$

(*) Lorsque la fonction d'autocorrélation est définie positive, la probabilité d'erreur d'une telle méthode tend vers la probabilité P_e^{kl} lorsque le nombre de valeurs propres de la fonction de corrélation R_c tend vers l'infini alors que lorsque la fonction d'autocorrélation est simplement définie non-négative, la probabilité d'erreur est exactement égale à la probabilité P_e^{kl}.

Ainsi, les performances de la méthode de K.L. sont limitées par le bruit blanc. Les performances des deux méthodes dépendent donc des propriétés du bruit parasite coloré et, même si les performances théoriques de la méthode classique K.L. sont meilleures, en pratique, il sera nécessaire d'analyser les performances des deux méthodes en fonction du bruit parasite et le paramètre dimensionnant est la valeur du rapport $\frac{2\gamma_c(0)}{N_0}$.

Nous finirons cette comparaison en rappelant que l'application de la méthode de K.L. n'est valable que lorsque le modèle du bruit parasite est connu, alors que la méthode par ondelettes est totalement indépendante de l'allure spectrale du bruit parasite.

5. application à la modulation de phases à deux états et simulations

Dans cette partie, nous avons cherché à comparer la robustesse du récepteur classique adapté au bruit blanc, avec celle de la méthode que nous proposons, vis-à-vis d'un bruit coloré, par une évaluation du taux d'erreurs en fonction du rapport signal sur bruit.

Nous avons considéré le cas d'une modulation de phase à deux états perturbée par un bruit additif non blanc (*cf.* figure 9).

La densité spectrale de ce bruit n'étant résolument pas constante sur la demi-largeur du lobe principal du signal utile, on peut s'attendre à une dégradation des performances du récepteur classique,

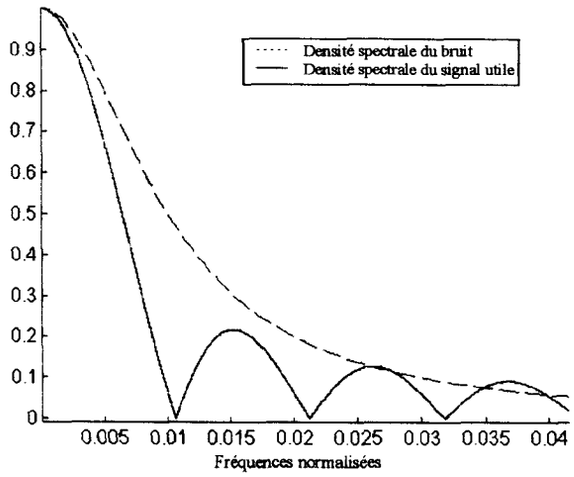

Figure 9. – Représentation spectrale du bruit et du signal utile.

optimal pour un bruit blanc, mais sous-optimal pour un tel bruit. Par contre, grâce aux propriétés de la décomposition en ondelettes, on peut s'attendre à une tendance vers l'optimalité (représentée par l'expression (3-2-1-4)) des performances du récepteur où en amont de la décision est placée la décomposition en ondelettes.

Avant de présenter les taux d'erreurs obtenus par simulation, nous faisons quelques rappels théoriques relatifs à ce type particulier de transmission.

5.1. probabilité d'erreur théorique

Pour ce cas particulier de transmission, la demi-distance entre les deux observées possibles, intervenant dans l'expression de la probabilité d'erreur, peut s'exprimer en fonction de l'énergie E_b des deux signaux observés qui ont même énergie.

Bien que l'expression (10) attachée à la méthode proposée soit correcte que le bruit soit coloré ou non, il n'en va pas de même en ce qui concerne p_e^{clas} (cf. § 4.1) qui ne peut être employée que pour un bruit blanc et non pour un bruit coloré : nous étudions donc séparément le cas du bruit blanc et du bruit coloré.

5.1.1. bruit blanc

On obtient alors :

$$P_e^{\text{clas}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{et} \quad P_e^{\text{ond}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\frac{E_b + h_{\max} - 1}{h_{\max}}}{N_0}}\right)$$

avec $E_b = T$.

Lors de l'application de la méthode par ondelettes, il y a donc perte d'énergie, due aux contraintes de cette méthode (voir le paragraphe 3-1-2).

Cependant, dans le cas particulier où $h_{\max} = 1$ et $T = T_{\text{ond}}$, il y a égalité des deux probabilités d'erreur puisque la probabilité d'erreur relative à la méthode par ondelettes s'exprime sous la forme :

$$P_e^{\text{ond}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad \text{avec} \quad E_b = T$$

5.1.2. bruit coloré

Comme nous l'avons déjà souligné au début du paragraphe, l'expression de la probabilité d'erreur associée à la démodulation classique n'est plus valable, puisque le bruit n'est pas blanc. Nous ne pourrons donc analyser pour cette méthode que des taux d'erreurs obtenus par simulation.

Pour la méthode fondée sur les ondelettes, l'expression de la probabilité d'erreur est identique à celle obtenue dans le cas d'un bruit parasite blanc, en remplaçant la densité monolatérale du bruit par sa densité spectrale prise en 0 :

$$P_e^{\text{ond}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\frac{E_b + h_{\max} - 1}{h_{\max}}}{2\gamma_b(0)}}\right) \quad \text{avec } E_b = T$$

Le cas particulier cité précédemment, c'est-à-dire le cas où $h_{\max} = 1$ et $T = T_{\text{ond}}$, est encore valable et la probabilité d'erreur de la méthode par ondelettes s'exprime alors sous la forme :

$$P_e^{\text{ond}} = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\gamma_b(0)}}\right) \quad \text{avec } E_b = T.$$

5.2. taux d'erreur obtenus par simulation

Pour la méthode par ondelettes, nous avons fait les choix suivants :

1. Le filtre miroir en quadrature est le filtre de Daubechies de régularité 1.

• Ce choix de filtre se justifie par le fait que l'emploi d'un filtre miroir en quadrature dont la réponse impulsionnelle est à support compact, est indispensable pour l'application des propriétés de la décomposition en ondelettes sur lesquelles est fondé le système de transmission.

• Une telle régularité a été choisie afin de limiter le coût de calcul de la décomposition en ondelettes (afin de pouvoir faire un nombre suffisant de tests pour valider la méthode pour de forts rapports signal à bruit). Toutefois, nous rappelons que la décomposition de Mallat d'un processus d'ordre 2 tend vers une suite d'échantillons décorrélés indépendamment de la régularité du filtre utilisé (*cf.* [6]). Ce résultat théorique nous autorise donc à choisir une faible régularité du filtre de Daubechies, même si l'on peut penser, intuitivement, que la vitesse de convergence est liée à cette régularité. Ce choix de régularité sera donc un handicap pour la convergence des coefficients d'ondelettes du bruit vers un bruit blanc, par contre, on ne perd pas de points lors de la décomposition.

2. Afin de pouvoir faire un plus grand nombre de tests, pour obtenir un taux d'erreurs suffisamment représentatif, nous avons choisi un niveau d'analyse faiblement élevé : le niveau de décomposition 4.

Nous nous sommes placés dans le cas particulier où la période T s'exprime directement sous la forme (4). Si nous traçons la fonction de corrélation du bruit et celle des coefficients d'ondelettes issus de la décomposition du bruit, au niveau d'analyse 4 et faisant intervenir un filtre de Daubechies de régularité 1, nous constatons sur les figures 10 et 11 que le bruit d'origine ne peut être modélisé par un processus blanc alors que sa décomposition en ondelettes est une suite de coefficients quasi-décorrélés : les hypothèses de décorrélation sont donc bien vérifiées par la décomposition du bruit dans un tel cas.

Le tracé continu de la figure 12 représente la probabilité d'erreur binaire théorique alors que les valeurs discrètes représentent les taux d'erreurs obtenus d'une part, par l'application de la méthode par ondelettes, et d'autre part, par l'application de la méthode classique adaptée à un bruit parasite blanc.

Conformément à la théorie, la probabilité d'erreur théorique n'est pas optimale pour ce mode de transmission lorsque la méthode classique adaptée au bruit blanc est appliquée puisque les taux d'erreurs binaire sont supérieurs aux probabilités d'erreur attendues, alors que les taux d'erreurs obtenus à partir de la méthode utilisant la décomposition en ondelettes sont tout à fait conformes à la probabilité théorique.

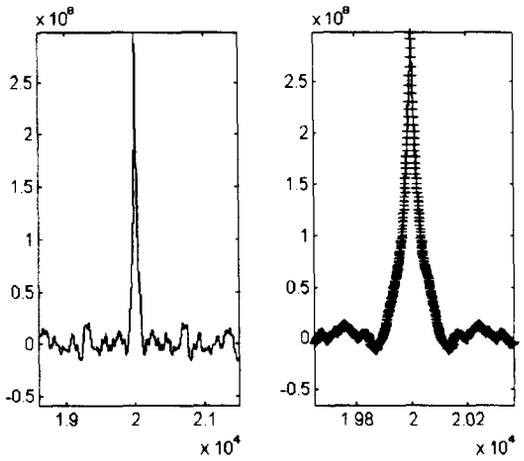

Figure 10. – Fonction d'autocorrélation du bruit coloré.

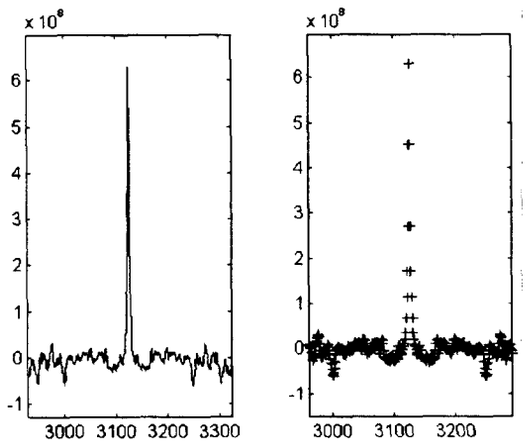

Figure 11. – Fonction d'autocorrélation de la décomposition du bruit coloré (niveau de résolution 4).

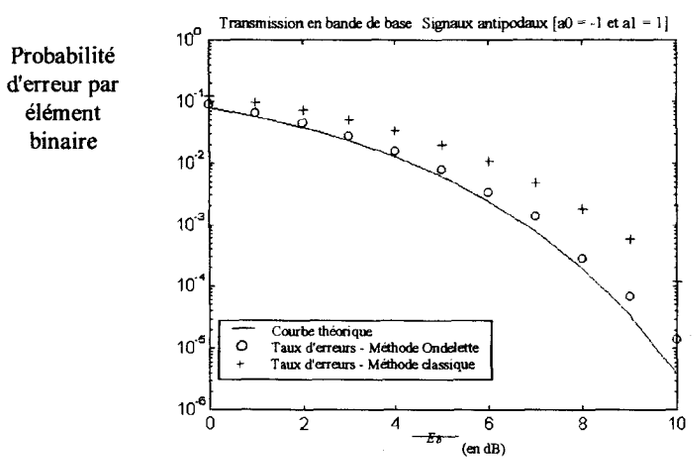

Figure 12. – Calcul de taux d'erreur binaire par simulations.

Ceci illustre la robustesse de la méthode proposée pour des bruits dont la bande spectrale est inférieure à la demi-largeur du lobe principal de la transformée de Fourier du signal utile, sans avoir à connaître parfaitement les caractéristiques du bruit à traiter, à la différence de la décomposition de K.L. qui est, elle, adaptée au bruit parasite.

La méthode proposée ne demande pas une connaissance aussi fine des caractéristiques spectrales du bruit que celles requises par la décomposition de K.L. Cependant, dans quelle mesure peut-on considérer la technique comme pratiquement indépendante de l'allure spectrale du bruit ? En d'autre termes, ne peut-on imaginer qu'une densité spectrale étroite du bruit demandera une augmentation significative du niveau de résolution ?

L'*Annexe A-2* apporte des éléments de réponse : on constatera que pour les bruits A.R. d'ordre 1 générés, pour un niveau de résolution 4 et , la quasi-blancheur est atteinte.

6. conclusions

Les performances théoriques associées à la méthode par ondelettes sont naturellement inférieures aux performances théoriques optimales atteintes par des méthodes classiques, lorsque le bruit parasite est blanc. Cependant, la même structure de réception permet de traiter le cas d'un bruit parasite coloré avec des performances

- que nous savons calculer, ou du moins approcher,
- qui peuvent être comparées à des techniques plus classiques (K.L., filtre blanchissant),
- qui, face à un bruit coloré, restent proches des résultats théoriques, alors que le taux d'erreurs associé au récepteur à maximum de vraisemblance s'en éloigne, comme l'ont montré les simulations.

La méthode proposée reste donc robuste que le bruit soit blanc ou coloré et c'est d'ailleurs sur cette capacité à conduire à des résultats quasiment identiques, que le bruit soit coloré ou non, que réside l'intérêt de la démarche.

Ne pourrait-on pas considérer cette méthode comme une alternative éventuelle aux techniques plus classiques de filtre blanchissant ou de décomposition de K.L. ?

Pour répondre à cette question, il faut prolonger les réflexions du paragraphe 4.2, par une comparaison tant théorique que pratique des méthodes entre elles, pour différentes allures spectrales du bruit parasite, et en tenant compte des contraintes d'emploi.

En ce qui concerne la méthode de K.L., il est nécessaire d'estimer au préalable l'allure spectrale du bruit parasite, alors que, pour la méthode par ondelettes, même si l'estimation spectrale du bruit ne semble pas indispensable, il faut respecter la relation existant entre la durée d'analyse, le niveau de résolution et le support du filtre de Daubechies. La technique présentée ne sera donc une alternative aux techniques plus classiques qu'au prix de quelques ajustements propres à l'application pratique.

Notons enfin que les résultats précédents ont été établis, tant théoriquement que sous simulation, dans le cas d'un codage binaire sommaire. Il faudrait alors prolonger la réflexion à d'autres codages M-aires et au cas de la transmission dans un canal à bande limitée. Pour ce dernier type de transmission, une duplication des symboles au niveau de l'émetteur, puis l'application d'un

filtrage de Nyquist (afin d'éliminer l'interférence entre symboles) permettraient de se ramener éventuellement aux mêmes conditions d'étude que celles exposées pour une transmission en bande infinie.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier M. R.Gay Professeur Emérite à l'Université de Bordeaux I, pour ses nombreux conseils, ainsi que les rapporteurs en ce qui concerne notamment l'amélioration de la rédaction et qui nous ont suggérés certains compléments.

7. annexes

Annexe 1 : Coefficients de l'analyse multi-résolution d'un processus à bande limitée et comportement asymptotique des moments d'ordre 1 et 2

Cette annexe présente dans le cas d'une Analyse Muti-Résolution, le comportement asymptotique des moments d'ordre 1 et 2 des coefficients associés à un processus stationnaire à bande limité échantillonné en respectant le théorème de Shannon.

Conformément aux notations introduites au paragraphe 3.1.1., on considère ici la suite des sous-espaces emboîtés et fermés $(V_p)_{p\geq 0}$:

$$V_p = \mathrm{Clos}_{L^2(\mathbb{R})}\{\tau_{2^p kp}\mu : k \in Z\} \qquad (A1)$$

dont une base orthonormale est constituée par la famille $(\tau_{2^p k}\mu)_{k\in Z}$ où τ_k, $k \in Z$ désigne l'opérateur de retard. Nous rappelons alors que les fonctions μ_p sont obtenues par la récurrence

$$\mu_p = \sum_{k\in Z} h_0(k)(\tau_{2^{p-1}k}\mu_{p-1})$$

où $(h_0(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est la réponse impulsionnelle du filtre d'échelle $m_0(\xi)$.

Puisqu'on travaille à partir des échantillons même du bruit, la fonction μ_0 qui engendre par ses translatés l'espace V_0 et le calcul récursif des μ_p, sera encore choisie égale à $\mu_0 = \sin c$, comme nous l'avons fait en ce qui concerne les fonctions d'énergie finie à spectre à support compact.

Il est alors simple d'exprimer la Transformée de Fourier des fonctions μ_p sous la forme :

$$(F\mu_p)(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(\xi 2^{k-1})\chi\Delta(\xi) \qquad (A2)$$

En supposant que l'entrée de l'Analyse Multi-Résolution soit constituée des échantillons $x(n)$ d'un processus aléatoire hilbertien, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, et dont la densité spectrale est bornée et à support dans $\Delta = [-\pi, \pi]$ (processus à bande limité), on montre dans [6] que l'espérance des coefficients c_k^p associés au processus dans V_p est $E[c_k^p] = 2^{p/2}m_x$ où m_x est la moyenne du processus $x(t)$. Le processus sera donc choisi centré pour éviter toute dérive vers l'infini de la moyenne des coefficients de l'Analyse Multi-Résolution lorsque le niveau p de décomposition croît.

On montre aussi (*cf.* [6]) que la corrélation spatiale entre les coefficients $c_{p,k}$ à un même niveau de résolution p s'exprime sous la forme :

$$E[c_k^p\overline{c_\ell^p}] = \frac{1}{2\pi}\int e^{i2^p(k-\ell)\xi}|F\mu_p)(\xi)|^2\gamma(\xi)d\xi \qquad (A3)$$

Pour étudier le comportement asymptotique de cette corrélation lorsque la résolution croît, on commence par remarquer que la Transformée de Fourier $(F\varphi)(\xi)$ de la fonction d'échelle $\varphi(t)$ associée au filtre d'échelle $m_0(\xi)$ est non nulle sur $\Delta = [-\pi, \pi]$, puisqu'on montre aisément qu'il existe un réel strictement positif C, pour lequel, quel que soit $\xi \in \Delta$, on ait $F\varphi(\xi)| \geqslant C$.

Grâce à ce résultat intermédiaire, on combine (A2) à une récurrence immédiate sur l'égalité $\sqrt{2}(F\varphi)(2\xi) = m_0(\xi)(F\varphi)(\xi)$ liant la fonction $(F\varphi)(\xi)$ au filtre d'échelle $m_0(\xi)$, pour écrire $F\mu_p(\xi)$ sous la forme :

$$(F\mu_p)(\xi) = 2^{p/2}(F\varphi)(\xi 2^p)\frac{\chi\Delta(\xi)}{(F\varphi)(\chi)}$$

Après un changement de variable immédiat, il vient alors :

$$E[c_k^p\overline{c_\ell^p}| = \frac{1}{2\pi}\int e^{i2^p(k-\ell)\xi}|(F\varphi)(\xi)|^2\frac{\chi\Delta(\xi/2^p)}{|(F\varphi)(\xi/2^p)|^2}\gamma(\xi/2^p)d$$

et la continuité de la densité spectrale en 0 permet d'aboutir sur Δ à la relation

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\chi\Delta(\xi/2^p)}{|(F\varphi)(\varepsilon/2^p)|^2|}\gamma(\xi/2^p) = \gamma(0)$$

L'étape suivante consiste tout simplement à employer la convergence dominée pour aboutir au résultat voulu, ce qui ne pose aucun problème étant donné que le module de $(F\varphi)(\xi)$ est minoré sur $\Delta[-\pi, \pi]$ par une constante positive. On peut alors énoncer le

Théorème

Soit un processus hilbertien, stationnaire au sens large, centré, de densité spectrale à support dans $[-\pi, \pi]$, bornée et continue en 0, alors la décomposition en ondelettes orthonormales selon l'algorithme de Mallat conduit à des coefficients asymptotiquement décorrélés sur les espaces des tendances. En d'autres termes, la suite des coefficients d'ondelettes à une résolution p suffisamment grande peut être considérée comme une séquence blanche de variance égale à la densité spectrale en 0.

Dans [6], on trouvera des démonstrations plus générales consacrées tout aussi bien à l'Analyse Multi-Résolution qu'à la décomposition en paquets d'ondelettes. Le lecteur pourra s'y reporter pour constater que dans le cas des paquets d'ondelettes, la quasi-blancheur est obtenue lorsque la résolution croît, mais au prix d'un contrôle précis de la régularité des filtres employés. Cette différence significative entre le comportement des paquets d'ondelettes et celui de l'Analyse Multi-Résolution face à un bruit à bande limité, tient en fait à la localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes qui n'est absolument pas homogène sur toute la bande d'analyse : de fait, dans certaines zones de fréquence où les paquets d'ondelettes sont mal localisés, les blancheurs locales du bruit deviennent plus difficilement accessibles en augmentant la

résolution. Il faut donc choisir une résolution suffisamment forte pour espérer que le paquet d'ondelettes le moins bien localisé, le soit cependant suffisamment pour atteindre une blancheur locale significative.

Annexe 2 : Comportement de la décomposition en ondelettes d'un modèle AR d'ordre 1 en fonction de la valeur de son coefficient

Afin d'analyser la blancheur des coefficients de l'analyse multi-résolution d'un processus à bande limitée en fonction de sa densité spectrale, nous avons visualisé la fonction d'autocorrélation de la décomposition d'un modèle AR d'ordre 1, en fonction de la valeur de son coefficient. Il s'avère que pour les bruits AR d'ordre 1 générés, pour un niveau de résolution 4 et $h_{\min} = 1$, la quasi-blancheur est atteinte.

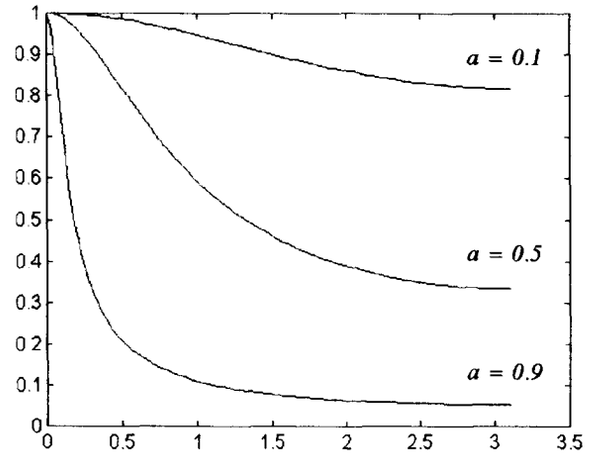

Figure 13. – Représentation spectrale de modèles AR d'ordre 1 ($a = 0.1$ - $a = 0.5$ - $a = 0.9$).

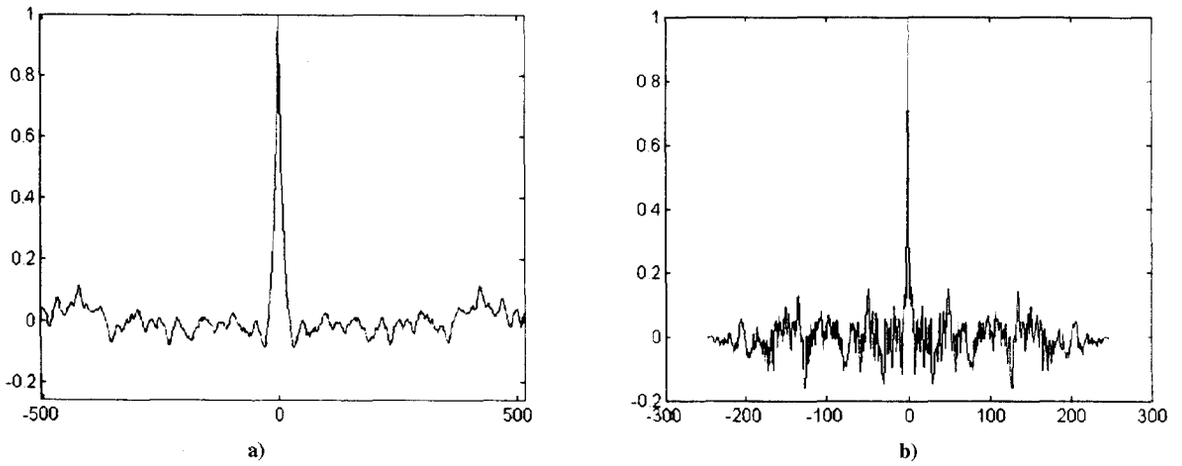

Figure 14. – a) Fonction d'autocorrélation d'un modèle AR ($a = 0.9$)**, b) Fonction d'autocorrélation de la décomposition du modèle AR (niveau 4).**

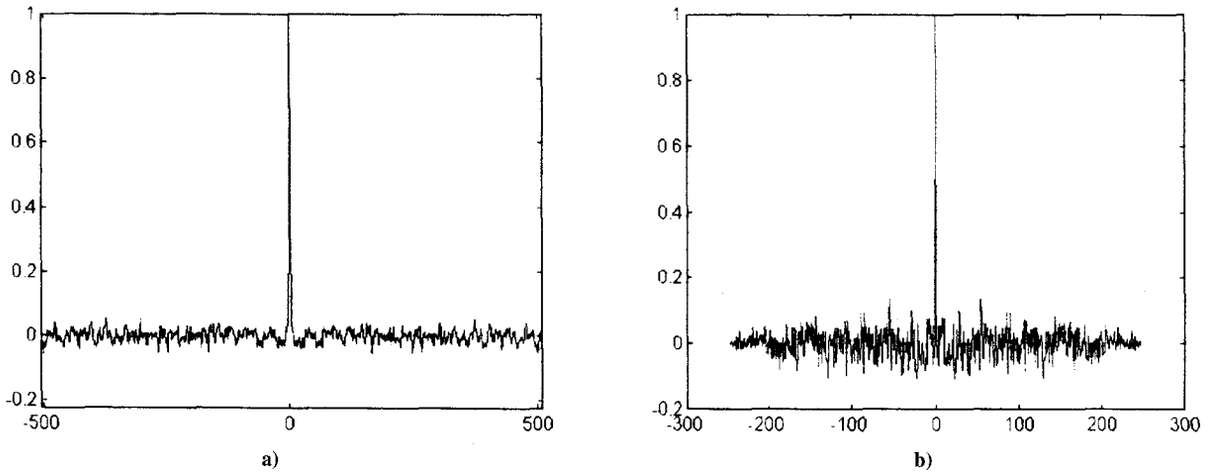

Figure 15. – a) Fonction d'autocorrélation d'un modèle AR ($a = 0.5$)**, b) Fonction d'autocorrélation de la décomposition du modèle AR (niveau 4).**

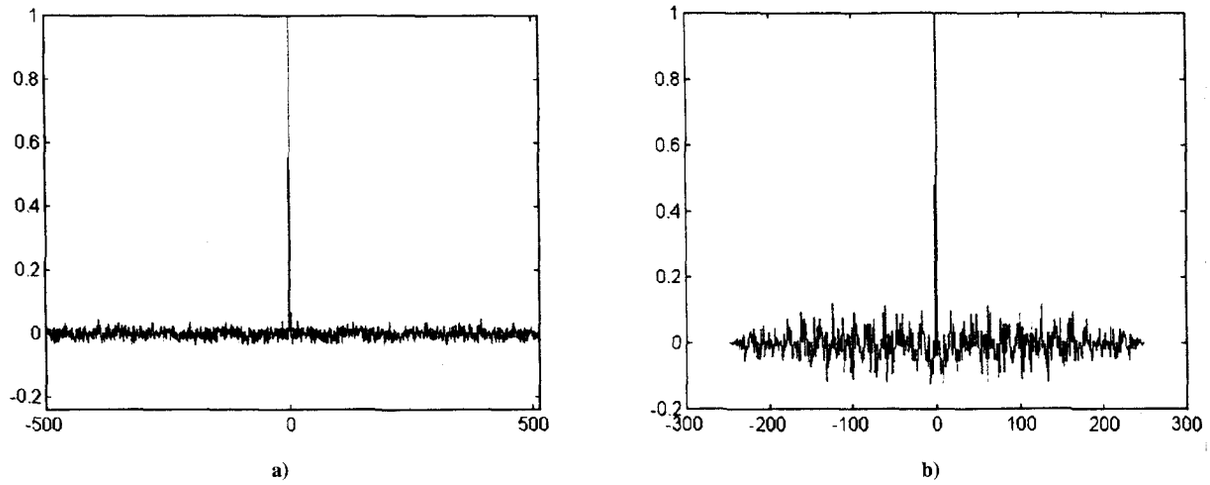

Figure 16. – a) Fonction d'autocorrélation d'un modèle AR ($a = 0.1$) b) Fonction d'autocorrélation de la décomposition du modèle AR (niveau 4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bic (J.C.), Duponteil (D.), Imbeaux (J.C.) - Eléments de Communications Numériques. *Bordas et C.N.E.T.-E.N.S.T.* Paris (1986)

[2] Daubechies (I) - Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* (1988), 41, pp. 909-996

[2] Dupraz (J) - Probabilités Signaux Bruits. *Editions Eyrolles et C.N.E.T.-E.N.S.T.*, (1983)

[4] Dupraz (J) - Théorie du signal et transmission de l'information. *Editions Eyrolles,* (1989)

[5] Mallat (S.) - A Theory for Multi-Resolution Approximation Signal Decomposition : The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* (1989), 11, n°7

[6] Pastor (D.), Gay (R.) - Décomposition d'un processus stationnaire du second ordre. Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes. *Traitement du Signal* (1995), 12, n°5, pp. 393-420

[7] Picinbono (B.) - Signaux Aléatoires : Tomes 1 et 2. *Dunod,* Paris (1994)

[8] Proakis (J.G.) - Digital Communications. *McGrawHill* (1989)

[9] Van Trees (H.L.) - Detection, Estimation and Modulation Theory : Part I. *Wiley*, New-York (1968)

Manuscrit reçu le 28 mai 1997.

LES AUTEURS

Céline LEMOINE

Céline Lemoine est docteur de l'Université Bordeaux I, spécialité Mathématiques Appliquées : le travail réalisé dans le cadre d'une convention Cifre en collaboration avec Sextant-Avionique centre de Bordeaux, concerne la recherche de traits phonétiques et le décodage acoustico-phonétique de la parole dans le bruit, fondés sur l'analyse en ondelettes discrètes orthogonales. Céline Lemoine est ingénieur chez Nakache S.A. et travaille en collaboration avec Sextant-Avionique dans le domaine de l'avionique civile et militaire.

Dominique PASTOR

Dominique Pastor est ingénieur E.N.S.T.Br (86) et docteur de l'Université de Rennes I option Traitement du Signal (97). Il travaille depuis mars 1998 chez Hollandse SignaalApparaten (Pays-Bas) où ses travaux concernent le traitement du signal radar et la détection de signaux imparfaitement connus dans le bruit. Entre 1990 et 1998, il a été ingénieur chez Sextant-Avionique et a travaillé sur l'analyse par ondelettes, la paramétrisation et le décodage acoustico-phonétique de la parole bruitée, ainsi que sur le dialogue multimodal entre l'homme et la machine.