



HAL
open science

Sur la détermination du périmètre de l'ovale à huit centres

Jean-Marc Ginoux, Jean-Claude Golvin

► **To cite this version:**

Jean-Marc Ginoux, Jean-Claude Golvin. Sur la détermination du périmètre de l'ovale à huit centres. Comptes Rendus. Mathématique, 2018, 356 (11-12), pp.1195-1202. 10.1016/j.crma.2018.10.009 . hal-02196055

HAL Id: hal-02196055

<https://hal.science/hal-02196055>

Submitted on 1 Aug 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la détermination du périmètre de l’ovale à huit centres

Jean-Marc Ginoux¹, Jean-Claude Golvin²

¹Laboratoire LIS, CNRS, UMR 7020, Université de Toulon,
BP 20132, F-83957 La Garde cedex, France and

²Directeur de Recherches au CNRS, Université de Bordeaux III Michel de Montaigne, France

Plusieurs recherches ont permis de montrer qu’un ovale à huit centres coïncide presque parfaitement avec l’ellipse construite sur les mêmes axes et peut être considéré comme une représentation de celle-ci à condition de choisir convenablement les rayons des arcs de cercles qui le composent. Le calcul de son périmètre se réduit alors à la simple somme d’arcs de cercles. Pourtant, il ne nous semble pas que ce calcul, qui pourrait s’avérer utile, n’ait jamais encore été effectué ni publié. L’objet de cette note est donc de présenter une démonstration géométrique de la détermination du périmètre de l’ovale à huit centres.

Pour citer cet article : J.-M. Ginoux, J.-C. Golvin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 1195-1202.

I. INTRODUCTION

Dans son célèbre traité sur les Coniques, composé de huit livres et dont seulement quatre nous sont parvenus, Appollonius de Perge (ca. 240 av. J.-C.) étudia la parabole, l’hyperbole et l’ellipse [3]. Alors que les principales propriétés de l’ellipse furent découvertes assez rapidement, la détermination de son périmètre devait rester, pendant plusieurs siècles, inaccessible aux géomètres. Aussi, dès l’Antiquité Grecque puis Romaine et tout au long des siècles qui suivirent de nombreuses approximations du périmètre de l’ellipse furent proposées par de célèbres astronomes ou mathématiciens. En 1609, Johannes Kepler présenta une formule (1) consistant à approcher la circonférence de l’ellipse par celle de deux cercles dont les rayons étaient respectivement égaux à la moyenne géométrique et à la moyenne arithmétique des longueurs de son demi grand axe a et de son demi petit axe b :

$$L(a, b) = \pi(a + b) \quad (1)$$

On remarque que si l’ellipse se réduit à un cercle de rayon R , on a : $a = b = R$ et l’on retrouve la valeur bien connue du périmètre du cercle. Au XVIII^e siècle, avec l’avènement du calcul infinitésimal, le comte Giulio Fagnano, un mathématicien italien autodidacte, introduisit une série de transformations analytiques ingénieuses jetant les bases de la théorie des *intégrales elliptiques*. Ses travaux furent publiés en 1750 sous la forme de deux volumes intitulés *Prodizioni Matematiche*. L’année suivante, le célèbre mathématicien et physicien suisse Léonard Euler, auquel on avait demandé d’examiner les deux traités de Fagnano, généralisa ses résultats et fournit la fameuse formule de l’intégrale elliptique (2) permettant de calculer la valeur du périmètre d’une ellipse en fonction de son excentricité $\varepsilon = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:

$$L(a, b) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt \quad (2)$$

Cette intégrale elliptique (2), dite de “deuxième espèce”, ne pouvant s’exprimer qu’au moyen d’un développement en série, de nouvelles approximations furent régulièrement proposées jusqu’à nos jours. On peut citer pour mémoire celle du mathématicien italien Giuseppe Peano [9] en 1889 ainsi que celles fournies par le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan au début du XX^e siècle [1]. Parallèlement, dès l’Antiquité Grecque différents instruments, comme l’ellipsographe de Proclus, furent imaginés pour dessiner une ellipse [10]. De même, plusieurs méthodes, comme celle dite du “jardinier”, furent développées. Du point de vue technique, la construction de monuments ou d’éléments architecturaux de forme apparemment elliptique, comme le célèbre Colisée à Rome, incita les ingénieurs à rechercher un moyen de représenter une ellipse le plus fidèlement possible. D’après les archéologues qui ont étudié depuis ces édifices, il semble que la méthode employée par ces bâtisseurs consistait à approcher la représentation graphique d’une ellipse par une courbe polycentrique ou plus exactement par un ovale à plusieurs centres. Ainsi, en 1682, Antoine Desgodetz, architecte du roi Louis XIV, étudia, à la demande de Colbert, les plus célèbres monuments de Rome. Il écrivit à propos du Colisée [4] :

“J’ai trouvé l’ovale qui forme le mur (...) pour cela j’ai séparé la circonférence en plusieurs arcs que j’ai trouvé pouvoir être tracés au compas par huit centres.”

Dans son analyse concernant la construction des amphithéâtres romains, J.-C. Golvin a montré que certains d'entre eux sont construits à partir d'ovales à quatre centres [5]. Mark Wilson Jones [14] qui considère que le plan du Colisée est un ovale à huit centres a écrit :

“By contrast the oval is a compound form, approximating to the ellipse by means of segmental arcs of different radius which meet where they share the same tangent. The simplest oval has four arcs drawn from two pairs of focal points on the main axes. More arcs and focal points may be added on this principle ; the greater their number the closer the oval resembles the ellipse.”

Ainsi, il apparaît que le tracé de l'ellipse peut être approché par un ovale à huit centres ou plus [6, 11, 12]. Dans le cas de l'ovale à huit centres, la méthode de construction graphique peut être simplifiée en se limitant au tracé du quart de l'ellipse, les trois autres quarts se déduisant par simple symétrie. Elle consiste alors à déterminer les centres et les rayons de trois cercles permettant de tracer trois arcs de cercles qui formeront ainsi une approximation circulaire par morceaux du quart de l'ellipse. Jusqu'à présent, certains chercheurs, comme C. Trevisan [13], considéraient que dans le cas de l'ovale à huit centres :

“Non solo, infatti, sussistono infinite combinazioni per il raggio minore (R_1) e quello maggiore (R_3), come nell'ovale a quattro centri ; ma anche altrettante infinite possibilità di scelta per il raggio intermedio (R_2).”

“Non seulement cela, en effet, il y a des combinaisons infinies pour le rayon mineur (R_1) et le majeur (R_3), comme dans l'ovale à quatre centres ; mais aussi autant de possibilités infinies de choix pour le rayon intermédiaire (R_2). ”

Cependant, cette difficulté, qui réside dans la détermination des centres et des rayons des trois arcs de cercles, avait apparemment été levée en 1908 par F. Honey [7]. Dans son très court article, il propose d'utiliser les cercles (C_1) et (C_2), respectivement de centres e et g , de rayons r et R , osculateurs aux sommets de coordonnées $(a, 0)$ et $(0, b)$ de l'ellipse (E) pour déterminer le centre k du *cercle intermédiaire* (voir Fig. 1). Pour y parvenir, il définit deux cercles auxiliaires que nous appellerons par la suite cercles *mineur* et *majeur*. Il considère ensuite que l'un des deux points d'intersection de ces deux cercles est le centre k du *cercle intermédiaire* auquel il attribue le rayon p égal à “la moyenne arithmétique ou à la demi-somme des demi-axes”. Néanmoins, si Honey présente une méthode permettant d'obtenir précisément les centres et les rayons de ces trois cercles et donc de dessiner “un ovale à huit centres qui coïncide avec l'ellipse construite sur les mêmes axes”, il ne fournit pas les angles aux centres γ , β et δ de ces trois rayons qui lui auraient permis de calculer les longueurs de ces trois arcs de cercles. Cette note a donc pour objet de présenter une démonstration géométrique conduisant à l'expression générale des valeurs de ces trois angles aux centres en fonction des longueurs des demi-axes majeur et mineur de l'ellipse. La connaissance de ces trois angles associée aux valeurs des trois rayons fournis par Honey permet ainsi de déterminer le périmètre de l'ovale à huit centres et donc d'approximer la valeur du périmètre de l'ellipse. Ce résultat pourrait s'avérer utile pour les géomètres et les archéologues. On montrera notamment que, dans le cas du Colisée, le périmètre de l'ovale à huit centres fournit une excellente approximation du périmètre de ce monument calculé au moyen de l'intégrale elliptique.

II. DÉTERMINATION DES ANGLES AUX CENTRES

Dans son article, Honey [7] propose d'utiliser pour le *cercle mineur* (en bleu sur la Fig. 1) le centre $e(a - b^2/a, 0)$ du petit cercle osculateur (C_1) et le rayon :

$$|ek| = \frac{(a - b)(a + 2b)}{2a} = p - r \quad (3)$$

où p représente la moyenne arithmétique ou la demi-somme des demi-axes : $p = \frac{a + b}{2}$ et $r = \frac{b^2}{a}$ le rayon de courbure du petit cercle osculateur (C_1). Pour le *cercle mineur* (en rouge sur la Fig. 1), il emploie le centre $g(0, b - a^2/b)$ du grand cercle osculateur (C_2) et le rayon

$$|gk| = \frac{(a - b)(b + 2a)}{2b} = R - p \quad (4)$$

où $R = a^2/b$ est le rayon de courbure du grand cercle osculateur (C_2).

Honey [7] définit enfin le centre du *cercle intermédiaire* comme le point k d'intersection des deux cercles *majeur* et *mineur* et choisit pour son rayon la valeur p . Dès lors, il y a deux manières d'aborder ce problème : l'une algébrique,

1. Calcul de l'angle α' dans le triangle (gek) avec la "loi des cosinus".
2. Calcul de l'angle $\gamma = \theta - \alpha'$ avec $\theta = \hat{g}$ dans le triangle rectangle (geo) .
3. Calcul de l'angle α dans le triangle (gek) avec la "loi des sinus".
4. Calcul de l'angle β dans le triangle (gek) avec la "loi des sinus".
5. Calcul de l'angle $\delta = \theta' - \alpha$ avec $\theta' = \hat{e}$ dans le triangle rectangle (geo) .

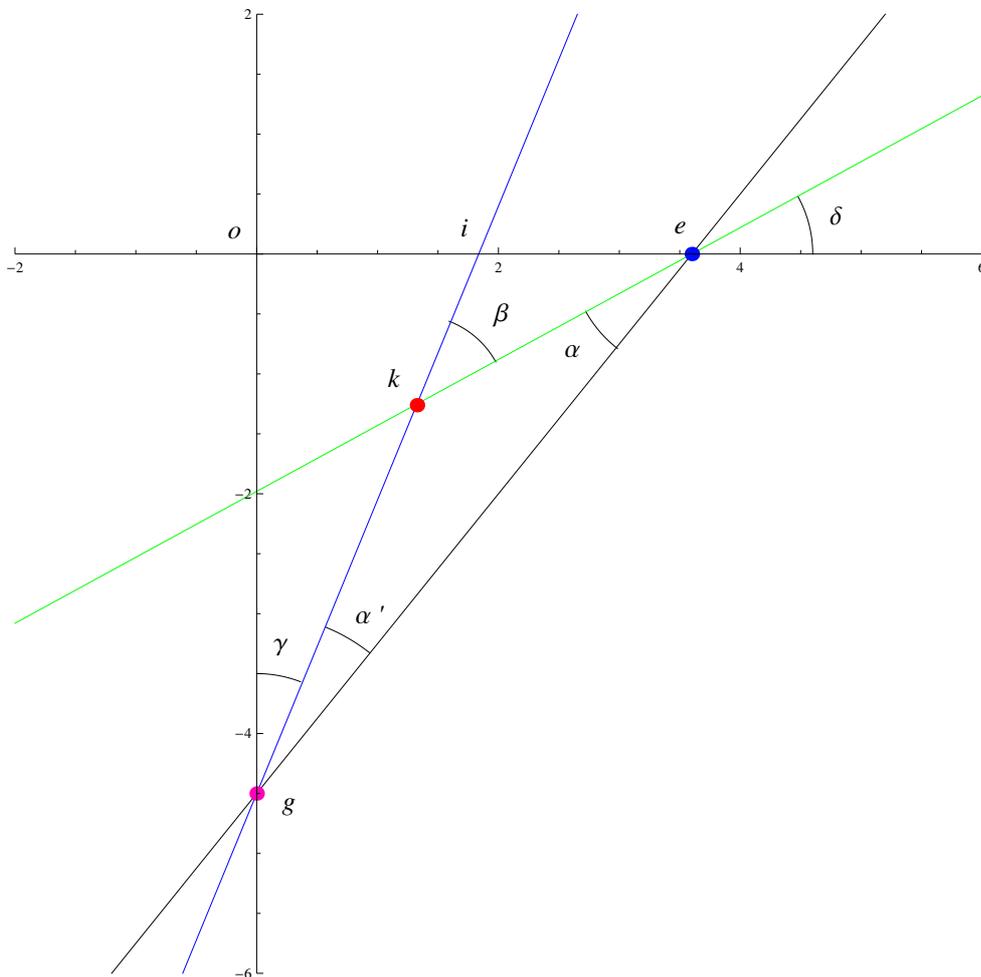


FIGURE 2: Triangles (geo) et (gek) pour la détermination des trois angles aux centres.

Au préalable, en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle (geo) , il est facile de déduire l'expression de la longueur de l'hypoténuse $|ge|$. En effet, des coordonnées des points g et e , on déduit les distances $|go|$ et $|oe|$. On obtient : $|ge|^2 = |go|^2 + |oe|^2$. Il vient alors :

$$|ge|^2 = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} \quad (5)$$

A. Calcul de l'angle α' dans le triangle (gek) avec la "loi des cosinus"

Considérons le triangle (gek) (voir Fig. 2) et appliquons la "loi des cosinus". On a :

$$|ke|^2 = |ge|^2 + |gk|^2 - 2|ge||gk| \cos \alpha'$$

On en déduit que :

$$\cos(\alpha') = \frac{|ge|^2 + |gk|^2 - |ke|^2}{2|ge||gk|} \quad (6)$$

Les valeurs de $|gk|$, $|ke|$ et $|ge|$ étant données par les expressions (3-5), on obtient finalement :

$$\cos(\alpha') = \frac{2a^2 + ab + b^2}{(b + 2a)\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (7)$$

De l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on déduit la valeur de $\sin(\alpha')$:

$$\sin(\alpha') = \frac{b}{2a + b} \sqrt{\frac{2ab}{a^2 + b^2}} \quad (8)$$

B. Calcul de l'angle $\gamma = \theta - \alpha'$ avec $\theta = \hat{g}$ dans le triangle rectangle (geo)

Considérons le triangle rectangle (geo) (voir Fig. 2) et utilisons les relations métriques. On a :

$$\sin(\theta) = \frac{|oe|}{|ge|} = \frac{(a^2 - b^2)/a}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 + b^2}/ab} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (9)$$

On en déduit que

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{and} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10)$$

De $\gamma = \theta - \alpha'$, il vient $\sin(\gamma) = \sin(\theta - \alpha') = \sin(\theta)\cos(\alpha') - \cos(\theta)\sin(\alpha')$. En remplaçant $\cos(\alpha')$, $\sin(\theta)$, $\sin(\alpha')$ et $\cos(\theta)$ par les expressions (7-10), on obtient :

$$\boxed{\sin(\gamma) = \frac{b}{2a + b} \frac{2a + b + \sqrt{2ab}}{a + b + \sqrt{2ab}}} \quad (11)$$

C. Calcul de l'angle α dans le triangle (gek) avec la "loi des sinus"

Considérons de nouveau le triangle (gek) (voir Fig. 2) et appliquons la "loi des sinus". On a :

$$\frac{|ek|}{\sin(\alpha')} = \frac{|gk|}{\sin(\alpha)} = \frac{|ge|}{\sin(\pi - \beta)} \quad (12)$$

Les deux premières parties de cette égalité conduisent à $\sin \alpha = \frac{|gk|}{|ek|} \sin(\alpha')$. En remplaçant $|gk|$, $|ek|$ et $\sin(\alpha')$ par les expressions (3, 4 & 8), on obtient :

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{a + 2b} \sqrt{\frac{2ab}{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{a^2 + ab + 2b^2}{(a + 2b)\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (13)$$

D. Calcul de l'angle β dans le triangle (gek) avec la "loi des sinus"

Consider maintenant la première et dernière partie de l'égalité (12), on a : $\sin(\pi - \beta) = \frac{|ge|}{|ek|} \sin(\alpha')$. Alors, en remplaçant $|ek|$, $|ge|$ et $\sin(\alpha')$ par les expressions (4, 5 & 8), et, en tenant compte du fait que : $\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$, on obtient :

$$\sin(\beta) = \frac{2(a+b)\sqrt{2ab}}{(a+2b)(2a+b)} \quad (14)$$

E. Calcul de l'angle $\delta = \theta' - \alpha$ avec $\theta' = \hat{e}$ dans le triangle rectangle (geo)

Considérons le triangle rectangle (geo) (voir Fig. 2), la somme de ces angles est : $\theta + \theta' + \pi/2 = \pi$. Il s'ensuit que $\theta' = \pi/2 - \theta$. Ce qui implique que : $\cos(\theta') = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ et $\sin(\theta') = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$. Ainsi, à partir des Eqs. (10), on obtient :

$$\sin(\theta') = \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\theta') = \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (15)$$

De $\delta = \theta' - \alpha$, il vient $\sin(\delta) = \sin(\theta' - \alpha) = \sin(\theta') \cos(\alpha) - \cos(\theta') \sin(\alpha)$. Alors, en remplaçant $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\sin(\theta')$ et $\cos(\theta')$ par les expressions (13-15), on obtient :

$$\sin(\delta) = \frac{a}{a+2b} \frac{a+2b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}} \quad (16)$$

Remarque.

Il est important de remarquer que les expressions (11, 14 & 16) présentent une parfaite symétrie. En effet, en remplaçant a par b dans l'expression (11) de $\sin(\gamma)$ on retrouve l'expression (16) de $\sin(\delta)$ et *vice versa*. De plus, l'expression (14) de $\sin(\beta)$ est invariante si l'on remplace a par b et *vice versa*. Les principaux résultats obtenus ci-dessus sont résumés dans le tableau 1 ci-dessous :

Cercles	Angles aux centres	Rayons
Majeur	$\sin(\gamma) = \frac{b}{2a+b} \frac{2a+b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}$	$R = \frac{a^2}{b}$
Intermédiaire	$\sin(\beta) = \frac{2(a+b)\sqrt{2ab}}{(a+2b)(2a+b)}$	$p = \frac{a+b}{2}$
Mineur	$\sin(\delta) = \frac{a}{a+2b} \frac{a+2b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}$	$r = \frac{b^2}{a}$

TABLE I: Angles aux centres et rayons des cercles *majeur*, *intermédiaire* et *mineur*.

On peut ainsi construire comme approximation du quart de l'ellipse (E) dans le plan $x \geq 0, y \geq 0$, un quart d'ovale formé de trois arcs de cercles : un arc du cercle *majeur* osculateur à l'ellipse au point de coordonnées $(0, b)$, de centre g , de rayon R et d'angle au centre γ (en rouge sur la Fig. 1) ; un arc du cercle *mineur* osculateur à l'ellipse au point de coordonnées $(a, 0)$, de centre e , de rayon r et d'angle au centre δ (en bleu sur la Fig. 1) et un arc du cercle *intermédiaire*, tangent aux deux autres, de centre k , de rayon p et d'angle au centre β (en vert sur la Fig. 1).

III. DÉTERMINATION DU PÉRIMÈTRE DE L'OVALE À HUIT CENTRES

En utilisant les expressions des angles et des rayons présentées dans le Tab. 1, le calcul du périmètre de l'ovale à huit centres est donc égal à :

$$O(a, b) = 4 \left[\arcsin(\gamma) \frac{a^2}{b} + \arcsin(\beta) \frac{a+b}{2} + \arcsin(\delta) \frac{b^2}{a} \right] \quad (17)$$

Dans le cas de l'amphithéâtre Flavien, plus connu sous le nom de Colisée, les dimensions de ce monument fournies par Golvin [5], Trevisan [13] et Wilson [14] ainsi que celles relevées sur site sont égales à 188 m pour la plus grande longueur et 156 m, pour sa plus grande largeur. En supposant que ce monument a la forme d'une ellipse de demi grand axe $a = 94$ et de demi petit axe $b = 78$, la valeur de l'excentricité est $\varepsilon = 0.55$. En utilisant l'expression (2), on obtient pour la valeur du périmètre du Colisée $L(94, 78) = 541.524m$. En utilisant l'expression (17) du périmètre de l'ovale à huit centres, on obtient alors $O(94, 78) = 541.523$. L'erreur relative entre ces deux expressions est dans le cas du Colisée de l'ordre de $1.85 \times 10^{-4}\%$. Des tests numériques ont été réalisés afin de calculer les expressions (2) et (17) pour différentes valeurs de a et b variant entre 1 et 10. Ces tests qui pourraient facilement être étendus à des intervalles plus importants, ont montré que l'erreur relative entre les deux expressions (2) et (17) reste inférieure à 0.029%.

Remarque.

En posant $a = b = \rho$, l'expression (17) permet de retrouver le périmètre du cercle de rayon ρ . L'expression (17) s'écrit alors :

$$O(a, b) = 4\rho [\arcsin(\gamma) + \arcsin(\beta) + \arcsin(\delta)] \quad (18)$$

Dans ce cas, les trois sinus (11, 14 and 16) deviennent égaux à $\sin(\gamma) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$, $\sin(\beta) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ et $\sin(\delta) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$. En remplaçant ces sinus dans l'expression (18) on a :

$$O(a, b) = 4\rho \left[2 \arcsin\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \right] \quad (19)$$

Alors, en utilisant les formules d'addition des fonctions Arcsinus fournies par Bronstein et Semendiaev [2, p. 281-282], on obtient :

$$2 \arcsin\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) \quad \text{et} \quad \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) = \pi - \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression (19), on démontre que lorsque $a = b = \rho$, $O(a, b) = 2\pi\rho$.

IV. CONCLUSION

On peut donc en conclure d'une part que l'ovale à huit centres coïncide presque parfaitement avec l'ellipse construite sur les mêmes axes et peut être considéré comme une représentation de celle-ci. Et, d'autre part, que le périmètre de l'ovale à huit centres fournit une excellente approximation de celui de l'ellipse construite sur les mêmes axes.

[1] B. Berndt, Ramanujan's Notebooks, vol. 3, New York, Springer-Verlag, 1991.

[2] I.N. Bronstein & K.A. Semendiaev, Aide-mémoire de Mathématiques, Paris, Eyrolles, 1990.

[3] M. Decorps-Foulquier, Recherches sur les Coniques d'Apollonius de Perge et leurs commentateurs grecs, Paris, Klincksieck, 2000.

[4] A. Desgodetz, Les édifices antiques de Rome, 1682.

- [5] J.-C. Golvin, *L'Amphithéâtre Romain*, Paris, Boccard, 1988.
- [6] B. Herrera & A. Samper, Definition and Calculation of an Eight-Centered Oval which is Quasi-Equivalent to the Ellipse, *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 19, No. 2 (2015) 257-268.
- [7] F.R. Honey, The Eight-Centered Oval and Ellipse, *Popular Astronomy*, 16 (1908) 617-619.
- [8] A. A. Mazzotti, *All Sides to an Oval*, Springer-Verlag International Publishing, 2017.
- [9] G. Peano, Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse, *CR. Acad. Sc. Paris*, 109 (1889) 960-961.
- [10] D. Raynaud, Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance : applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe, *Arabic Sciences and Philosophy*, 17 (2007) 239-345.
- [11] P. Rosin, A Survey and Comparison of Traditional Piecewise Circular Approximations to the Ellipse, *Computer Aided Geometric Design* Volume 16, Issue 4, (12 May 1999) 269-286.
- [12] P. Rosin & E. Trucco, The Amphitheatre Construction Problem, *Incontro Internazionale di Studi Rileggere L'Antico* (Rome, 13-15 December 2004).
- [13] C. Trevisan, Sullo schema geometrico costruttivo degli anfiteatri romani : gli esempi del Colosseo e dell'Arena di Verona, In : *Il Colosseo. Studi e ricerche in Disegnare idee immagini* vol. 18-19, pp. 117-132, Dipartimento del Rappresentazione e Rilievo dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, Rome, Gangemi, 1999.
- [14] M. Wilson Jones, Designing amphitheatres, *Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts*, 100 (1993) 391-441.