HAL
open science

Décomposition d'un processus stationnaire du second ordre . Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes

Dominique Pastor, Roger Gay

To cite this version:

Dominique Pastor, Roger Gay. Décomposition d'un processus stationnaire du second ordre . Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes. Traitement du Signal, 1995. hal-02194999

HAL Id: hal-02194999

https://hal.science/hal-02194999v1

Submitted on 26 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition d'un processus stationnaire du second ordre. Propriétés statistiques d'ordre 2 des coefficients d'ondelettes et localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes *

Wide-sense Stationnary Random Processes Analysis through Wavelet Packets Decomposition. Statistical Properties of Wavelet Coefficients.

par Dominique PASTOR, Roger GAY*
Sextant Avionique – Rue Toussaint-Catros
BP 91 – F-33166 Saint Médard en Jalles cedex
** C.E.R.E.M.A.B.*
Université de Bordeaux I / C.N.R.S.
F-33405 Talence

Résumé

Dans cet article, nous étudions la décomposition en ondelettes et en paquets d'ondelettes des processus aléatoires stationnaires au sens large. Le cadre choisi pour l'exposition est celui de l'intégrale stochastique. Dans le cas des processus à bande limitée, qui sont ceux rencontrés dans la pratique, nous étudions le comportement asymptotique des moments d'ordre 1 et 2 des suites des cœfficients d'ondelettes, en donnant les conditions de convergence de ces suites vers des séquences blanches en fonction de la régularité et du niveau de décomposition. Le lien étroit entre ces résultats et la localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes est analysée.

Mots clés : décomposition en paquets d'ondelettes, décomposition en ondelettes, processus aléatoires, processus aléatoires stationnaires au sens large, intégrale stochastique, propriétés statistiques des cœfficients d'ondelettes, localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes.

Abstract

This paper deals with wide–sense stationnary processes analysis through wavelet and wavelet packets decomposition. This study is based on the theory of Stochastic Integral. In the case of band–limited processes (which are those encountered at most from a pratical point of view), we show that the wavelet packets cœfficient ara asymptotically uncorrelated random variables, taking into account the wavelet packets regularity and the decomposition level. The relation between this convergence toward uncorrelated random variables and the subspaces frequency localization is analysed.

Key words : *Wavelet packets decomposition, wavelet decomposition, random processes, wide–sense stationnary random processes, stochastic integral, wavelet coefficients statistical properties, wavelet packets frequency localization.*

NOTATIONS

TF	Transformée de Fourier
BH	Base de Hilbert
C	Corps des complexes. Soit $x \in \mathbb{C}$, $\overline{x}$ désigne le conjugué de x
$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$F(\mathbb{Z})$	Ensemble des parties finies de $\mathbb{Z}$
$F(\mathbb{N})$	Ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$
$L^2(\mathbb{R})$	Ensemble des fonctions numériques à valeurs dans$\mathbb{C}$, de carré sommable $f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \lvert f(x)^2 dx < +\infty$
$L^2([0, 2\pi])$	Ensemble des fonctions complexes 2π-périodiques et L_2 intégrables
$l^2(\mathbb{Z})$	Ensemble des suites sur $\mathbb{Z}$, à valeurs dans$\mathbb{C}$, de carré sommable $(f(n))_n \in l^2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid f(n) \mid^2 < +\infty$

$F(f), \widehat{f}$	désigneront la Transformée de Fourier de f
χ_I	Fonction caractéristique de l'ensemble $I \subset \mathbb{R}$ $x \in I \Leftrightarrow \chi_I(x) = 1$ et $x \notin I \Leftrightarrow \chi_I(x) = 0$

Soit I, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble λI par $\lambda I = \{\lambda x / x \in I\}$

Soit I, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble $I + \lambda$ par $I + \lambda = \{\lambda + x / x \in I\}$

$L^2(\mathbb{R})$ est munie de la norme dite L_2, définie par : $\|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx$, associée au produit scalaire défini par : $\forall (f,g) \in L2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, $\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$

Soit V un sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$, alors $V = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \theta_n / n \in \mathbb{Z}\rangle$ signifie que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V, c'est-à-dire, que quelle que soit f, élément de V, il existe une unique suite de coefficients $c_n(f))_n$ indexée sur $\mathbb{Z}$, telle que la famille $(c_n(f)\theta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable de somme f : $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\theta_n$, **au sens de la norme** L_2.

τ_k est l'opérateur retard : pour f dans $L^2(\mathbb{R})$, $(\tau_k f)(x) = f(x-k)$

D est l'opérateur de dilatation : pour f dans $L^2(\mathbb{R})$, $(Df)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right)$

Cet opérateur est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

1. Introduction

Les algorithmes d'analyse du signal et de l'image par ondelettes suscitent beaucoup d'intérêt, autant pour les améliorations techniques (notamment en ce qui concerne le codage de l'information, la synthèse de signaux) qu'ils permettent que par les concepts nouveaux ou la généralisation de théories plus anciennes qu'ils apportent (filtrage demi–bande et filtres miroirs en quadrature).

Si l'application des algorithmes de décomposition **orthonormale** (algorithme de Mallat [Mal2] et paquets d'ondelettes [Mey1], [Mey2], [Chui]) sur un signal $s(t)$ ne soulève aucun problème théorique dès que le signal est d'énergie finie ($\int_{\mathbb{R}} |s(t)|^2 dt < +\infty$), il n'en va pas de même dans le cas d'une version bruitée $x(t) = s(t) + b(t)$ où $b(t)$ est un processus stationnaire au sens large : les trajectoires d'un tel processus n'étant pas en général d'énergies finies, définir le comportement d'un algorithme de décomposition appliqué à ce type de signal requiert certaines précautions théoriques.

La décomposition de processus stochastiques harmonisables au sens de Loeve dans le cadre d'une **analyse multirésolution régulière au sens de Meyer** a été décrite par P.W. Wong ([Wong]), ainsi que par C. Houdré et co–auteurs ([Houd1], [Houd2]), dont les récents travaux concernent notamment les liens théoriques entre décomposition en ondelette et processus stochastiques stationnaires du second ordre. Ici, nous nous proposons de déterminer le comportement d'une décomposition arborescente de type **paquets d'ondelettes, non nécessairement régulière au sens de l'analyse multi–résolution**, lorsque celle–ci est appliquée à un processus stochastique stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique. Parmi ces processus, ceux dont la mesure spectrale est à support compact sont d'ailleurs parmi les plus importants dans la pratique du traitement du signal. En effet, un signal utile $s(t)$, perturbé par un bruit $b(t)$, supposé stationnaire, est, préalablement à toute numérisation, filtré par un filtre anti–repliement respectant le théorème de Shannon en ce qui concerne le signal $s(t)$, de telle sorte que le signal que l'on échantillonne est $s(t) + x(t)$ où $x(t)$ est le résultat du filtrage de $b(t)$ par le filtre anti–repliement. Le bruit $x(t)$ est donc non seulement stationnaire, mais aussi à **bande limitée** (égale à la largeur de bande du filtre anti–repliement). D'où l'opportunité de savoir décomposer de tels processus.

Comme nous l'évoquions ci–dessus, aucune hypothèse de régularité (au sens de l'analyse multirésolution) sur les filtres miroirs en quadrature utilisés ne sera requise dans un premier temps. La théorie développée se prêtera parfaitement au calcul des moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires que sont les cœfficients d'ondelettes issus de la décomposition, et via ensuite l'adjonction de quelques hypothèses supplémentaires, nous pourrons déterminer aussi le comportement asymptotique de ces moments d'ordre 1 et 2, lorsque le niveau de décomposition et la régularité des filtres miroirs en quadrature croissent. Nous verrons que les résultats obtenus sont en fait étroitement liés à la **localisation fréquentielle** des paquets qui n'est hélas pas aussi prometteuse que l'intuition pourrait le laisser prévoir comme le note Y. Meyer dans [Mey2].

Venons–en à présent à l'organisation du travail.

Le paragraphe 2 est consacré à la présentation du matériel classique, nécessaire à la compréhension de la suite de l'article, et concernant :

- les paquets d'ondelettes
- le splitting lemma
- l'application du splitting lemma à la décomposition d'espaces de Hilbert séparables rapportés à une base de Riesz (dont l'espace des fonctions à spectre dont le support est contenu dans un compact fixe).

Le paragraphe 3 aborde le problème de la décomposition d'un processus stationnaire en paquets d'ondelettes. Le cadre choisi pour l'exposition est celui de l'intégrale stochastique.

Au paragraphe 4, qui constitue le cœur du travail, nous étudions les propriétés statistiques du premier et du second ordre des cœfficients d'ondelettes associés à un processus stationnaire et leur comportement asymptotique. Ce développement est l'occasion d'approfondir les problèmes liés à la localisation des paquets d'ondelettes en identifiant les relations étroites entre cette même localisation et les comportements asymptotiques des moments d'ordre 2 des cœfficients issus de la décomposition.

Le paragraphe 5 décrit les conclusions et perspectives majeures issues de ce travail.

Nous profitons de l'occasion qui nous est donnée ici pour remercier le professeur Yves Meyer, pour le temps qu'il nous a consacré et aussi, pour nous avoir signalé les travaux de MM. Conze et Raugi (cf [Rau]), qui obtiennent par des moyens différents, des résultats similaires aux nôtres (la différence essentielle résidant ici dans l'étude du comportement asymptotique que nous développons), et ceux de E. Séré (cf [Séré1] et [Séré2]), qui précise la localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes selon les filtres miroirs en quadrature utilisés.

Nous remercions aussi la Direction des Recherches, Études Techniques (D.R.E.T.) et plus particulièrement Monsieur Rouchouze (D.R.E.T., groupe 1), dont l'intérêt scientifique et le support matériel ont permis l'aboutissement de ces travaux (contrat D.R.E.T. 92–410).

Enfin, nous remercions l'un des experts du comité de lecture pour ses suggestions concernant certains points techniques et la présentation du travail.

2. Filtres miroirs en quadrature, splitting Lemma, Paquets d'ondelettes

Nous allons ici fixer les notations et hypothèses principales utilisées dans ce travail.

2.1. ANALYSE MULTIRÉSOLUTION

Un sous–espace U de $L^2(\mathbb{R})$ sera appelé espace d'interpolation de pas 2^p avec $p > 0$, si U est l'adhérence dans $L^2(\mathbb{R})$ du sous–espace engendré par les translatées $(\tau_{2^p \cdot k}\mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction μ de $L^2(\mathbb{R})$, telle que la suite $(\tau_{2^p \cdot k}\mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une base hilbertienne de U, et on notera cet espace $U = Clos_{L^2(\mathbb{R})} \langle \tau_{2^p \cdot k}\mu / k \in \mathbb{Z}\rangle$.

La fonction μ est appelée fonction d'interpolation. Les fonctions d'interpolation que nous utiliserons dans la suite seront supposées réelles.

On désignera par h_0 et h_1, deux filtres miroirs en quadrature de Transformées de Fourier respectives $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$ et respectivement associées à la fonction d'échelle φ et à l'ondelette orthogonale Ψ.

Nous rappelons quelques propriétés utiles de ces fonctions :

(a) on suppose $m_0(\xi)$ dérivable et telle que $m_0(0) = \sqrt{2}$

(b) $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 2$

(c) $m_0(\xi)$ est non nul sur $[-\pi/2, \pi/2]$

(d) $m_1(\xi) = e^{-i\xi}\overline{m_0(\xi+\pi)}$

(e) $h_0(k) = \langle D\varphi | \tau_k\varphi\rangle$ et $h_1(k) = \langle D\Psi | \tau_k\varphi\rangle$ où D est l'opérateur de dilatation et $\langle | \rangle$ désignent le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$

(f) $\sqrt{2}\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ et $\sqrt{2}\widehat{\Psi}(2\xi) = m_1(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ où $\widehat{\varphi}(\xi)$ et $\widehat{\Psi}(\xi)$ désignent les Transformées de Fourier respectives de φ et Ψ.

(g) $\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{\sqrt{2}} m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$

2.2. PAQUETS D'ONDELETTES

Un résultat fondamental : le Splitting Lemma

Nous rappelons ici, sous une forme adaptée à nos besoins, le classique « Splitting Lemma », dont on trouvera une version dans [Mey1], [Chui] et [Daub3].

2.2.1. Lemme (Splitting Lemma)

Soit $U = \text{Clos}_{L^2(R)} \langle \tau_{2^p \cdot k}\, \mu / k \in \mathbb{Z}\rangle$ un espace d'interpolation de pas 2^p dont $(\tau_{2^p \cdot k}\, \mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert.

Soient deux filtres miroirs en quadrature $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$, de réponses impulsionnelles respectives $h_0(n)$ et $h_1(n)$.

Soient $\mu^0 = \sum_n h_0(n)(\tau_{2^p \cdot n}\, \mu)$ et $\mu^1 = \sum_n h_1(n)(\tau_{2^p \cdot n}\, \mu)$.

Alors $(\tau_{2^{p+1}\, k}\, \mu^0)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\tau_{2^{p+1}\, k}\, \mu^1)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des bases de Hilbert des espaces d'interpolation de pas 2^{p+1} :

$$U^0 = \text{Clos}_{L^2(R)} \left\langle \tau_{2^{p+1}\, k}\, \mu^0 / k \in \mathbb{Z}\right\rangle$$

$$U^1 = \text{Clos}_{L^2(R)} \left\langle \tau_{2^{p+1}\, k}\, \mu^1 / k \in \mathbb{Z}\right\rangle,$$

qui sont tels que $U = U^0 \oplus_\perp U^1$.

Pour la commodité du lecteur, nous donnerons une preuve de ce résultat à l'annexe 1.

Il est à noter, cela est essentiel, que les filtres miroirs en quadrature $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$ ne sont en rien liés à la fonction μ. En particulier, on pourra décomposer l'espace V_0^S des fonctions f de $L^2(R)$ telles que le support de Ff est contenu dans $[-\pi, \pi]$.

Pour $f = \sum_k c_k(\tau_k\, \mu) \in U$, nous désignerons par $P^\varepsilon f$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, la projection orthogonale de f sur l'espace U^ε. Si on désigne par $c = (c_k)_k$ et par $c^\varepsilon = (c_k^\varepsilon)_k$ la suite des cœfficients de f et de $P^\varepsilon f = \sum_k c_k^\varepsilon(\tau_k\, \mu)$, on dispose de la relation $c^\varepsilon = \Lambda(h_\varepsilon^+ * c)$ où $h_\varepsilon^+(k) = h_\varepsilon(-k)$ et Λ désigne l'opérateur de sous–échantillonnage par 2.

Nous pouvons prendre $\mu = \varphi^S \left(\varphi^S(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)$, $p = 0$, et décomposer V_0^S.

Nous pouvons aussi, si μ est une fonction de $L^2(R)$ telle que $(\tau_k\, \mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit une famille orthonormale (nous dirons alors que μ est une fonction d'interpolation orthonormale), considérer les suites $c \in l^2(\mathbb{Z})$ et $c^0 \in l^2(\mathbb{Z})$, $c^1 \in l^2(\mathbb{Z})$ déduites de c par l'action de h_0^+ et h_1^+ comme précédemment, pour engendrer des éléments $f \in U$, $f^0 \in U^0$ et $f^1 \in U^1$, telles que

$$f = \sum_k c_k(\tau_k\, \mu),\ f^\varepsilon = \sum_k c_k^\varepsilon(\tau_k\, \mu)$$

avec $\mu^\varepsilon = \sum_n h_\varepsilon(n)(\tau_n\, \mu)$.

2.2.2. *Application des paquets d'ondelettes à la décomposition d'un espace d'interpolation de pas* 1

Dans la suite, la notation $\underline{\varepsilon}_p$ désignera un élément $\underline{\varepsilon}_p = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ de $\{0,1\}^p$. On introduit alors la suite de fonctions suivante :

$\mu^{\underline{\varepsilon}_p} = \sum_k h_{\varepsilon_p}(k)(\tau_{2^{p-1}.k}\, \mu^{\underline{\varepsilon}_{p-1}})$ pour tout $p \in \boldsymbol{N}^*$ et $\underline{\varepsilon}_p \in \{0,1\}^p$. On a alors la relation

$$(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = m_{\varepsilon_p}(\xi 2^{p-1})(F\,\mu^{\underline{\varepsilon}_{p-1}}(\xi))$$

avec la convention $\mu^{\underline{\varepsilon}_0} = \mu$.

Une récurrence aisée montre alors que :

$$(F\,\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(\xi\, 2^{k-1})(F\mu)(\xi).$$

Si on introduit les espaces $U^{\underline{\varepsilon}_p} = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^p.k}\, \mu^{\underline{\varepsilon}_p} / k \in \boldsymbol{Z}\rangle$, avec $U^{\underline{\varepsilon}_0} = U$ de manière conventionnelle, le Splitting Lemma permet d'écrire que, pour tout $p \geq 1$,

$$U^{\underline{\varepsilon}_p} = U^{(\underline{\varepsilon}_p,0)} \oplus_\perp U^{\underline{\varepsilon}_p,1)}$$

Si $f = \sum_k c_k(\tau_k\, \mu) \in U$ et $c = (c_k)_k$ et en désignant par $P^{\underline{\varepsilon}_p} f$ la projection orthogonale de f sur $U^{\underline{\varepsilon}_p}$ nous avons

$$P^{\underline{\varepsilon}_p} f = \sum_k c_k^{\underline{\varepsilon}_p}(\tau_{2^p.k}\, \mu)$$

et nous dirons que les $c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$ sont les cœfficients de f dans sa décomposition dans l'arborescence des $U^{\underline{\varepsilon}_p}$. Nous noterons $c^{\underline{\varepsilon}_p}$ la suite des $(c_k^{\underline{\varepsilon}_p})_k$. On passe de la projection $P^{\underline{\varepsilon}_p} f$ de f sur $U^{\underline{\varepsilon}_p}$ aux projections $P^{(\underline{\varepsilon}_p,\varepsilon)} f$ de f sur $U^{(\underline{\varepsilon}_p,\varepsilon)}$ où $\varepsilon \in \{0,1\}$, par la relation $c^{(\underline{\varepsilon}_p,\varepsilon)} = \Lambda(h_\varepsilon^+ * c^{\underline{\varepsilon}_p})$.

2.2.3. *Décomposition de l'espace d'interpolation de Shannon*

Nous allons maintenant décrire, selon le schéma qui précède, la décomposition de $U = V_0^S$. On peut prendre $\mu = \mathrm{sinc} = \varphi^S$ et deux filtres miroirs en quadrature $m_0(\omega)$ et $m_1(\omega)$ sans liens particuliers avec φ^S. On aura ici, puisque $\mu = \varphi^S = \chi_\Delta$ avec $\Delta = [-\pi, +\pi]$:

$$(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(\xi 2^{k-1})\, \chi_\Delta(\xi)$$

avec : $\Delta = [-\pi, +\pi]$.

Mais on peut aussi choisir pour $m_0(\omega)(\xi)$ et $m_1(\omega)$ les filtres miroirs en quadrature associés directement à l'analyse multi–résolution dite de Shannon : $m_0^S(\xi)$ et $m_1^S(\xi)$. La relation

$$\sqrt{2}(F\varphi^S)(2\xi) = m_0^S(\xi)(F\varphi^S)(\xi)$$

et la 2π–périodicité de m_0^S, donnent immédiatement

$$m_0^S(\xi) = \sqrt{2}\sum_n \chi_{\Delta_0}(\xi - 2n\pi)$$

où $\Delta_0 = [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

On obtient aussi

$$\begin{aligned} m_1^S(\xi) &= e^{-i\xi}\sqrt{2}\sum_n \chi_{\Delta_0}(\xi + \pi - 2n\pi) \\ &= \sqrt{2}e^{-i\omega}\sum_n \chi_{\Delta_1}(\xi - 2n\pi) \end{aligned}$$

avec $\Delta_1 = [-\pi, \frac{-\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

En utilisant les filtres $m_0^S(\xi)$ et $m_1^S(\xi)$, on génère une décomposition « idéale » de l'espace V_0^S. Nous désignerons alors par $\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ les fonctions $\mu^{\underline{\varepsilon}_p}$ lorsqu'on utilise ces filtres idéaux $m_0^S(\xi)$ et $m_1^S(\xi)$, pour lesquelles nous avons :

$$(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}^S(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi),$$

où $\underline{\varepsilon}_p = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{0,1\}^p$.

La notation $\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ sera réservée aux fonctions du type $\mu^{\underline{\varepsilon}_p}$ lorsqu'on utilise des filtres miroirs en quadrature quelconques et $\mu = \mathrm{sinc} = \varphi^S$, de sorte que :

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi)$$

Pour la suite, nous aurons besoin de connaître de façon précise, la valeur exacte des fonctions $F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}$. Cette précision technique est donnée par le résultat suivant.

2.2.4. *Proposition*

Avec les notations qui précèdent, on a, pour tout entier $p \in \boldsymbol{N}^*$ et tout p–uplet $\underline{\varepsilon}_p = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p) \in \{0,1\}^p$, $F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p} = 2^{p/2}\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}$ où $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$ est l'ensemble :

$$\Delta^{\underline{\varepsilon}_p} = [-a^{\underline{\varepsilon}_p} - \frac{\pi}{2^p}, -a^{\underline{\varepsilon}_p}] \cup [a^{\underline{\varepsilon}_p}, a^{\underline{\varepsilon}_p} + \frac{\pi}{2^p}],$$

avec

i) $a^{\underline{\varepsilon}_p} = n^{\underline{\varepsilon}_p}\frac{\pi}{2^p}$,

ii) les entiers $n^{\underline{\varepsilon}_p} \in \{0, \ldots, 2^p - 1\}$ étant donnés par l'algorithme suivant :

a) pour $p = 1$, $\underline{\varepsilon}_p = \underline{\varepsilon}_1 = \varepsilon \in \{0,1]$ et $n^{\underline{\varepsilon}_p} = \varepsilon$

b)

Si $\varepsilon_{p+1} = 0$

Si $n^{\underline{\varepsilon}_p}$ est pair :

$$n^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = 2n^{\underline{\varepsilon}_p} \text{ et } a^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = a^{\underline{\varepsilon}_p}$$

Si $n^{\underline{\varepsilon}_p} = 1$ est impair :

$$n^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = 2n^{\underline{\varepsilon}_p} + 1 \text{ et } a^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = a^{\underline{\varepsilon}_p} + \frac{\pi}{2^{p+1}}$$

Si $\varepsilon_{p+1} = 1$
Si $n^{\underline{\varepsilon}_p}$ est pair :

$$n^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = 2n^{\underline{\varepsilon}_p} + 1 \text{ et } a^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = a^{\underline{\varepsilon}_p} + \frac{\pi}{2^{p+1}}$$

Si $n^{\underline{\varepsilon}_p} = 1$ est impair :

$$n^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = 2n^{\underline{\varepsilon}_p} + 1 \text{ et } a^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = a^{\underline{\varepsilon}_p}$$

Preuve : Nous omettrons la preuve de cet exercice de routine.

Remarques :

1) On dispose de la formule de récurrence :

$$n^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = 3n^{\underline{\varepsilon}_p} + \varepsilon_{p+1} - 2E\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} + \varepsilon_{p+1}}{2}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

2) S'il se peut que la suite $n^{\underline{\varepsilon}_p}$ n'admette pas de limite lorsque p croît, par contre, la suite $a^{\underline{\varepsilon}_p}$ admet une limite lorsque p tend vers l'infini, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, tout $p \in \mathbb{N}^*$ et avec $\underline{\varepsilon}_p = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$. En effet, il suffit d'observer que $a^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} - a^{\underline{\varepsilon}_p} \leq \frac{\pi}{2^{p+1}}$, ce qui assure que la suite $a^{\underline{\varepsilon}_p}$ est une suite de Cauchy. Nous noterons $a = \lim a^{\underline{\varepsilon}_p}$.

3) Le résultat précédent fournit la localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes lorsqu'on utilise les filtres idéaux pour la décomposition de V_0^S. Lorsque ce ne sont pas les filtres idéaux qui sont utilisés pour décomposer V_0^S, mais des filtres miroirs en quadrature quelconques, le résultat précédent approxime seulement la localisation fréquentielle des fonctions

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(\xi 2^{k-1})(F\varphi^S)(\xi)$$

et nous verrons que la précision de cette localisation est liée à la régularité des filtres miroirs en quadrature (cf paragraphe 4.3.3).

3. Décomposition de processus stochastiques stationnaires par paquets d'ondelettes

Comme précisé dans l'introduction, nous nous proposons de donner une décomposition d'un processus stochastique, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique selon une arborescence du type paquets d'ondelettes comme décrit dans les sections précédentes. Lorsque nous parlerons de « décomposition d'un processus », nous nous plaçons du point de vue de l'ingénieur en traitement du signal. Ayant à traiter des signaux bruités et disposant d'un algorithme de décomposition selon une arborescence en paquets d'ondelettes comme envisagée en 2.2.1., la question qui se pose est de savoir comment se comporte cet algorithme lorsqu'on l'applique à un signal bruité et, en premier lieu, à un bruit pur. Pour répondre à ces questions, nous utiliserons la représentation d'un tel processus sous la forme d'une intégrale de Fourier d'une mesure stochastique orthogonale, telle qu'elle est décrite dans [Gui–Sko] et au sujet de laquelle nous allons faire un minimum de rappels en suivant cette référence.

3.1. INTÉGRALE STOCHASTIQUE ET APPLICATION AUX PROCESSUS

3.1.1. Mesures et Intégrales Stochastiques

Soient $\{\Omega, T, P\}$, un espace probabilisé et $L_2\{\Omega, T, P\}$ l'espace des variables aléatoires à valeurs complexes de carré intégrable. Soit d'autre part, un espace mesuré complet $\{E, B, m\}$ tel que B soit la tribu engendrée $\sigma(B_0)$ par la famille B_0 des éléments de B de mesure finie pour la mesure m, supposée positive. On suppose que $\{E, B, m\}$ est obtenu par prolongement d'une fonction simplement additive m, sur un anneau de parties M associé à une application X de M dans $L_2\{\Omega, T, P\}$, telle que :

(1) $\forall\, \Delta \in M, X(\Delta) \in L_2\{\Omega, T, P\}$ et $X(\emptyset) = 0$

(2) $\forall\, (\Delta_1, \Delta_2) \in M \times M, \Delta_1 \cap \Delta_2 \Rightarrow X(\Delta_1 \cup \Delta_2) = X(\Delta_1) + X(\Delta_2)$

(3) $\forall\, (\Delta_1, \Delta_2) \in M \times M, E[X(\Delta_1)\overline{X(\Delta_2)}] = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$

On dit que la famille $\{X(\Delta/\Delta \in B_0\}$ est une mesure stochastique orthogonale élémentaire et que m est sa fonction structurelle.

La classe $L_0\{M\}$ des fonctions simples est constituée des fonctions de E dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k} \text{ avec } \Delta_k \in M.$$

L'intégrale stochastique d'une telle fonction f de $L_0\{M\}$ est la variable aléatoire

$$I(f) = \int f(\xi)\, d\, X(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k X(\Delta_k).$$

Pour deux fonctions quelconques f et g de $L_0\{M\}$, on pourra écrire

$$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{\Delta_k} \text{ et } g = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{\Delta_k},$$

les Δ_k étant disjoints 2 à 2 car M est un anneau.

Par suite

$$E[I(f)\,\overline{I(g)}] = \int F(\xi)\,\overline{g(\xi)}\, dm(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d_k}.$$

Désignons par $L_2\{M\}$ l'adhérence de $L_0\{M\}$ dans $L_2\{E, B, m\}$. L'application I s'étend en une isométrie, encore notée I de $L_2\{M\}$ sur l'adhérence $L_2\{X\}$ de $L_0\{X\} = I(L_0\{M\})$. On écrira encore $I(f) = \int f(\xi)\, d\, X(\xi)$ pour $f \in$

$L_2\{M\}$ et on appellera $I(f)$ l'intégrale stochastique de f par rapport à X. On a encore $E[I(f)\overline{I(g)}] = \int f(\xi)\overline{g(\xi)}\,dm(\xi)$ pour $f, g \in L_2\{M\} = L_2\{E, B, m\}$, cette dernière égalité traduisant la densité des fonctions simples dans $L_2\{E, B, m\}$ comme usuellement.

Si maintenant B_0 est la famille des Δ de B tels que $m(\Delta)$ est finie, de telle sorte que $B = \sigma(B_0)$, on désignera encore par X la fonction d'ensemble de B_0 dans $L_2\{X\}$ définie par

$$X(A) = \int \chi_A(\xi)\,dX(\xi) \text{ car } \chi_A(\xi) \in L_2\{E, B, m\}.$$

La fonction X ainsi prolongée vérifie

$$X(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} X(A_n)$$

avec convergence dans $L_2\{\Omega, T, P\}$ si $A_n \in B_0$ et $A_j \cap A_k = \emptyset$ pour $j \neq k$ ainsi que $E[X(A)\overline{X(B)}] = m(A \cap B)$ pour $A, B \in B_0$. Elle est encore appelée mesure orthogonale stochastique.

3.1.2. *Application aux processus stochastiques*

Considérons à présent un processus aléatoire $x(t)$ hilbertien ($\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in L_2\{\Omega, T, P\}$), continu en moyenne quadratique, stationnaire au sens large ($E[x(t) = m_x, E[x(t)\overline{x(s)}] = \Gamma(t-s)$ où Γ est continue). On sait alors qu'il existe une mesure m, positive et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que $\Gamma(t) = \int e^{it\xi} dm(\xi)$ (théorème de Khintchine, m est la mesure spectrale du processus).

Désignons par $L_2\{x\}$ l'adhérence dans $L_2\{\Omega, T, P\}$ de l'ensemble des variables aléatoires de la forme $\sum_{k=1}^{n} c_k\, x(t_k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $-\infty < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ et par $L_2\{m\}$ l'espace $L_2\{\mathbb{R}, B, m\}$. Il existe alors une mesure stochastique orthogonale X sur $(\mathbb{R}, B)$ (où B est la tribu associée à m) associée à $x(t)$ de telle sorte qu'il existe une isométrie entre $L_2\{m\}$ et $L_2\{x\}$, qui échange $x(t)$ et $e^{-it\xi}$, χ_A et $X(A)$ et pour laquelle $x(t)$ s'exprime sous forme d'une intégrale stochastique :

$$x(t) = \int e^{it\xi}\,dX(\xi)$$

Si f et g, deux éléments de $L_2\{\mathbb{R}, B, m\}$, définissent les variables aléatoires $I(f)$ et $I(g)$ de $L_2\{\Omega, T, P\}$ par $I(f) = \int f(\xi)\,dX(\xi)$ et $I(g) = \int g(\xi)\,dX(\xi)$, on a $E[I(f)\overline{I(g)}] = \int f(\xi)\overline{g(\xi)}\,dm(\xi)$.

3.2. PAQUETS D'ONDELETTES ASSOCIÉS À UNE MESURE ORTHOGONALE STOCHASTIQUE RELATIVEMENT À UN ESPACE D'INTERPOLATION ET À 2 FILTRES MIROIRS EN QUADRATURE

Ce paragraphe est consacré au résultat que voici.

3.2.1. *Théorème*

Soit X une mexsure stochastique orthogonale à valeurs dans $L_2\{\Omega, T, P\}$, associée à la mesure structurelle positive m supposée de la forme $dm = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$ avec $\gamma(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Soit $U = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_k\mu/k \in \mathbb{Z}\rangle$ un espace d'interpolation de pas 1 dont une base de Hilbert est $(\tau_k\mu)_{k\in\mathbb{Z}}$, pour $\mu \in L^2(\mathbb{R})$ donnée.

Soient $m_0(\xi)$et $m_1(\xi)$ deux filtres miroirs en quadrature, de réponses impulsionnelles respectives $h_0(n)$ et $h_1(n)$ (indépendants de μ) réelles.

On définit les fonctions $\mu^{\underline{\varepsilon}_p}$ de $L^2(\mathbb{R})$ pour $\underline{\varepsilon}_p \in \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{N}^*$, par $\mu^{\underline{\varepsilon}_0} = \mu$ et pour $p \geq 1$, par :

$$\mu^{\underline{\varepsilon}_p} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_p}(k)(\tau_{2^{p-1}k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p-1}}).$$

Soient enfin les variables aléatoires hilbertiennes définies par : $c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = I\left(e^{i2^p k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}\right)$ où I est l'intégrale stochastique associée aux données de X et m.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$:

$$c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)c_k^{\underline{\varepsilon}_p},$$

la convergence ayant lieu au sens des familles sommables dans l'espace de Hilbert $L_2\{\Omega, T, P\}$.

Démonstration :

Nous allons étudier $E\left[\left|\eta_J^{\underline{\varepsilon}_{p+1}}\right|^2\right]$ où

$$\eta_J^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)c_n^{\underline{\varepsilon}_p}$$

et J est une partie finie de $\mathbb{Z}$.

Puisque $U^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} \subset U^{\underline{\varepsilon}_p}$ (notations du paragraphe 2.1.), on a $\tau_{2^{p+1}.k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}}$ qui est élément de $U^{\underline{\varepsilon}_p}$ et qui peut donc être écrit sous la forme :

$$\tau_{2^{p+1}.k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle \tau_{2^{p+1}.k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} \middle| \tau_{2^p n}\mu^{\underline{\varepsilon}_p}\right\rangle (\tau_{2^p n}\mu^{\underline{\varepsilon}_p})$$

Mais on dispose des égalités :

$$\begin{aligned}\left\langle \tau_{2^{p+1}.k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} \middle| \tau_{2^p n}\mu^{\underline{\varepsilon}_p}\right\rangle &= \left\langle \mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} \middle| \tau_{2^p(n-2k)}\mu^{\underline{\varepsilon}_p}\right\rangle \\ &= h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k).\end{aligned}$$

Aussi

$$\tau_{2^{p+1}k}\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)(\tau_{2^p n}\mu^{\underline{\varepsilon}_p}),$$

qui donne par Transformée de Fourier et conjugaison complexe :

$$e^{i2^{p+1}k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}})(\xi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)e^{i2^p n\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}. \tag{1}$$

Il vient alors, d'après les définitions :

$$\begin{aligned}\eta_J^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} &= c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)c_n^{\underline{\varepsilon}_p}\\ &= \int e^{i2^{p+1}k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}})(\xi)}dX(\xi)\\ &\quad - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)\int e^{i2^p n\xi}\overline{(F\mu_p^{\underline{\varepsilon}})(\xi)}dX(\xi)\\ &= \int\Big[e^{i2^{p+1}k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}})(\xi)}\\ &\quad - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)e^{i2^p n\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}\Big]dX(\xi)\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse faite sur la mesure structurelle $dm = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, la fonction qui figure dans cette dernière intégrale stochastique est élément de $L_2\{\mathbb{R}, B, m\}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}E\left[\left|\eta_J^{\underline{\varepsilon}_{p+1}}\right|^2\right] &= \int_{\mathbb{R}}\Big|e^{i2^{p+1}k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}})(\xi)}\\ &\quad - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)e^{i2^p n\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}\Big|^2 dm(\xi)\end{aligned}$$

et puisque $\gamma(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R})$, nous avons :

$$\begin{aligned}E\left[\left|\eta_J^{\underline{\varepsilon}_{p+1}}\right|^2\right] &\le \frac{\|\gamma\|_\infty}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Big|e^{i2^{p+1}k\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_{p+1}})(\xi)}\\ &\quad - \sum_{n\in J} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)e^{i2^p n\xi}\overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}\Big|^2 d(\xi)\end{aligned}$$

qui peut être rendu arbitrairement petit d'après (1). D'où la proposition.

Nous résumerons formellement ce résultat par la relation :

$$c^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \Lambda\left(h^+_{\varepsilon_{p+1}} * c^{\underline{\varepsilon}_p}\right)$$

avec $c^{\underline{\varepsilon}_p} = (c_k^{\underline{\varepsilon}_p})_k$ et où Λ désigne l'opérateur de sous–échantillonnage par 2.

Nous allons appliquer le résultat précédent au cas d'un processus $x(t)$, hilbertien, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique et de mesure spectrale $dm = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, avec $\gamma(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R})$ à support contenu dans $[-\pi,\pi]$ (Bande spectrale limitée à $[-\pi,\pi]$). Nous pouvons écrire ce processus sous la forme

$$x(t) = \int e^{i\xi t}dX(\xi)$$

où X est une mesure stochastique orthogonale associée au processus et de mesure structurelle m. Nous prendrons alors $\mu = \varphi^S$ et introduirons les variables aléatoires, pour $p\ge 0$:

$$c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = \int e^{i2^p k\xi}\overline{(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}dX(\xi)\ \ (p\ge 0).$$

Si on calcule $x(k) - c_k^{\underline{\varepsilon}_0}$, il vient :

$$x(k) - c_k^{\underline{\varepsilon}_0} = \int e^{ik\xi}[1-(F\varphi^S)(\xi)]dX(\xi)$$

puis

$$E[|x(k)-c_k^{\underline{\varepsilon}_0}|^2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|1-(F\varphi^S)(\xi)|^2\gamma(\xi)d\xi$$

ce qui assure $x(k) = c_k^{\underline{\varepsilon}_0}$. L'application du théorème 3.2.1. permet alors d'énoncer (avec les notations de 3.2.1.) :

3.2.2. *Théorème*

Soit $x(t)$ un processus hilbertien, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, de mesure stochastique X, associée à la fonction structurelle m telle que $dm(\xi) = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$ avec $\gamma(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $[-\pi,\pi]$. Les variables aléatoires hilbertiennes $c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$ définies par

$$c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = \int e^{i2^p k\xi}\overline{(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}dX(\xi)$$

pour $p\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}$, vérifient :

$$(i)\ c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = x(k) \qquad (ii)\ c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_p+1}(n-2k)c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$$

4. Propriétés statistiques du premier et du second ordre des coefficients d'ondelette d'un processus stationnaire et comportements asymptotiques

Nous retournons ici à l'étude d'un processus hilbertien $x(t)$ stationnaire, continu en moyenne quadratique, que l'on peut écrire comme une intégrale stochastique $x(t) = \int e^{i\xi t}dX(\xi)$, la mesure stochastique orthogonale X étant de mesure structurelle $dm(\xi) = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, avec $\gamma(\xi)\in L^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$. La fonction d corrélation de $x(t)$ peut alors s'écrire sous la forme

$$\Gamma(t,s) = E[x(t)\overline{x(s)}] = \Gamma(t-s) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi(t-s)}\gamma(\xi)d\xi.$$

Le cas où $\gamma(\xi)$ est à support compact dans $[-\pi, \pi]$ n'est alors qu'un cas particulier de ces hypothèses pour lequel, lorsque $p = 0$, les valeurs $c_k^{\underline{\varepsilon}_0}$ sont directement égales aux échantillons de bruit, comme nous l'avons montré au paragraphe 3.2.

D'après le paragraphe précédent, nous avons, pour tout $p \in \boldsymbol{N}$:

$$c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k) c_n^{\underline{\varepsilon}_p}$$

avec

$$c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = \int e^{i2^p k\xi} \overline{(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)} dX(\xi)$$

4.1. CALCUL DES MOMENTS

Nous allons étudier les moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires $c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$.

4.1.1. Moment d'ordre 1 (ou moyenne)

Comme $c_k^{\underline{\varepsilon}_0} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k) c_n^{\underline{\varepsilon}_p}$ converge dans $L_2\{\Omega, T, P\}$, on a :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k) E[c_n^{\underline{\varepsilon}_p}]$$

Pour $p = 0$, $c_n^{\underline{\varepsilon}_0} = x(n)$ et donc $E[c_n^{\underline{\varepsilon}_0}] = E[x(n)]$ est égale à la moyenne du processus que nous noterons $m_x = E[x(t)]$.

Nous obtenons alors

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_1}] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k) E[c_n^{\underline{\varepsilon}_0}] = m_x \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k),$$

soit

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_1}] = m_x \, m_{\varepsilon_1}(0)$$

Par une récurrence immédiate, on obtient, plus généralement :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = m_x \prod_{j=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(0)$$

En particulier, $E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}]$ sera nul dès qu'il existera $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\varepsilon_j = 1$ et sera non nul si et seulement si, quel que soit $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a $\varepsilon_j = 0$, auquel cas $E[c_k^{(0,0,\ldots,0)}] = m_x 2^{p/2}$.

4.1.2. Moments d'ordre 2

Par définition des $c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$ et grâce aux propriétés d'une intégrale stochastique, on obtient de manière immédiate :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p} \overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p (k-l)} \left| F\mu^{\underline{\varepsilon}_p}(\xi) \right|^2 \gamma(\xi) d\xi$$

4.1.3. Cas d'un bruit blanc centré

On peut montrer, en utilisant la notion de processus généralisé, que les calculs précédents restent valables dans le cas d'un bruit blanc, centré, de variance σ^2, pour lequel nous avons $m_x = 0$ et $\gamma(\xi) = \sigma^2$, d'où :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = 0$$

et

$$\begin{aligned} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p} \overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] &= \sigma^2 \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p (k-1)} \left| F\mu^{\underline{\varepsilon}_p}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \sigma^2 \delta_{k,l} \end{aligned}$$

puisque $(\tau_{2^p k} \mu^{\underline{\varepsilon}_p})_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

4.1.3.1. Proposition

La décomposition d'un bruit blanc centré conduit, à tout niveau de décomposition, à des séquences blanches de cœfficients d'ondelettes de même variance.

Pour la pratique, il devient maintenant intéressant de connaître le comportement aysmptotique de ces moments lorsque p tend vers l'infini et lorsque le bruit n'est pas forcément blanc au départ.

4.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES MOMENTS D'ORDRE 1

Le cas des moments d'ordre 1 est sans difficulté.

Si pour tout $j \in \boldsymbol{N}$, $\varepsilon_j = 0$, on aura :

$$\lim_{p \to +\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = +\infty \text{ si } m_x \neq 0$$

et

$$\lim_{p \to +\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = 0 \text{ si } m_x = 0$$

tandis que, si pour un j, $\varepsilon_j = 1$, on aura :

$$\lim_{p \to +\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = 0$$

4.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES MOMENTS D'ORDRE 2

L'étude des moments d'ordre 2 est plus délicate, et nous allons tout d'abord étudier le cas particulier de la décomposition en ondelette, avant de traiter le cas général de la décomposition en paquets d'ondelettes. Dans les deux cas, nous aurons besoin d'hypothèses supplémentaires.

4.3.1. *Cas de la décomposition en ondelettes de l'espace des fonctions à spectre de support compact*

Cette décomposition arborescente est le cas particulier de la décomposition en paquets d'ondelettes où les p–uplets $\underline{\varepsilon}_p$ vérifient, pour tout p :

soit, pour tout j appartenant à $\{1,\ldots,p\}$, $\varepsilon_j = 0$

soit, pour tout j appartenant à $\{1,\ldots,p-1\}$, $\varepsilon_j = 0$ et $\varepsilon_p = 1$

Nous utiliserons des filtres miroirs en quadrature tels que nous les avons caractérisés par les relations (a) à (c) au paragraphe 2.1.

Comme nous nous plaçons dans le cas de la décomposition en ondelette de V_0^S, la décomposition fera intervenir les fonctions :

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_0(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi),$$

dans le cas $\underline{\varepsilon}_p = (0,\ldots,0)$,

ou bien les fonctions

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = m_1(\xi 2^{p-1}) \prod_{k=1}^{p-1} m_0(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi),$$

dans le cas $\underline{\varepsilon}_p = (0,\ldots,0,1)$.

Comme précédemment, nous considérons un processus hilbertien $x(t)$ stationnaire, continu en moyenne quadratique, que l'on peut écrire comme intégrale stochastique $x(t) = \int e^{i\xi t} dX(\xi)$, la mesure stochastique orthogonale X étant de mesure structurelle $dm(\xi) = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, avec $\gamma(\xi) \in L^\infty(\boldsymbol{R}) \cap L^1(\boldsymbol{R})$ et **continue en 0**.

Nous savons que la corrélation des cœfficients d'ondelettes est alors donnée par la formule :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-l)}\left|F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2 \gamma(\xi)d\xi$$

Nous aurons besoin alors du lemme suivant, dont la démonstration est immédiate.

4.3.1.1. Lemme

Soit $\varphi(t)$ la fonction d'échelle associée au filtre $m_0(\xi)$. Sous les hypothèses du paragraphe 2.1. (relations (a) à (c)) :

$\exists C > 0,\ \forall \xi \in \Delta,\ |F\varphi(\xi)| \geq C.$

Donc, sur Δ, $|F\varphi(\xi)|$ est non nulle. Dans le cas où

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{k=1}^{p} m_0(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi),$$

nous pouvons alors écrire pour $\xi \in \Delta$,

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{j=1}^{p} m_0(\xi 2^{j-1})\, F\varphi(\xi)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)}.$$

Comme $F\varphi(\xi) = \prod_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{2}}m_0(\frac{\xi}{2^k})$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{p} m_0(\xi 2^{j-1})F\varphi(\xi) &= \prod_{j=1}^{p} m_0(\xi 2^{j-1}) \prod_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{2}}m_0(\tfrac{\xi}{2^k}) \\ &= 2^{p/2}\prod_{j=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{2}}m_0(\xi 2^{j-1}) \\ &\qquad \prod_{k\geq 1}\frac{1}{\sqrt{2}}m_0(\tfrac{\xi}{2^k})\end{aligned}$$

Donc :

$$\prod_{j=1}^{p} m_0(\xi 2^{j-1})F\varphi(\xi) = 2^{p/2}F\varphi(\xi 2^p)$$

et pour $\xi \in \Delta$, nous avons finalement

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = 2^{p/2}F\varphi(\xi 2^p)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)}$$

Si nous posons par convention

$$\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)} = 0$$

dès que ξ n'appartient pas à Δ, nous pourrons écrire, pour tout ξ de $\boldsymbol{R}$,

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = 2^{p/2}F\varphi(\xi 2^p)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)}.$$

La corrélation entre cœfficients d'ondelette s'exprime alors selon :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-l)}2^p\left|F\varphi(\xi 2^p)\right|^2\frac{\chi_\Delta(\xi)}{|F\varphi(\xi)|^2}\gamma(\xi)d\xi$$

Après changement de variable, il vient :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(k-l)}|F\varphi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})d\xi$$

Comme $\gamma \in L^\infty(\boldsymbol{R}) \cap L^1(\boldsymbol{R})$, nous majorons le terme $\gamma(\frac{\xi}{2^p})$ par $\|\gamma\|_\infty$.

D'autre part, d'après le lemme 4.3.1.1., $|F\varphi(\xi)| \geq C > 0$, et donc, sur Δ, $\frac{1}{|F\varphi(\xi)|^2} \leq \frac{1}{C^2}$. Il s'ensuit que sur Δ, $\frac{\chi_\Delta(\xi)}{|F\varphi(\xi)|^2} \leq \frac{1}{C^2}$, et comme par convention $\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)} = 0$, dès que ξ n'appartient pas à Δ, nous aurons aussi $\frac{\chi_\Delta(\xi)}{|F\varphi(\xi)|^2} \leq \frac{1}{C^2}$ pour tout ξ de $\boldsymbol{R}$, de sorte que nous aurons la majoration $\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2} \leq \frac{1}{C^2}$ pour tout ξ de $\boldsymbol{R}$.

Finalement, nous pouvons majorer la fonction

$$e^{i\xi(k-l)}|F\varphi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})$$

par :

$$\left|e^{i\xi(k-l)}|F\varphi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})\right| \leq \|\gamma\|_\infty\frac{1}{C^2}|F\varphi(\xi)|^2.$$

La fonction majorante $\|\gamma\|_\infty \frac{1}{C^2}|F\varphi(\xi)|^2$ étant intégrable puisque $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F\varphi(\xi)|^2 d\xi = 1$, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée, et nous obtenons :

$$\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(k-1)}|F\varphi(\xi)|^2 \lim_{p\to+\infty}\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})d\xi.$$

Or,

$$\lim_{p\to=\infty}\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p}) = \gamma(0)$$

puisque $\gamma(\xi)$ est continue en 0, et donc, il reste :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] &= \gamma(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(k-l)}|F\varphi(\xi)|^2 d\xi \\ &= \gamma(0)\,\delta_{k,l}\end{aligned}$$

puisque les fonctions $(\tau_k\varphi)_k$ forment une famille orthonormale. Il en va de même dans le cas où

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = m_1(\xi 2^{p-1})\prod_{k=1}^{p-1} m_0(\xi 2^{k-1})\chi_\Delta(\xi)$$

car cette fonction peut être écrite

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = m_1(\xi 2^{p-1})\prod_{k=1}^{p-1} m_0(\xi 2^{k-1})F\varphi(\xi)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)},$$

pour tout ξ élément de Δ. Comme précédemment,

$$\prod_{j=1}^{p-1} m_0(\xi 2^{j-1})F\varphi(\xi) = 2^{(p-1)/2}F\varphi(\xi 2^{p-1}).$$

D'où

$$m_1(\xi 2^{p-1})\prod_{k=1}^{p-1} m_0(\xi 2^{k-1})F\varphi(\xi) =$$

$$2^{(p-1)/2}m_1(\xi 2^{p-1})F\varphi(\xi 2^{p-1}) = 2^{p/2}F\Psi(\xi 2^p)$$

où $\Psi(t)$ est la fonction d'ondelette orthogonale associée à $\varphi(t)$. On a donc $(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = 2^{p/2}F\Psi(\xi 2^p)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)}$. Par convention, nous poserons encore $\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)} = 0$ dès que ξ n'appartient pas à Δ, ce qui permet d'écrire que pour tout ξ de $\boldsymbol{R}$:

$$(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = 2^{p/2}F\Psi(\xi 2^p)\frac{\chi_\Delta(\xi)}{F\varphi(\xi)}.$$

La corrélation entre cœfficients d'ondelettes vaut alors :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-l)}2^p|F\Psi(\xi 2^p)|^2 \frac{\chi_\Delta(\xi)}{|F\varphi(\xi)|^2}\gamma(\xi)d\xi,$$

et après changement de variable, il vient :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(k-l)}|F\Psi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})d\xi$$

Par les mêmes arguments que précédemment, nous pouvons majorer la fonction

$$e^{i\xi(k-l)}|F\varphi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p}),$$

par :

$$\left|e^{i\xi(k-l)}|F\Psi(\xi)|^2\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})\right| \le \|\gamma\|_\infty\frac{1}{C^2}|F\Psi(\xi)|^2.$$

La fonction majorante $\|\gamma\|_\infty\frac{1}{c^2}|F\Psi(\xi)|^2$ est intégrable puisque $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F\Psi(\xi)|^2 d\xi = 1$, ce qui permet d'appliquer le théorème de la convergence dominée, pour obtenir :

$$\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(k-l)}|F\Psi(\xi)|^2 \lim_{p\to+\infty}\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})d\xi.$$

Or

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{\chi_\Delta(\frac{\xi}{2^p})}{|F\varphi(\frac{\xi}{2^p})|^2}\gamma(\frac{\xi}{2^p})d\xi = \gamma(0)$$

et donc :

$$\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \gamma(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F\Psi(\xi)|^2 d\xi = \gamma(0)\,\delta_{k,l}$$

puisque les fonctions $(\tau_k\Psi)_k$ forment une famille orthonormale. Nous résumerons les résultats concernant le cas que nous venons d'étudier par le théorème suivant.

4.3.1.2. Théorème

Soit $x(t)$ un processus hilbertien, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, tel que $x(t) = \int e^{i\xi t}dX(\xi)$, où la mesure stochastique orthogonale X est de mesure structurelle $dm(\xi) = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, où $\gamma(\xi) \in L^\infty(\boldsymbol{R}) \cap L^1(\boldsymbol{R})$, et est continue en 0.

Soient $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$, deux filtres miroirs en quadrature vérifiant les hypothèses (a) à (f) du paragraphe 2.1.

Alors, les variables aléatoires $c_k^{\underline{\varepsilon}_p} = \int e^{i2^p k\xi}\overline{(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}dX(\xi)$ associées aux p–uplets $\underline{\varepsilon}_p$ pour lesquels $\varepsilon_j = 0$ pour tout j appartenant à $\{1,\ldots,p\}$, ou pour lesquels on a $\varepsilon_j = 0$ pour tout j appartenant à $\{1,\ldots,p-1\}$ et $\varepsilon_p = 1$, sont des éléments de $L_2\{\Omega, T, P\}$ et vérifient :

(1) $c_k^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k)c_k^{\underline{\varepsilon}_p}$ (convergence dans $L_2\{\Omega, T, P\}$)

(2) $E[c_k^{\underline{\varepsilon}_0}] = m_x$ et pour $p \geq 1$, $E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = m_x \prod_{j=1}^{p} m_{\varepsilon_k}(0)$ avec $m_x = E[x(t)]$

(3) $E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-1)}\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma(\xi)d\xi$ pour tout $p \geq 0$

(4) $\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}] = m_x \prod_{j=1}^{+\infty} m_{\varepsilon_k}(0)$ (conventionnellement $+\infty \times 0 = 0$)

(5) $\lim_{p\to+\infty} E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \gamma(0)\,\delta_{k,l}$ (6) $c_k^{\underline{\varepsilon}_0} = x(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, Si de plus, $\gamma(\xi)$ est à support compact dans $[-\pi,\pi]$.

Remarque : ce résultat est intéressant parce qu'il ne fait pas intervenir la régularité des filtres miroirs en quadrature mis en jeu, alors qu'au paragraphe suivant, qui traite du cas général des paquets d'ondelettes, des résultats équivalents sont obtenus moyennant certaines hypothèses supplémentaires concernant la régularité des filtres utilisés.

4.3.2. Décomposition générale en paquets d'ondelettes

4.3.2.1. Des hypothèses pour poursuivre l'étude des moments d'ordre 2

La décomposition en paquets d'ondelettes concernera ici encore l'espace V_0^S. D'autre part, nous postulerons l'existence d'une suite $(m_\varepsilon^N(\xi))$, $N \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$ de filtres miroirs en quadrature tels que $\forall\,\varepsilon \in \{0,1\}$,

$$\lim_{N\to+\infty} |m_\varepsilon^N(\xi)|^2 = |m_\varepsilon^S(\xi)|^2 \ (p.p),$$

et désignerons par $(h_\varepsilon^N(\xi))_N$ la réponse impulsionnelle de ces filtres.

L'annexe 2 montre que les filtres de Battle–Lemarié (présentés dans [Bat]) ont cette propriété. Nous introduirons l'hypothèse de continuité de la fonction $\gamma(\xi)$, et nous supposerons que $\gamma(\xi)$ est à support dans $\Delta = [-\pi,\pi]$. Nous savons de plus que $\gamma(\xi)$ est positive, réelle et bornée. Nous supposerons enfin que le processus $\boldsymbol{x(t)}$ **est réel**, de sorte que $\gamma(\xi)$ est paire car Transformée de Fourier de la fonction de corrélation $\Gamma(\tau)$ du processus.

La continuité de $\gamma(\xi)$ permet d'affirmer que la suite de fonctions $(\gamma_p(\xi))_p \geq 0$ définies par

$$\gamma_p(\xi) = \sum_{n=0}^{2^p-1} \gamma(\frac{n\pi}{2^p})\chi_{\Delta_{n,p}}(\xi)$$

où $\Delta_{n,p} = [-(n+1)\pi/2p, -n\pi/2p] \cup [n\pi/2p, (n+1)\pi/2p]$ converge uniformément vers γ.

Lorsque nous emploierons les filtres $m_\varepsilon^N(\xi)$, nous noterons $\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ et $c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p}$ les quantités étudiées au paragraphe 3.2. Nous avons ici

$$(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{j=1}^{p} m_{\varepsilon_j}^N(\xi 2^{j-1})(F\varphi^S)(\xi)$$

et notre problème est d'étudier l'évolution des moments d'ordre 2 :

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_1^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma(\xi)d\xi,$$

en fonction de p et de N.

4.3.2.2. Comportement asymptotique des moments d'ordre 2

Nous commencerons par le lemme suivant :

4.3.2.2.1. Lemme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma_p(\xi)d\xi = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right)\delta_{k,0}$$

Preuve : rappelons que (cf. 2.2.4. proposition)

$$(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = 2^{p/2}\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi)$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2\gamma_p(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_p(\xi)e^{i\xi 2^p k}2^p\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi)d\xi$$

Comme

$$\gamma_p(\xi)\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi) = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right)\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi),$$

l'intégrale à calculer est :

$$2^p\gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi)d\xi$$

Le changement de variable $2^p\xi \to \xi$ donne l'égalité :

$$2^p\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\chi_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{2^p\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} e^{ik\xi}d\xi = \delta_{k,0},$$

d'où le lemme.

Nous savons que $\lim_{p\to+\infty} \frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p} = \lim_{p\to+\infty} a^{\underline{\varepsilon}_p} = a$ existe (même si nous ne savons pas l'identifier). Comme γ est continue, $\lim_{p\to+\infty} \frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p} = \gamma(a)$ que nous noterons L.

Nous allons étudier maintenant le comportement de :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma(\xi)d\xi - L\delta_{k,0}$$

Nous pouvons écrire les inégalités :

$$\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma(\xi)d\xi - L\delta_{k,0}\right|$$
$$\leq \left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}(\gamma(\xi)-\gamma_p(\xi))\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi\right| +$$
$$\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)d\xi\right| +$$
$$\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma_p(\xi)d\xi - L\delta_{k,0}\right|$$

Traitons séparément chacun des termes de la majoration.

Pour le troisième terme, nous avons, d'après le lemme 4.3.2.2.1., et **uniformément** par rapport à k dans $\mathbb{Z}$:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\gamma_p(\xi)d\xi = L\delta_{k,0},$$

puisque $\lim_{p\to+\infty}\gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right) = L$.

En ce qui concerne le premier terme :

$$\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}(\gamma(\xi)-\gamma_p(\xi))\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi\right|$$
$$\leq \tfrac{1}{2\pi}\int_{\Delta}|\gamma(\xi)-\gamma_p(\xi)|\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

et alors la convergence uniforme de γ_p vers γ donne :

$$\lim_p \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}(\gamma(\xi)-\gamma_p(\xi))\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi = 0$$

Traitons enfin le second terme. Nous avons tout d'abord

$$\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)d\xi\right|$$
$$\leq \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left||(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 - |(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2\right|\gamma_p(\xi)d\xi$$

Comme $\lim_{N\to+\infty}|m_\varepsilon^N(\xi)|^2 = |m_\varepsilon^S(\xi)|^2$ $(p.p)$, et, puisque la fonction $(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)$ vaut

$$(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) = \prod_{j=1}^{p} m_{\varepsilon_j}^N(\xi 2^{j-1})(F\varphi^S)(\xi),$$

nous en déduisons qu'à ***p* fixé** :

$$\lim_{N\to+\infty}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \lim_{N\to+\infty}\prod_{j=1}^{p}|m_{\varepsilon_j}^N(\xi 2^{j-1})|^2(F\varphi^S)(\xi)$$
(définition $de F\mu_N^{\underline{\varepsilon}_p}$)
$$= \prod_{j=1}^{p}|m_{\varepsilon_j}^S(\xi 2^{j-1})|^2(F\varphi^S)(\xi)\ (p.p)$$
$$= |F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}|^2\ (p.p)\ \text{(proposition 2.2.3.)}$$

En appliquant la convergence dominée, nous avons donc à p fixé :

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)d\xi\right| = 0$$

On démontrerait de la même manière, qu'à ***p* fixé**,

$$\lim_{N\to+\infty}\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2\right)\gamma(\xi)d\xi\right| = 0$$

Nous pouvons maintenant résumer cette étude dans l'énoncé que voici :

4.3.2.2.2. Théorème

Soit $x(t)$ un processus hilbertien, stationnaire au sens large, continu en moyenne quadratique, tel que $x(t) = \int e^{i\xi t}dX(\xi)$, où la mesure stochastique orthogonale X est telle que sa mesure structurelle associée soit de la forme $dm(\xi) = \frac{1}{2\pi}\gamma(\xi)d\xi$, avec $\gamma(\xi)$ continue et à support dans $[-\pi,\pi]$. Soit $(m_\varepsilon^N(\xi))_N$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, une suite de filtres miroirs en quadrature tels que

$$\lim_{N\to+\infty}|m_\varepsilon^N(\xi)|^2 = |m_\varepsilon^S(\xi)|^2\ (p.p).$$

Alors les variables aléatoires $c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p}$, définies par

$$c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p} = \int e^{i2^p k\xi}\overline{(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)}dX(\xi),$$

sont des éléments de $L_2\{\Omega,T,P\}$ qui vérifient :

(1) $c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_0} = x(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$

(2) $c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_{p+1}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{\varepsilon_{p+1}}(n-2k) c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p}$ (convergence dans $L_2\{\Omega, T, P\}$)

(3) $E[c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_0}] = m_x$ et pour $p \geq 1$, $E[c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p}] = m_x \prod_{j=1}^{p} m_{\varepsilon_j}(0)$ avec $m_x = E[x(t)]$

(4) $E[c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p} \overline{c_{N,l}^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p (k-l)} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \gamma(\xi) d\xi$ pour tout $p \geq 0$

(5) $\lim_{N \to +\infty} E[c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p}] = m_x \prod_{j=1}^{+\infty} m_{\varepsilon_j}(0)$ (conventionnellement $+\infty \times 0 = 0$)

(6) $\lim_{N \to +\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma(\xi) d\xi \right| = 0$ **(à p fixé).**

(7) Soit $a(\underline{\varepsilon}) = \lim_{r \to +\infty} \frac{n^{\underline{\varepsilon}_r} \pi}{2^r}$ pour chaque $\varepsilon \in \{0,1\}^N$. Pour tout $\eta > 0$, il existe $p_\eta \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_\eta$, il existe $N(\eta, p_\eta) \in \mathbb{N}$, tel que, pour $N \geq N(\eta, p_\eta)$, on ait l'égalité de « quasi–blancheur » :

$$\left| E[c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p} \overline{c_{N,l}^{\underline{\varepsilon}_p}}] - \gamma(a(\underline{\varepsilon}))\delta_{k,l} \right| < \eta \text{ pour tout } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Remarques

1) Les relations (5), et (7) lorsque $m_x = 0$, signifient que, lorsque la résolution p croît (ou au moins est assez grande) et que le paramètre N croît aussi (en fonction de la résolution p), les cœfficients de la décomposition en paquets d'ondelettes tendent à être décorrélés : la suite des variables aléatoires $(c_{N,k}^{\underline{\varepsilon}_p})_{p,N}$ devient « blanche ». On conçoit l'intérêt potentiel de ce résultat d'un point de vue traitement du signal, puisque les suites aléatoires décorrélées possèdent, par nature, des caractéristiques statistiques simples, commodes pour optimiser les traitements.

2) Dans le calcul précédent, sur les trois termes intervenant dans la majoration, deux tendent vers 0 avec p, et ce, indépendamment de N.

Reste le terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi$$

qui ne tend vers 0 qu'avec N, et lorsque p est fixé. Ce terme est celui qui est dimensionnant dans l'estimation proposée.

4.3.3. *Relation avec la localisation des paquets d'ondelettes*

Le terme dimensionnant dans l'estimation proposée est

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi$$

qui ne tend vers 0 qu'avec N, et lorsque p est fixé.

La fonction $\gamma_p(\xi)$ est une fonction en escalier que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\gamma_p(\xi) = \sum_{\underline{\nu}_p} \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p}\right) \chi_{\Delta^{\underline{\nu}_p}}(\xi)$$

où $\underline{\nu}_p = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \{0,1\}^p$,

Aussi nous avons :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi \\
&= \sum_{\underline{\nu}_p} \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\nu}_p}} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) d\xi \\
&= \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2^p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - 2^p \right) d\xi \\
&\quad + \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\nu}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2^p}\right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi - 1 \right) \\
&\quad + \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\nu}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Le terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi$$

sera alors d'autant plus proche de 0 que $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$ sera proche de 1 et les termes $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\nu}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$ proches de 0.

La convergence de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi$$

vers 0 est donc liée à la localisation plus ou moins bonne de $(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)$ dans $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$. Cette localisation sera d'autant meilleure que $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$ est proche de 1.

Une condition suffisante pour espérer que le théorème 4.3.2.2. conduise à des résultats accessibles en pratique (sans que p ou N soient trop grands) est donc que les fonctions $(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)$ soient bien localisées dans $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$ soit proche de 1. Nous voyons donc ici le lien étroit entre localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes et comportement asymptotique des moments d'ordre 2 des cœfficients d'ondelettes. La condition précédente est suffisante, mais non nécessaire : la décorrélation des cœfficients d'ondelettes sera d'autant plus rapide avec p et N, qu'au départ, la mesure spectrale de puissance sera proche d'une constante, puisque nous savons que dans le cas idéal du bruit blanc, la décorrélation des cœfficients d'ondelettes est assurée, même dans le cas d'une mauvaise localisation (en vertu de 4.1.3.1.).

4.4. MAJORATION DE LA LOCALISATION FRÉQUENTIELLE ET LES MOMENTS D'ORDRE 2

La localisation fréquentielle de la fonction $(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)$ dans $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$ est quantifiée par la valeur du terme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

que l'on souhaite la plus proche de 1 possible. L'intégrale peut être estimée (par une somme de Riemann par exemple), mais on peut songer aussi à éviter une estimation grâce à une majoration de l'intégrale. Cette démarche sera intéressante si les majorations calculées encadrent la valeur de l'intégrale de manière relativement précise, ce qui peut se vérifier facilement par la simulation. Il en va de même en ce qui concerne le théorème 4.3.2.2.2. : $\gamma(\xi)$ étant à support compact, on peut estimer $E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}]$ par une somme de Riemann par exemple. Comme pour

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

on peut aussi chercher à majorer

$$E[c_k^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-l)}\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 \gamma(\xi)d\xi.$$

Au paragraphe 4.3.2., nous avons vu que le terme dimensionnant dans la majoration proposée et qui a conduit au théorème 4.3.2.2.2. est :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)d\xi,$$

et on peut donc chercher à majorer ce terme de manière suffisamment précise pour éviter l'estimation de l'intégrale.

A partir du moment où nous cherchons à approcher, par estimation ou majoration, la valeur des intégrales mises en jeu dans les expressions précédentes, le raisonnement ne fera plus intervenir le paramètre N que nous omettrons dans toute la suite, ce qui nous permet donc d'être plus général qu'au paragraphe précédent, et de traiter de filtres miroirs en quadrature quelconques. Nous traitons alors les termes :

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)d\xi$$

Nous rappelons tout d'abord la propriété fondamentale bien connue de deux filtres miroirs en quadrature que voici (cf. [Mey1] et [Mey2]).

4.4.1. Lemme

Soient $M_0(\xi)$ et $M_1(\xi)$ deux filtres miroirs en quadrature. Pour toute fonction f de $L^2([0,2\pi])$, il existe deux fonctions u et v de $L^2([0,2\pi])$, définies de manière unique, telles que

$$f(\xi) = M_0(\xi)\,u(2\xi) + M_1(\xi)\,v(2\xi).$$

Appliquons cette décomposition en prenant successivement $f = m_0$ et $f = m_1$ où m_0 et m_1 sont deux filtres miroirs en quadrature donnés et pour $M_0(\xi) = m_0^S(\xi)$ et $M_1(\xi) = m_1^S(\xi)$. Nous aurons donc $m_0 = a_0 m_0^S + a_1 m_1^S$ et $m_1 = b_0 m_0^S + b_1 m_1^S$ où a_0, a_1, b_0 et b_1 sont π-périodiques. On remarquera que pou ξ élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $a_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}m_0(\xi)$. Comme, m_0 et m_1 sont pairs en tant que Transformées de Fourier de filtres discrets réels, $a_0(\xi)$ est pair aussi et se définit donc entièrement à partir de sa donnée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Puisque les supports de m_0^S et de m_1^S sont disjoints, nous avons :

(1) $|m_0|^2 = |a_0|^2\,|m_0^S|^2 + |a_1|^2\,|m_1^S|^2$

(2) $|m_1|^2 = |b_0|^2\,|m_0^S|^2 + |b_1|^2\,|m_1^S|^2$

D'après (1) et la $p-\pi$-périodicité de a_0 et de a_1, on a aussi :

(3) $|m_0(\xi+\pi)|^2 = |a_0(\xi)|^2\,|m_0^S(\xi+\pi)|^2 + |a_1(\xi)|^2\,|m_1^S(\xi+\pi)|^2$, soit

(4) $|m_1(\xi)|^2 = |a_0(\xi)|^2\,|m_1^S(\xi)|^2 + |a_1(\xi)|^2\,|m_0^S(\xi)|^2$.

La comparaison de (2) et de (4), et la disjonction des supports de m_0^S et de m_1^S, donnent alors :

(5) $|a_0|^2 = |b_1|^2$ et $|a_1|^2 = |b_0|^2$.
La somme des relations (1) et (2), et l'égalité $|m_0|^2 + |m_1|^2 = 2$ donne alors

$$2 = |m_0^S(\xi)|^2[|a_0(\xi)|^2+|b_0(\xi)|^2]+|m_1^S(\xi)|^2\,[|a_1(\xi)|^2+|b_1(\xi)|^2],$$

ce qui, compte–tenu de (5) donne finalement :
(6) $|a_0(\xi)|^2 + |a_1(\xi)|^2 = 1$.
Nous résumerons la décomposition de $|m_\varepsilon(\xi)|^2$ par :
(7) $|m_\varepsilon|^2 = |a_0|^2\,|m_\varepsilon^S|^2 + |a_1|^2\,|m_{1-\varepsilon}^S|^2 \quad \varepsilon \in \{0,1\}$.
Comme nous disposons des relations :

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \prod_{j=1}^{p} |m_{\varepsilon_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2$$

et $\forall \varepsilon \in \{0,1\}, \forall \xi \in \boldsymbol{R}$,

$$|m_\varepsilon(\xi)|^2 = |a_0(\xi)|^2\,|m_\varepsilon^S(\xi)|^2 + |a_1(\xi)|^2\,|m_{1-\varepsilon}^S(\xi)|^2$$

nous avons

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \prod_{j=1}^{p} |m_{\varepsilon_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2 =$$
$$\prod_{j=1}^{p} \Big[|a_0(\xi 2^{j-1})|^2\,|m_{\varepsilon_j}^S(\xi 2^{j-1})|^2$$
$$+|a_1(\xi 2^{j-1})|^2\,|m_{1-\varepsilon_j}^S(\xi 2^{j-1})|^2\Big] \left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2$$

Soient alors les p–uplets $\underline{\theta}_p = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \{0,1\}^p$ et définissons la suite des fonctions $\alpha\theta_j$ de la façon suivante : si $\theta_j = \varepsilon_j$, alors $\alpha\theta_j = a_0$; et si $\theta_j = 1 - \varepsilon_j$, alors $\alpha\theta_j = a_1$.
Nous pouvons alors écrire :

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \sum_{\underline{\theta}_p} \Bigg[\prod_{j=1}^{p} \left|\alpha\theta_j(\xi 2^{j-1})\right|^2$$
$$\prod_{j=1}^{p} \left|m_{\theta_j}^S(\xi 2^{j-1})\right|^2 \left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2\Bigg]$$

En

$$\prod_{j=1}^{p} \left|m_{\theta_j}^S(\xi 2^{j-1})\right|^2 \left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2$$

on reconnaît

$$\left|(F\varphi^{S,\underline{\theta}_p}(\xi)\right|^2 = 2^p \chi_{\Delta^{\underline{\theta}_p}}(\xi).$$

On a donc :

$$\left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2 = \sum_{\underline{\theta}_p} \left[\prod_{j=1}^{p} \left|\alpha\theta_j(\xi 2^{j-1})\right|^2 2^p \chi_{\Delta^{\underline{\theta}_p}}(\xi)\right]$$

Comme les ensembles $\Delta^{\underline{\nu}_p}$ sont symétriques, et que les fonctions $\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2$ et $\left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2$ sont paires, nous définissons les intervalles $\Delta_+^{\underline{\nu}_p} = [n^{\underline{\varepsilon}_p}\frac{\pi}{2^p}, n^{\underline{\varepsilon}_p}\frac{\pi}{2^p} + \frac{\pi}{2^p}]$, de sorte que nous avons :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

Comme

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \sum_{\underline{\theta}^p} \left[\prod_{j=1} p|\alpha\theta_j(\xi 2^{j-1})|^2 2^p X_{\Delta^{\underline{\theta}_p}}(\xi)\right],$$

nous avons aussi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{2^p}{\pi}\int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi$$

Dans le cadre de cette étude quantitative, la suite de l'analyse va s'appuyer aussi sur des hypothèses concernant l'écart entre les filtres m_0, m_1, et les filtres idéaux m_0^S, m_1^S. Nous ferons l'hypothèse suivante : pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe $\delta(\alpha) \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que,
i) pour tout $\xi \in]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}], \frac{1}{2} \leq |a_0(\xi)|^2 \leq 1 - \delta(\alpha)$
ii) pour tout $\xi \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha], 0 \leq |a_1(\xi)|^2 \leq \delta(\alpha)$
Typiquement, d'après l'allure des filtres couramment utilisés (Daubechies, Battle–Lemarié), nous aurons

$$\delta(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}|m_0\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)|^2.$$

Si nous définissons pour tout ξ de $\boldsymbol{R}$ l'intervalle

$$V_\alpha(\xi) =]\xi - \alpha, \xi + \alpha[,$$

les hypothèses précédentes se prolongent par symétrie et π–périodicité de $|a_0(\xi)|^2$ et $1(\xi)|^2$, de sorte que nous aurons, en posant $V_\alpha = \cup_k V_\alpha\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$:

$$(1) \quad \text{si } \xi \in V_\alpha, \frac{1}{2} \leq |a_0(\xi)|^2 \leq 1 - \delta(\alpha)$$

et

$$(2) \quad \text{si } \xi \in \frac{\boldsymbol{R}}{V_\alpha}, 0 \leq |a_1(\xi)|^2 \leq \delta(\alpha)$$

On a alors le résultat suivant qui vient compléter la proposition 2.2.3.

4.4.2. *Proposition*

$\forall p \geq 1, \forall \underline{\nu}_p = (\nu_1 \ldots, \nu_p) \in \{0,1\}^p$,

$$\Delta_+^{\underline{\nu}_p} = \cap_{j=1}^{j=p} \frac{1}{2^{j-1}}\left(\Delta_{\lambda_j(\underline{\nu}_p)}^+ + n^{\underline{\nu}_{j-1}}\pi\right)$$

où

$$\lambda_j(\underline{\nu}_p) = n^{\underline{\nu}_j} - 2n^{\underline{\nu}_j}\ (\lambda_j \in \{0,1\}),$$
$$\forall \lambda \in \{0,1\}, \Delta_\lambda^+ = [\lambda\frac{\pi}{2}, (\lambda+1)\frac{\pi}{2}],$$

et avec la convention $n^{\underline{\nu}_0} = 0$.

La démonstration se fait par récurrence, ne pose pas de difficulté particulière et est donc laissée au lecteur. A chaque $\underline{\nu}_p = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \{0,1\}^p$. Cet unique p–uplet $(\lambda_1(\underline{\nu}_p), \ldots, \lambda_p(\underline{\nu}_p))$ sera noté $\underline{\lambda}(\underline{\nu}_p)$. C'est sans difficulté que l'on montre alors que :

$$(\Delta_\lambda^+ + n\pi) \cap V_\alpha =]\frac{\pi}{2} + n\pi - \alpha, \frac{\pi}{2} + n\pi] \text{ pour } \lambda = 0$$

$$(\Delta_\lambda^+ + n\pi) \cap V_\alpha = [\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi + \alpha] \text{ pour } \lambda = 1$$

Nous définirons alors les ensembles :

$$K_{\lambda,0}^n = (\Delta_\lambda^+ + n\pi) \cap V_\alpha$$

et

$$K_{\lambda,0}^n = (\Delta_\lambda^+ + n\pi) - K_{\lambda,0}^n = (\Delta_\lambda^+ + n\pi) \cap V_\alpha^c$$

On a alors : $(\Delta_\lambda^+ + n\pi) = K_{\lambda,0}^n \cup K_{\lambda,1}^n$, et nous pouvons même expliciter ces ensembles $K_{\lambda,0}^n$ et $K_{\lambda,1}^n$, suivant que $\lambda = 0$ ou que $\lambda = 1$.

$$K_{0,0}^n =]\frac{\pi}{2} + n\pi - \alpha, \frac{\pi}{2} + n\pi] \text{ et } K_{0,1}^n = [n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi - \alpha]$$

$$K_{1,0}^n = [\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi + \alpha[\text{ et } K_{1,1}^n = [\frac{\pi}{2} + n\pi + \alpha, \pi + n\pi]$$

On a alors, $\forall p \geq 1, \forall \underline{\nu}_p = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \{0,1\}^p$,

$$\begin{aligned} \Delta_+^{\underline{\nu}_p} &= \cap_{j=1}^{j=p} \tfrac{1}{2^{j-1}} (\Delta_{\lambda_j(\underline{\nu}_p)}^+ + n^{\underline{\nu}_{j-1}}\pi) \\ &= \cap_{j=1}^{j=p} \left(K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),0}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}} \cup K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),1}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta_+^{\underline{\nu}_p} = \cup_{\underline{\kappa}_p} \left\{ \cap_{j=1}^{j=p} \frac{1}{2^{j-1}} K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),\kappa_j}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}} \right\}$$

lorsque $\underline{\kappa}_p$ décrit $\{0,1\}^p$.

On pose

$$J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p} = \cap_{j=1}^{j=p} \frac{1}{2^{j-1}} K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),\kappa_j}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}$$

et on écrit $\Delta_+^{\underline{\nu}_p} = \cup_{\underline{\kappa}_p} J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}$. Il est aisé de montrer que les $J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}$ sont disjoints 2 à 2.

Comme $\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p} = \cup_{\underline{\kappa}_p} J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}$ et les $J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}$ sont disjoints 2 à 2,

$$\frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi = \sum_{\underline{\kappa}_p} \frac{2^p}{\pi} \int_{J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi$$

Nous poserons :

$J_0(\underline{\kappa}_p) = \{j \in \{1, \ldots, p\} / \kappa_j = 0\}$,

$J_1(\underline{\kappa}_p) = \{j \in \{1, \ldots, p\} / \kappa_j = 1\}$.

On remarquera que le cardinal $|J_1(\underline{\kappa}_p)|$ de $J_1(\underline{\kappa}_p)$ est égal à $|\underline{\kappa}_p| = \sum_{j=1}^p \kappa j$ où $\underline{\kappa}_p = (\kappa_1, \ldots, \kappa_p)$ qui peut encore être interprété comme la distance de Hamming entre $\underline{\kappa}_p$ et le p–uplet nul, tandis que le cardinal $|J_0(\underline{\kappa}_p)|$ de $J_0(\underline{\kappa}_p)$ est égal à $p - |\underline{\kappa}_p|$.

Lorsque j appartient à $J_0(\underline{\kappa}_p)$, $\kappa_j = 0$, $\xi\, 2^{j-1}$ appartient à $K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),0}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}$ et donc à V_α. Il s'ensuit alors que

$$\frac{1}{2} \leq |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 \leq 1 - \delta(\alpha),$$

puis que, pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{p-|\underline{\kappa}_p|} \leq \prod_{j \in J_0(\underline{\kappa}_p)} |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 \leq (1 - \delta(\alpha))^{p-|\underline{\kappa}_p|}$$

Lorsque j appartient à $J_1(\underline{\kappa}_p)$, $\kappa_j = 1$, $\xi\, 2^{j-1}$ appartient à $K_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),1}^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}$ et n'appartient donc pas à V_α. Il s'ensuit alors que $1 - \delta(\alpha) \leq |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 \leq 1$, et pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}$,

$$(1 - \delta(\alpha))^{|\underline{\kappa}_p|} \leq \prod_{j \in J_1(\underline{\kappa}_p)} |a_1(\xi\, 2^{j-1})|^2 \leq 1$$

Avec ces majorations, il vient, pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}$,

$$\frac{1}{2}^{p-|\underline{\kappa}_p|} (1 - \delta(\alpha))^{|\underline{\kappa}_p|} \leq \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 \leq (1 - \delta(\alpha))^{p-|\underline{\kappa}_p|} \leq 1.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi &= \sum_{\underline{\kappa}_p} \int_{J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{\underline{\kappa}_p} (1 - \delta(\alpha))^{p-|\underline{\kappa}_p|} \left| J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p} \right| \end{aligned}$$

où $|J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}|$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble $J^{\underline{\varepsilon}_p\underline{\kappa}_p}$.

De la même façon, nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi &= \sum_{\underline{\kappa}_p} \int_{J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}} \prod_{j=1}^p |a_0(\xi\, 2^{j-1})|^2 d\xi \\ &\geq \frac{2^p}{\pi} \sum_{\underline{\kappa}_p} (\frac{1}{2})^{p-|\underline{\kappa}_p|} (1 - \delta(\alpha))^{|\underline{\kappa}_p|} \left| J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p} \right| \end{aligned}$$

Nous pouvons résumer ces résultats par :

4.4.3. *Proposition*

Si pour $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe $\delta(\alpha) \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que,

i) pour tout $\xi \in]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}], \frac{1}{2} \leq |a_0(\xi)|^2 \leq 1 - \delta(\alpha)$

ii) pour tout $\xi \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha], 0 \leq |a_1(\xi)|^2 \leq \delta(\alpha)$

alors

$$\frac{2^p}{\pi} \sum_{\underline{\kappa}_p} (1 - \delta(\alpha))^{p - |\underline{\kappa}_p|} \left| J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left| (F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 d\xi$$

$$\leq \frac{2^p}{\pi} \sum_{\underline{\kappa}_p} (\frac{1}{2})^{p - |\underline{\kappa}_p|} (1 - \delta(\alpha))^{|\underline{\kappa}_p|} \left| J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p} \right|$$

En pratique, on prendra $\delta(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \left| m_0(\frac{\pi}{2} - \alpha) \right|^2$.

Ce résultat appelle quelques commentaires.

1) On remarquera que lorsque α et $\delta(\alpha)$ tendent vers 0, les bornes proposées tendent vers 1.

2) Cet encadrement de $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left| (F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 d\xi$ se calcule très facilement sur ordinateur, car nous savons exprimer de manière générale les intervalles $K^n_{\lambda,0}$ et $K^n_{\lambda,1}$ et donc nous savons facilement calculer l'intersection de tels intervalles, ce qui permet d'atteindre la valeur de $|J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}|$. Dans le cas où $\underline{\varepsilon}_p$ se réduit au vecteur nul, les remarques suivantes simplifient la tâche du calculateur : pour tout j appartenant à $\{1, \ldots, p\}$, nous aurons $n^{\underline{\varepsilon}_j} = 0$, $\lambda_j(\underline{\varepsilon}_p) = 0$, de sorte que $K^{n^{\underline{\varepsilon}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\varepsilon}_p), \kappa_j} = K^0_{0, \kappa_j}$. Si $\kappa_j = 0$, $K^{n^{\underline{\varepsilon}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\varepsilon}_p), \kappa_j} =]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}]$ et si $\kappa_j = 0$, $K^{n^{\underline{\varepsilon}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\varepsilon}_p), \kappa_j} = [n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi - \alpha]$.

3) Les bornes proposées dépendent de $\underline{\varepsilon}_p$ et ceci laisse supposer (et nous le vérifierons par simulation) que $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left| (F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 d\xi$ sera plus ou moins proche de 1 selon la valeur de $\underline{\varepsilon}_p$. Il existe donc des paquets d'ondelettes privilégiés du point de vue de leur localisation dans les intervalles $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$. De fait, l'intérêt de ce résultat est en fait plus qualitatif que réellement quantitatif : comme nous le verrons au paragraphe 5, les bornes proposées encadrent bien la valeur de l'intégrale que nous estimerons par somme de Riemann, mais restent relativement imprécises; cependant, ces bornes qualifient bien l'influence de la régularité et du p–uplet $\underline{\varepsilon}_p$ sur la localisation $F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p}$ dans $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$. Ce résultat influe directement sur la convergence des cœfficients d'ondelettes vers une séquence blanche en vertu des arguments exposés au paragraphe 4.3.3.

4) Par des techniques de calcul similaires à celles utilisées dans ce paragraphe, on aboutit à une majoration des moments d'ordre 2 des cœfficients d'ondelettes : le calcul en est donné à l'annexe 3. L'intérêt du résultat que nous obtenons est, lui aussi, qualitatif avant tout : il montre encore une fois que le résultat dépend de $\underline{\varepsilon}_p$, mais aussi, et c'est bien naturel, de l'allure du spectre de bruit, par l'intermédiaire des valeurs $\gamma\left(\frac{n\pi}{2^p}\right)$ lorsque n décrit $\{0, \ldots, 2^{p-1}\}$: la convergence des cœfficients d'ondelettes vers une séquence blanche sera par exemple d'autant meilleure que sa mesure spectrale et $F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p}$ sont localisées dans un intervalle $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$.

5) Nous avons estimé la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left| (F\mu^{S, \underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 d\xi$ grâce à un encadrement de cette valeur. Mais nous pouvons aussi estimer cette intégrale par une somme de Riemann. A titre d'exemple et de vérification des résultats précédents nous avons réalisé les calculs suivants à partir de fonctions et de filtres miroirs en quadrature de Battle–Lemarié.

Les figures 1 et 2 présentent respectivement les fonctions d'échelle de Battle–Lemarié pour les régularités 4 et 10. Le tableau 1 donne

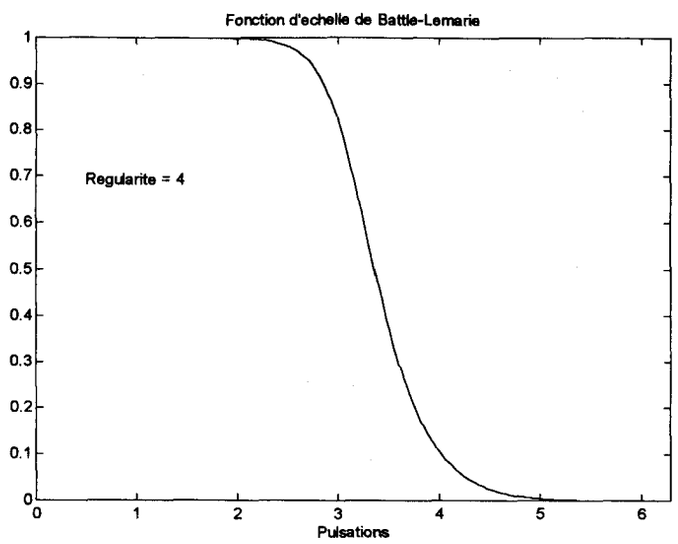


Figure 1

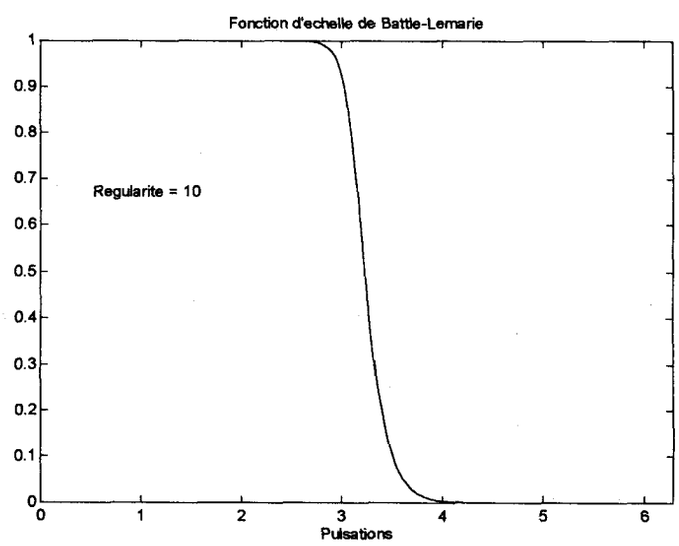


Figure 2

TABLEAU 1

ε_p	Borne Inférieure	Borne Supérieure
0000	0.827924	0.982629
1000	0.827924	0.982629
0100	0.418146	0.843660
1100	0.418146	0.843660
0010	0.470849	0.913144
1010	0.470849	0.913144
0110	0.470849	0.913144
1110	0.470849	0.913144
0001	0.610886	0.947887
1001	0.610886	0.947887
0101	0.526688	0.947312
1101	0.526688	0.947312
0011	0.610886	0.947887
1011	0.610886	0.947887
0111	0.610886	0.947887
1111	0.610886	0.947887

les bornes de l'intégrale $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}} \left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$ pour tous les $\underline{\varepsilon}_p$ possibles, pour un niveau de décomposition égal à 4 ($p = 4$), en prenant, pour borne inférieure de l'intégrale :

$$\sup\left\{\frac{2^p}{\pi}\sum_{\underline{\kappa}_p}(1-\delta(\alpha))^{p-|\underline{\kappa}_p|}\left|J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}\right|/\alpha < \frac{1}{2},\right.$$
$$\left.\delta(\alpha) = 1-\frac{1}{2}|m_0(\frac{\pi}{2}-\alpha)|^2\right\}$$

pour borne supérieure de l'intégrale

$$\inf\left\{\frac{2^p}{\pi}\sum_{\underline{\kappa}_p}(\frac{1}{2})^{p-|\underline{\kappa}_p|}(1-\delta(\alpha))^{|\underline{\kappa}_p|}\left|J^{\underline{\varepsilon}_p,\underline{\kappa}_p}\right|/\alpha < \frac{1}{2},\right.$$
$$\left.\delta(\alpha) = 1-\frac{1}{2}|m_0(\frac{\pi}{2}-\alpha)|^2\right\}$$

Les figures 3, 4, 5 et 6 présentent respectivement les fonctions $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ pour différentes valeurs de $\underline{\varepsilon}_p$, en ce qui concerne la régularité 4. Sur ces figures sont reportées les valeurs de l'intervalle $\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}$ et de l'intégrale estimée par somme de Riemann. Ces figures permettent de constater la validité de l'encadrement donné au tableau 1, la différente localisation que l'on obtient suivant la valeur de $\underline{\varepsilon}_p$, confirmée par la valeur estimée de l'intégrale et aussi la forme elle-même de la fonction $F\mu^{\underline{\varepsilon}_p}$. Ces différentes localisations suivent les résultats récapitulés au tableau 1 : les $\underline{\varepsilon}_p$ pour lesquels la borne inférieure et la borne supérieure s'éloignent de 1 correspondent à des paquets d'ondelettes effectivement mal localisés, alors que les $\underline{\varepsilon}_p$ pour lesquels les bornes données dans le tableau 1 sont relativement proches de 1 correspondent à des fonctions $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ effectivement bien localisées dans $\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}$. L'analyse

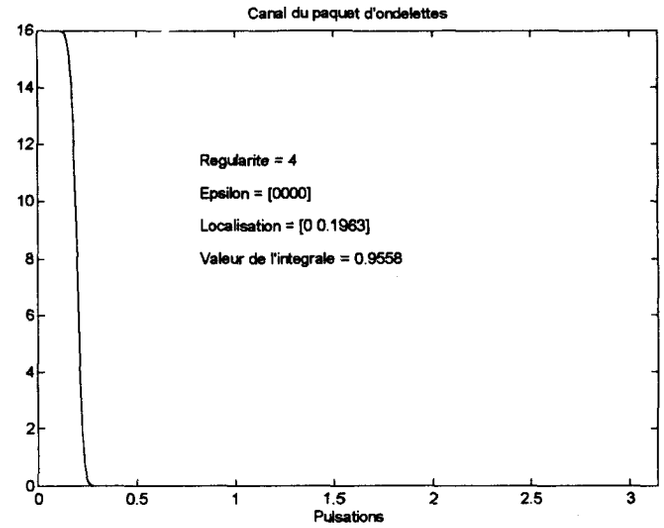


Figure 3

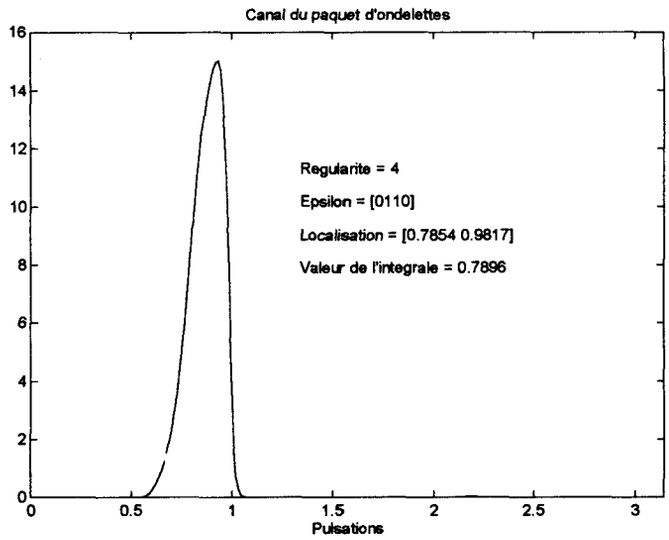


Figure 4

du tableau 1 permet donc de connaître les $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ les mieux localisés sans avoir recours à l'estimation de l'intégrale par somme de Riemann.

Les figures 7 à 10 et le tableau 2 sont les équivalents des figures 3 à 6 et du tableau 1, pour la régularité 10. On constate toujours des estimées de la localisation différentes suivant les $\underline{\varepsilon}_p$. Cependant, dans l'ensemble, la localisation des fonctions $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ dans les intervalles $\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}$ est meilleures grâce à la plus forte régularité.

5. Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons tout d'abord justifié mathématiquement la notion de décomposition de processus stationnaires du

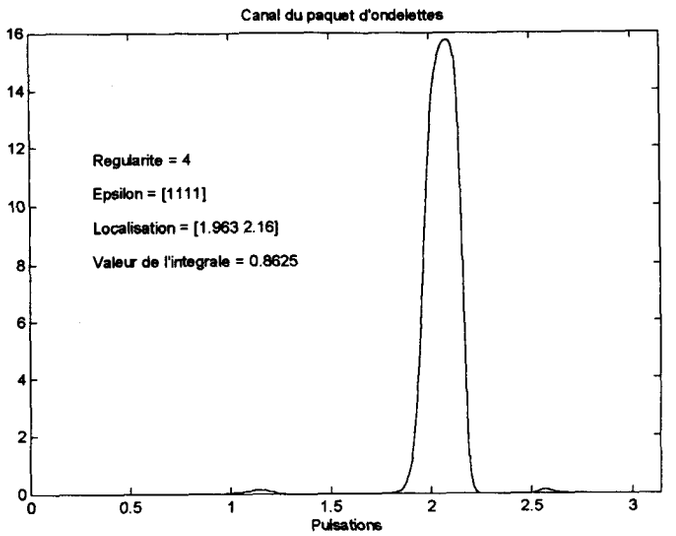


Figure 5

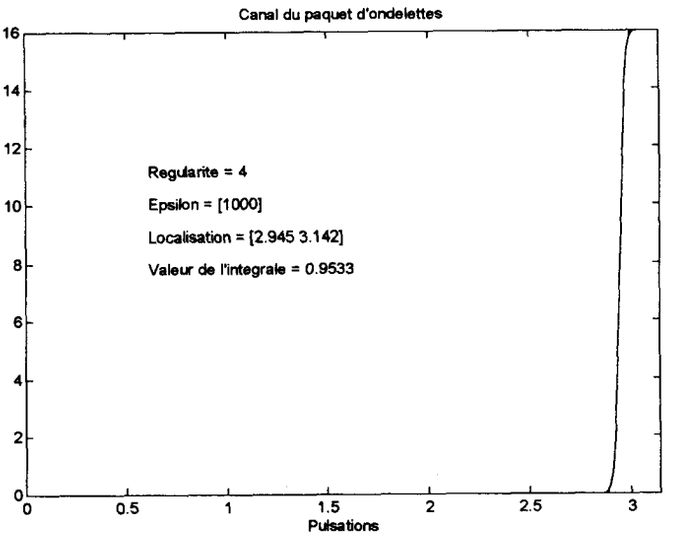


Figure 6

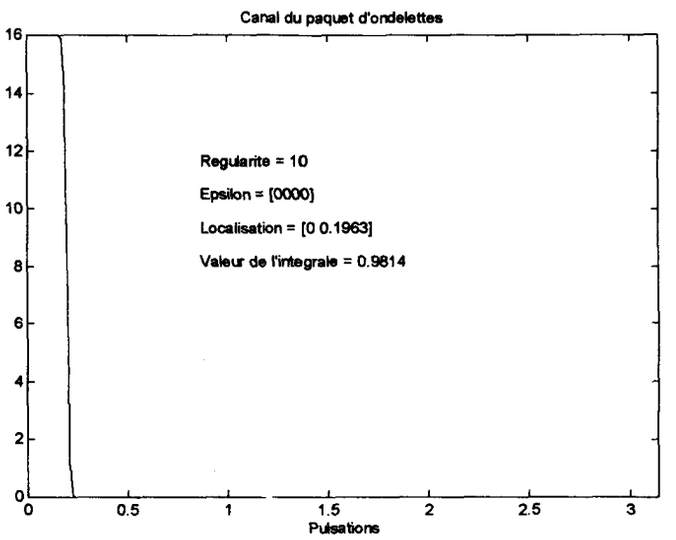


Figure 7

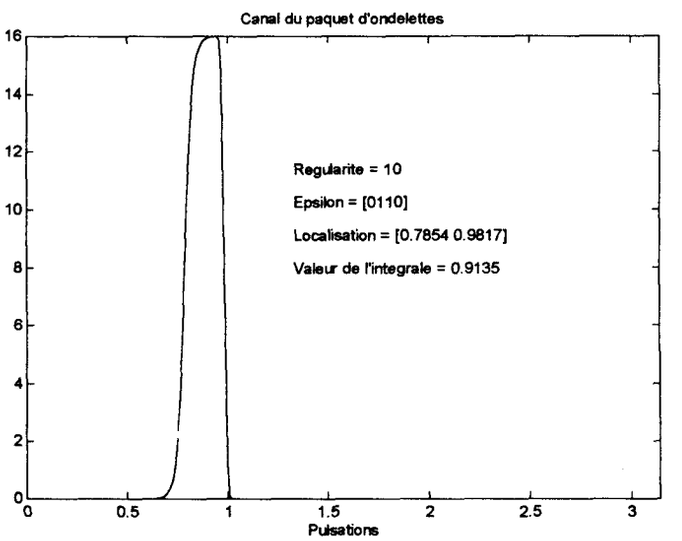


Figure 8

second ordre selon une arborescence type paquets d'ondelettes, moyennant certaines hypothèses peu restrictives en pratique. Les cœfficients d'ondelettes de tels processus sont des variables aléatoires dont nous avons donné l'expression théorique des moments d'ordre 1 et 2, puis étudié le comportement asymptotique. Lorsque le processus est au départ à échantillons décorrélés et centrés (processus blanc), les cœfficients d'ondelettes forment eux–mêmes des séquences blanches. Lorsque le processus n'est pas un processus blanc, il apparaît alors que les séquences de cœfficients d'ondelettes tendent vers des séquences blanches avec le niveau de décomposition et la régularité des filtres, mais ces deux paramètres ne doivent et ne peuvent pas évoluer indépendamment l'un de l'autre, sauf dans certains cas particuliers comme ceux mis en évidence au paragraphe 4.1.3. pour lesquels il y a convergence vers une séquence blanche indépendamment de la régularité. Le fait que les séquences de cœfficients d'ondelettes issues d'une arborescence type paquets d'ondelettes tendent vers des séquences blanches est a priori un résultat très intéressant, notamment en traitement du signal, où le modèle du bruit blanc est souvent celui utilisé, car il est commode pour les calculs théoriques et conduit à des traitements relativement simples, un des exemples les plus marquants étant le traitement par filtre adapté. Cependant, les résultats que nous avons obtenus doivent pondérer la portée du résultat en ce qui concerne la décomposition générale en paquets d'ondelettes :

1 – la décomposition en paquets d'ondelettes conduit à des séquences « quasi–blanches » mais pas de manière identique pour tous les paquets d'ondelettes, et plus précisément suivant la

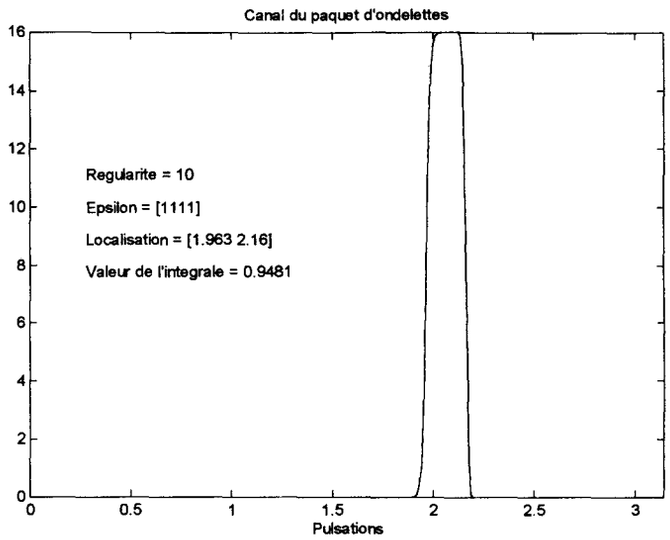


Figure 9

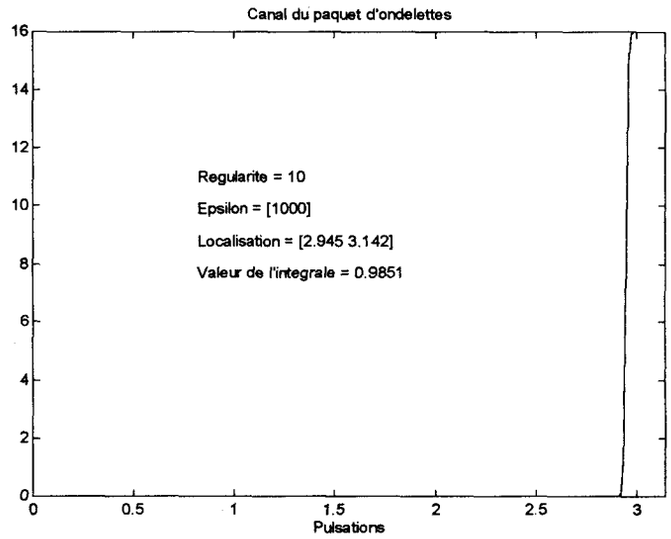


Figure 10

TABLEAU 2

ε_p	Borne Inférieure	Borne Supérieure
0000	0.917129	0.993041
1000	0.917129	0.993041
0100	0.559914	0.937367
1100	0.559914	0.937367
0010	0.703431	0.965204
1010	0.703431	0.965204
0110	0.703431	0.965204
1110	0.703431	0.965204
0001	0.797823	0.979122
1001	0.797823	0.979122
0101	0.797823	0.979122
1101	0.797823	0.979122
0011	0.797823	0.979122
1011	0.797823	0.979122
0111	0.797823	0.979122
1111	0.797823	0.979122

séquence de filtres miroirs en quadrature utilisés. Ceci provient du fait que la valeur des moments d'ordre 2 est liée à la localisation fréquentielle des paquets d'ondelettes qui dépend de la séquence de filtre utilisée pour analyser le signal : certaines de ces séquences privilégient la localisation, d'autres non. C'est en accroissant la régularité des filtres mis en jeu que l'on peut accroître la localisation des paquets d'ondelettes, mais il existe toujours des « canaux » privilégiés.

2 – la valeur des moments d'ordre 2 dépend évidemment de l'allure de la densité spectrale du bruit (fonction $\gamma(\xi)$). Deux cas extrêmes se présentent : soit la fonction $\gamma(\xi)$ est constante (cas du bruit blanc) et alors la décomposition en paquets d'ondelettes conduit à des séquences blanches, sans même faire tendre le niveau de décomposition ou la régularité vers l'infini, soit la fonction $\gamma(\xi)$ est très bien localisée dans un intervalle $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$, constante dans cet intervalle, auquel cas, les moments d'ordre 2 sont directement liés à la localisation de la fonction $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$, et suivant que $\underline{\varepsilon}_p$ privilégie ou non la localisation de $F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}$ dans $\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}$, suivant la régularité, la séquence pourra être plus ou moins considérée comme « blanche ». Entre ces deux extrêmes qui théoriquement conduisent aux meilleurs résultats, tout est possible, et il faut, conformément au théorème 4.3.2.2.2., augmenter le niveau de décomposition, puis la régularité, ce qui peut conduire dans de nombreux cas à des régularités trop élevées pour représenter un réel intérêt pratique. Obtenir des séquences blanches ou quasi–blanches issues de la décomposition en paquets d'ondelettes de processus aléatoires et stationnaires, est donc possible théoriquement, mais difficile pratiquement, suivant le type de bruit à traiter.

Bien que moins général que le théorème 4.3.2.2.2., le résultat du théorème 4.3.1.2. nous semble plus intéressant car il y a convergence vers des séquences blanches, **indépendamment de la régularité**. Ce résultat conduit à des algorithmes de traitements permettant des blanchiements locaux, au prix d'une modulation. L'idée est alors la suivante : pour étudier le spectre du signal au voisinage d'une fréquence ξ_0, nous proposons de moduler ce signal en le multipliant par $e^{-i\xi_0 t}$, et de le filtrer de manière à permettre la décomposition en ondelettes du signal obtenu suivant l'algorithme de Mallat. Si on choisit plusieurs fréquences ξ_0, l'orthogonalité est peut–être perdue, mais en contre–partie, on échappe au cadre dyalique imposé par les paquets d'ondelettes, et de plus, le théorème 4.3.1.2. s'applique (pas d'intervention de la régularité pour faire tendre les cœfficients de décomposition vers une séquence blanche). Ce qui nous conduit à l'utilisation d'un formalisme proche de celui des atomes temps–fréquence et à l'élaboration de résultats du même type que ceux développés ici. Cet aspect de la question fait l'objet d'études actuelles et conduira à une prochaine publication.

6. Annexes

A.1. SPLITTING LEMMA

Splitting Lemma : Soit $U = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^p k}\,\mu / k \in \mathbb{Z}\rangle$ un espace d'interpolation de pas 2^p dont $(\tau_{2^p k}\,\mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert. Soient 2 filtres miroirs en quadrature $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$, de réponses impulsionnelles respectives $h_0(n)$ et $h_1(n)$.
Soient $\mu^0 = \sum_n h_0(n)(\tau_{2^p n}\,\mu)$ et $\mu^1 = \sum_n h_1(n)(\tau_{2^p n}\,\mu)$.
Alors $(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des bases de Hilbert des espaces d'interpolation de pas 2^{p+1}.

$$U^0 = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0 / k \in Z\rangle$$

et

$$U^1 = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1 / k \in Z\rangle$$

qui sont tels que $U = U^0 \oplus_\perp U^1$.

Preuve :

Soit $\theta = C^p\mu$, où C est l'opérateur de contraction.
La transformée de Fourier de θ est

$$\widehat{\theta}(\xi) = 2^{-\frac{p}{2}}(F\mu)(2^{-p\xi}) = (D^pF\mu)(\xi),$$

où D est l'opérateur de dilatation.
$(\tau_k\theta)_k$ est une famille orthonormale.

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l} = \langle \tau_k\theta|\tau_l\theta\rangle &= \langle \tau_k C^m\mu|\tau_l C^m\mu\rangle \\ &= \langle C^m\tau_{2^m k}\mu|C^m\tau_{2^m l}\mu\rangle\end{aligned}$$

(propriétés des opérateurs de contration et de retard).
Donc $\Delta_{k,l} = \langle \tau_{2^m k}\mu|\tau_{2^m l}\mu\rangle$ car C^m est une isométrie. Comme $(\tau_2\, p_k\mu)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une base de Hilbert de U, $\Delta_{k,1} = \delta_{k,l}$.
$(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont des familles orthonormales
Nous calculons $\Delta_{k,l} = \langle \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0|\tau_{2^{p+1}1}\,\mu^0\rangle$. En passant dans le domaine de Fourier, grâce à l'égalité de Parseval, il vient

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2^{p+1}(k-l)}|(F\mu^0)(\xi)|^2 d\xi.$$

Comme

$$\mu^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)(\tau_{2^p n}\,\mu),$$

on a $F\mu^0(\xi) = m_0(\xi 2^p)F\mu(\xi)$, et

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2^{p+1}(k-l)}|m_0(\xi 2^p)|^2\,|F\mu(\xi)|^2 d\xi.$$

Après changement de variable, on obtient

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2(k-l)}2^{-p}|m_0(\xi)|^2\,|F\mu(2^{-p}\xi)|^2 d\xi$$

Étant donné l'égalité $\widehat{\theta}(\xi) = 2^{-\frac{p}{2}}(F\mu)(2^{-p}\xi)$, on obtient successivement

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2\,|F\theta(\xi)|^2 d\xi$$

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l} &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_n \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2\,|F\theta(\xi)|^2 d\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_n \int_0^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2\,|F\theta(\xi+2\pi n)|^2 d\xi\end{aligned}$$

Finalement

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2 \sum_n |F\theta(\xi+2\pi n)|^2 d\xi$$

Comme $(\tau_k\,\theta)_k$ est orthonormale, on dispose de l'égalité $\sum_n |F\theta(\xi+2n\pi)|^2 = 1\ (p.p)$, d'où résulte

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l} &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \tfrac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Par changement de variable dans le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta_{k,l} &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}|m_0(\xi+\pi)|^2 d\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)}\left[|m_0(\xi)|^2 d\xi + |m_0(\xi+\pi)^2\right] d\xi \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} d\xi \\ &\quad (\text{car } |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = 2) \\ &= \delta_{k,1} \quad \text{d'où le résultat.}\end{aligned}$$

De la même manière, à condition de remplacer m_0 par m_1, on démontre que $(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.
Si $U^0 = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^{p+1}k}\mu^0 / k \in \mathbb{Z}\rangle$
et $U^1 = \mathrm{Clos}_{L^2(R)}\langle \tau_{2^{p+1}k}\mu^1 / k \in \mathbb{Z}\rangle$, $U^0 \perp U^1$.
On calcule $\Delta_{k,1} = \langle \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0|\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1\rangle$.

Comme précédemment, il vient

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2^{p+1}(k-l)} (F\mu^0)(\xi)\overline{(F\mu^1)(\xi)} d\xi.$$

Des égalités $\mu^0 = \sum_n h_0(n)(\tau_{2^p n}\mu)$ et $\mu^1 = \sum_n h_1(n)(\tau_{2^p n}\mu)$, il suit que

$$F\mu^0(\xi) = m_0(\xi 2^p) F\mu(\xi) \text{ et } F\mu^1(\xi) = m_1(\xi 2^p) F\mu(\xi).$$

On obtient

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2^{p+1}(k-l)} m_0(\xi 2^p)\overline{m_1(\xi 2^p)}\, |F(\mu)(\xi)|^2 d\xi,$$

et après changement de variable,

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} 2^{-p} \left|\widehat{\mu}(2^{-p}\xi)\right|^2 d\xi.$$

Comme

$$\begin{aligned} \widehat{\theta}(\xi) &= 2^{-\frac{p}{2}} (F\mu)(2^{-p}\xi) \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} |F\theta(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

la relation $\sum_n |F\theta(\xi + 2n\pi)|^2 = 1$ $(p.p)$ permet d'aboutir, par le procédé précédent, à :

$$\Delta_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} d\xi.$$

On écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{k,l} &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} d\xi \\ &\quad + \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

Par changement de variable dans le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta_{k,l} &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} d\xi \\ &\quad + \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} m_0(\xi)\overline{m_1(\xi+\pi)} d\xi \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-i\xi 2(k-l)} \\ &\qquad \left[m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} \right] d\xi = 0 \end{aligned}$$

(car $m_0(\xi)\overline{m_1(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{m_1(\xi+\pi)} = 0$)

On a la décomposition en somme directe orthogonale :

$$U = U^0 \oplus_\perp U^1.$$

$U^0 \oplus_\perp U^1 \subset U$ est évident. Reste la réciproque. Il suffit de montrer une telle décomposition pour μ : si

$$\mu = \sum_k c_k(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0) + \sum_k d_k(\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1),$$

alors, pour $f = \sum_n a_n\, \tau_{2^p n}\, \mu \in U$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f &= \sum_n a_n \left[\sum_k c_k(\tau_{2^p(2k+n)}\,\mu^0) \right] \\ &\quad + \sum_k a_n \left[\sum_k d_k\, \tau_{2^p(2k+n)}\,\mu^1 \right], \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f \in U^0 \oplus_\perp U^1$.

Montrons donc que μ est exactement égale à sa projection $P\mu$ sur $U^0 \oplus_\perp U^1$.

$$\begin{aligned} P\mu &= \sum_k \langle \mu | \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0 \rangle (\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0) \\ &\quad + \sum_k \langle \mu | \tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1 \rangle (\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^1) \end{aligned}$$

L'égalité $\mu^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)(\tau_{2^p n}\,\mu)$ implique

$$\tau_{2^{p+1}k}\,\mu^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)(\tau_{2^p(n+2k)}\,\mu).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \langle \mu | \tau_{2^{p+1}k}\mu^0 \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) \langle \mu | \tau_{2^p(n+2k)}\mu \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)\delta_{0,n+2k} \end{aligned}$$

puisque $(\tau_{2^p k}\mu)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale. Finalement, on a :

$$\langle \mu | \tau_{2^{p+1}k}\mu^0 \rangle = h_0(-2k).$$

Le même type de calcul conduit à $\langle \mu | \tau_{2^{p+1}k}\mu^1 \rangle = h_1(-2k)$. Ainsi, $P\mu$ vaut

$$P\mu = \sum_k h_0(-2k)(\tau_{2^{p+1}k}\mu^0) + \sum_k h_1(-2k)(\tau_{2^{p+1}k}\mu^1).$$

Les relations

$$\mu^0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)(\tau_{2^p n}\mu) \text{ et } \mu^1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)(\tau_{2^p n}\mu)$$

nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} P\mu &= \sum_{n,k} h_0(-2k)h_0(n)(\tau_{2^p(n+2k)}\mu) \\ &\quad + \sum_{n,k} h_1(-2k)h_1(n)(\tau_{2^p(n+2k)}\mu) \end{aligned}$$

En posant $j = n + 2k$ dans les deux termes, il vient :

$$\begin{aligned} P\mu &= \sum_j \Big[\sum_k (h_0(-2k)h_0(j-2k) \\ &\quad + h_1(-2k)h_1(j-2k))\Big] (\tau_{2^p j}\mu) \\ &= \sum_j A_j(\tau_{2^p j}\mu) \end{aligned}$$

où $A_j = \sum_k (h_0(-2k)h_0(j-2k) + h_1(-2k)h_1(j-2k))$.

Or, $h_0(n) = \langle D\varphi|\tau_n\varphi\rangle$, où φ est la fonction d'échelle associée, donc : $h_0(-2k) = \langle D\varphi|\tau_{-2k}\varphi\rangle = \langle \tau_{2k}D\varphi|\varphi\rangle = \langle D\tau_k\varphi|\varphi\rangle$ et $h_0(j-2k) = \langle D\varphi|\tau_{j-2k}\varphi\rangle = \langle \tau_{2k}D\varphi|\tau_j\varphi\rangle = \langle D\tau_k\varphi|\tau_j\varphi\rangle$.
De même, $h_1(k) = \langle D\Psi|\tau_k\varphi\rangle$, où Ψ est l'ondelette orthogonale, donc

$$\begin{aligned} h_1(-2k) &= \langle D\Psi|\tau_{-2k}\varphi\rangle = \langle D\tau_k\Psi|\varphi\rangle, h_1(j-2k) \\ h_1(j-2k) &= \langle D\Psi|\tau_{j-2k}\varphi\rangle = \langle D\tau_k\Psi|\tau_j\varphi\rangle. \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} A_j &= \sum_k (\langle D\tau_k\varphi|\varphi\rangle\langle D\tau_k\varphi|\tau_j\varphi\rangle + \langle D\tau_k\Psi|\varphi\rangle\langle D\tau_k\Psi|\tau_j\varphi\rangle) \\ &= \sum_k \Big(\Big\langle \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi|\tau_j\varphi\Big\rangle + \Big\langle \langle\varphi|D\tau_k\Psi\rangle\, D\tau_k\Psi|\tau_j\varphi\Big\rangle\Big) \\ &= \Big\langle \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi\Big|\tau_j\varphi\Big\rangle + \Big\langle \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\Psi\rangle\, D\tau_k\Psi\Big|\tau_j\varphi\Big\rangle \\ &= \Big\langle \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi + \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\Psi\rangle\, D\tau_k\Psi\Big|\tau_j\varphi\Big\rangle \end{aligned}$$

On reconnaît en $\sum_k \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi$ la projection de φ sur V_1. De même, on reconnaît en $\sum_k \langle\Psi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\Psi$ la projection de φ sur W_1.
On a ainsi obtenu l'égalité

$$\sum_k \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi + \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\Psi\rangle\, D\tau_k\Psi = \varphi,$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} A_j &= \Big\langle \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\varphi\rangle\, D\tau_k\varphi + \sum_k \langle\varphi|D\tau_k\Psi\rangle\, D\tau_k\Psi\Big|\tau_j\varphi\Big\rangle \\ &= \langle\varphi|\tau_j\varphi\rangle = \delta_{j,0}, \end{aligned}$$

et finalement,

$$P\mu = \sum_j A_j(\tau_{2^p j}\mu) = \sum_j \delta_{j,0}(\tau_{2^p j}\mu) = \mu.$$

D'où le résultat.

A.2. Convergence des filtres de Battle–Lemarié vers le filtre idéal

Cette annexe 2 est proposée pour la commodité du lecteur, quoique le résultat soit déjà présenté dans différentes publications dont l'article de P.G. Lemarié (cf. [Lem]). Un résultat équivalent en ce qui concerne les filtres de Daubechies s'obtient aussi aisément.

Une fonction d'échelle de Battle–Lemarié de régularité m, a pour Transformée de Fourier :

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^m} \frac{1}{\sqrt{\sum_n \frac{1}{(\xi+2n\pi)^{2m}}}}$$

Le filtre d'échelle associé vaut alors :

$$m_0(\xi) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\sum_n \frac{1}{(\xi+2n\pi)^{2m}}}{\sum_n \frac{1}{(\xi+n\pi)^{2m}}}}$$

Nous poserons $\underline{m}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0(\xi)$ et nous montrons :

$$\lim_{m\to+\infty} \underline{m}_0(\omega) = \underline{m}_0^S(\omega) \text{ où } \underline{m}_0^S(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m_0^S(\xi)$$

Preuve :

$$\underline{m}_0(\xi) = \sqrt{\frac{\sum_n \frac{1}{(\xi+2n\pi)^{2m}}}{\sum_n \frac{1}{(\xi+n\pi)^{2m}}}}.$$

Nous savons déjà que $\underline{m}_0(0) = 1$, car la Transformée de Fourier de la fonction d'échelle associée vaut toujours 1 en 0. On fera donc l'étude pour $\xi \neq \pi$. D'autre part, $\underline{m}_0(\xi)$ est symétrique et 2π–périodique. Ces remarques permettent de limiter l'étude à $]0, \pi[$. Remarquons aussi, que la convergence ne peut être que presque partout, puisque $\underline{m}_0(\pi/2) = 1/2$, alors que $\underline{m}_0^S(\pi/2)$ vaut 1 ou 0 suivant le choix que l'on en fait.

Un calcul aisé amène tout d'abord à :

$$|\underline{m}_0(\xi)|^2 = \frac{\sum_n \frac{1}{(1+\frac{2n\pi}{\xi})^{2m}}}{\sum_n \frac{1}{(1+\frac{n\pi}{\xi})^{2m}}},$$

puisque $\xi \neq 0$.

Nous poserons

$$N_m(\xi) = \sum_n \frac{1}{(1+\frac{2n\pi}{\xi})^{2m}}, \text{ et } D_m(\xi) = \sum_n \frac{1}{(1+\frac{n\pi}{\xi})^{2m}}$$

$$N_m(\xi) = 1 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(1+\frac{2n\pi}{\xi})^{2m}}$$

Soit $I_m(\xi) = 1 + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(1+\frac{2n\pi}{\xi})^{2m}}$

$N_m(\xi) = 1 + I_m(\xi)$.

Soit $0 < \xi < a < \pi$,

$$|\frac{2n\pi}{\xi}| = |n| \left|\frac{2\pi}{\xi}\right| \geq |n| \frac{2\pi}{a}$$

or $\frac{2\pi}{a} = 2 + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, donc $|\frac{2n\pi}{\xi}| \geq |n|(2+\varepsilon)$.

$$\left|\frac{2n\pi}{\xi} + 1\right| \geq \left|\frac{2n\pi}{\xi}\right| - 1 \geq |n|\,(2+\varepsilon) - 1.$$

Donc $|I_m(\xi)| \leq 2 \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}}$.

Soit $N_\varepsilon = \sup\{1, 1/\varepsilon\}$, alors, pour $n \geq N_\varepsilon$, $n(2+\varepsilon) - 1 \geq 2n$, donc

$$\frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} \leq \frac{1}{(2n)^{2m}}$$

On écrit que :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} = \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{(n(2+\varepsilon-1)^{2m}},$$

ce qui conduit alors à :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} \leq \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2m}}$$

Immédiatement, $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{(n(2+\varepsilon)-1)^{2m}} = 0$.

D'autre part, grâce à l'allure de la fonction $\frac{1}{(2x)^{2m}}$, nous avons :

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^{2m}} \leq \int_{N_\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{(2x)^{2m}} dx = \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{(2m-1)N_\varepsilon^{2m-1}}.$$

Comme nous avons choisi $N_\varepsilon \geq 1$,

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2^{2m}} \frac{1}{(2m-1)N_\varepsilon^{2m-1}} = 0$$

On en déduit donc que $\lim_{m\to+\infty} I_m(\xi) = 0$, pour $\xi \in]0, \pi[$, et donc :

$$\lim_{m\to+\infty} N_m(\xi) = 1, \quad \text{pour } \xi \in]0, \pi[, \tag{A.1}$$

Étudions maintenant $D_m(\xi) = \sum_n \frac{1}{(1+\frac{n\pi}{\xi})^{2m}}$.

Pour $\xi \in]0, \pi/2[$, il suffit de poser $\Omega = 2\xi$, et il vient : $D_m(\xi) = N_m(2\Omega)$, de sorte que :

$$\text{Pour} \quad \xi \in]0, \pi/2[, \lim D_m(\xi) = 1 \tag{A.2}$$

Maintenant, soit $\xi \in]\pi/2, \pi[$, et posons $\pi/2 < \xi \leq a \leq \pi$. Il vient

$$D_m(\xi) = \frac{1}{(1-\frac{\pi}{\xi})^{2m}} + 1 + \frac{1}{(1+\frac{\pi}{\xi})^{2m}} + \sum_{|n|\geq 2} \frac{1}{(1+\frac{n\pi}{\xi})^{2m}}$$

Commençons par le troisième terme : $|\frac{n\pi}{\xi}| \geq |n|\frac{\pi}{a}$. Or, $\frac{\pi}{a} > 1$ donc $\frac{\pi}{a} = 1 + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, donc $|\frac{n\pi}{\xi}| \geq |n|(1+\varepsilon)$

$$\left|\frac{n\pi}{\xi} + 1\right| \geq \left|\frac{n\pi}{\xi}\right| - 1 \geq |n|(1+\varepsilon) - 1$$

Donc

$$\sum_{|n|\geq 2} \frac{1}{(1+\frac{n\pi}{\xi})^{2m}} \leq 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n(1+\varepsilon)-1)^{2m}}$$

Soit $N_\varepsilon = \sup\{2, 1/\varepsilon\}$, alors, pour $n \geq N_\varepsilon$, $n(1+\varepsilon) - 1 \geq n$, donc $\frac{1}{(n(1+\varepsilon)-1)^{2m}} \leq \frac{1}{n^{2m}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n(1+\varepsilon)-1)^{2m}} = \sum_{n=2}^{N_\varepsilon} \frac{1}{(n(1+\varepsilon)-1)^{2m}} + \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$$

De manière immédiate, $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=2}^{N_\varepsilon} \frac{1}{(n(1+\varepsilon)-1)^{2m}} = 0$.

D'autre part, grâce à l'allure de la fonction $\frac{1}{x^{2m}}$, il vient :

$$\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} \leq \int_{N_\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m}} dx = \frac{1}{(2m-1)N_\varepsilon^{2m-1}}.$$

Comme

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(2m-1)N_\varepsilon^{2m-1}} = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = 0$$

$$\frac{1}{(1+\frac{\pi}{2})^{2m}} \leq \frac{1}{3^{2m}}, \quad \text{car} \quad \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon \quad \text{donc}$$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{\pi}{\xi}^{2m}} = 0$$

Enfin, comme $\omega \leq a$, nous aurons :

$$\frac{1}{(1-\frac{\pi}{a})^{2m}} \leq \frac{1}{(1-\frac{\pi}{\xi})^{2m}}.$$

Or $\frac{\pi}{2} < a$, donc $\varepsilon < \frac{\pi}{a} - 1 < 1$, et donc $\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(1-\frac{\pi}{a})^{2m}} = +\infty$, ce qui induit que $\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{(1-\frac{\pi}{\xi})^{2m}} = +\infty$.

En récapitulant tous ces résultats, nous avons :

$$\text{Pour} \quad \xi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[, \lim D_m(\xi) = +\infty \tag{A.3}$$

En appliquant les résultats (A.1), (A.2), (A.3), on en déduit le résultat annoncé.

A.3. Majoration de la corrélation des cœfficients d'ondelettes

La fonction $\gamma(\xi)$ étant à support compact dans $[-\pi, \pi]$, on peut estimer $E[c_p^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}]$ par une somme de Riemann par exemple. Comme pour

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta^{\underline{\varepsilon}_p}}\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi,$$

on peut aussi chercher à majorer

$$E[c_p^{\underline{\varepsilon}_p}\overline{c_l^{\underline{\varepsilon}_p}}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p(k-l)}\left|F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2\gamma(\xi)\,d\xi.$$

Or au paragraphe 4.3.2., nous avons vu que le terme dimensionnant dans la majoration proposée et qui a conduit au théorème 4.3.2.2.2. est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu_N^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)\,d\xi.$$

et on peut donc chercher à majorer ce terme de manière suffisamment précise pour éviter l'estimation de l'intégrale. Nous omettrons dans la suite le paramètre N et cherchons à majorer le terme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)\,d\xi.$$

Nous écrivons

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k}\left(\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right)\gamma_p(\xi)\,d\xi\right| \leq S^{\underline{\varepsilon}_p}$$

avec

$$S^{\underline{\varepsilon}_p} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left||(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 - \left|(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2\right|\gamma_p(\xi)\,d\xi$$

Comme

$$\gamma_p(\xi) = \sum_{\underline{\nu}_p}\gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right)X_{\Delta^{\underline{\nu}_p}}(\xi)$$

où $\underline{\nu}_p = (\nu_1, \ldots, \nu_p) \in \{0,1\}^p$, nous pouvons encore écrire

$$S^{\underline{\varepsilon}_p} = \sum_{\underline{\nu}_p}\gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta^{\underline{\nu}_p}}\left||(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 - |(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2\right|\gamma_p(\xi)\,d\xi$$

En faisant intervenir les intervalles $\Delta_+^{\underline{\nu}_p} = [n^{\underline{\varepsilon}_p}\frac{\pi}{2^p}, n^{\underline{\varepsilon}_p}\frac{\pi}{2^p} + \frac{\pi}{2^p}]$, on obtient :

$$S^{\underline{\varepsilon}_p} = \sum_{\underline{\nu}_p}\gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right)\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_+^{\underline{\nu}_p}}\left||(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 - |(F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2\right|\gamma_p(\xi)\,d\xi$$

Comme $\left|(F\varphi^{S,\underline{\nu}_p})(\xi)\right|^2 = 2^p X_{\Delta^{\underline{\nu}_p}}(\xi)$, il vient finalement :

$$S^{\underline{\varepsilon}_p} = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right)\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}}\left||(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 - 2^p\right|d\xi + \sum_{\underline{\nu}\neq\underline{\varepsilon}_p}\gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right)\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_+^{\underline{\nu}_p}}\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 d\xi$$

Or

$$\left|(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \prod_{j=1}^{p}\left|m_{\varepsilon_j}(\xi 2^{j-1})\right|^2\left|(F\varphi^S(\xi)\right|^2$$

et $\forall\varepsilon \in \{0,1\}, \forall\xi \in \boldsymbol{R}$,

$$|m_\varepsilon(\xi)|^2 = |a_0(\xi)|^2|m_\varepsilon^S(\xi)|^2 + |a_1(\xi)|^2|m_{1-\varepsilon}^S(\xi)|^2.$$

Nous en déduisons alors :

$$\prod_{j=1}^{p}\left|m_{\varepsilon_j}(\xi 2^{j-1})\right|^2 = \prod_{j=1}^{p}\left[\left|a_0(\xi 2^{j-1})\right|^2\left|m_{\varepsilon_j}^S(\xi 2^{j-1})\right|^2 + \left|a_1(\xi 2^{j-1})\right|^2\left|m_{1-\varepsilon_j}^S(\xi 2^{j-1})\right|^2\right]$$

Soient alors les p–uplets $\underline{\theta}_p = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \{0,1\}^p$ et définissons la suite des fonctions α_{θ_j} de la façon suivante : si$\theta_j = \varepsilon_j$, alors $\alpha_{\theta_j} = a_0$; et si $\theta_j = 1 - \varepsilon_j$, alors $\alpha_{\theta_j} = a_1$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)\right|^2 = \sum_{\underline{\theta}_p}\left[\prod_{j=1}^{p}|\alpha_{\theta_j}(\xi 2^{j-1})|^2\prod_{j=1}^{p}|m_{\theta_j}^S(\xi 2^{j-1})|^2|(F\varphi^S(\xi)|^2\right]$$

En $\prod_{j=1}^{p}|m_{\theta_j}^S(\xi 2^{j-1})|^2|(F\varphi^S(\xi)|^2$, on reconnaît

$$\left|(F\varphi^{S,\underline{\theta}_p}(\xi)\right|^2 = 2^p\chi_{\Delta^{\underline{\theta}_p}}(\xi).$$

On a donc :

$$\left|(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi)\right|^2 = \sum_{\underline{\theta}_p}\left[\prod_{j=1}^{p}|\alpha_{\theta_j}(\xi 2^{j-1})|^2 2^p\chi_{\Delta^{\underline{\theta}_p}}(\xi)\right]$$

Il vient alors :

$$\int_{\Delta_p^{\underline{\varepsilon}_p}} \left| |(F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p}(\xi)|^2 - 2^p \right| d\xi = \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} 2^p - |(F\mu^{\underline{\varepsilon}_p})(\xi)|^2 d\xi$$
$$= 2^p \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \right\} d\xi$$

ainsi que

$$\int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} |(F\mu^{S,\underline{\nu}_p}(\xi)|^2 d\xi = 2^p \int_{\Delta_+^{\underline{\nu}_p}} \prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 d\xi$$

On obtient donc :

$$S^{\underline{\varepsilon}_p} = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right) \frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \right\} d\xi$$
$$+ \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right) \frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\nu}_p}} \prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 d\xi$$

En utilisant les notions et les notations introduites au paragraphe 4.4., nous posons :

$$A(\underline{\nu}_p) = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right) \frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\nu}_p}} \prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 d\xi$$

pour $\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p$.
et

$$I(\underline{\varepsilon}_p) = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p}\pi}{2^p}\right) \frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \right\} d\xi,$$

de sorte que nous pouvons réécrire : $S^{\underline{\varepsilon}_p} = I(\underline{\varepsilon}_p) + \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} A(\underline{\nu}_p)$.

Nous pouvons aussi écrire

$$A(\underline{\nu}_p) = \gamma\left(\frac{n^{\underline{\nu}_p}\pi}{2^p}\right) \sum_{\underline{\kappa}_p} \frac{2^p}{\pi} \int_{J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}} \prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 d\xi$$

Nous avons déjà défini :

$$J_0(\underline{\kappa}_p) = \{j \in \{1,\ldots,p\}/\kappa_j = 0\}$$

et

$$J_1(\underline{\kappa}_p) = \{j \in \{1,\ldots,p\}/\kappa_j = 1\}$$

Nous noterons ici $|J_0(\underline{\kappa}_p)|$ le cardinal de $J_0(\underline{\kappa}_p)$ et $|J_1(\underline{\kappa}_p)|$ celui de $J_1(\underline{\kappa}_p)$.

Maintenant, posons en plus :

$$I_0(\underline{\nu}_p) = \{j \in \{1,\ldots,p\}/\nu_j = \varepsilon_j\},$$
$$I_1(\underline{\nu}_p) = \{j \in 1,\ldots,p\}/\nu_j = 1-\varepsilon\}$$

On remarquera que le cardinal $|I_0(\underline{\nu}_p)|$ de $I_0(\underline{\nu}_p)$ est égal à la distance de Hamming entre $\underline{\nu}_p$ et $\underline{\varepsilon}_p$ que nous notons $d(\underline{\nu}_p, \underline{\varepsilon}_p)$, et quant au cardinal $|I_1(\underline{\nu}_p|$ de $I_1(\underline{\nu}_p)$, il est encore égal à $p - d(\underline{\nu}_p, \underline{\varepsilon}_p)$.
Définissons ensuite les ensembles $\forall\,(m,n) \in \{0,1\}^2$,

$$\boldsymbol{R}_{m,n}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p) = I_m(\underline{\nu}_p) \cap J_n(\underline{\kappa}_p)$$

et les cardinaux de ces ensembles $\forall\,(m,n) \in \{0,1\}^2$,

$$|\boldsymbol{R}_{m,n}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)| = \mathrm{Card}(\boldsymbol{R}_{m,n}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)).$$

En introduisant ces définitions, nous obtenons, que pour tout $\underline{\theta}_p, \underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p$

$$\prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = \prod_{j \in \boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\theta}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \times \prod_{j \in \boldsymbol{R}_{0,1}(\underline{\theta}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \times \prod_{j \in \boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\theta}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \times \prod_{j \in \boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\theta}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2$$

Pour j appartenant à $R_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, nous avons alors, par définition de $R_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, j élément de $I_0(\underline{\nu}_p)$ et de $J_0(\underline{\kappa}_p)$. Il s'ensuit donc que $\alpha_{\nu_j} = a_0$ et $\kappa_j = 0$. Pour ξ appartenant à $J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}$, nous avons donc $|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_0(\xi 2^{j-1})|^2$ et comme $\kappa_j = 0$, il vient que $\xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),0}$ donc à V_α. Finalement, nous obtenons que dans le cas où $j \in \boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$,

$$|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1 - \delta(\alpha).$$

Par conséquent, nous aurons

$$\prod_{j \in \boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \leq (1-\delta(\alpha))^{|\boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p)|} \quad \text{(A.4)}$$

Nous procédons de même pour j appartenant à $\boldsymbol{R}_{0,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$. Nous avons alors, par définition de $\boldsymbol{R}_{0,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, j élément de $I_0(\underline{\nu}_p)$ et de $J_1(\underline{\kappa}_p)$. Ainsi, $\alpha_{\nu_j} = a_0$ et $\kappa_j = 1$. Pour ξ appartenant à $J^{\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p}$, nous avons $|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_0(\xi 2^{j-1})|^2$ et comme $\kappa_j = 1$, il vient que $\xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),1}$, donc à $\boldsymbol{R} - V_\alpha$. Finalement, nous obtenons dans ce cas là

$$|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |(a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1 - |a_1(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1.$$

Par conséquent, nous aurons

$$\prod_{j \in \boldsymbol{R}_{0,1}(\underline{\nu}_p,\underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1 \quad \text{(A.5)}$$

Lorsque j appartient à $\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, nous avons par définition de $\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, j élément de $I_1(\underline{\nu}_p)$ et de $J_0(\underline{\kappa}_p)$. Dans ces conditions $\alpha_{\nu_j} = a_j$ et $\kappa_j = 0$. Pour ξ apaprtenant à $J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}$, nous avons donc $|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_1(\xi 2^{j-1})|^2$ et comme $\kappa_j = 0$, on trouve que $\xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{n^{\underline{\nu}_{j-1}}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),0}$ et donc à V_α. Finalement, on a

$$|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_1(\xi 2^{j-1})|2 \leq \frac{1}{2}.$$

Il vient donc

$$\prod_{j \in \boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \leq (\frac{1}{2})^{|\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \tag{A.6}$$

Enfin, lorsque j appartient à $\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)$, j est élément de $I_1(\underline{\nu}_p)$ et de $J_1(\underline{\kappa}_p)$ et alors, nous avons, $\alpha_{\nu_j} = a_1$ et $\kappa_j = 1$. Pour ξ appartenant à $J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}$, $|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_1(\xi 2^{j-1})|^2$ et comme $\kappa_j = 1$, il s'ensuit que $\xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{\underline{\nu}_{j-1}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),1}$, donc à $\boldsymbol{R} - V_\alpha$. Finalement, dans ce dernier cas,

$$|\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 = |a_1(\xi 2^{j-1})|^2 \leq \delta(\alpha).$$

On obtient alors la majoration suivante

$$\prod_{j \in \boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 \leq \delta(\alpha)^{|\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \tag{A.7}$$

En utilisant les relations (A.4), (A.5) et (A.6), nous avons :

$$\int_{J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}} \prod_{j=1}^{p} |\alpha_{\nu_j}(\xi 2^{j-1})|^2 d\xi \leq$$
$$(1 - \delta(\alpha))^{|\boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p \underline{\kappa}_p)|} (\tfrac{1}{2})^{|\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \delta(\alpha)^{|\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} |J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}|$$

en posant $|J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}| = \int_{J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}} d\xi$.

Par conséquent, nous obtenons :

$$A(\underline{\nu}_p) \leq \gamma \left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p} \right) \frac{2^p}{\pi} \sum_{\underline{\kappa}_p} (1 - \delta(\alpha))^{\boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} (\tfrac{1}{2})^{\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|}$$
$$\delta(\alpha)^{\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} |J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}|$$

Il vient encore

$$\sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} A(\underline{\nu}_p) \leq \frac{2^p}{\pi} \times \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} \left(\gamma \left(\frac{n^{\underline{\nu}_p, \pi}}{2^p} \right) \right.$$
$$\sum_{\underline{\kappa}_p} (1 - \delta(\alpha))^{|\boldsymbol{R}_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} (\frac{1}{2})^{|\boldsymbol{R}_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \tag{A.8}$$
$$\left. \delta(\alpha)^{|\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \times |J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}| \right)$$

De même,

$$I(\underline{\varepsilon}_p) = \gamma \left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2p} \right) \frac{2^p}{\pi} \int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \{1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2\} d\xi$$

Comme $\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p} = \cup_{\underline{\kappa}_p} J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}$ et que les $J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}$ sont disjoints 2 à 2,

$$I(\underline{\varepsilon}_p) \gamma \left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2^p} \right) \sum_{\underline{\kappa}_p} \frac{2^p}{\pi} \int_{J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}} \{1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1}|^2\} d\xi$$

Lorsque j appartient à $J_0(\underline{\kappa}_p)$, $\kappa_j = 0, \xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{\underline{\nu}_{j-1}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),0}$ et donc à V_α. Alors $\frac{1}{2} \leq |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1 - \delta(\alpha)$, et donc, pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}$,

$$(\frac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} \leq \prod_{j \in J_0(\underline{\kappa}_p)} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \leq (1 - \delta(\alpha))^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|}$$

Lorsque j appartient à $J_1(\underline{\kappa}_p), \kappa_j = 1$, $\xi 2^{j-1}$ appartient à $K^{\underline{\nu}_{j-1}}_{\lambda_j(\underline{\nu}_p),1}$, et n'appartient donc pas à V_α, par suite

$$1 - \delta(\alpha) \leq |a_0(\xi 2^{j-1})|^2| \leq 1,$$

et pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}$,

$$(1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|} \leq \prod_{j \in J_1(\underline{\kappa}_p)} |a_1(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1$$

Ces majorations nous conduisent, pour ξ appartenant à $J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}$, à :

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} (1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|} &\leq \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \\ &\leq (1 - \delta(\alpha))^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} \leq 1, \end{aligned}$$

de sorte que nous aurons :

$$1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \leq 1 - (\frac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} (1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|}$$

Ainsi,

$$\int_{\Delta_+^{\underline{\varepsilon}_p}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \right\} d\xi$$
$$= \sum_{\underline{\kappa}_p} \int_{J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}} \left\{ 1 - \prod_{j=1}^{p} |a_0(\xi 2^{j-1})|^2 \right\} d\xi$$
$$\leq \sum_{\underline{\kappa}_p} \left(1 (\tfrac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} (1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|} \right) |J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}|$$

On obtient :

$$I(\underline{\varepsilon}_p) \leq \frac{2^p}{\pi} \gamma \left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2^p} \right) \sum_{\underline{\kappa}_p} \left(1 - (\frac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} \right. \tag{A.9}$$
$$\left. (1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|} \right) |J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}|$$

En combinant (A.7) et (A.8), nous obtenons finalement :

PROPOSITION :

Si pour $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe $\delta(\alpha) \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que,

i) pour tout $\xi \in]\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}], \frac{1}{2} \leq |a_0(\xi)|^2 \leq 1 - \delta(\alpha)$

ii) pour tout $\xi \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha], 0 \leq |a_1(\xi)|^2 \leq \delta(\alpha)$

alors :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi 2^p k} \left(\left| (F\mu^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 - \left| (F\varphi^{S,\underline{\varepsilon}_p})(\xi) \right|^2 \right) \gamma_p(\xi) d\xi \right| \leq$$

$$\frac{2^p}{\pi} \gamma \left(\frac{n^{\underline{\varepsilon}_p} \pi}{2^p} \right) \sum_{\underline{\kappa}_p} \left(1 - (\tfrac{1}{2})^{|J_0(\underline{\kappa}_p)|} (1 - \delta(\alpha))^{|J_1(\underline{\kappa}_p)|} \right) |J^{\underline{\varepsilon}_p, \underline{\kappa}_p}| +$$

$$\frac{2^p}{\pi} \sum_{\underline{\nu}_p \neq \underline{\varepsilon}_p} \left(\gamma \left(\frac{n^{\underline{\nu}_p} \pi}{2^p} \right) \sum_{\underline{\kappa}_p} (1 - \delta(\alpha))^{|R_{0,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} (\tfrac{1}{2})^{|R_{1,0}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \right.$$

$$\left. \delta(\alpha)^{|\boldsymbol{R}_{1,1}(\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p)|} \times |J^{\underline{\nu}_p, \underline{\kappa}_p}| \right)$$

BIBLIOGRAPHIE

[Bat] G. BATTLE, « A Block Spin Construction of Ondelettes », Part I : Lemarié Functions, *Commun. Math. Phys.*, 100, 1987, pp. 601–615.

[Chui] C.K. CHUI « An Introduction to Wavelets », *Academic Press*, Inc.

[Daub1] I. DAUBECHIES, « The Wavelet Transform, Time–Frequency Localization and Signal Analysis », *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 36, 1990, pp. 961–996.

[Daub2] I. DAUBECHIES, « Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets », *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 41, 1988, pp. 909–996.

[Daub3] I. DAUBECHIES, « Ten Lectures on Wavelets », *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[Fland] P. FLANDRIN, « Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion », *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Vol. 38, n°2, pp. 910.

[Gui] I. GUIKHMAN, A. SKOROKHOD, « Introduction à la théorie des processus aléatoires », *Éditions MIR*, Moscou.

[Houd1] C. HOUDRÉ, « Harmonazibility, V–boundedness, (2,p)–boundedness of Stochastic Processes », *Probability Theory Relative Fields*, 84, 1990, pp. 39–54.

[Houd2] C. HOUDRÉ, « Path Reconstruction of Processes from Missing and Irregular Samples », *Technical Report n°359*, University of North California, Center for Stochastic Processes, February 1992.

[Lem] P.G. LEMARIÉ, « Ondelettes à localisation exponentielle », *J. Math. Pures et Appl. 67*, (1988), p. 227–236.

[Tew] A.H. TEWFIK, M. KIM, « Correlation Structure of the Discrete Wavelet Cœfficients of Fractional Brownian Motion », *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Vol. 38, n°2, pp. 904.

[Mal1] S. MALLAT, « Multi–Resolution Approximation and Wavelet Orthonormal Bases of L^2 », *Trans. Amer. Math. Soc.*, June 1989.

[Mal2] S. MALLAT, « A Theory for Multi–Resolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, n°7, July 1989.

[Mey1] Y. MEYER, « Ondelettes et Algorithmes Concurrents », *Hermann*, 1992.

[Mey2] Y. MEYER, « Les ondelettes : Algorithmes et Applications », *Armand Colin*.

[Masry] E. MASRY, « The Wavelet Transform of Stochastic Processes with Stationary Increments and its Application to Fractional Brownian Motion », *IEEE Trans. on Inform. Theory*, Vol. 39, n°1, pp. 260.

[Rau] J.P. CONZE et A. RAUGI, « Fonctions harmoniques pour un opérateur de transitions et applications », *Bull. Soc. Math. Fr.n 18*, (1990), pp. 273–310.

[Séré1] E. SÉRÉ, « Bases orthonormées de paquets d'ondelettes », A paraître dans la revue *Revista Matématica Iberoamericana*, (1995).

[Séré2] E. SÉRÉ, « Localisation des paquets d'ondelettes », *Revista Matématica Iberoamericana*, (1994), Vol. 10, n°2, pp. 349–362.

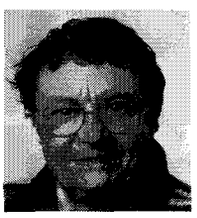
[Wong] P.W. WONG, « Wavelet Decomposition of Harmonizable Random Processes », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 39, n°1, January 1993.

LES AUTEURS

Dominique PASTOR

Dominique Pastor (E.N.S.T.Br 86) travaille depuis 1990 chez Sextant Avionique, centre de Bordeaux. Spécialisé en Traitement du Signal, ses travaux concernent la paramétrisation et le décodage acoustico–phonétique du signal vocal en milieu bruité, et s'étendent à l'étude du dialogue multi–modal entre l'homme et la machine.

Roger GAY



Roger Gay est professeur de Mathématiques à l'Université de Bordeaux 1. Il est spécialiste d'analyse complexe et auteur de différents ouvrages dans le domaine.

Manuscrit reçu le 21 Mars 1995.