



HAL
open science

Les fonctions d'onde externe et interne : une double solution à la Louis de Broglie ?

Michel Gondran, Alexandre Gondran

► **To cite this version:**

Michel Gondran, Alexandre Gondran. Les fonctions d'onde externe et interne : une double solution à la Louis de Broglie ?. 2019. hal-02194727v5

HAL Id: hal-02194727

<https://hal.science/hal-02194727v5>

Preprint submitted on 22 Nov 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les fonctions d'onde externe et interne : une double solution à la Louis de Broglie ?

Michel Gondran

*Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences, Paris, France**

Alexandre Gondran

École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France†

Résumé

Nous proposons une grille de lecture de la mécanique quantique correspondant aux spécifications de la théorie de la double solution de Louis de Broglie. Le principe est de considérer l'évolution d'un système quantique sous la forme de deux fonctions d'onde : une fonction d'onde externe correspondant à l'évolution de son centre de masse et une fonction d'onde interne correspondant à l'évolution de ses variables internes dans le référentiel du centre de masse. La décomposition mathématique exacte n'est possible que dans certains cas car de nombreuses interactions relient ces deux parties. En outre, ces deux fonctions d'onde vont avoir des sens et des interprétations différentes.

La fonction d'onde externe pilote le centre de masse du système quantique : elle correspond à *l'onde pilote* de Louis de Broglie. Elle découle mathématiquement de la convergence, lorsque l'on fait tendre la constante de Planck \hbar vers zéro, du carré du module et de la phase de la fonction d'onde externe vers une densité et une action classique vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi. Cette interprétation explique tous les résultats de mesure, comme les expériences d'interférences, de mesure du spin (Stern et Gerlach) et de non-localité (EPR-B).

Pour la fonction d'onde interne, plusieurs interprétations sont possibles : celle de l'onde pilote peut s'appliquer en cascade à la fonction d'onde interne. Cependant l'interprétation proposée par Erwin Schrödinger au congrès Solvay de 1927 et restreinte à la fonction d'onde interne est également envisageable. Pour Schrödinger, les particules sont étendues et le carré du module de la fonction d'onde (interne) d'un électron correspond à la densité de sa charge dans l'espace. Nous présentons les nombreux arguments en faveur de cette interprétation, qui comme celle de l'onde pilote est réaliste et déterministe.

Nous montrons que cette double interprétation est une grille de lecture pour mieux comprendre les débats sur les interprétations de la mécanique quantique et de revoir les relations entre gravité et mécanique quantique.

I. INTRODUCTION

Les pères de la mécanique quantique se sont fortement opposés au congrès Solvay de 1927 sur l'interprétation de la fonction d'onde d'un système quantique. Et la discussion est toujours ouverte aujourd'hui.

Dès la définition de son équation, Erwin Schrödinger rêve de la possibilité de construire un paquet d'ondes non dispersif représentant complètement la particule. C'est ainsi qu'il introduit en 1926 les états cohérents de l'oscillateur harmonique⁴⁹ : *“Notre paquet d'ondes reste toujours groupé, et ne s'étale pas au cours du temps sur un espace de plus en plus grand, comme le font par exemple les paquets d'ondes qu'on est habitué à considérer en optique”*. Mais il échoue à trouver une solution explicite non dispersive pour le problème de l'atome d'hydrogène : *“Il est certain qu'on peut construire par un procédé tout à fait analogue au précédent, des paquets d'ondes gravitant sur des ellipses de Kepler à un grand nombre de quanta et formant l'image ondulatoire de l'électron d'un atome d'hydrogène; mais dans ce cas les difficultés de calcul seront beaucoup plus grandes que dans l'exemple particulièrement simple que nous avons traité ici et qui à ce point de vue est presque un exercice de cours”*. Il reprend cette interprétation en 1952⁵⁰ dans un débat avec l'école de Copenhague. Un début de solution numérique ne sera trouvée qu'en 1995⁸.

Pour Louis de Broglie, la théorie de la double solution est l'interprétation qu'il a esquissée¹⁵ en 1926 et recherchée toute sa vie^{16,19,20} sans parvenir à la trouver et dont la théorie de l'onde-pilote qu'il présente au congrès Solvay de 1927 n'est qu'un sous produit : *“J'introduisais, sous le nom de “théorie de la double solution” l'idée qu'il fallait distinguer deux solutions distinctes, mais intimement reliées à l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde u étant une onde physique réelle et non normable comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, l'onde Ψ de Schrödinger, normable et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités”*²⁰

On trouve dans le numéro spécial de 2017 des *Annales de la Fondation de Broglie* une synthèse des travaux récents sur la double solution de Broglie et l'historique des 90 ans écoulés^{10,28,48} depuis que de Broglie ait lancé les premières idées en 1927. La physique non-linéaire occupe une part importante dans ces travaux ainsi que le concept de soliton, *“objet singulier et persistant, matérialisation sous forme ondulatoire du concept de corpuscule”* qui permet de reconsidérer sous un œil nouveau le programme de la double solution et donne des perspectives prometteuses pour réconcilier la théorie quantique avec le réalisme^{10,43}. L'ajout de terme supplémentaire non-linéaire à l'équation de Schrödinger est largement étudié. On notera particulièrement l'article de Thomas Durt²⁴ qui définit une très intéressante double solution à la de Broglie pour l'équation non-linéaire de Schrödinger-Newton.

L'approche que nous adoptons dans notre article diffère de celui du numéro spécial en cela que nous n'introduisons aucune non-linéarité, les états cohérents montrant que le concept de soliton apparaît également en physique linéaire. La double solution que nous présentons est plus une distinction d'échelle (externe/interne) et d'interprétation qu'une recherche d'une équation d'onde non-linéaire sous-jacente⁴⁸.

Dans son discours Nobel de 1954, Max Born⁶ rappelle sa démarche pour définir l'interprétation statistique de la mécanique quantique : *“Ce fut de nouveau une idée d'Einstein qui me guida. Il avait essayé de faire comprendre la dualité des ondes et des particules - des quanta de lumière ou photons - en considérant le carré de l'amplitude des ondes lumineuses comme densité de la probabilité de présence des photons. Cette idée pouvait s'étendre immédiatement à la fonction ψ : $|\psi|^2$ devait être la densité de la probabilité de présence des électrons (ou autres particules). Il était facile de l'affirmer. Mais comment le démontrer ? Les processus de chocs atomiques permirent de le faire”*.

En opposition avec la recherche d'images physiques chez Louis de Broglie et Schrödinger, Werner Heisenberg présente un cadre formel pour la théorie quantique qui ne doit être qu'un système de concepts⁷ : *“Le nouveau système de concepts donne en même temps le contenu intuitif de la nouvelle théorie. D'une théorie intuitive en ce sens on doit donc demander uniquement qu'elle soit sans contradiction et qu'elle permette de prédire sans ambiguïté les résultats de toutes les expériences imaginables dans son domaine. La mécanique des quanta sera dans ce sens une théorie intuitive et complète des processus mécaniques”*. Ainsi, Heisenberg ne garde pour une théorie que sa condition minimale, la non contradiction.

Pour Niels Bohr, la théorie quantique est basée sur le principe de complémentarité⁵ avec lequel il espère *“contribuer à concilier les conceptions apparemment contradictoires défendues par différents physiciens”* : il pense *“qu'il est possible d'exprimer l'essence de la théorie à l'aide du ‘postulat quantique’.[...] Ce postulat quantique exprime que toute observation des phénomènes atomiques entraîne une interaction finie avec l'instrument d'observation; on ne peut par conséquent attribuer ni aux phénomènes ni à l'instrument d'observation une réalité physique autonome au sens ordinaire du mot. [...] nous devons en effet nous contenter de les concevoir comme des aspects complémentaires, mais mutuellement exclusifs, de notre représentation des résultats expérimentaux”*.

Albert Einstein a bien synthétisé ce débat dans l'un de ces derniers écrits (1953), *“Réflexions élémentaires concernant l'interprétation des fondements de la mécanique quantique”*²⁶ en hommage à Max Born : *“Le fait que l'équation de*

Schrödinger, associée à l'interprétation de Born, ne conduise pas à une description des "états réels" d'un système individuel incite naturellement à rechercher une théorie qui ne soit pas soumise à cette limitation. Les deux tentatives jusqu'à maintenant dans ce sens ont ceci en commun qu'elles conservent l'équation de Schrödinger et abandonnent l'interprétation de Born. **La première tentative, qui constitue un retour à de Broglie, a été poursuivie avec beaucoup de finesse par Bohm. [...] La deuxième tentative en vue d'obtenir une "description réelle" d'un système individuel qui soit fondée sur l'équation de Schrödinger est toute récente⁵⁴ et émane de Schrödinger lui-même. L'idée générale est, en bref, la suivante : la fonction ψ représente en elle-même la réalité et point n'est besoin de lui adjoindre l'interprétation statistique de Born.**"

Nous proposons ici une grille de lecture de la mécanique quantique qui correspond à la théorie de la double solution recherchée par Louis de Broglie. Cette grille de lecture est ici restreinte aux particules massiques et non relativistes. Elle fait suite à nos travaux sur la théorie de la double préparation³⁵ où nous montrons qu'il existe deux types d'interprétation suivant la préparation du système quantique. La double solution propose une explication à cette double préparation.

L'idée de base consiste à étudier l'évolution d'un système quantique à partir de celle de son centre de masse (évolution externe) et de l'évolution des variables internes dans le référentiel du centre de masse (évolution interne). L'utilisation de l'onde du centre de masse n'est pas nouvelle et a été très souvent évoquée par de nombreux auteurs. On la trouve par exemple très bien expliquée dans le livre *Interférométrie atomique* de Baudon et Robert² : "dans l'évolution libre d'un atome ou d'une molécule, le mouvement externe (correspondant au mouvement du centre de masse \mathbf{R}) et l'onde qui lui est associée tiennent un rôle à part. En effet du fait de la séparation de l'hamiltonien du système (en l'absence de toute interaction extérieure) sous la forme : $H = T + H_{int}$ où $T = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_R$ est l'opérateur énergie cinétique et H_{int} la partie de l'hamiltonien qui ne fait intervenir que les variables autres que \mathbf{R} , il existe des états du système dont la fonction d'onde a la forme $\Psi(\mathbf{R}, t)\Phi_{int}$, où $\Psi(\mathbf{R}, t)$ et Φ_{int} sont des états propres de T et H_{int} respectivement. C'est sur la fonction d'onde Ψ du mouvement externe, qui correspond à un état du continuum, que va porter l'interférométrie atomique". Ce point de vue est complété par Claude Cohen-Tannoudji dans sa préface de ce livre² : "Une onde de de Broglie est également associée au mouvement du centre de masse d'un système quantique plus complexe, comme un atome ou une molécule, formé de plusieurs protons, neutrons et électrons. la longueur d'onde de l'onde de de Broglie associée à un objet de masse M et de vitesse v est inversement proportionnelle au produit Mv ".

La démarche est la même qu'en mécanique classique : elle consiste à étudier l'évolution d'un système à partir de ses variables externes comme le centre de masse et sa vitesse qui correspondent au mouvement global du système quantique et les variables internes qui correspondent à son mouvement dans le référentiel du centre de masse. On étudie comment la fonction d'onde du système peut se décomposer sous la forme de deux fonctions d'onde, la fonction d'onde de son centre de masse (évolution externe) et la fonction d'onde interne. Ces deux fonctions d'onde sont de nature différente et vont avoir des interprétations différentes, ce qui va nous conduire à la théorie de la double solution recherchée par Louis de Broglie.

On montre d'abord que la fonction d'onde externe correspond à l'interprétation de l'onde pilote de de Broglie et Bohm restreinte à l'espace 3D. On démontre en effet mathématiquement que, lorsque l'on fait tendre la constante de Planck \hbar vers zéro, le carré du module et la phase de la fonction d'onde externe convergent respectivement vers une densité et une action classique vérifiant les équations statistiques d'Hamilton-Jacobi. Cette interprétation de la fonction d'onde externe par l'onde pilote de de Broglie-Bohm (dBB) donne une explication physique des résultats de mesure, aussi bien pour les expériences d'interférométrie atomique que pour les mesures de spin comme dans les expériences de Stern-Gerlach et EPR-B. La réduction de la fonction d'onde du système quantique est alors pilotée par la position du centre de masse au moment et à l'endroit où le système quantique est capturé.

Pour la fonction d'onde interne, plusieurs interprétations sont possibles. Nous étudierons trois possibilités d'interprétation : celle de dBB, celle de Copenhague et l'interprétation qui correspond à celle proposée par Erwin Schrödinger en 1926 puis au congrès Solvay de 1927. Pour lui les particules sont étendues et le carré du module de la fonction d'onde (interne) d'un électron correspond à la valeur de la distribution de sa charge dans l'espace.

Le plan de l'article est le suivant. En section II, nous étudions comment se fait la décomposition de la fonction d'onde du système quantique de N particules entre ses fonctions d'onde externe et interne et nous présentons deux analogies non quantiques permettant de mieux comprendre les interactions entre les fonctions d'onde externe et interne. En section III, nous montrons mathématiquement par l'étude de la convergence vers la mécanique classique et expérimentalement par l'explication simple de la mesure en mécanique quantique, que l'interprétation la plus plausible de la fonction d'onde externe est l'interprétation par l'onde pilote de dBB. En section IV, nous proposons une interprétation de la fonction interne correspondant à l'interprétation de Schrödinger. Puis En section V, nous proposons une expérience cruciale pour valider l'existence des fonctions d'onde externe et interne. Enfin, en conclusion, nous montrons que cette grille de lecture permet de mieux comprendre les débats sur l'interprétation de la mécanique quantique et de revoir les relations entre gravité et mécanique quantique.

II. LES FONCTIONS D'ONDE INTERNE ET EXTERNE

Dès le début de la mécanique quantique, on a distingué, pour étudier la dynamique des atomes et des molécules, deux types de variables, ses variables internes et ses variables externes. Les variables externes correspondent à la dynamique externe de l'atome, c'est à dire au mouvement de son centre de masse et l'orientation du référentiel qui lui est lié. Les variables internes décrivent par exemple la structure de l'atome ou de la molécule.

Ces degrés de liberté internes et externes ne sont en général pas indépendants. Les interactions entre variables internes et externes sont en effet à la base de la manipulation des atomes, en particulier de leurs refroidissements¹⁴. Selon les conditions expérimentales, ces interactions sont plus ou moins importantes, ce qui rend la décomposition de la fonction d'onde totale en une fonction d'onde externe et une fonction d'onde interne plus ou moins approchée. Commençons par étudier le cas d'un système à N corps où cette décomposition est exacte.

A. Décomposition d'un système à N corps comme un atome ou une molécule

Considérons un système de N particules sans spin de masses m_j , de coordonnées \mathbf{x}_j , soumises à un champ de potentiel linéaire $V_j(\mathbf{x}_j) = m_j \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_j$, $\forall j = 1 \dots N$, et à des interactions mutuelles décrites par les potentiels $U_{jk}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$, $\forall j, k = 1 \dots N$. Ce système quantique est donc décrit par la fonction d'onde $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ qui vérifie l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)}{\partial t} = H \Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) \quad (1)$$

avec comme Hamiltonien :

$$H = \sum_j \left(\frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} + V_j(\mathbf{x}_j) \right) + \sum_{j,k} U_{jk}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \quad (2)$$

et comme condition initiale :

$$\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, 0) = \Psi_0^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N). \quad (3)$$

On sépare le mouvement de ces N particules du mouvement de leur barycentre comme on le fait en mécanique classique : Soient $\mathbf{x}_G = (\sum_j m_j \mathbf{x}_j) / (\sum_j m_j)$ la position du barycentre, $\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_G$ la position de la particule j par rapport au barycentre, $M = \sum_j m_j$ la masse totale. Alors l'hamiltonien H s'écrit en fonction des impulsions totale ($\mathbf{p}_G = \sum_i \mathbf{p}_i$) et relatives ($\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i - m_i/M \mathbf{p}_G$) :

$$H = \frac{\mathbf{p}_G^2}{2M} + M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G + \sum_i \frac{\mathbf{p}'_i{}^2}{2m_i} + \sum_{i,j} U_{ij}(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) = H_{ext} + H_{int}. \quad (4)$$

et il n'y a pas d'interaction entre les variables internes et externes.

Proposition 1 - Si la fonction d'onde initiale $\Psi_0^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ se factorise sous la forme :

$$\Psi_0^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) = \psi_0^h(\mathbf{x}_G) \varphi_0^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N). \quad (5)$$

alors $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$, solution de (1),(2) et (3), s'écrit comme le produit d'une fonction d'onde externe $\psi^h(\mathbf{x}_G, t)$ et d'une fonction interne $\varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t)$:

$$\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \psi^h(\mathbf{x}_G, t) \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t) \quad (6)$$

où $\psi^h(\mathbf{x}_G, t)$ est la solution des équations externes de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi^h(\mathbf{x}_G, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{x}_G} \psi^h(\mathbf{x}_G, t) + M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G \psi^h(\mathbf{x}_G, t) \quad (7)$$

avec la condition initiale :

$$\psi^h(\mathbf{x}_G, 0) = \psi_0^h(\mathbf{x}_G) \quad (8)$$

et où $\varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t)$ est la solution des équations internes de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\mathbf{x}'_i} \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t) + \sum_{i,j} U_{ij}(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t) \quad (9)$$

avec la condition initiale :

$$\varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, 0) = \varphi_0^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N). \quad (10)$$

La proposition s'obtient simplement en remplaçant dans l'équation de Schrödinger (1), $\Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ par $\psi^h(\mathbf{x}_G, t) \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t)$. On trouve en effet :

$$\begin{aligned} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \Psi^h(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, t) = & \psi^h(\mathbf{x}_G, t) \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_{int} \right) \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t) \right] \\ & + \varphi^h(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots, \mathbf{x}'_N, t) \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H_{ext} \right) \psi^h(\mathbf{x}_G, t) \right] = 0. \end{aligned}$$

La décomposition de la fonction d'onde totale comme le produit **exact** d'une fonction d'onde externe et d'une fonction d'onde interne est due à l'indépendance des variables externes et internes permettant ainsi une décomposition exacte de l'hamiltonien en ses parties externes et internes.

La propriété fondamentale de la fonction d'onde externe d'un système quantique est qu'elle peut s'étaler au cours du temps dans l'espace et être divisée en plusieurs parties (cf. les expériences d'interférence de la section III). Au contraire, la fonction d'onde interne d'un système reste confiné dans l'espace, elle ne s'étale pas et ne peut se diviser sans changer la nature du système ; c'est ce qu'il se passe lors d'une ionisation, d'une fission nucléaire ou d'une réaction chimique. La taille de la fonction d'onde interne est la taille communément donnée pour un atome ou une molécule et elle est souvent beaucoup plus petite que la taille de la fonction d'onde externe (i.e. la largeur du paquet d'onde) comme nous le verrons dans les exemples de la section III.

Lorsque le système quantique n'est pas composé de plusieurs particules mais correspond à une particule élémentaire comme un électron libre, on peut également lui associer une fonction d'onde interne et une fonction d'onde externe. Sa fonction d'onde externe est la fonction d'onde habituellement associée à un électron au sortir d'un canon à électrons d'un microscope électronique ou d'une pointe de tungstène d'un microscope à effet tunnel. Bien que de nombreux physiciens considèrent les électrons comme ponctuels, Schrödinger propose de les considérer comme des nuages électroniques ayant une distribution continue de charge. La fonction d'onde interne d'un électron libre n'est pas connue mais pourrait correspondre à ce nuage électronique de Schrödinger.

Remarque 1 - Le rôle de la gravitation - L'indépendance entre les variables externes et internes de la proposition 1 provient en partie de la forme très spéciale du potentiel linéaire de gravitation $V_j(\mathbf{x}_j)$ qui dépend linéairement du produit $m_j \mathbf{x}_j$, ce qui a permis d'écrire $\sum_j V_j(\mathbf{x}_j) = M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G$. Sans cette hypothèse, on aurait eu $\sum_j V_j(\mathbf{x}_j) = \sum_j V_j(\mathbf{x}_G - \mathbf{x}'_j)$ et une interaction entre les variables externes et internes ; et pas de décomposition exacte ! Avec le potentiel linéaire $V_j(\mathbf{x}_j) = m_j \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_j$, on transfère exactement la gravité dans la fonction d'onde externe.

Dans le cas général d'un système quantique à N particules, il y a interaction entre les variables externes et internes due au rôle de l'environnement, et les équations externes de Schrödinger (7) et (8) et internes de Schrödinger (9) et (10) ne sont qu'approchées. C'est en particulier le cas où l'on suppose que chaque particule j admet une charge q_j et est aussi soumise à un potentiel électrique $q_j V_q(\mathbf{x}_j)$ variant peu à l'échelle du système quantique : $V_q(\mathbf{x}_j) \sim V_q(\mathbf{x}_G)$. Sous cette hypothèse, le champ externe s'appliquant à la fonction d'onde externe s'écrit approximativement :

$$V(\mathbf{x}_G) = M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G + \sum_j q_j V_q(\mathbf{x}_j) \simeq M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G + Q V_q(\mathbf{x}_G) \quad (11)$$

avec $Q = \sum_j q_j$. On considère dans la suite une généralisation de l'équation externe de Schrödinger (7) en remplaçant $M \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_G$ par $V(\mathbf{x}_G)$. La solution obtenue ne sera plus exacte, mais sera une bonne approximation si le système quantique n'est pas trop secoué et reste stable durant son évolution. Ce ne sera plus le cas s'il se désagrège. Le cas où il existe un champ magnétique extérieur est pris en compte dans la section III dans les expériences de Stern et Gerlach et EPR-B. On peut certainement généraliser la fonction d'onde externe à des systèmes quantiques mésoscopiques et macroscopiques qui ne sont ni des atomes, ni des molécules.

Remarque 2 - Les N fonctions individuelles d'un système à N corps - Outre les fonctions d'onde externe et interne associées à un système de N particules, il faut aussi associer à chacune des N particules individuelles du

Le système est une fonction d'onde dite individuelle. Cependant puisque les N particules sont en interaction, les fonctions individuelles ne sont pas accessibles car intriquées avec les autres fonctions individuelles. La fonction externe (respectivement interne) du système complet émerge de l'intrication des N fonctions individuelles. Un exemple de l'émergence de la fonction d'onde externe à partir de deux fonctions d'onde externes individuelles est donnée en section III C pour l'expérience EPR-B.

B. Préparation d'une fonction d'onde interne ou d'une fonction d'onde externe suivant les expériences

Dans beaucoup d'études, la connaissance sur le système quantique ne correspond pas à une fonction d'onde totale mais seulement à une fonction d'onde externe ou une fonction d'onde interne. En particulier, seule est considérée la fonction d'onde externe pour tous les problèmes de mesures qui sont la plupart du temps liés à la mesure de la position du centre de masse. Ce sont particulièrement les cas d'interférométrie atomique, de mesure du spin et d'énergie. La fonction d'onde interne va expliquer les valeurs liées au spectre d'énergie et aux sauts quantiques, mais ils seront mesurés par des mesures de positions via une fonction d'onde externe. Ainsi dans les débats du congrès Solvay de 1927, de Broglie, avec "*l'onde pilote*", et Born, avec "*l'onde statistique*", considéraient implicitement la fonction d'onde externe, tandis que Schrödinger, avec son "*soliton*", et Heisenberg, avec ses sauts quantiques, considéraient implicitement la fonction d'onde interne.

C. Analogies classiques de l'externe et de l'interne

Nous venons de voir qu'il n'y a pas toujours de relation simple entre la fonction d'onde totale d'un système quantique et les fonctions d'onde externe et interne. Le cas d'un simple produit comme dans la proposition 1 est exceptionnel. D'une manière générale, les variables externes influent sur les variables internes et réciproquement. Les deux analogies non quantiques suivantes peuvent être instructives pour comprendre les types d'interaction entre les fonctions d'onde externe et interne : l'analogie avec les *marcheurs* de Couder et l'analogie avec le système solaire.

1. Analogie avec les "marcheurs" de Couder

La dualité onde-particule semble être une caractéristique du monde quantique, n'ayant pas d'équivalent en physique classique. Or Yves Couder et son équipe^{11-13,25,30} : ont montré "*qu'une goutte rebondissant sur une surface liquide vibrant verticalement peut devenir autopropulsée par son interaction avec l'onde de surface qu'elle excite*". La goutte se couple aux ondes de surface que ses rebonds génèrent et se met en mouvement spontanément sur la surface. L'objet résultant, appelé *marcheur*, associe la goutte et ses ondes de surface, possède une nature duale qui permet de réaliser un grand nombre des expériences classiques de mécanique quantique : fentes de Young¹¹, effet tunnel²⁵, orbites quantifiées³⁰. Même si les marcheurs de Couder et de son équipe présentent des différences fondamentales avec le cas quantique (système entretenu par la vibration, pas de constante de Planck ni d'intrication et de non-localité, existence des ondes sur un milieu matériel), ils nous montrent que la dualité onde-particule existe au niveau macroscopique. Les déformations de la goutte lors des rebonds reconstitue son évolution interne. L'évolution externe de la goutte, c'est-à-dire de son centre de gravité, est régie par l'onde de surface qu'elle crée lors de chaque rebond et du liquide extérieur vibrant.

2. Analogie avec le système solaire

Pour étudier l'évolution d'une planète dans le système solaire, on décompose le problème en deux sous-problèmes : 1) l'évolution du centre de masse de cette planète (évolution externe) pour laquelle la planète est réduite à un point, son centre de masse. 2) l'évolution interne de la planète dans le référentiel de son centre de masse ; cette évolution tient compte du fait que la planète n'est pas un point mais a bien une structure gazeuse ou/et solide et éventuellement un mouvement de rotation sur elle-même. Ces deux évolutions peuvent être traitées de façon séparé en première approximation. Mais selon les conditions expérimentales de chaque planète, on peut observer des effets importants de l'évolution externe sur l'évolution interne ; par exemple les marées terrestres dues au soleil déforment très légèrement la structure solide de la Terre et ralentissent sa rotation sur elle-même.

Pour un système quantique, nous observons la même décomposition, une évolution externe et une évolution interne. On a donc deux fonctions d'onde l'une externe qui décrit l'évolution du centre de masse et l'autre interne défini dans le référentiel du centre de masse.

Cependant, selon les conditions expérimentales, on va s'intéresser seulement aux variables externes ou seulement aux variables internes. C'est ce que nous avons fait dans la théorie de la double préparation³⁵. Dans de nombreuses expériences, il est en effet possible de séparer ces deux fonctions d'onde. C'est par exemple le cas de particules libres comme dans les expériences d'interférence de type Young, de mesure du spin de Stern et Gerlach et de non-localité de EPR-B où seul l'évolution externe des particules (c-à-d l'évolution du centre de masse) est étudiée, l'évolution interne étant négligée. A contrario, si on étudie les raies d'émission d'un gaz, seul l'évolution interne des particules du gaz est étudiée, l'évolution externe étant négligée.

III. L'INTERPRÉTATION DE LA FONCTION D'ONDE EXTERNE

Pour interpréter la fonction d'onde externe, nous allons étudier comment elle évolue lorsque l'on fait tendre mathématiquement la constante de Planck vers zéro.

Considérons le changement de variable semi-classique $\psi^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)} \exp\left(i\frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}{\hbar}\right)$, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ étant des fonctions qui dépendent à priori de \hbar . Les équations externes de Schrödinger (7) et (8) se décomposent en donnant les équations de Madelung⁴¹ (1926) qui correspondent aux deux équations couplées :

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}{\partial t} + \frac{1}{2M}(\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t))^2 + V(\mathbf{x}_G) - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}_G, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)}{m} \right) = 0 \quad \forall (\mathbf{x}_G, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \quad (13)$$

avec les conditions initiales

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}_G) \quad \text{et} \quad S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}_G) \quad \forall \mathbf{x}_G \in \mathbb{R}^3 \quad (14)$$

Ici, $V(\mathbf{x}_G)$ est un potentiel général comme celui de (11). Nous étudions dans ce paragraphe la convergence de la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ et de l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ des équations de Madelung, lorsque l'on fait tendre la constante de Planck \hbar vers 0. Nous nous restreindrons à des systèmes quantiques "**préparés indiscernés**", c'est à dire tels que la densité de probabilité initiale $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}_G)$ et l'action initiale $S_0^{\hbar}(\mathbf{x}_G)$ de la fonction d'onde externe sont des fonctions $\rho_0(\mathbf{x}_G)$ et $S_0(\mathbf{x}_G)$ régulières et indépendantes de \hbar . C'est le cas d'un ensemble de particules sans interaction entre elles et préparées de la même façon : jets de particules libres ou dans un champ linéaire comme dans l'expérience de Shimizu⁵¹ avec des atomes froids, jets de fullerènes, de neutrons ou d'électrons dans une expérience de fentes de Young.

Théorème 1 - *Quand \hbar tend vers 0, la densité $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ et l'action $S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$, solutions des équations de Madelung (12-14), convergent vers $\rho(\mathbf{x}_G, t)$ et $S(\mathbf{x}_G, t)$, solutions des équations statistiques d'Hamilton-Jacobi :*

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}_G, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S(\mathbf{x}_G, t))^2 + V(\mathbf{x}_G) = 0 \quad (15)$$

$$S(\mathbf{x}_G, 0) = S_0(\mathbf{x}_G) \quad (16)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}_G, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}_G, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}_G, t)}{m} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\rho(\mathbf{x}_G, 0) = \rho_0(\mathbf{x}_G) \quad (18)$$

La démonstration a été faite dans³⁵ dont nous rappelons le principe brièvement. Dans le cas de systèmes quantiques préparés indiscernés, la fonction d'onde externe $\Psi(\mathbf{x}_G, t)$ au temps t se déduit de la fonction d'onde externe initiale par l'intégrale de chemin de Feynman²⁹ : $\Psi(\mathbf{x}_G, t) = \int F(t, \hbar) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}_G, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = F(t, \hbar) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}_0)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}_G, t; \mathbf{x}_0))\right) d\mathbf{x}_0$. Le théorème de la phase stationnaire montre alors que, si \hbar tend vers 0, nous avons $\Psi(\mathbf{x}_G, t) \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}_G, t; \mathbf{x}_0))\right)$, ce qui implique que l'action quantique externe $S^{\hbar}(\mathbf{x}_G, t)$ converge vers la fonction :

$$S(\mathbf{x}_G, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}_G, t; \mathbf{x}_0)) \quad (19)$$

qui est la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (15) avec la condition initiale (16). L'équation (19) est une intégrale dans l'analyse Minplus qui correspond à une nouvelle branche des mathématiques (cf. Maslov⁵³, Gondran^{37,38} chapitre 7) qui étudie certains problèmes non linéaires par une approche linéaire. Elle est construite en remplaçant le produit

scalaire classique $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x)dx$ par le produit scalaire Minplus $\langle f, g \rangle_{min+} = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\}$. Cette équation (19) est donc l’analogie en mécanique classique de l’intégrale de chemin de Feynman et nous l’avons appelé³⁵ **l’intégrale de chemin Minplus**.

La démonstration se poursuit en remarquant que, comme la densité quantique $\rho^h(\mathbf{x}_G, t)$ vérifie l’équation de continuité (13), nous déduisons, puisque $S^h(\mathbf{x}_G, t)$ tend vers $S(\mathbf{x}_G, t)$, que $\rho^h(\mathbf{x}_G, t)$ converge vers la densité classique $\rho(\mathbf{x}_G, t)$, qui vérifie l’équation de continuité (17).

Ainsi, si la fonction d’onde externe est préparée indiscernée, les équations de Madelung de cette fonction d’onde externe convergent vers les équations statistiques d’Hamilton-Jacobi. Ces équations d’Hamilton-Jacobi statistiques correspondent à un ensemble de particules classiques, sans interaction entre elles et soumises à un champ de potentiel extérieur $V(\mathbf{x})$, et dont on ne connaît, à l’instant initial, que la densité de probabilité $\rho_0(\mathbf{x})$ et le champ de vitesse $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ par l’intermédiaire de l’action initiale $S_0(\mathbf{x})$ (avec $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$). Ce sont des particules classiques préparées indiscernées comme les particules quantiques préparées indiscernées. Pour ces particules classiques préparées indiscernées, la vitesse du centre de gravité de la particule classique est donnée en chaque point (\mathbf{x}, t) par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \quad (20)$$

L’équation (20) montre que la solution $S(\mathbf{x}, t)$ des équations d’Hamilton-Jacobi (15) permet de définir le champ de vitesse en tout point (\mathbf{x}, t) à partir du champ de vitesse $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ à l’instant initial. Ainsi, si on se donne la position initiale \mathbf{x}_{init} du centre de gravité d’une particule classique indiscernée, on déduit par (20) la trajectoire du centre de gravité de la particule. L’action d’Hamilton-Jacobi $S(\mathbf{x}, t)$ est donc un champ qui “pilote” le mouvement de la particule classique.

L’indétermination sur la position du centre de masse d’un système quantique correspond donc dans ce cas à l’indétermination sur la position du centre de masse d’un système classique dont on a défini seulement la densité de distribution initiale. Comme l’action d’Hamilton-Jacobi pour une particule classique indiscernée, la fonction d’onde externe d’un système quantique ne suffit pas pour définir la position du centre de masse du système quantique ; il faut ajouter sa position initiale et il est donc naturel d’introduire les trajectoires de dBB pour le centre de gravité d’un système quantique. Sa vitesse à l’instant t est donnée par^{3,15} :

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}_G, t) = \frac{1}{m} \nabla S^h(\mathbf{x}_G, t) \quad (21)$$

qui vérifie l’équation de continuité (13).

Nous donnons dans la suite de cette section, trois cas d’expériences où seule la fonction d’onde externe est considérée. En effet, dans beaucoup d’études, la connaissance de la fonction d’onde interne n’est pas nécessaire et peut donc être négligée. C’est, en particulier, le cas de tous les problèmes de mesures qui sont la plupart du temps liés à la mesure de la position du centre de masse. Nous détaillons d’abord le cas de l’interférométrie atomique puis celui de la mesure du spin.

A. Cas pratique 1 : interférence de l’onde externe de la molécule de C_{60}

Les expériences d’interférométrie de type Young ou Mach-Zehnder sont des exemples où seule la fonction d’onde externe d’une particule interfère avec elle-même. La structure interne n’est pas nécessaire pour comprendre l’expérience et est omise dans les calculs.

Les figures 1 et 2 représentent une simulation de l’expérience des fentes de Young avec des molécules de fullerène C_{60} dans les conditions de celle réalisée par Nairz, Arndt et Zeilinger⁴⁶. Les deux fentes sont espacées de 100 nm (centre à centre) et large chacune de 55 nm. La vitesse moyenne des molécules est de 200 m/s, ce qui correspond à une longueur d’onde de 2.8 pm. La norme de la fonction d’onde externe est représentée sur les figures en bleu : plus le bleu est clair, plus la densité est importante. Sur la figure 1, la fonction d’onde externe d’une molécule de C_{60} est représentée à quinze instants différents, de deux millimètres avant les fentes (complètement à gauche) à 5 millimètres après les fentes (complètement à droite). Le trait rouge correspond à la trajectoire du centre de gravité d’une molécule de C_{60} dont la position initiale (avant les fentes) a été tirée au sort dans le paquet d’onde initial⁵⁵. La fonction d’onde interne d’une molécule de C_{60} qui définit le structure interne est schématiquement représentée sur le figure par un dessin de la molécule arbitrairement grossie ($\times 13$) car sa taille est de seulement 1 nm. La fonction d’onde interne reste inchangée durant toute l’expérience, sa taille reste de 1 nm avant et après les fentes, et elle n’interagit pas avec la fonction d’onde externe qui elle se transforme profondément. Cette expérience peut être considérée comme cruciale car il est difficile d’imaginer que la fonction d’onde interne d’une molécule C_{60} ne passe pas par une seule des fentes. C’est sa fonction d’onde externe qui passe par les deux fentes à la fois. Lors de la *mesure* de l’impact de la molécule

de C_{60} à 5 mm après les fentes, c'est la fonction d'onde interne qui interagit avec l'écran de détection et qui produit l'impact.

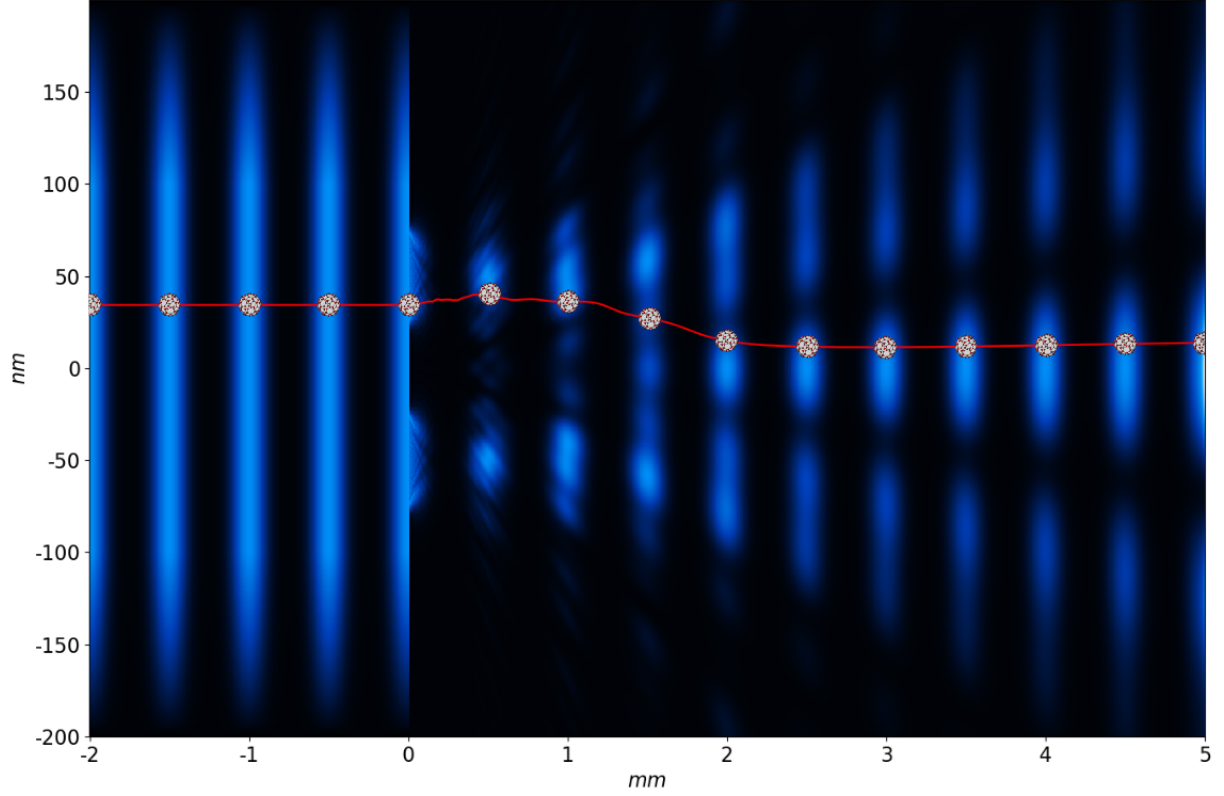


FIGURE 1: Simulation de l'évolution des fonctions d'onde externes (en bleu) et interne (en blanc, grossie 13 fois) d'une molécule de C_{60} dans les conditions expérimentales de⁴⁶ à quinze instants différents tout les $2.5 \mu s$ (soit tous les $0.5 mm$). Les fentes sont placées à $0 mm$ et sont espacées de $100 nm$ et large de $55 nm$.

La figure 2 décrit la même expérience, la densité de la fonction d'onde externe est représenté continûment de $2 mm$ avant les fentes à $5 mm$ après. 24 trajectoires du centre de gravité d'une molécule de C_{60} sont représenté en trait rouge correspondant à 24 points de départ différents du centre de gravité.

Ainsi pour une fonction d'onde externe "*préparée indiscernée*", $\rho_0(\mathbf{x}_G)$ correspond à la densité de probabilité initiale du centre de masse et $\rho^h(\mathbf{x}_G, t)$ à la densité de probabilité du centre de masse à l'instant t . La fonction d'onde externe *préparée indiscernée* peut donc être considérée comme une onde de probabilité à laquelle s'applique l'interprétation statistique de Born. On retrouve aussi le point de vue de Dirac qui, dès 1930 écrit :²² "[en mécanique quantique], les particules sont reliées [...] à des ondes qui les dirigent et qui donnent lieu, dans des conditions appropriées, à des phénomènes d'interférences et de diffraction" Et il ajoute qu'il ne s'agit que "d'une seule et même réalité".

Remarque 3 - Convergence de \hbar vers 0 - Dans le théorème 1, on suppose que \hbar tend vers 0. Or, physiquement \hbar n'est jamais égal à 0 et ne peut pas tendre vers 0 puisque c'est une constante. Toutes les trajectoires sont quantiques et les trajectoires dites classiques sont des approximations des trajectoires quantiques pour lesquelles le terme en \hbar est négligeable par rapport aux autres termes. Un exemple très simple est celui d'un objet quantique défini par un paquet d'onde gaussien de centre (x_0, y_0, z_0) et d'écart type $(\sigma_{0x}, \sigma_{0y}, \sigma_{0z})$ et dont le centre de masse a la position initiale $(x_G(0), y_G(0), z_G(0))$ et la vitesse initiale $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Si $\mathbf{g} = (0, 0, g)$ est la seule force extérieure, alors le centre de gravité de la particule suit la trajectoire de dBB suivante :

$$X^h(t) = x_G(0) + v_{0x}t + (x_0 - x_G(0)) \left(1 - \frac{\sigma_{\hbar x}(t)}{\sigma_{0x}} \right) \quad (22)$$

$$Y^h(t) = y_G(0) + v_{0y}t + (y_0 - y_G(0)) \left(1 - \frac{\sigma_{\hbar y}(t)}{\sigma_{0y}} \right) \quad (23)$$

$$Z^h(t) = z_G(0) + v_{0z}t - \frac{gt^2}{2m} + (z_0 - z_G(0)) \left(1 - \frac{\sigma_{\hbar z}(t)}{\sigma_{0z}} \right) \quad (24)$$

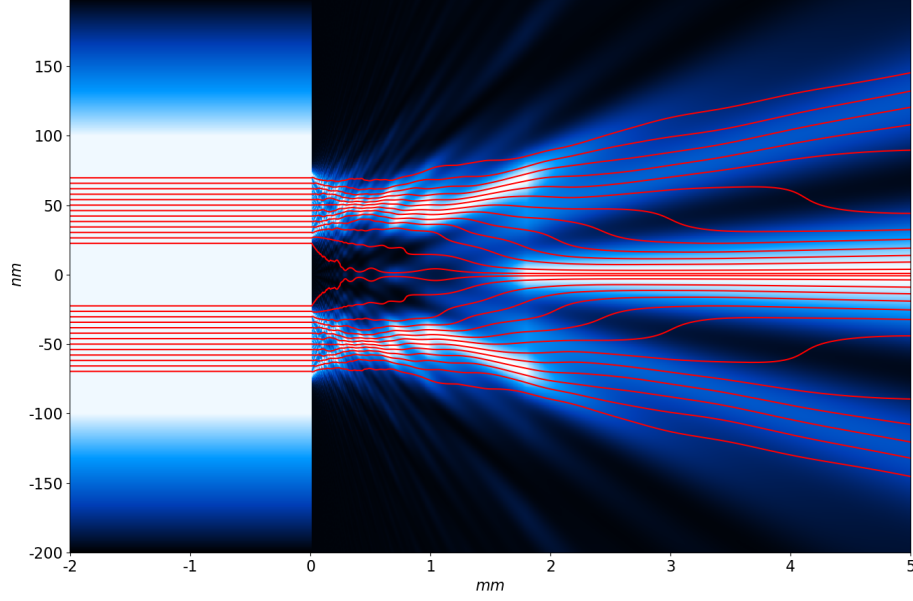


FIGURE 2: Simulation de 24 trajectoires de C_{60} dans les conditions expérimentales de⁴⁶ correspondant à 24 points de départ différents du centre de gravité d'un C_{60} .

avec $\sigma_{\hbar i}(t) = \sigma_{0i} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\sigma_{0i}^2}\right)^2}$ et $i = x, y, z$. On vérifie que cette trajectoire de dBB tend vers la trajectoire que l'on appelle classique et de même point de départ quand on fait converger \hbar vers 0. En réalité, ce n'est pas \hbar qui tend vers 0, mais le dernier terme des trois équations qui est négligeable par rapport aux autres termes si on considère un objet classique comme une pierre, alors que si l'objet est un électron, un atome ou une molécule, ce terme n'est pas forcément négligeable. On observe que si, m , la masse de l'objet augmente, alors la situation est la même que si \hbar diminue. Ce sont ces trajectoires que nous avons utilisées pour simuler l'expérience des fentes de Young de Shimizu⁵¹ avec des atomes froids; nous avons ainsi montré⁵³ pourquoi de tels atomes avec des fonctions d'onde différentes étaient assez cohérentes pour interférer.

Ainsi, la fonction d'onde externe correspond, dans le cadre de la limite semi-classique à l'évolution des centres de masse des systèmes quantiques. Par rapport à l'échelle de la longueur d'onde de de Broglie, on retrouve le monde classique.

B. Cas pratique 2 : mesure du spin par l'onde externe pour l'expérience de Stern et Gerlach

Étudions le cas pratique du spin qui est une propriété également portée par la fonction d'onde externe de la particule. En effet, la mesure du spin d'une particule est *in fine* une mesure de la position de son centre de masse. Considérons l'expérience de Stern et Gerlach permettant de *mesurer* le spin d'un atome d'argent. Ces atomes ont à la sortie de l'enceinte \mathbf{E} une vitesse \mathbf{v} parallèle à (Oy) . Ils traversent l'entrefer d'un électroaimant \mathbf{A}_1 avant de se condenser sur une plaque \mathbf{P}_1 (Fig. 3).

Les moments magnétiques de ces atomes d'argent ont été préparés dans un état pur (θ_0, φ_0) ⁵⁶ de manière qu'à l'arrivée dans l'électroaimant \mathbf{A}_1 à l'instant initial $t = 0$ chaque atome peut être décrit par le spineur gaussien en x et z :

$$\Psi^0(x, z) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z^2+x^2)}{4\sigma_0^2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\varphi_0}{2}} \\ i \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

avec $\mathbf{r} = (x, z)$. La variable y est traitée de manière classique avec $y = vt$. Pour l'atome d'argent⁹, on a $m = 1,8 \times 10^{-25}$ kg, $v = 500$ m/s, $\sigma_0 = 10^{-4}$ m. Dans (25), θ_0 et φ_0 sont les angles polaires caractérisant l'orientation initiale du vecteur

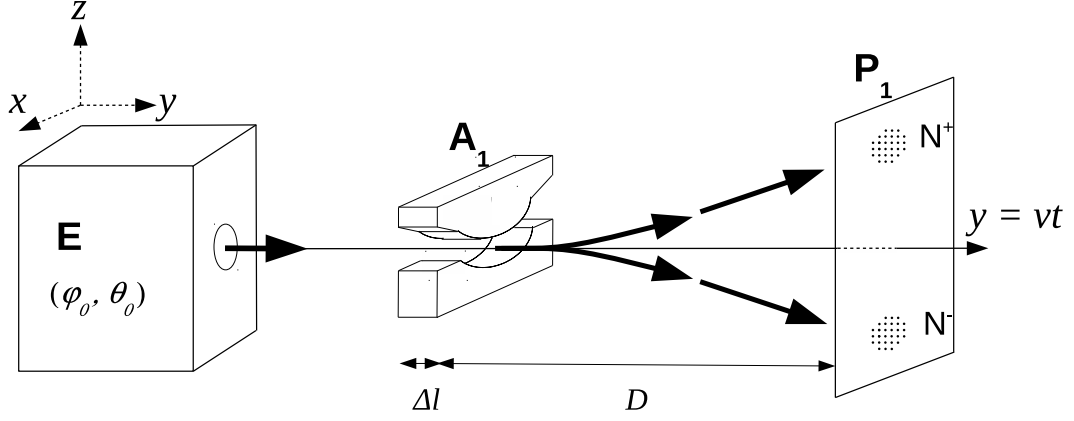


FIGURE 3: Schéma de l'expérience de Stern et Gerlach : un jet d'atomes d'argent, préparé dans un état pur (φ_0, θ_0) et issu de l'enceinte **E** traverse un champ magnétique inhomogène (aimant **A**₁) puis se sépare en deux faisceaux distincts donnant sur la plaque **P**₁ deux taches distinctes d'intensité N^+ et N^- .

représentant le moment magnétique, θ_0 correspond à l'angle avec (Oz) . Ici, nous avons un état pur et tous les atomes d'argent ont la même orientation du moment magnétique.

La plupart des livres de cours de mécanique quantique ne prennent pas en compte l'extension spatiale $f(\mathbf{r}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z^2+x^2)}{4\sigma_0^2}}$ du spineur (25) et se contentent de prendre la fonction d'onde dans l'espace de Hilbert de dimension 2 engendré par $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$|\psi^0\rangle = \cos \frac{\theta_0}{2} e^{i\frac{\varphi_0}{2}} |0\rangle + i \sin \frac{\theta_0}{2} e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} |1\rangle \quad (26)$$

En ne retenant pour le système quantique que la fonction d'onde (26) avec l'orientation (θ_0, φ_0) , on perd le caractère individuel du spineur (25) et on n'en garde que le caractère statistique. L'extension spatiale du spineur (25) nous permet en effet de prendre en compte la position initiale (x_0, z_0) du centre de masse de la particule (variable externe) et de rendre l'évolution du système quantique (fonction d'onde + position) déterministe.

Le spineur initial (25) est en fait uniquement la fonction d'onde externe de l'atome d'argent. La fonction d'onde interne de l'atome d'argent n'est pas utile pour décrire l'expérience. Cependant le fait que l'atome d'argent ait un spin provient du fait de l'addition de tous les moments de spin de ses électrons internes. Les atomes à nombre impair d'électrons, comme l'atome d'argent qui en compte 47, ont un spin demi-entier. La taille de la fonction d'onde interne est de l'ordre de deux fois celle du rayon atomique de l'atome d'argent soit environ 30 nm tandis que la taille initiale de la fonction d'onde externe c'est-à-dire la largeur du paquet d'onde initiale est de l'ordre $3 \times \sigma_0 = 3 \times 10^5$ nm, soit 4 ordres de grandeur plus grand que l'interne.

L'évolution du spineur $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ dans un champ magnétique $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ est alors donnée par l'équation de Pauli⁹ :

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_+}{\partial t} \\ \frac{\partial \psi_-}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} + \mu_B \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad (27)$$

où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ est le magnéton de Bohr, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspond aux trois matrices de Pauli et où $\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}$ correspond à la matrice $B_x\sigma_x + B_y\sigma_y + B_z\sigma_z$.

Les atomes d'argent entrent dans un champ électromagnétique \mathbf{B} orienté principalement suivant l'axe (Oz) , $B_x = B'_0 x$; $B_y = 0$; $B_z = B_0 - B'_0 z$, avec $B_0 = 5$ Tesla, $B'_0 = \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| = -\left| \frac{\partial B}{\partial x} \right| = 10^3$ Tesla/m sur une longueur $\Delta l = 1$ cm. À la sortie du champ magnétique, on a affaire à des particules libres jusqu'à la plaque P_1 placée à une distance $D = 20$ cm.

La particule reste un temps $\Delta t = \frac{\Delta l}{v} = 2 \times 10^{-5}$ s dans le champ magnétique. À la sortie de ce champ, on montre^{32,36} qu'à l'instant $t + \Delta t$ ($t \geq 0$), le spineur externe est égal à :

$$\Psi(x_G, z_G, t + \Delta t) = \begin{pmatrix} R_+ e^{i\frac{s_+}{\hbar}} \\ R_- e^{i\frac{s_-}{\hbar}} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_0}{2} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z_G - z_\Delta - ut)^2 + x_G^2}{4\sigma_0^2}} e^{i\frac{m u z_G + \hbar \varphi_+}{\hbar}} \\ i \sin \frac{\theta_0}{2} (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(z_G + z_\Delta + ut)^2 + x_G^2}{4\sigma_0^2}} e^{i\frac{-m u z_G + \hbar \varphi_-}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (28)$$

avec :

$$z_{\Delta} = \frac{\mu_B B'_0 (\Delta t)^2}{2m} = 10^{-5} m, \quad u = \frac{\mu_B B'_0 (\Delta t)}{m} = 1 m/s. \quad (29)$$

Dans l'interprétation de dBB, le spineur externe va permettre de définir la trajectoire $X_G(t) = (x_G(t), z_G(t))$ du centre de masse de l'atome d'argent à partir de sa position initiale $X_G(0) = (x_G(0), z_G(0))$ par la formule^{4,52} :

$$\frac{dX_G(t)}{dt} = \frac{\hbar}{2m\rho} \text{Im}(\Psi^\dagger \nabla \Psi)|_{\mathbf{x}=X_G(t)} \quad (30)$$

où $\Psi^\dagger = (\Psi^{+*}, \Psi^{-*})$ et $\rho = \Psi^\dagger \Psi$. Bohm et al.⁴ définissent également un champ de vecteurs de spin \mathbf{s} comme :

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2\rho} \Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma} \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2} (\sin\theta \sin\varphi, \sin\theta \cos\varphi, \cos\theta). \quad (31)$$

Le vecteur de spin d'une particule individuelle est évaluée le long de sa trajectoire comme étant : $\mathbf{s} = \mathbf{s}(X_G(t), t)$. Ce vecteur spin est totalement défini par le spineur et la position du centre de masse de la particule.

La figure 4 représente $\rho(z_G, t) = \int \Psi^\dagger(x_G, z_G, t) \Psi(x_G, z_G, t) dx_G$, la densité de probabilité de présence de l'atome d'argent pour les valeurs $\theta_0 = \pi/3$ et $\phi_0 = 0$. L'axe (Oy), de propagation du jet, est en abscisse ($y = v_y t$) et l'axe (Oz) en ordonnée (la variable x n'est pas représentée car l'onde reste gaussienne selon cet axe). L'aimant A_1 est représenté sur la figure par les deux rectangles blancs, il est long de $\Delta l = 1cm$ et il y a $D = 20cm$ de parcourt libre avant que l'atome soit mesurée sur l'écran de détection P_1 . Une trajectoire est aussi représentée sur la figure 4 ainsi que son spin $\mathbf{s}(X_G(t), t)$ le long de cette trajectoire. Si la position du centre de masse de la particule est située dans le haut du paquet d'onde, comme sur la figure, alors la particule va être *mesurée* en spin UP ; si la position initiale est plus basse, elle sera mesurée DOWN.

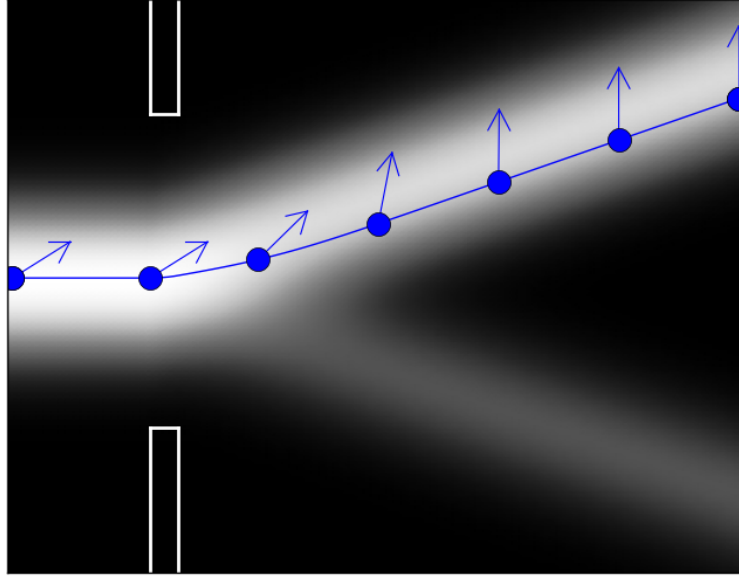


FIGURE 4: Les flèches indiquent l'orientation θ du vecteur spin \mathbf{s} (initialement $\theta_0 = \pi/3$) le long de la trajectoire. La position de la particule existe avant la mesure ; la particule suit alors une trajectoire déterministe et l'impact sur l'écran ne fait que révéler sa position.

Comme pour les particules où le spin n'intervient pas, le spineur externe qui utilise uniquement la résolution de l'équation de Pauli sur les variables externes, donne les mêmes résultats statistiques que la mécanique quantique habituelle pour l'expérience de Stern-Gerlach. Sa résolution permet³⁶ de proposer une claire interprétation de la

mesure du spin en démontrant les postulats de la mesure et le postulat de réduction du paquet d'onde. L'expérience de Stern et Gerlach n'est pas la mesure de la projection du spin selon l'axe (Oz), mais le redressement de l'orientation du spin soit dans la direction du gradient du champ magnétique, soit dans la direction opposée. Le résultat dépend de la position initiale du centre de masse de la particule dans la fonction d'onde externe. C'est une explication simple de la non contextualité de la mesure du spin le long de différents axes. La durée de la mesure est le temps nécessaire à la particule pour redresser son spin dans la direction finale. La valeur "mesurée" (le spin) n'est pas une valeur pré-existante comme la masse et la charge de la particule mais une valeur contextuelle conforme au théorème de Kochen et Specker.

C. Cas pratique 3 : simulation des particules intriquées dans l'expérience EPR-B

Pour l'expérience EPR-B, le spineur total (état singulet des deux particules massives intriquées) est encore uniquement le spineur externe. Mais comme pour l'expérience de Stern et Gerlach, la fonction d'onde singulet initiale a une extension spatiale :

$$\Psi_0(\mathbf{x}_G^A, \mathbf{x}_G^B) = \frac{1}{\sqrt{2}} f(\mathbf{x}_G^A) f(\mathbf{x}_G^B) (|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \quad (32)$$

où \mathbf{x}_G^A et \mathbf{x}_G^B sont les centres de gravité des particules A et B et où $f(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4\sigma_0^2}}$.

Il est possible de retrouver cette fonction singulet (32) à partir du principe de Pauli. Pour cela, nous supposons qu'à l'instant de la création des deux particules intriquées A et B , chacune des particules a une fonction d'onde initiale $\Psi_0^A(\mathbf{x}_G^A, \theta_0^A, \varphi_0^A)$ et $\Psi_0^B(\mathbf{x}_G^B, \theta_0^B, \varphi_0^B)$ de type (25) avec des spins opposées : $\theta_0^B = \pi - \theta_0^A$, $\varphi_0^B = \varphi_0^A - \pi$.

Si alors on applique le principe de Pauli qui stipule que la fonction d'onde d'un objet à deux corps doit être antisymétrique ; il faut écrire :

$$\begin{aligned} \Psi_0(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A, \mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) &= \Psi_0^A(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A) \Psi_0^B(\mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) - \Psi_0^A(\mathbf{r}_B, \theta_B, \varphi_B) \Psi_0^B(\mathbf{r}_A, \theta_A, \varphi_A) \\ &= -e^{i\varphi_A} f(\mathbf{r}_A) f(\mathbf{r}_B) (|+A\rangle|-B\rangle - |-A\rangle|+B\rangle) \end{aligned} \quad (33)$$

qui est l'état singulet avec extension spatiale (32) à un facteur près. De nouveau cette extension spatiale est essentielle pour résoudre correctement l'équation de Pauli en espace car elle est nécessaire pour tenir compte de la position de l'atome dans sa fonction d'onde externe. On *mesure* alors le spin des deux particules l'un après l'autre.

On montre mathématiquement³⁶ que la première particule mesurée, la particule A , se comporte dans le premier appareil de Stern-Gerlach de la même façon que si elle n'était pas intriquée. Durant la *mesure* de A , la densité de la particule B évolue aussi comme si elle était non intriquée³⁶. Ces deux propriétés pourront être testé expérimentalement dès que l'expérience EPR-B avec des atomes sera réalisable. Durant la *mesure* de A , le spin de la particule B se redresse pour être toujours en opposition avec celui de la particule A ³⁶. La seconde mesure est une mesure de type Stern-Gerlach avec des orientations particulières. On retrouve alors parfaitement les résultats de la mécanique quantique et la violation des inégalités de Bell.

Comme pour Stern et Gerlach, le spineur externe de l'état intriqué, qui utilise uniquement la résolution de l'équation de Pauli sur les variables externes des deux particules, donne pour l'EPR-B les mêmes résultats statistiques que la mécanique quantique habituelle. Les particules quantiques possèdent une position locale comme une particule classique, mais possède également un comportement non-local du à la fonction d'onde externe intriquée.

On peut se reporter à notre article "*Replacing the Singlet Spinor of the EPR-B Experiment in the Configuration Space with two Single-particle Spinors in Physical Space*"³⁶ où on montre précisément comment interfèrent ces trois spineurs externes, le spineur singulet avec extension spatiale qui vérifie l'équation de Pauli et les spineurs des deux particules intriquées avec leurs extensions spatiales.

IV. L'INTERPRÉTATION DE SCHRÖDINGER DE LA FONCTION D'ONDE INTERNE : LA CHIMIE QUANTIQUE

Pour la fonction d'onde interne, l'interprétation est plus ouverte : faut-il prendre l'interprétation de dBB? ou l'interprétation de Copenhague restreinte à la fonction d'onde interne? ou l'interprétation proposée dès 1926 par Schrödinger. C'est par elle, qui est peu connue, que nous commencerons ; mais en fin de section, nous discuterons des deux autres.

Schrödinger propose en 1926, puis au congrès Solvay de 1927 et enfin en 1952⁵⁰ lors d'une forte controverse avec l'école de Göttingen-Copenhague, une interprétation de la fonction d'onde à la fois réaliste et déterministe, comme le

rapporte Born dans sa conférence Nobel en 1954⁶ : “En outre Schrödinger croyait que sa théorie ondulatoire rendait possible un retour au déterminisme de la Physique classique : il proposa (et il a renouvelé récemment⁵⁰ avec insistance cette proposition) d’abandonner complètement l’image des particules et, au lieu de considérer les électrons comme de petits éléments discrets, de parler d’une distribution continue de densité $|\psi|^2$, ou de densité électrique $e|\psi|^2$ ”. On peut comprendre les critiques d’une telle interprétation pour la fonction d’onde totale, mais les arguments contre ne sont a priori plus valables pour la fonction d’onde interne. La critique la plus importante correspondait en effet à la contradiction entre ce que considère Schrödinger : “the particles are narrow wave packets” et le fait que la fonction externe s’étale dans le temps comme le fait remarquer Born dans la suite de son discours Nobel.

La grande difficulté pour définir une interprétation fiable de la fonction d’onde interne d’un système quantique de N particules est que la fonction d’onde interne est définie dans l’espace des configurations de dimension $3N$ et que l’on ne lui connaît pas de solutions explicites. Nous allons cependant nous appuyer sur deux exemples particuliers à une seule particule, l’oscillateur harmonique et l’électron dans l’atome d’hydrogène comme l’a fait Schrödinger, puis nous proposerons une généralisation au cas à N particules.

A. L’interprétation de Schrödinger de la fonction d’onde interne d’une particule unique

L’objectif de l’article de Schrödinger de 1926, “Le passage continu de la micro-mécanique à la mécanique macroscopique”⁴⁹, est de “montrer **in concreto**, sur l’exemple simple que nous avons choisi (l’oscillateur harmonique), comment s’effectue le passage à la mécanique macroscopique. A cet effet, je vais démontrer qu’un groupe de vibrations propres d’ordre n (“nombres quantiques”) suffisamment élevés mais relativement peu différents les uns des autres, permet de représenter un “point matériel” qui se meut suivant les lois de la mécanique ordinaire.” Il considère le problème classique de l’oscillateur harmonique de dimension 1 d’hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Il cherche alors la solution de l’équation de Schrödinger pour une condition initiale particulière que l’on peut écrire aujourd’hui sous la forme

$$\Psi_0^h(x) = (2\pi\sigma_h)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_h^2}} \quad (34)$$

avec $\sigma_h = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ et $x_0 \gg \sigma_h$. Il montre⁴⁹ que ce paquet d’ondes initial correspond à un petit nombre de fonctions propres φ_n de l’oscillateur harmonique autour de la valeur $n \sim \frac{1}{2}(\frac{x_0}{\sigma_h})^2$. On obtient alors l’état cohérent :

$$\Psi^h(x, t) = (2\pi\sigma_h)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(x-x(t))^2}{4\sigma_h^2} + i\frac{mv(t)x}{\hbar}} \quad (35)$$

où $x(t) = x_0 \cos \omega t$ et $v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t$ correspondent à la position et la vitesse du centre de masse d’une particule classique. L’état cohérent est donc basé sur deux échelles, une de type classique avec x_0 et une de type quantique avec σ_h qui correspond à la taille du paquet d’ondes et qui oscille avec son centre de masse sans changer de forme. On rappelle que pour l’état cohérent d’un oscillateur harmonique à deux dimensions, la trajectoire quasi-classique est une ellipse.

L’extension de cette interprétation à l’électron dans l’atome d’hydrogène est basée sur la conjecture de Schrödinger de 1926 :

Conjecture 1 [de Schrödinger] : “Il est certain qu’on peut construire [...] des paquets d’ondes gravitant sur des ellipses de Kepler à un grand nombre de quanta et formant l’image ondulatoire de l’électron d’un atome d’hydrogène”⁴⁹

Nous allons voir que cette conjecture peut se baser sur l’analogie avec les états cohérents de l’oscillateur harmonique pour la fonction d’onde d’un électron dans un état de Rydberg.

On se donne encore deux échelles, le rayon de Bohr a_0 et un rayon très grand $a \gg a_0$. On cherche alors un paquet d’ondes correspondant à un petit nombre de fonctions propres $\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$ de l’atome d’hydrogène autour de la valeur $n \sim \sqrt{\frac{a}{a_0}}$.

Il a fallu attendre 1995 pour que la "conjecture" de Schrödinger de 1926 se réalise pour le cas d’un électron dans un état de Rydberg. On trouve dans Bialynicki-Birula⁴⁰, Kalinski, Eberly, Buchleitner et Delande⁸ les premières constructions d’un paquet d’ondes non dispersif en dimension 3 pour l’atome d’hydrogène en présence d’une micro-onde polarisée circulairement. “En passant dans le référentiel tournant, le système devient indépendant du temps et il existe un point fixe **stable** située à une distance finie du noyau le long de l’axe du champ électrique de la micro-onde. Dans le référentiel du laboratoire, cela correspond à une orbite circulaire de Bohr parcourue à une vitesse angulaire constante égale à celle de la micro-onde ; cette orbite est le centre de l’îlot de résonance. A son voisinage, on peut

construire des paquets d'ondes quantiques qui tournent autour du noyau sans se déformer. Ces paquets d'ondes ne sont pas Gaussiens, mais totalement non dispersifs²¹. Ces paquets d'ondes non-dispersifs correspondent à des trajectoires périodiques et sont vecteurs propres de l'opérateur de Floquet.

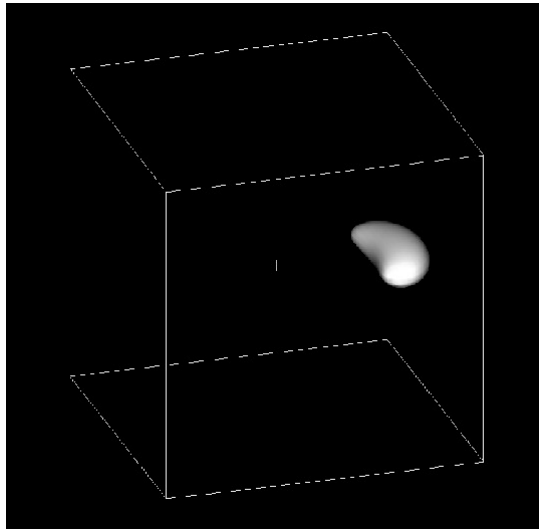


FIGURE 5: Paquet d'ondes cohérent de l'atome d'hydrogène, d'après l'image de⁸.

Notons que ces paquets d'ondes ne correspondent pas aux solutions habituelles des cours de mécanique quantique qui sont des solutions stationnaires de l'électron et non des paquets d'ondes localisés sur une trajectoire périodique. La figure 5 montre un tel paquet d'ondes, en forme de banane, calculé dans un champ de fréquence voisine de 30 GHz avec un nombre quantique principal $n = 60$. Le paquet est à environ 4000 rayons de Bohr du noyau et tourne autour de celui-ci dans le plan horizontal **sans se déformer**.

La première réalisation expérimentale déterminante de paquets d'ondes non-dispersifs a été effectuée en 2004 par Maeda et Gallagher⁴², avec l'observation d'une durée de vie supérieure à 15000 périodes du champ, à comparer aux 10 périodes observées en l'absence de champ pour la dispersion du paquet d'ondes.

Remarque 4 - Paquets d'ondes en présence ou non de champ périodique - Les paquets d'ondes simulés numériquement en 1995 et ceux réalisés expérimentalement en 2004 sont créés et maintenus grâce à la présence d'un champ externe périodique. On pourrait donc réfuter la conclusion de l'existence de paquets d'ondes périodiques sans la présence de ce champ externe. Mais, comme le font remarquer Maeda et Gallagher, le champ n'a pas d'influence sur l'existence des paquets d'ondes périodiques sans déformation, mais seulement sur le nombre de périodes sans dispersion.

Comme l'avait remarqué Schrödinger, ces paquets d'ondes dynamiques sont difficiles à déterminer car ils n'en existe pas de représentation analytique. Mais on peut calculer analytiquement la dynamique du centre de gravité de ces états en utilisant les théorèmes de Floquet et d'Ehrenfest.

Ainsi pour une particule liée comme l'électron dans l'atome d'hydrogène, on considère comme valable l'interprétation de Schrödinger restreinte à la fonction d'onde interne : l'électron par exemple peut être vu comme un nuage électronique ayant comme densité de charges $\rho_{int} = e|\varphi(\mathbf{x}, t)|^2$. On étend cette interprétation de la fonction d'onde interne aux particules libres.

C'est la conclusion que Schrödinger tire lors du congrès Solvay de 1927 : "J'ai trouvé que la manière suivante, peut-être un peu naïve, mais facilement saisissable de se représenter les choses, est utile. Le système classique de points matériels n'existe pas réellement, mais il existe quelque chose qui remplit continûment tout l'espace [...] le système réel est une image composite du système classique dans tous ses états possibles, obtenue en employant $\phi\phi^*$ comme "fonction de poids". Les systèmes auxquels on applique la théorie se composent classiquement d'un grand nombre de points matériels chargés. Ainsi que nous venons de le voir, la charge de chacun de ces points est distribuée d'une façon continue à travers l'espace et chaque point à charge e fournit à la charge de l'élément de volume tridimensionnel $dxdydz$ la contribution $e \int \phi\phi^* dxdydz$. Comme $\phi\phi^*$ dépend en général du temps, ces charges varient".

B. L'interprétation de Schrödinger généralisée de la fonction d'onde interne de N particules

Considérons un système quantique composé de N particules. À l'instant initial de sa préparation, sa fonction d'onde totale Ψ_0 émerge, comme nous l'avons vu dans la remarque 2 de la section II, à partir de l'intrication des fonctions initiales Ψ_0^j des particules j le composant :

$$\Psi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N) = F(\Psi_0^1(\mathbf{x}_1), \Psi_0^2(\mathbf{x}_2), \Psi_0^3(\mathbf{x}_3), \dots, \Psi_0^N(\mathbf{x}_N)). \quad (36)$$

Pour l'expérience EPR-B, cette équation correspond à l'équation (33) utilisant l'antisymétrisation de Pauli pour obtenir la fonction d'onde singulet comme nous l'avons rappelé en section III C.

L'évolution du système quantique est alors donnée par l'équation de Schrödinger qui permet de calculer la fonction d'onde totale $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ à partir de sa condition initiale $\Psi_0(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N)$.

Pour généraliser l'interprétation de Schrödinger aux cas d'un système quantique de plusieurs particules, nous nous appuyons sur la conjecture suivante :

Conjecture 2 [généralisée de Schrödinger] : À une fonction d'onde totale $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ et aux N fonctions d'onde initiales $\Psi_0^j(\mathbf{x}_j)$ vérifiant l'équation (36), il correspond de manière unique N fonctions d'ondes individuelles dépendant du temps $\Psi^j(\mathbf{x}_j, t)$ telles que :

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N, t) = F_t(\Psi^1(\mathbf{x}_1, t), \Psi^2(\mathbf{x}_2, t), \Psi^3(\mathbf{x}_3, t), \dots, \Psi^N(\mathbf{x}_N, t)). \quad (37)$$

Cette possibilité de retro-ingénierie est une hypothèse forte. Cependant, nous avons montré, pour les trois spineurs externes de l'expérience EPR-B, que ce type de reconstitution était possible. On suppose ici que cette reconstitution est aussi théoriquement possible pour les les fonctions d'onde internes.

Dans le cadre de cette conjecture, l'interprétation de Schrödinger pour la fonction d'onde interne est alors déterministe. De plus, la position du centre de masse de la particule j du système quantique est égale à :

$$X^j(t) = \int \mathbf{x} |\Psi^j(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x} \quad (38)$$

et vérifie le théorème d'Ehrenfest.

La figure 6 est une topographie d'un nanotube de carbone observé à l'aide d'un microscope à effet tunnel ; les nuances de jaune et de rouge traduisent l'altitude du relief. Cette image peut être considérée comme une représentation 2D de la norme de la fonction d'onde interne du nanotube.

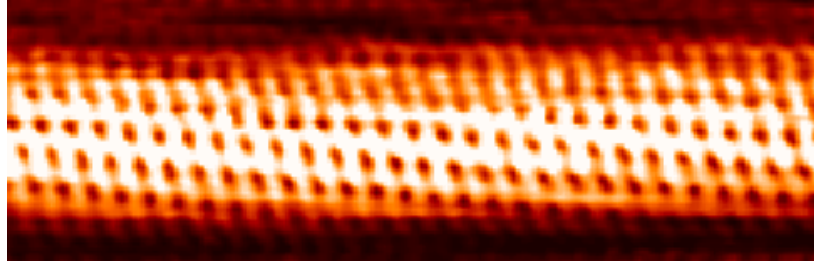


FIGURE 6: Nanotube de carbone observé à l'aide d'un microscope à effet tunnel (STM) [source : Taner Yildirim (The National Institute of Standards and Technology - NIST) - Public Domain]

Donnons quelques arguments supplémentaires en la faveur de cette interprétation de Schrödinger généralisée pour la fonction d'onde interne :

- C'est l'interprétation réaliste la plus simple pour la fonction d'onde interne. La critique habituelle (le problème de la mesure) n'est plus valable car elle ne s'adresse qu'à l'interprétation de la fonction d'onde externe.
- Cette interprétation est à la base du **modèle de l'électron élastiquement lié**.
- Le premier théorème de Hohenberg et Kohn³⁹, qui est à la base de la **théorie de la fonctionnelle densité** et qui stipule qu'à une densité électronique donnée correspond une fonction d'onde unique, est fondamentalement compatible avec l'interprétation de Schrödinger de la fonction d'onde interne. L'énergie cinétique des électrons est alors approximée comme une fonctionnelle explicite de la densité, tandis que les contributions de l'attraction noyau-électron et de la répulsion électron-électron sont traitées de manière classique.

- La théorie de la double solution avec l'interprétation de Schrödinger est donc aussi fondamentalement compatible avec la méthodologie de **la dynamique moléculaire**.
- Terminons avec l'expérience récente (2019) de Mineev, Devoret et al.⁴⁵ sur "le saut de l'état fondamental à un état excité d'un atome artificiel supraconducteur à trois niveaux". Elle semble donner raison à Schrödinger dans sa discussion de 1952 avec l'école de Copenhague-Göttingen sur les sauts quantiques, car "les résultats expérimentaux démontrent que l'évolution de chaque saut effectué est continue, cohérente et déterministe".⁴⁵ Et comme l'explique Devoret : "Nos résultats expérimentaux montrent que les sauts quantiques sont imprévisibles et discrets (comme le pensait Bohr) sur de longues périodes, ils peuvent être continus (comme suggéré par Schrödinger) et prévisibles sur de courtes périodes de temps". Car, juste avant qu'un saut est lieu, il y a toujours une période de latence (de quelques microsecondes) pendant laquelle il est possible d'acquérir un signal qui avertit du prochain saut. Ces transitions continues et déterministes sont compatibles avec l'interprétation de Schrödinger généralisée. Il devrait en être de même pour des opérateurs de création et d'annihilation continus et déterministes.

Remarque 5 - Fonction d'onde externe négligée - Les transitions d'états de la fonction d'onde interne se mesurent indirectement via l'énergie des particules émises (photons, électrons). C'est le cas des mesures de raies spectrales de vapeur atomique (de type raies de Balmer, par exemple, ou les expériences de Franck et Hertz) ou des expériences de sauts quantiques de Dehmelt (fluorescence sur un ion unique à trois niveaux) et de Mineev et Devoret. Dans ces expériences, la fonction d'onde externe (du centre de masse) du système quantique est négligée. Ce n'est plus le cas des expériences de refroidissement d'atomes, où il faut tenir compte du recul du centre de masse après chaque absorption/émission.

Les arguments précédents ne sont pas suffisants pour exclure toutes les autres interprétations. Par exemple, l'interprétation de dBB pour la fonction d'onde interne est l'alternative réaliste et déterministe la plus plausible. Elle reste de plus en continuité avec l'interprétation de la fonction d'onde externe.

Remarque 6 - L'interprétation de dBB de la fonction d'onde interne - L'interprétation de Schrödinger que nous avons défendue est basée sur l'existence de paquets d'ondes non dispersifs dont les évolutions sont déterministes. L'interprétation de dBB s'applique aussi très bien à des paquets d'ondes non dispersifs. Montrons le sur le cas de l'état cohérent d'un oscillateur harmonique. On tire de l'équation (35) que la vitesse de dBB est $v^h(x, t) = \frac{\nabla S^h(x, t)}{m} = v(t)$. Pour une particule de position initiale $x_0 + \eta$, où η est tiré au hasard dans une Gaussienne d'écart type σ_h , la trajectoire de dBB est $x_\eta(t) = x(t) + \eta$. Lorsque l'on fait tendre \hbar vers 0, $x_\eta(t)$ tend aussi vers la trajectoire classique $x(t)$ et l'interprétation de dBB est cohérente pour représenter une particule unique. Il en est de même pour l'interprétation généralisée de Schrödinger comme Norsen et al. l'ont montré récemment⁴⁷ : pour des particules sans spin non relativistes, il est aussi possible dans la théorie de l'onde pilote de dBB de remplacer la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_N, t)$ dans l'espace de configuration par N fonctions d'ondes $\Psi^j(\mathbf{x}_j, t)$ dans l'espace physique $\mathcal{3D}$. Ces fonctions d'onde sont les N fonctions d'onde conditionnelles introduites par Dürr, Goldstein et Zanghì²³ :

$$\Psi^j(x_j, t) = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t)|_{x_i=X_i(t)} \text{ pour } i \neq j$$

où $X_i(t)$ est la position de la particule i en mécanique Bohmienne.

Notons enfin qu'il est aussi possible de restreindre l'interprétation de Copenhague à la fonction d'onde interne.

Remarque 7 - Interprétation de Copenhague restreinte à la fonction d'onde interne - Remarquons que si l'on restreint l'interprétation de Copenhague à la seule fonction d'onde interne, celle-ci redevient cohérente. En effet, la critique majeure de l'interprétation de Copenhague, ne concerne ni le réalisme et ni le déterminisme, mais l'incohérence d'avoir un postulat au moment de la mesure (postulat de réduction du paquet d'onde) qui n'est pas relié explicitement à l'évolution de la fonction d'onde (équation de Schrödinger). La théorie quantique ne précise s'il faut utiliser le postulat de réduction du paquet d'onde ou l'équation de Schrödinger. Cette incohérence conduit au problème dit de la mesure⁴⁴ et constitue le problème théorique majeur de la mécanique quantique. Cependant si l'interprétation de Copenhague ne concerne que la seule fonction d'onde interne, alors le postulat de la réduction du paquet d'ondes n'est plus nécessaire. En effet, la mesure déterministe est prise en charge par l'onde externe et le problème de la mesure ne se pose pas pour la fonction d'onde interne. Cependant l'expérience récente de Mineev, Devoret et al.⁴⁵ semble invalider cette interprétation même pour la fonction d'onde interne.

V. UNE EXPÉRIENCE CRUCIALE : INTERFÉRENCES ASYMÉTRIQUES

Pour définir une expérience permettant de valider l'existence simultanée des fonctions d'onde externe et interne, nous nous baserons sur les résultats de deux expériences, une expérience déjà ancienne (1983) de l'équipe de Serge

Haroche²⁷ avec des atomes de Rydberg et une expérience plus récente (1999) de l'équipe de Zeilinger¹ avec des molécules C_{60} .

Dans l'expérience d'Haroche, on mesure "la transmission d'un jet d'atomes de Rydberg à travers une grille métallique faite d'un réseau de fentes micrométriques. La transmission décroît linéairement avec le carré du nombre quantique principal n , avec une coupure pour une valeur maximum de n ". Ainsi dès que n est assez grand ($n \geq 60$ dans cette expérience pour des fentes de $1 \mu\text{m}$ de large), la densité des particules mesurée après les fentes est nulle. L'interprétation habituelle, qui ne fait pas de différence entre l'onde et la particule, suppose que, si les particules ne passent pas, la fonction d'onde (totale) de la particule ne passe pas non plus et donc qu'elle est nulle derrière les fentes; c'est l'hypothèse standard.

Dans l'expérience d'interférences de Zeilinger avec des molécules C_{60} , les résultats expérimentaux montrent que la densité de ces molécules après les fentes se calcule en prenant uniquement la fonction d'onde du centre de masse (onde externe) et en ne tenant pas compte de l'onde interne de la molécule.

Dans l'interprétation des fonctions d'onde externe et interne, où on fait la différence entre l'onde du centre de gravité et celle de la molécule, les conditions de passage par une fente de l'onde externe et de l'onde interne peuvent être différentes : si une fente est plus petite que la taille de l'onde interne de la particule, alors la particule ne passera pas la fente et son onde externe non plus. Mais si il y a deux fentes une plus petite que la taille de l'onde interne et une plus grande, l'onde interne pourra passer par la grande fente mais pas par la petite. Si elle passe par la grande, quand est-il alors de son onde externe? Elle passera évidemment par la grande fente, mais passera-t-elle également par la petite? C'est l'hypothèse alternative.

Nous avons proposé deux expériences permettant de tester cette hypothèse, l'une qui utilise des molécules de fullerènes³⁴, l'autre qui utilise des atomes de Rydberg³¹ et qui est actuellement réalisable, contrairement à celle avec les fullerènes.

L'idée de ces expériences est de réaliser des interférences, non à partir de deux fentes identiques, mais à partir d'une fente A (grande par rapport à la taille d'un atome de Rydberg ou d'un fullerène) et d'une grille B de plusieurs centaines de petites fentes qui ne laissent pas passer l'atome ou la molécule. Soit par exemple pour les atomes de Rydberg avec $n = 60$, une fente A de $100 \mu\text{m}$ et une grille B de 1000 fentes de $0,1 \mu\text{m}$. On montre par simulation³¹ que les résultats d'interférence permettent de discriminer entre l'hypothèse standard et l'hypothèse alternative.

VI. CONCLUSION

Nous avons proposé une théorie de la double solution répondant aux spécification de Louis de Broglie²⁰ :

"J'introduisais, sous le nom de "théorie de la double solution" l'idée qu'il fallait distinguer deux solutions distinctes, mais intimement reliées à l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde u étant une onde physique réelle et non normable comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, l'onde ψ de Schrödinger, normable et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités".

Dans cette théorie, la fonction d'onde totale d'un système quantique se décompose en une fonction d'onde externe correspondant aux variables externes du système quantique (position et vitesse du centre de masse, orientation du spin global) et une fonction d'onde interne correspondant aux variables internes du système quantique. Les fonctions d'onde interne et externe correspondent respectivement aux ondes u et ψ de la spécification de de Broglie, l'onde totale étant approximativement le produit des ondes u et ψ . La fonction d'onde interne u est une onde physique représentant le système quantique microscopique tandis que la fonction d'onde externe ψ est une onde associée au centre de masse du système quantique.

Cette décomposition mathématique en deux fonctions d'onde est déjà connue et utilisée pour de nombreuses expériences. On montre dans cet article que cette décomposition n'est pas seulement mathématique mais aussi porteuse d'un sens physique avec des interprétations différentes.

En étudiant la convergence de la fonction d'onde externe ψ lorsque h tend vers 0, nous avons montré qu'il est fort probable qu'elle "pilote" le centre de masse du système quantique comme dans l'interprétation de l'onde pilote de Broglie-Bohm. Elle est, de plus, compatible avec l'interprétation statistique de Born.

L'interprétation de la fonction d'onde interne u peut être reliée à l'interprétation de Schrödinger où les densités des fonctions d'onde des particules correspondent à de réelles densités. Les centres de gravité des particules suivent des trajectoires classiques à partir du théorème d'Ehrenfest et cette interprétation de la fonction d'onde interne est déterministe. Cependant l'interprétation dBB est aussi possible. Notons que dans les deux cas, notre approche de la double solution est réaliste et déterministe.

Cette double solution expliquée par les fonctions d'onde externe et interne est une grille de lecture nouvelle qui permet de comprendre les débats sur l'interprétation de la mécanique quantique, en particulier ceux du congrès Solvay de 1927, chacun des pères fondateurs ayant une part de vérité sur une des deux fonctions d'onde qu'il généralise à la

fonction d’onde globale : de Broglie pour l’onde pilote de la fonction d’onde externe, Schrödinger pour le soliton de la fonction d’onde interne, Born pour l’interprétation statistique de la fonction d’onde externe, l’école de Copenhague pour le caractère complet de la fonction d’onde interne. Cette décomposition donne une explication simple de la dualité onde-corpuscule ; L’onde externe pilote le système quantique tandis que l’onde interne représente la partie corpusculaire du système.

Cette décomposition permet aussi de voir sous un nouveau paradigme les relations entre mécanique quantique et relativité générale, la gravitation n’apparaissant que dans la fonction d’onde externe.

Il reste cependant beaucoup à faire sur cette théorie de la double solution, pour laquelle Louis de Broglie aura, en 1966, cette interrogation pathétique et cette lucidité sur sa direction de recherche et le regard de l’histoire :

“L’avenir, un avenir que je ne verrai sans doute pas, tranchera peut-être la question : il dira si mon point de vue actuel est l’erreur d’un homme déjà assez âgé qui reste attaché aux idées de sa jeunesse ou, au contraire, s’il traduit la clairvoyance d’un chercheur qui a réfléchi pendant toute sa vie sur le problème le plus fondamental de la physique contemporaine”¹⁸

* Electronic address: michel.gondran@polytechnique.org

† Electronic address: alexandre.gondran@enac.fr

- ¹ M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, and A. Zeilinger. Wave-particle duality of C60 molecules. *Nature*, 401 :680–682, 1999.
- ² J. Baudon and J. Robert. *Interférométrie atomique*. Diff Sciences, 2004.
- ³ D. Bohm. A Suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. *Phys.Rev.*, 85 :166–193, 1952.
- ⁴ D. Bohm, R. Schiller, and J. Tiomno. A causal interpretation of the pauli equation (A). *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 1(1) :48–66, 1955.
- ⁵ N. Bohr. The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. *Nature*, 121 :580–590, 1928. retranscription de sa communication à la Conférence de Côme de 1927 en commémoration de Volta.
- ⁶ M. Born. Continuity, determinism, and reality. *Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematiskfysiske Meddelelser*, 30(2) :1–26, 1955.
- ⁷ M. Born and W. Heisenberg. Mechanics of Quanta. In *Rapports et Discussions du Cinquieme Conseil de Physique Tenu à Bruxelles du 24 au 29 Octobre 1927*, pages 143–184, 1928.
- ⁸ A. Buchleitner and D. Delande. Nondispersive Electronic Wave Packets in Multiphoton Processes. *Phys. Rev. Lett.*, 75(8) :1487–1490, Aug 1995.
- ⁹ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum mechanics*. Quantum Mechanics. Wiley, 1977.
- ¹⁰ S. Colin, T. Durt, and R. Willox. L. de Broglie’s double solution program : 90 years later. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :19–72, 2017.
- ¹¹ Y. Couder and E. Fort. Single-Particle Diffraction and Interference at a Macroscopic Scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97 :154101, Oct 2006.
- ¹² Y. Couder, E. Fort, C.-H. Gautier, and A. Boudaoud. From Bouncing to Floating : Noncoalescence of Drops on a Fluid Bath. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :177801, May 2005.
- ¹³ Y. Couder, S. Protière, E. Fort, and A. Boudaoud. Walking and orbiting droplets. *Nature*, 437 :208, 2005.
- ¹⁴ J. Dalibard. *Cohérence quantique et dissipation*, 2006. phys.ens.fr/~dalibard/Notes_de_cours/magistere_2006.pdf.
- ¹⁵ L. de Broglie. La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *Journal de physique*, 8 :225–241, 1927.
- ¹⁶ L. de Broglie. *Une tentative d’interprétation causale et non linéaire de la mécanique ondulatoire : La théorie de la double solution*. Gauthier-Villars, 1956. English translation in¹⁷.
- ¹⁷ L. de Broglie. *Non-linear wave mechanics. A causal interpretation*. Elsevier Pub. Co., 1960.
- ¹⁸ L. de Broglie. *Certitudes et incertitudes de la science*. Albin Michel, Paris, France, 1966.
- ¹⁹ L. de Broglie. Réflexions sur la causalité. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 2(2) :69–72, 1977.
- ²⁰ L. de Broglie and J. Andrade e Silva. *La réinterprétation de la mécanique ondulatoire*. Gauthier-Villars, 1971.
- ²¹ D. Delande. Notice sur les titres et travaux. Technical report, LKB, UPMC, 2005.
- ²² P. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, 1930.
- ²³ D. Dürr, S. Goldstein, and N. Zanghi. Quantum equilibrium and the role of operators as observables in quantum theory. *Journal of Statistical Physics*, 116 :959–1055, 2004.
- ²⁴ T. Durt. L. de Broglie’s double solution and self-gravitation. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :73–102, 2017.
- ²⁵ A. Eddi, E. Fort, F. Moisy, and Y. Couder. Unpredictable Tunneling of a Classical Wave-Particle Association. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :240401, Jun 2009.
- ²⁶ A. Einstein. Elementare Überlegungen zur Interpretation der Grundlagen der Quanten-Mechanik. *Scientific Papers presented to Max Born, Olivier and Boyd ; trad. fr. in A. Einstein, Œuvres choisies 1, Quanta, Seuil et CNRS, 1989.*, 368(5) :409–547, October 1953.
- ²⁷ C. Fabre, M. Gross, J. M. Raimond, and S. Haroche. Measuring atomic dimensions by transmission of Rydberg atoms through micrometre size slits. *Journal of Physics B : Atomic and Molecular Physics*, 16(21) :L671, 1983.

- ²⁸ D. Fargues. Louis de Broglie's 'double solution', a promising but unfinished theory. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :9–18, 2017.
- ²⁹ R. Feynman and A. Hibbs. *Quantum Mechanics and Paths Integrals*. McGraw-Hill, 1965.
- ³⁰ E. Fort, A. Eddi, A. Boudaoud, J. Moukhtar, and Y. Couder. Path-memory induced quantization of classical orbits. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 107(41) :17515–17520, 2010.
- ³¹ M. Gondran, M. Božić, D. Arsenović, and A. Gondran. Proposed Experiment with Rydberg Atoms to Study the Influence of Particle Size on Quantum Interference. *Acta Physica Polonica A*, 112(5) :805, November 2007. <http://dx.doi.org/10.12693/APhysPolA.112.805>.
- ³² M. Gondran and A. Gondran. A complete analysis of the Stern-Gerlach experiment using Pauli spinors, 2005. arXiv : quant-ph/051276.
- ³³ M. Gondran and A. Gondran. Numerical simulation of the double slit interference with ultracold atoms. *American Journal of Physics*, 73(6) :507–515, 2005. arXiv :0712.0841.
- ³⁴ M. Gondran and A. Gondran. A Crucial Experiment to Test the de Broglie-Bohm Trajectories for Indistinguishable Particles. In *Madrid Workshop on Bohmian Mechanics*, 27-30 May 2006. arXiv :quant-ph/0603200.
- ³⁵ M. Gondran and A. Gondran. A synthetic interpretation : the double-preparation theory. *Physica Scripta*, T163 :014029, Dec. 2014. hal-01109005.
- ³⁶ M. Gondran and A. Gondran. Replacing the Singlet Spinor of the EPR-B Experiment in the Configuration Space with Two Single-Particle Spinors in Physical Space. *Foundations of Physics*, 46(9) :1109–1126, 2016. arXiv :1504.04227.
- ³⁷ M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 3e édition, 1995.
- ³⁸ M. Gondran and M. Minoux. *Graphs, Dioids and Semi-rings : New models and Algorithms*. Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces, 2008.
- ³⁹ P. Hohenberg and W. Kohn. Inhomogeneous Electron Gas. *Phys. Rev.*, 136 :B864–B871, Nov 1964.
- ⁴⁰ M. K. I. Bialynicki-Birula and J. H. Eberly. Lagrange Equilibrium Points in Celestial Mechanics and Nonspreading Wave Packets for Strongly Driven Rydberg Electrons. *Phys. Rev. Lett.*, 73(1777), 1994.
- ⁴¹ E. Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer Form. *Zeit. Phys.*, 40 :322–326, 1926.
- ⁴² H. Maeda and T. Gallagher. Non dispersing Wave Packets. *Phys. Rev. Lett.*, 92(13) :133004–133011, 2004.
- ⁴³ A. Matzkin. Dynamical issues in quantum systems in the semiclassical regime. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :213–224, 2017.
- ⁴⁴ T. Maudlin. Three Measurement Problems. *Topoi*, 14(1) :7–15, 1995.
- ⁴⁵ Z. K. Mineev, S. O. Mundhada, S. Shankar, P. Reinhold, R. Gutiérrez-Jáuregui, R. J. Schoelkopf, M. Mirrahimi, H. J. Carmichael, and M. H. Devoret. To catch and reverse a quantum jump mid-flight. *Nature*, 570 :200–204, 2019.
- ⁴⁶ O. Nairz, M. Arndt, and A. Zeilinger. Quantum interference experiments with large molecules. *American Journal of Physics*, 71(4) :319–325, 2003.
- ⁴⁷ T. Norsen, D. Marian, and X. Oriols. Can the wave function in configuration space be replaced by single-particle wave function in physical space?, 2014.
- ⁴⁸ J. Robert. L. de Broglie's waves : a particular solution. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, 42(1) :197–212, 2017.
- ⁴⁹ E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14 :664–666, 1926.
- ⁵⁰ E. Schrödinger. Are there quantum jumps? *Brit. J. Phil. Sc.*, 322 :109–123 ; 233–242, 1952.
- ⁵¹ F. Shimizu, K. Shimizu, and H. Takuma. Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms. *Phys. Rev. A*, 46 :R17–R20, Jul 1992.
- ⁵² T. Takabayasi. The Vector Representation of Spinning Particle in the Quantum Theory, I*. *Progress of Theoretical Physics*, 14(4) :283–302, 10 1955.
- ⁵³ V.P. Maslov and S. Samborskii. *Idempotent Analysis*. Advances in Soviet Mathematics 13, American Mathematical Society, 1992.
- ⁵⁴ Einstein fait référence aux travaux de Schrödinger de 1952⁵⁰, mais ces travaux avaient commencé dès 1926⁴⁹.
- ⁵⁵ Des vidéos de cette expérience sont accessibles aux adresses : vimeo.com/350139153 et vimeo.com/350132498
- ⁵⁶ Pour préparer des atomes tous dans le même état, on fait préalablement passer le jet d'atomes dans un premier appareil de Stern et Gerlach, et on conserve uniquement l'une des deux sorties que l'on oriente judicieusement afin d'obtenir l'état pur souhaité.