



**HAL**  
open science

# Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement

Nicolas Bacaer

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaer. Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement. 2019. hal-02193965v1

**HAL Id: hal-02193965**

**<https://hal.science/hal-02193965v1>**

Preprint submitted on 25 Jul 2019 (v1), last revised 10 Aug 2019 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un modèle épidémique dans un environnement qui oscille rapidement

Nicolas Bacaër \*

## Résumé

On étudie un modèle mathématique de type S-I-R pour une épidémie lorsque le taux de contact oscille rapidement. La taille finale de l'épidémie est proche de celle que l'on obtient en remplaçant le taux de contact par sa moyenne. Une approximation de la correction peut être calculée analytiquement lorsque la reproductivité de l'épidémie est proche de 1. La correction est proportionnelle à la période des oscillations.

Mots clés : épidémie, modèle mathématique, moyennisation

## 1 Introduction

Soit  $N$  la taille supposée constante d'une population,  $S(t)$  le nombre de personnes susceptibles d'être infectées au temps  $t$ ,  $I(t)$  le nombre de personnes infectées et  $R(t)$  le nombre de personnes retirées de la chaîne de transmission parce qu'elles sont guéries et immunisées. Ainsi  $N = S(t) + I(t) + R(t)$ . Soit  $a(t)$  le taux de contact infectieux et  $b$  le taux de guérison. On suppose comme dans le modèle simplifié de Kermack et McKendrick (voir par exemple [1]) que

$$\frac{dS}{dt} = -a(t)\frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = a(t)\frac{SI}{N} - bI, \quad \frac{dR}{dt} = bI. \quad (1)$$

Dans un travail récent [2], on s'est intéressé à l'influence qu'aurait une oscillation périodique de faible amplitude du taux de contact  $a(t)$  sur la taille finale  $R(\infty)$  de l'épidémie. On va s'intéresser ici au cas où l'amplitude est quelconque mais où la période des oscillations est petite. Pour une épidémie qui dure quelques semaines, cela peut par exemple être interprété comme l'alternance rapide entre le jour et la nuit. Pour une épidémie qui dure quelques mois, cela peut être dû à l'alternance entre les jours ouvrés et les fins de semaines, notamment pour les épidémies en milieu scolaire. Pour une épidémie qui dure plusieurs années, cela peut être dû à l'alternance entre les hivers et les étés.

---

\*Institut de Recherche pour le Développement, Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes, Les Cordeliers, Paris, France. Courriel : nicolas.bacaer@ird.fr

Soit  $\varepsilon > 0$  la période des oscillations, un paramètre destiné à tendre vers 0. On suppose que

$$a(t) = \bar{a}(1 + \phi(t/\varepsilon))$$

avec une fonction  $\phi$  continue par morceaux telle que  $|\phi(\tau)| \leq 1$  pour tout  $\tau$ , de sorte que le taux de contact  $a(t)$  reste toujours positif ou nul. On suppose de plus que  $\phi$  est périodique de période 1 et de moyenne nulle :  $\int_0^1 \phi(\tau) d\tau = 0$ . Ainsi  $a(t)$  est une fonction périodique de période  $\varepsilon$  et sa moyenne est  $\bar{a}$ . Prenons comme conditions initiales au début de l'épidémie

$$S(0) = N - i, \quad I(0) = i, \quad R(0) = 0,$$

avec  $0 < i < N$ .

Dans la section 2, on montre des simulations d'un pareil modèle. On constate sur des exemples que la taille finale de l'épidémie est remarquablement proche de celle que l'on obtient en remplaçant le taux de contact par sa moyenne. Dans la section 3, on propose une explication de cette proximité en faisant quelques hypothèses supplémentaires sur les paramètres du modèle, notamment en supposant que la reproductivité de l'épidémie est proche de 1. On obtient un formule approchée pour la correction à apporter à la taille finale de l'épidémie. Cette correction est proportionnelle à la période des oscillations.

## 2 Quelques simulations

Les paramètres sont choisis pour être plausibles :

- la population totale est dix mille ;
- une seule personne est infectée au début de l'épidémie ;
- chaque personne a en moyenne  $\bar{a} = 15$  contacts par mois ;
- la durée de l'infection est  $1/b = 1/10$  mois soit environ 3 jours ;
- la période  $\varepsilon$  est 1/4 de mois, soit environ 7 jours ;
- le facteur périodique est

$$\phi(t/\varepsilon) = k \cos(\omega t + \psi),$$

où  $\omega = 2\pi/\varepsilon$  ;

- le déphasage est  $\psi = -\pi/2$  de sorte que  $\phi(t) = k \sin(\omega t)$  et le taux de contact  $a(t)$  est dans une phase croissante à  $t = 0$ .

La reproductivité vaut alors  $\bar{a}/b = 1,5 > 1$ , ce qui garantit le développement d'une épidémie [3].

La figure 1 montre deux simulations typiques du modèle : l'une avec  $k = 0$  (le taux de contact est constant), l'autre avec  $k = 1$  (le taux de contact oscille). Quoique les courbes pour  $k = 1$  s'éloignent notablement de celles pour  $k = 0$  pendant l'épidémie, il est remarquable que les tailles finales  $R(\infty)$  dans les deux simulations soient presque indiscernables graphiquement. Ceci sera expliqué dans la section suivante.

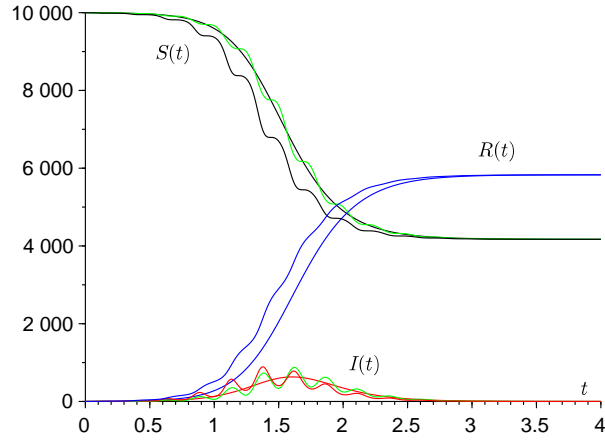


FIGURE 1 – Simulation d’une épidémie :  $S(t)$  en noir,  $I(t)$  en rouge,  $R(t)$  en bleu. Ici,  $a(t) = \bar{a}(1 + k \cos(\omega t + \psi))$  avec  $k = 0$  (courbes non ondulées) ou  $k = 1$  (courbes ondulées),  $\omega = 2\pi/\varepsilon$ . Les valeurs numériques sont  $N = 10\,000$ ,  $b = 10$  par mois,  $\bar{a} = 15$  par mois,  $\varepsilon = 0,25$  mois,  $i = 1$  et  $\psi = -\pi/2$ . Les courbes vertes sont les approximations du deuxième ordre pour  $S(t)$  et  $I(t)$ .

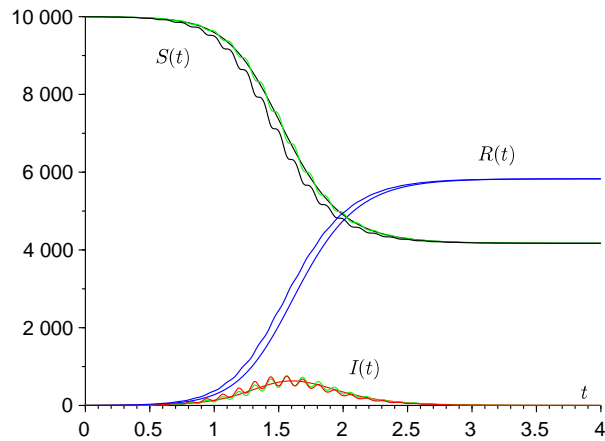


FIGURE 2 – Identique à la figure 1 mais avec une période  $\varepsilon$  qui vaut  $1/8$  de mois. La solution  $(S(t), I(t), R(t))$  se rapproche de la solution  $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$  du système moyenné.

En réduisant la période des oscillations, comme dans la figure 2, on voit les courbes  $(S(t), I(t), R(t))$  se rapprocher de la solution  $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$  obtenue avec  $a(t) = \bar{a}$ , tout en conservant leurs oscillations. C'est d'ailleurs une conséquence du théorème de moyennisation de Fatou [4, théorème 42] : en posant  $\tau = t/\varepsilon$ , le système s'écrit

$$\frac{dS}{d\tau} = -\varepsilon \bar{a}(1 + \phi(\tau)) \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{d\tau} = \varepsilon \left[ \bar{a}(1 + \phi(\tau)) \frac{SI}{N} - bI \right], \quad \frac{dR}{d\tau} = \varepsilon bI, \quad (2)$$

avec  $\phi(\tau) = \cos(2\pi\tau + \psi)$  et le théorème assure que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $(S(\tau) - \bar{S}(\tau), I(\tau) - \bar{I}(\tau), R(\tau) - \bar{R}(\tau))$  est de l'ordre  $O(\varepsilon)$  pendant un temps  $\tau$  de l'ordre de  $1/\varepsilon$ , ce qui correspond à un temps  $t$  de l'ordre de 1.

On peut d'ailleurs calculer une approximation au second ordre. Écrivons le système (2) sous la forme  $dZ/d\tau = \varepsilon f(\tau, Z)$ , où  $Z = (S, I, R)$  et  $f(\tau, Z)$  est  $\tau$ -périodique de période 1. Alors

$$f_0(Z) = \int_0^1 f(\tau, Z) d\tau = \begin{pmatrix} -\bar{a}SI/N \\ \bar{a}SI/N - bI \\ bI \end{pmatrix},$$

$$\int_0^\tau [f(\sigma, Z) - f_0(Z)] d\sigma = \begin{pmatrix} -\bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ \bar{a}k \frac{\sin(2\pi\tau + \psi) - \sin(\psi)}{2\pi} \frac{SI}{N} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il faut retrancher le terme en  $\sin(\psi)$  pour que ces dernières fonctions soient de moyenne nulle. D'après [4, théorème 44], on a

$$S(\tau) \simeq \bar{S}(\tau) - \varepsilon \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(\varepsilon^2),$$

$$I(\tau) \simeq \bar{I}(\tau) + \varepsilon \frac{\bar{a}k \sin(2\pi\tau + \psi)}{2\pi} \frac{\bar{S}(\tau) \bar{I}(\tau)}{N} + O(\varepsilon^2)$$

et  $R(\tau) \simeq \bar{R}(\tau)$  sur un intervalle de temps  $\tau$  de l'ordre de  $1/\varepsilon$ . Autrement dit,

$$S(t) \simeq \bar{S}(t) - \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2),$$

$$I(t) \simeq \bar{I}(t) + \frac{\bar{a}k \sin(\omega t + \psi)}{\omega} \frac{\bar{S}(t) \bar{I}(t)}{N} + O(1/\omega^2)$$

et  $R(t) \simeq \bar{R}(t)$  sur un intervalle de temps  $t$  de l'ordre de 1. Ces approximations de  $S(t)$  et  $I(t)$  sont représentées en vert dans les figure 1 et 2.

Remarquons qu'avec une période du taux de contact qui est petite, on n'observe pas de courbe épidémique avec plusieurs grandes vagues, contrairement aux simulations de [3]. C'est que le système se rapproche de plus en plus du cas où le taux de contact est moyenné, qui ne donne qu'une seule vague épidémique.

### 3 Proximité des tailles finales

En écrivant la première équation (1) sous la forme  $\frac{d}{dt}(\log S) = -a(t)I/N$  et en intégrant entre 0 et  $+\infty$ , on trouve facilement comme dans [2] que

$$\log \frac{N - R(\infty)}{N - i} + \frac{\bar{a}}{b} \frac{R(\infty)}{N} + \frac{\bar{a}}{N} \int_0^\infty I(t) \phi(t/\varepsilon) dt = 0, \quad (3)$$

L'intégrale oscillante dans le troisième terme tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Lorsque  $\phi$  est un cosinus, c'est du moins une conséquence du fait que  $I(t)$  soit une fonction positive intégrable, car  $\int_0^\infty I(t) dt = R(\infty)/b$ , et du fait que la transformée de Fourier d'une fonction intégrable tende vers 0 à l'infini.

Il en résulte que  $R(\infty) \rightarrow \bar{R}(\infty)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La question est de savoir à quelle vitesse ceci se produit. En première approximation, on se contente d'approcher dans l'intégrale  $I(t)$  par  $\bar{I}(t)$ , ce qui par un développement limité comme dans [2] donne

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) + \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt.$$

Puis on utilise pour  $\bar{I}(t)$  l'expression analytique approchée en forme de cloche symétrique obtenue par Kermack et McKendrick (voir par exemple [2] ou [5]), ce qui suppose que la fraction initiale infectée  $i/N$  soit petite et que la reproductivité  $\bar{a}/b$  reste proche de 1 tout en étant supérieure à 1 :

$$\bar{I}(t) \simeq \frac{NX}{\text{ch}^2[Y(t - \tau)]},$$

où  $\text{ch}(\cdot)$  désigne le cosinus hyperbolique tandis que  $X$ ,  $Y$  et  $\tau$  vérifient

$$X \simeq \frac{(1 - b/\bar{a})^2}{2}, \quad Y \simeq \frac{\bar{a} - b}{2}, \quad \tau \simeq \frac{\log [2(N/i)(b/\bar{a} - 1)^2]}{\bar{a} - b}.$$

Notons que  $\tau$  est une approximation du temps qui s'écoule avant le pic de l'épidémie dans un environnement constant.

Supposons enfin que  $\phi(\tau) = k \cos(2\pi\tau + \psi)$  comme dans les figures 1 et 2. Notons  $\text{Re}(\cdot)$  la partie réelle d'un nombre complexe et  $i$  le nombre imaginaire habituel. On a alors, en utilisant un résultat classique sur le calcul asymptotique des intégrales complexes à paramètre avec une phase qui n'est pas stationnaire de sorte que le terme principal vient du bord de l'intervalle d'intégration [6, théorème 3],

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt &\simeq NXk \int_0^\infty \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\text{ch}^2[Y(t - \tau)]} dt \\ &= NXk \text{Re} \left( e^{i\psi} \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t}}{\text{ch}^2[Y(t - \tau)]} dt \right) \\ &\simeq -NXk \text{Re} \left( \frac{e^{i\psi}}{i\omega \text{ch}^2(-Y\tau)} \right) \\ &= -\frac{NXk \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(Y\tau)}. \end{aligned}$$

On en conclut que pour  $\omega \rightarrow +\infty$ ,

$$R(\infty) \simeq \bar{R}(\infty) - \frac{\bar{a}}{N/(N - \bar{R}(\infty)) - \bar{a}/b} \frac{N X k \sin(\psi)}{\omega \text{ch}^2(Y\tau)}. \quad (4)$$

Le terme correcteur, qui peut être positif ou négatif selon le signe de  $\sin(\psi)$ , est en  $1/\omega$ , c'est-à-dire proportionnel à la période  $\varepsilon$ . Ceci est illustré dans la figure 3 avec des valeurs des paramètres identiques à celles des figures 1 et 2. On notera que la reproductivité  $\bar{a}/b$  vaut 1,5, de sorte que l'approximation de Kermack et McKendrick est encore relativement bonne [5, p. 240].

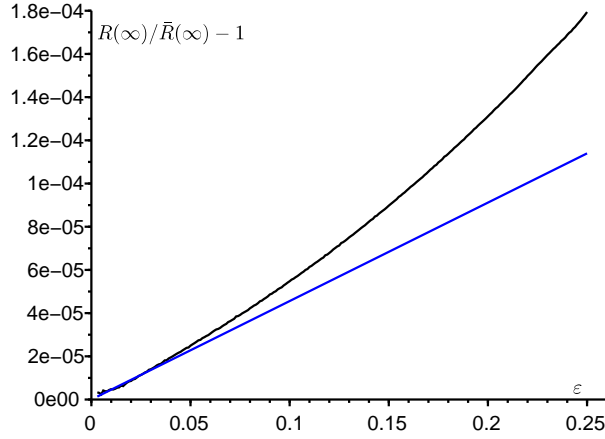


FIGURE 3 – La différence relative  $[R(\infty) - \bar{R}(\infty)]/\bar{R}(\infty)$  entre les tailles finales des épidémies en fonction de la période  $\varepsilon$ . En noir,  $R(\infty)$  est estimé en simulant le système d'équations différentielles. L'approximation (4) est représentée en bleu. Les paramètres sont les mêmes que dans les figures 1 et 2, sauf que la période  $\varepsilon$  varie entre 0 et 0,25 mois.

Si  $\psi$  est nul ou un multiple entier du nombre  $\pi$ , le terme correcteur est nul. Mais comme il s'agit d'un cas exceptionnel, il ne vaut peut-être pas la peine de trouver un nouvel équivalent pour l'intégrale  $\int_0^\infty \bar{I}(t) \phi(t/\varepsilon) dt$  ci-dessus.

On peut se demander dans quelle mesure le résultat obtenu précédemment dépend du fait qu'on ait choisi un cosinus pour le taux de contact. On a essayé sur un exemple une fonction  $\phi$  en créneau, avec  $\phi(\tau) = \phi_1$  sur une partie de la période et  $\phi(\tau) = \phi_2$  sur l'autre partie. Des simulations suggèrent que la correction pour la taille finale de l'épidémie est aussi proportionnelle à la période  $\varepsilon$  dans la limite où  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Références

- [1] A. Hillion, Les Théories mathématiques des populations, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- [2] N. Bacaër, Sur la taille finale des épidémies dans un environnement périodique, à paraître dans C. R. Biologies, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02123093>
- [3] N. Bacaër, M.G.M. Gomes, Sur la taille finale des épidémies avec saisonnalité, 2009, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01299608>
- [4] J.-P. Francoise, Oscillations en biologie, Springer/SMAI, Berlin, 2005.
- [5] J. Gani, J. Badrikian, Processus stochastiques de population, in : P.-L. Hennequin (éd.), École d'été de probabilités de Saint-Flour IV-1974, Springer, Berlin, 1975, p. 188-293.
- [6] J.-L. Ovaert, J.-L. Verley, Calculs asymptotiques, in : Dictionnaire des mathématiques - algèbre, analyse, géométrie, Albin Michel, Paris, 1997, p. 47-62.