



HAL
open science

Introduction au traitement du signal et à l'analyse fréquentielle par transformées de Fourier

Solène Kojtych

► **To cite this version:**

Solène Kojtych. Introduction au traitement du signal et à l'analyse fréquentielle par transformées de Fourier. [Rapport Technique] École polytechnique de Montréal. 2019. hal-02193929v1

HAL Id: hal-02193929

<https://hal.science/hal-02193929v1>

Submitted on 24 Jul 2019 (v1), last revised 22 Nov 2022 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Introduction to signal processing and frequency analysis with Fourier transforms

Solène Kojtych¹

Résumé

The aim of this technical note is to provide practical knowledge on signal processing based on Fourier transforms. Other decomposition bases for signal analysis as well as time-frequency analysis are out of the scope of this note. Theoretical concepts are introduced and illustrated with practical examples that are preferred to an exhaustive mathematical description for the sake of clarity. This way, the required mathematical background to read this technical note corresponds approximately to the one of a second-year student of an undergraduate science program.

First, different types of usual signals are introduced and both time and frequency analyses are presented. Then the continuous signal processing based on the continuous Fourier transform is introduced and generalized to discrete signals with the discrete-time Fourier transform. Afterwards the influence of sampling on the quality of the signal processing is discussed. Finally the digital signal processing is introduced thanks to the discrete Fourier transform.

Keywords

signal processing, Fourier transforms, frequency analysis

1 - Department of Mechanical Engineering, Polytechnique Montréal, P.O. Box 6079, Succ. Centre-Ville, Montréal, Qc, Canada H3C 3A7

Introduction au traitement du signal et à l'analyse fréquentielle par transformées de Fourier

Solène Kojtych¹

Résumé

Cette note technique a pour but de fournir des éléments de compréhension pour l'analyse de signaux par transformées de Fourier. Elle ne traite pas des autres bases de fonctions permettant de décomposer un signal ni de l'analyse temps-fréquence. Les concepts sont introduits progressivement et appuyés par des exemples facilitant la compréhension plutôt que par une analyse mathématique poussée. Les connaissances en mathématiques correspondant au début de cycle universitaire en sciences sont supposées connues.

Tout d'abord plusieurs types de signaux usuels sont présentés, puis les concepts d'analyse temporelle et fréquentielle sont introduits. L'analyse de signaux continus est abordée avec la transformée de Fourier continue, puis sa généralisation à l'analyse de signaux discrets, la transformée de Fourier à temps discret, est introduite. L'influence de l'échantillonnage sur la qualité de l'analyse est discutée, puis l'analyse de signaux discrets est abordée de manière pratique, avec la transformée de Fourier discrète.

Mots-clés

traitement du signal, transformées de Fourier, analyse fréquentielle

1 - Département de génie mécanique, Polytechnique Montréal, P.O. Box 6079, Succ. Centre-Ville, Montréal, Qc, Canada H3C 3A7

1 CLASSER : signaux et éléments de classification	3
Signaux à support continu et à support discret • Signaux sinusoïdaux et harmoniques • Signaux modulés • Fenêtres	
2 REPRÉSENTER : éléments d'analyse usuels	9
Domaine temporel et domaine fréquentiel • Principe de l'analyse de Fourier • Généralités sur le spectre	
3 ANALYSER : analyse de signaux continus	13
Expansion en série de Fourier • Transformation de Fourier continue • À retenir sur la transformation de Fourier continue	
4 GÉNÉRALISER : de l'analyse continue à l'analyse discrète	19
Principe de l'analyse discrète • Transformée de Fourier à temps discret • Limites de la DTFT • De la transformée de Fourier à temps discret à la transformée de Fourier discrète	
5 EXPÉRIMENTER : influence de l'échantillonnage	26
Ambiguïté liée à l'échantillonnage • Exemple à partir de la DTFT • Taux de Nyquist	
6 IMPLÉMENTER : analyse de signaux discrets	31
Transformée de Fourier discrète • Obtention du spectre d'amplitude à partir de la transformée de Fourier discrète • Obtention du spectre de phases à partir de la transformée de Fourier discrète • À retenir sur la transformation de Fourier discrète	
Références	37
A Compléments sur l'analyse de Fourier	38
Remarques sur la distribution de Dirac • Transformées de Fourier usuelles	
B Démonstrations mathématiques	40
Calcul de la DTFT de la fenêtre rectangulaire discrète	
C Compléments sur la fuite spectrale	42
Fuite spectrale • Réduction de la fuite spectrale	

1 CLASSER : signaux et éléments de classification

On définit un signal comme la quantification d'un phénomène mesurable et variable en fonction d'un indice, également appelé support. On peut par exemple considérer le déplacement d'une masse en fonction du temps. Dans la suite, le support par défaut sera le temps t . Les sections suivantes présentent quelques types de signaux utiles qui seront rencontrés fréquemment par la suite.

1.1 Signaux à support continu et à support discret

Physiquement, on observe le plus souvent des phénomènes continus, tels que l'évolution de la température dans une pièce au cours du temps. Néanmoins, la prise de mesures implique inévitablement une discrétisation du temps. Également, le stockage numérique de ces mesures est inévitablement discret en raison du codage des informations sur un ordinateur.

On distinguera donc les signaux à support continu, notés $x(t)$ et les signaux à support discret, notés $x[n]$. Comme le montre la deuxième ligne du tableau 1, un signal continu est défini pour toute valeur t du support ; on peut le représenter à l'aide d'une expression analytique. En revanche, le signal discret n'est connu que pour certaines valeurs de t : il s'agit d'une liste de couples support-valeur.

Pour un signal discret, on note N le nombre d'échantillons du signal, l'indice n variant de 0 à $N - 1$ par convention. Ainsi, dans le tableau 1, on a $x[2] = 0,97$. Le signal discret peut être vu comme la restriction du signal continu à certaines valeurs obtenues par échantillonnage du support. Il s'agit de relever la valeur du signal à intervalles réguliers, toutes les t_s secondes par exemple. La connaissance de t_s est nécessaire pour représenter un signal discret en fonction du temps. La fréquence d'échantillonnage (ou taux d'échantillonnage) est notée f_s , il s'agit du nombre d'échantillons pris par seconde. On a donc la relation suivante pour un échantillonnage uniforme (durée identique entre chaque échantillon) :

$$x[n] = x(nt_s) \quad (1)$$

où :

$n \in \mathbb{N}$: indice discret,

$t_s = \frac{1}{f_s}$: durée fixe entre deux échantillons (s).

Le tableau montre également les représentations graphiques du signal continu et du signal discret, avec en abscisse le temps et en ordonnée les valeurs du signal. Les valeurs sont données dans l'unité du signal. Par la suite, l'unité pour les valeurs et les amplitudes est omise car les concepts sont présentés avec des signaux génériques d'unité quelconque.

Remarque Pour alléger le texte, on emploie par la suite les termes *signal continu* pour *signal à support continu* et *signal discret* pour *signal à support discret*. Il faut néanmoins rester vigilant quant au sens donné à ses nouveaux termes : la caractéristique discret ou continu se réfère bien au support et non aux valeurs du signal.

Tableau 1. signal continu et signal discret

	signal continu	signal discret
expression	$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi \times 1 \times t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$x[n] = \{0,00; 0,78; 0,97; 0,43; -0,43; -0,97; -0,78; 0,00\}$ avec $n = 0, 1, \dots, N - 1$
graphique		

1.2 Signaux sinusoïaux et harmoniques

La périodicité d'un signal continu est définie ainsi :

$$\exists T \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = x(t + T) \quad (2)$$

Pour un signal discret, de longueur supposée infinie, la période N est le plus petit nombre d'échantillons qui se répètent (on peut alors étudier un signal de longueur N uniquement) :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x[n] = x[n + N] \quad (3)$$

Dans le domaine du traitement du signal, on s'intéresse particulièrement aux sinusoides qui mènent à la définition des signaux harmoniques. Une sinusoides est un signal de la forme :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) \quad \text{ou} \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (4)$$

avec :

$A \geq 0$: amplitude de la sinusoides dans l'unité du signal,

ω_0 : pulsation propre du signal en rad/s,

ϕ : phase de la sinusoides en radian.

La fréquence propre de la sinusoides en Hertz est donnée par $f_0 = \omega_0/2\pi$ et sa période T_0 par $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\omega_0$.

Grâce aux formules d'arcs associés, on peut, grâce à un changement de phase, passer d'un sinus à un cosinus et inversement. On considère donc par la suite la forme en cosinus pour une sinusoïde sans perte de généralité.

Un signal harmonique est constitué d'une somme de sinusoïdes dont les fréquences sont des multiples de la pulsation fondamentale ω_0 . Il est noté sous la forme :

$$x(t) = \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) = \sum_{k=0}^N A_k \cos(k2\pi f_0 t + \phi_k) \quad (5)$$

avec :

$A_k \geq 0$: amplitude de la sinusoïde composite $k \leq 1$,

ω_0 : pulsation fondamentale du signal en rad/s,

ϕ_k : phase de la sinusoïde composite k . On pose $\phi_0 = 0$.

Les sinusoïdes composites sont appelées des harmoniques. Il est à noter que la première sinusoïde d'indice $k = 0$ et de phase nulle se réduit au terme A_0 qui peut être négatif et représente la valeur moyenne de la sinusoïde (également appelée tendance). La figure 1 présente un exemple de signal harmonique composé d'une somme de 4 cosinus. Les signaux harmoniques présentent un grand intérêt dans le domaine du traitement du signal car on va voir par la suite qu'il est possible de décomposer n'importe quel signal déterministe sous la forme d'une somme de sinusoïdes.

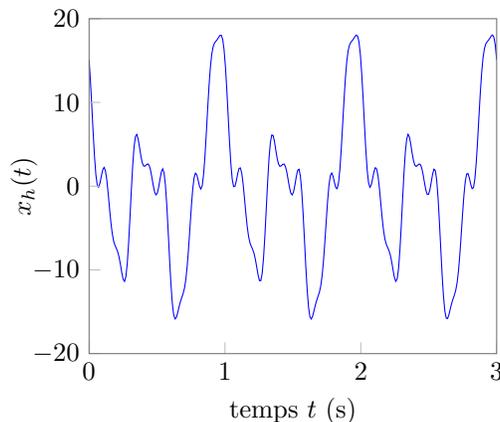


Figure 1. exemple de signal harmonique $x_h(t)$

1.3 Signaux modulés

On considère une sinusoïde de fréquence, phase et amplitude constante (équation (4)). On peut complexifier ce signal en faisant varier son amplitude au cours du temps : il s'agit d'une modulation en amplitude. On a donc le signal modulé en amplitude suivant :

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (6)$$

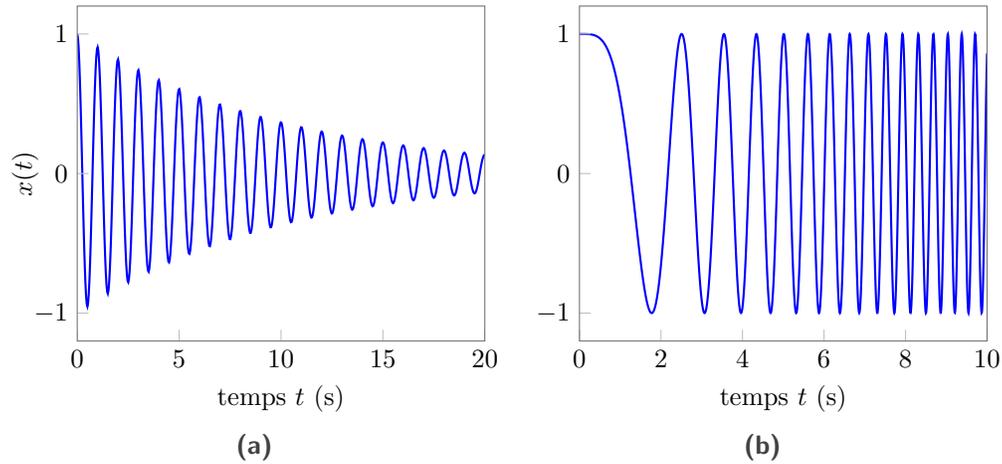


Figure 2. modulations en amplitude et fréquence d'une sinusoïde : (a) modulation en amplitude : $x(t) = A(t) \cos(2\pi t)$ avec $A(t) = e^{-0,1t}$, (b) modulation en fréquence : $x(t) = \cos(\omega_0(t)t)$ avec $\omega_0(t) = t$

On peut également faire varier la fréquence au cours du temps ; on parle de modulation en fréquence. Pour une amplitude constante, le signal modulé en fréquence sera donc de la forme :

$$x(t) = A \sin(\omega_0(t)t + \phi) \quad (7)$$

La figure 2 donne un exemple de signaux modulés respectivement en amplitude et en fréquence. Plus généralement, un signal modulé en amplitude et en fréquence s'écrit :

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0(t)t + \phi) \quad (8)$$

Cette forme permet de générer des signaux assez complexes qui seront utiles par la suite pour tester les différentes méthodes de traitement du signal abordées. La figure 3 montre quelques signaux modulés à la fois en amplitude et en fréquence.

1.4 Fenêtres

On désigne par fenêtre un signal qui est non nul seulement sur une durée T finie. Pour observer un signal x sur cette durée, on le multiplie par la fenêtre ; c'est l'opération de fenêtrage. On note $w(t)$ une fenêtre à support continu et $w[n]$ une fenêtre à support discret.

La fenêtre la plus usuelle est la fenêtre rectangulaire, visible sur la figure a. Lorsqu'on multiplie la sinusoïde de longueur infinie représentée partiellement sur la figure b par cette fenêtre, on obtient le signal de la figure c, de durée T . Ainsi, dès lors qu'on effectue l'échantillonnage d'un signal continu sur une durée T , on utilise implicitement la fenêtre rectangulaire pour effectuer la troncature du signal.

Il existe de très nombreux types de fenêtres, dont la fenêtre de Hann et la fenêtre de Hamming, représentées sur la figure 5, sont parmi les plus utilisées [1]. Nous verrons par la suite l'utilité des fenêtres lorsqu'on s'intéresse au contenu fréquentiel d'un signal.

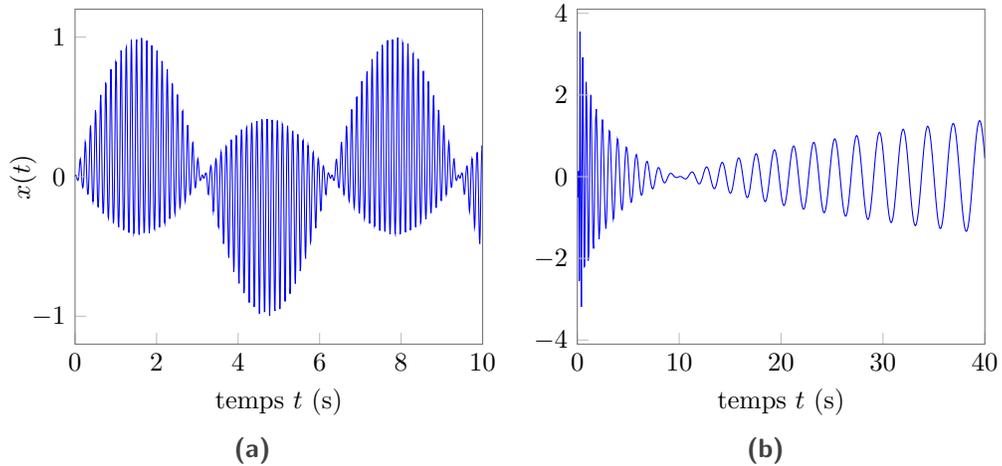


Figure 3. exemples de modulations d'une sinusoïde : (a) $x(t) = A(t) \cos(\omega_0(t)t)$ avec $A(t) = \sin(t)$ et $\omega_0(t) = \frac{2}{t} * \sin(25t)$; (b) $x(t) = A(t) \cos(\omega_0(t)t)$ avec $A(t) = \ln(0,1 * t)$ et $\omega_0(t) = 30/\sqrt{t}$

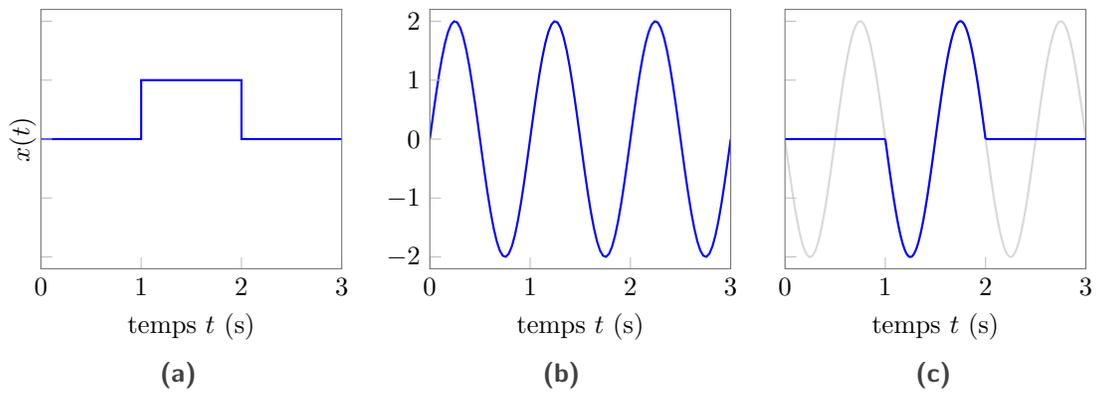


Figure 4. troncature d'un signal long par une fenêtre rectangulaire (b) sinusoïde simple, (a) fenêtre rectangulaire, (c) signal tronque

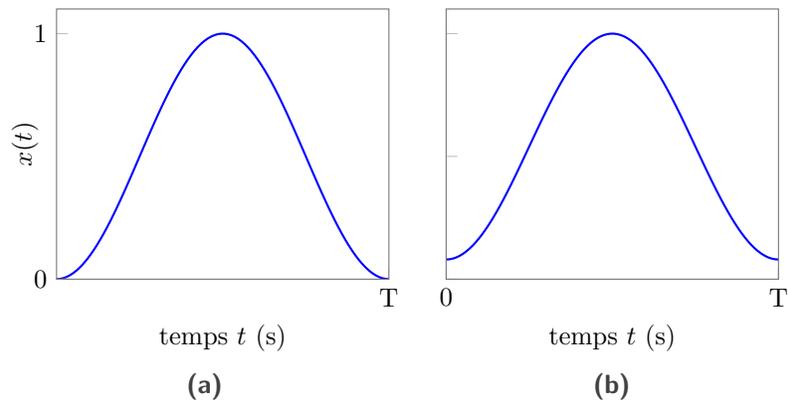


Figure 5. fenêtres usuelles de durée T
(a) fenêtre de Hann (b) fenêtre de Hamming

2 REPRÉSENTER : éléments d'analyse usuels

Dans les sections précédentes, tous les signaux ont été décrits en fonction du temps t . Nous allons voir qu'il est possible de les représenter en fonction des fréquences contenues dans le signal. Le passage d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle se nomme analyse.

2.1 Domaine temporel et domaine fréquentiel

En mécanique, il est souvent intéressant d'obtenir le contenu fréquentiel d'un signal. Par exemple, si on s'intéresse au déplacement d'une masse soumise à des contacts répétés, la représentation fréquentielle permet de mettre en évidence les fréquences sollicitées lors de l'impact. Cette information peut alors être utilisée par les concepteurs afin de dimensionner le système et d'éviter les phénomènes de résonance.

Jusqu'ici, on a représenté les signaux en fonction du temps, dans le domaine temporel. On peut aussi présenter l'information contenue dans le signal dans le domaine fréquentiel : il s'agit de représenter les fréquences, ou harmoniques, contenus dans le signal. Les représentations temporelles et fréquentielles sont bijectives ; il est possible de passer de l'une à l'autre directement.

On prend l'exemple du signal harmonique de la figure 1, constitué de quatre sinusoides, et dont l'expression est donnée par :

$$x_h(t) = \sum_{k=0}^3 A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k) \quad (9)$$

Tableau 2. caractéristiques du signal harmonique $x_h(t)$ donné en exemple

sinusoïde	fréquence f_k (Hz)	amplitude A_k	phase ϕ_k (rad/s)
$k = 0$	1 Hz	6	0
$k = 1$	2 Hz	10	$\pi/4$
$k = 2$	5 Hz	4	$\pi/2$
$k = 3$	9 Hz	2	0

À partir du tableau 2, on peut écrire l'expression du signal et le représenter dans le domaine temporel, sur la figure a. Le tableau contient également toutes les informations permettant de représenter le signal dans le domaine fréquentiel : pour chaque fréquence, on connaît l'amplitude correspondante. On peut donc représenter les amplitudes en fonction des fréquences contenues dans le signal, c'est la figure b. Ce type de représentation est appelé spectre ; elle permet de mettre en évidence le contenu fréquentiel du signal. Ici, il s'agit plus particulièrement d'un spectre d'amplitude.

Sur l'exemple simple traité ici, il est possible d'obtenir directement le spectre car le signal est un signal harmonique, écrit sous forme d'une somme de sinusoides. Pour un signal quelconque, dont

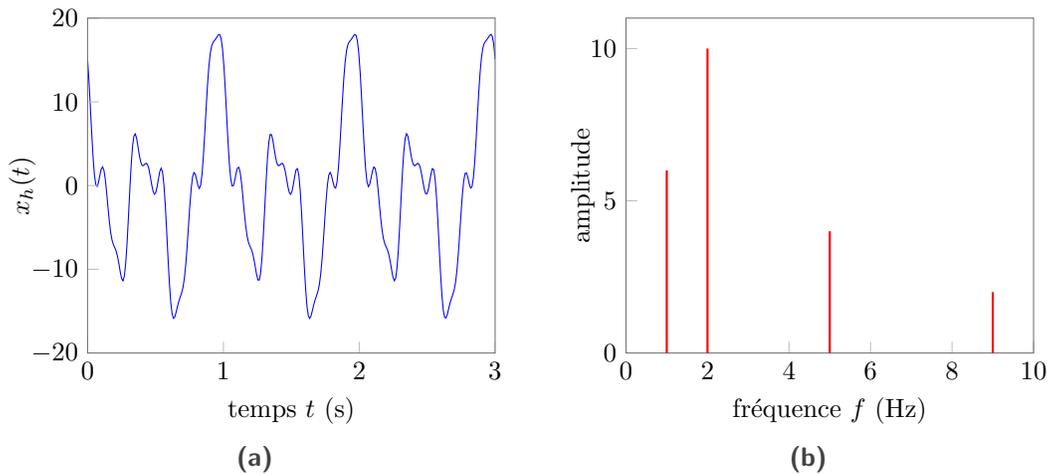


Figure 6. représentations temporelle (a) et fréquentielle (b) d'un signal harmonique (spectre d'amplitude)

on ne connaît pas nécessairement l'expression analytique, il est possible d'obtenir directement le spectre grâce à l'analyse de Fourier.

On note $X(\omega)$ ou $X[\omega]$ la représentation fréquentielle du signal x , respectivement quand le support de la pulsation ω est continu ou discret (ω est en rad/s). Nous allons comment, à partir d'un signal harmonique, obtenir la représentation du spectre d'amplitude. Par la suite, nous allons répondre à plusieurs problématiques évoquées précédemment :

- Comment généraliser la méthode à des signaux quelconques qui ne sont pas constitués d'une somme de sinusoides ? (section 2.2)
- Comment réaliser le spectre en pratique à partir de $X(\omega)$? (section 2.3)

2.2 Principe de l'analyse de Fourier

Nous avons vu que pour un signal harmonique dont on possède l'équation analytique, l'obtention du spectre d'amplitudes est immédiate : en effet, les amplitudes et les fréquences des sinusoides sont directement visibles dans l'équation algébrique.

Fourier a démontré que toutes les fonctions (ou signaux) déterministes pouvaient être exprimées sous la forme suivante :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (10)$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et a_0, a_n et b_n des coefficients définis plus loin dans le document. On peut donc approximer un signal continu par un signal harmonique en le décomposant sur une base de sinusoides. Plus intéressant encore, les signaux continus périodiques peuvent être représentés de manière exacte par une somme infinie de sinusoides.

Grâce à cette décomposition, la représentation sous forme de spectre fait sens même pour les signaux qui ne sont pas harmoniques. Pour obtenir les fréquences contenues dans le signal,

on applique une opération spéciale sur celui-ci : une transformation. La transformation directe permet de réaliser l'analyse du signal, c'est-à-dire le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, tandis que la transformation inverse permet de réaliser la synthèse : le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel. Le résultat d'une transformation est appelé transformée.

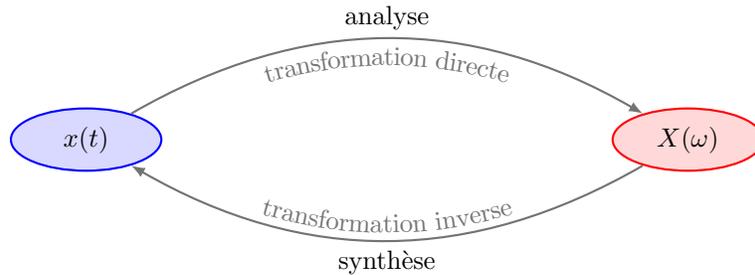


Figure 7. analyse et synthèse

Il existe plusieurs types de transformations, dont les plus usuelles sont celles de Fourier. On a, entre autres :

- la transformation de Fourier continue (*Continuous Fourier Transform ou CFT*), appliquée à des signaux continus ;
- la transformation de Fourier discrète (*Discrete Fourier Transform ou DFT*), appliquée à des signaux discrets.

On a mentionné dans la section précédente les quantités $X(\omega)$ et $X[\omega]$ pour représenter le spectre d'un signal x . Par la suite, on adopte les conventions suivantes :

- $X(\omega)$ est la transformée de Fourier continue du signal continu $x(t)$;
- $X[\omega]$ est la transformée de Fourier discrète du signal discret $x[n]$.

En pratique, les signaux traités numériquement sont par nature discrets et on dispose rarement de leur expression analytique. On va voir que la seule transformée applicable pour étudier le contenu fréquentiel de tels signaux est la transformée de Fourier discrète.

2.3 Généralités sur le spectre

On considère dans cette partie qu'on a calculé la transformée de Fourier continue $X(\omega)$ d'un signal $x(t)$; le calcul de $X(\omega)$ à proprement parler est explicité dans la section suivante. La quantité $X(\omega)$ représente *a priori* un nombre complexe :

$$X(\omega) = \Re(X(\omega)) + j\Im(X(\omega)) \quad (11)$$

Il existe alors plusieurs manières de présenter l'information contenue dans $X(\omega)$. On peut représenter un spectre de la partie réelle et de la partie imaginaire, mais on représente plus généralement l'amplitude et la phase, qui seront plus facile à interpréter, en fonction de la fréquence. On utilise la forme polaire ou exponentielle pour exprimer $X(\omega)$. La forme exponentielle est notée :

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\psi(\omega)} \quad (12)$$

avec l'amplitude spectrale $|X(\omega)|$ et la phase spectrale $\psi(\omega)$:

$$|X(\omega)| = \sqrt{\Re(X(\omega))^2 + \Im(X(\omega))^2} \quad (13)$$

$$\psi(\omega) = \arctan\left(\frac{\Im(X(\omega))}{\Re(X(\omega))}\right) \quad (14)$$

La représentation de ces quantités en fonction de ω donne respectivement un spectre d'amplitude et un spectre de phase. Le spectre de phase correspondant au signal harmonique de la figure 1 est présenté sur la figure 8. Enfin, on appelle spectre d'énergie la représentation de $|X(\omega)|^2$ en fonction de la fréquence. Les amplitudes, phases et énergies sont souvent représentées en fonction de $f = \frac{2\pi}{\omega}$ en Hz. En ce qui concerne la transformée de Fourier discrète ; on notera alors $|X[k]|$ et $\psi[k]$ l'amplitude et la phase spectrale définies sur un support discret ; k étant un indice fréquentiel lié à ω (voir section 6).

La forme du spectre obtenu dépend à la fois de la continuité et de la périodicité du signal d'origine. Il peut être à support continu ou discret, selon que ω est continu ou discret et la courbe représentative de $|X(\omega)|$ peut être continue ou discontinue.

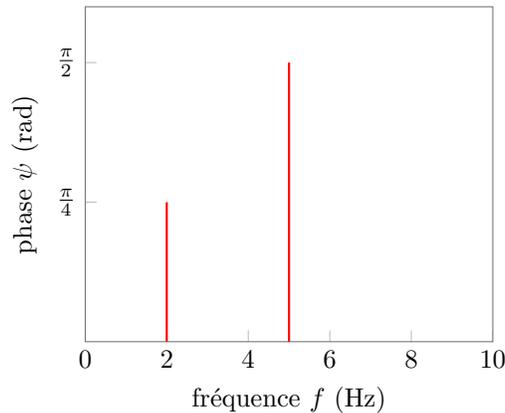


Figure 8. spectre de phase du signal harmonique de la figure 1

Dans la suite, les points suivants seront particulièrement détaillés :

- le spectre $X(\omega)$ d'un signal continu $x(t)$ a un support continu : il est défini pour toute fréquence ω ;
- le spectre $X[k]$ d'un signal discret $x[n]$ a un support discret : il n'est défini que pour quelques fréquences ;
- le spectre obtenu par la DFT $X[\omega]$ est en réalité une version échantillonnée du spectre qu'on aurait obtenu à partir de la CFT $X(\omega)$ du signal continu.

Nous allons par la suite évoquer les différentes transformations de Fourier afin de mieux comprendre ces aspects. La DFT sera particulièrement développée dans ce document puisque c'est la transformée la plus utilisée pour le traitement de signaux numériques.

3 ANALYSER : analyse de signaux continus

Pour bien comprendre la transformée de Fourier discrète qui est utilisée en pratique, il est nécessaire de définir auparavant la transformée de Fourier continue. Celle-ci est seulement calculable formellement, lorsqu'on dispose d'une expression analytique du signal $x(t)$. Néanmoins, elle va nous permettre de mieux comprendre les spectres obtenus à partir des différentes transformées.

3.1 Expansion en série de Fourier

But Décomposer un signal périodique réel de période T_0 en une somme infinie de sinusoides.

Notations et définitions L'expansion en série de Fourier est la base de l'analyse harmonique, *i.e.* la décomposition du signal sur une base de sinusoides. On peut exprimer cette décomposition avec différentes écritures :

a. forme trigonométrique

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \quad (10)$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(t) & \text{ signal réel,} \\ a_0 & = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) dt, \\ a_n & = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \\ b_n & = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \end{aligned}$$

La fréquence fondamentale vaut $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ et les coefficients a_n et b_n sont appelés coefficients de Fourier. On rappelle que les sinusoides ayant des fréquences multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = 2\pi\omega_0$ sont appelées harmoniques.

b. forme polaire

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (15)$$

avec :

$$\begin{aligned} |A_n| & = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ l'amplitude,} \\ \phi_n & = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \text{ la phase.} \end{aligned}$$

Les sinus sont exprimées par des cosinus grâce aux formules d'arcs associés.

c. Forme exponentielle

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, C_n \in \mathbb{C} \quad (16)$$

où :

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17)$$

Pour obtenir cette forme exponentielle, on part de la forme trigonométrique et on développe les exponentielles complexes pour chaque terme. Soit un terme de la somme trigonométrique :

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) &= a_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \\ &= e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) + e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) \\ &= e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) + e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

On remarque que pour $n = 0$, ce terme vaut bien a_0 .

Si on insère l'expression précédente dans la somme de la forme trigonométrique, on obtient :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) + e^{-jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n + jb_n}{2} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} \left(\frac{a_n - jb_n}{2} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

Spectre La forme exponentielle permet d'obtenir presque naturellement les spectres d'amplitude et de phase. En effet, la phase est visible dans l'écriture ($n\omega_0$) et il suffit de calculer le module $|C_n|$ pour avoir l'amplitude. Si on fait l'expansion en série de Fourier de l'exemple traité dans la précédente section (équation (9)), le calcul des coefficients a_n donne exactement les amplitudes A_k du signal harmonique (dans ce cas, le calcul est direct).

Pour un signal périodique dont on a l'expression analytique, l'expansion en série de Fourier permet de mettre le signal sous la forme d'une somme de sinusoides ; on sait ensuite représenter le spectre correspondant. Les fréquences contenues dans le signal sont donc nécessairement discrètes, à des multiples de la pulsation fondamentale ω_0 .

3.2 Transformation de Fourier continue

But Obtenir la représentation fréquentielle d'un signal continu quelconque, périodique ou non.

Définition et notations L'opérateur de la transformée sera notée \mathcal{F} . De manière générale, pour un signal $x(t)$, on définit :

a. transformée directe

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (20)$$

Il faut bien noter que la transformée existe seulement pour les signaux $x(t)$ intégrables au sens de Lebesgue. Dans le cas contraire, on a recours à certain artefacts mathématiques pour trouver une expression de la transformée. Une fenêtre rectangulaire $x_r(t)$ et sa transformée sont présentées sur la figure 9. L'équation de la la transformée est dans ce cas :

$$X(\omega) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (21)$$

b. transformée inverse : permet de reconstruire le signal d'origine à partir de sa représentation fréquentielle $X(\omega)$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} dt \quad (22)$$

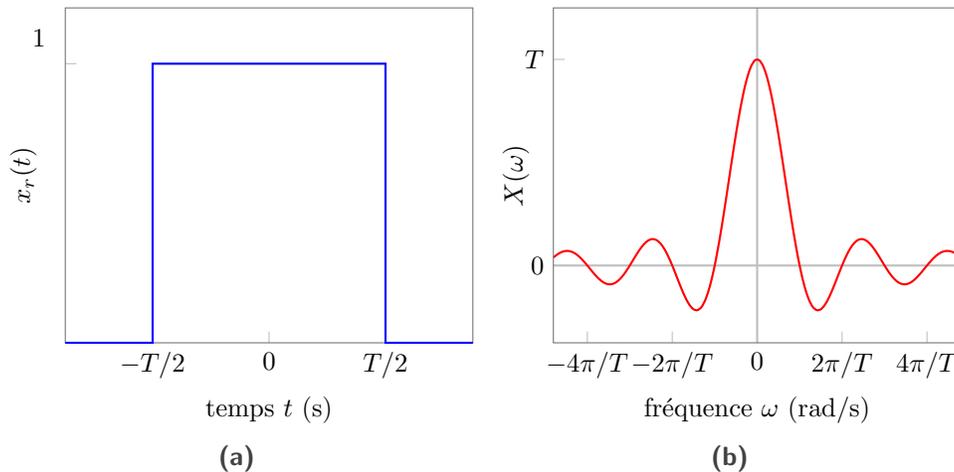


Figure 9. transformée de Fourier continue d'une fenêtre rectangulaire :
 (a) fenêtre $x_r(t)$, (b) transformée $X(\omega) = T \operatorname{sinc}(\frac{\omega T}{2})$

Calcul pratique Le calcul de la transformée $X(\omega)$ est un exercice strictement analytique qui ne peut être effectué que si on dispose d'une expression analytique du signal. En pratique, on utilise très souvent des tables de transformées opérationnelles et fonctionnelles pour simplifier le calcul de

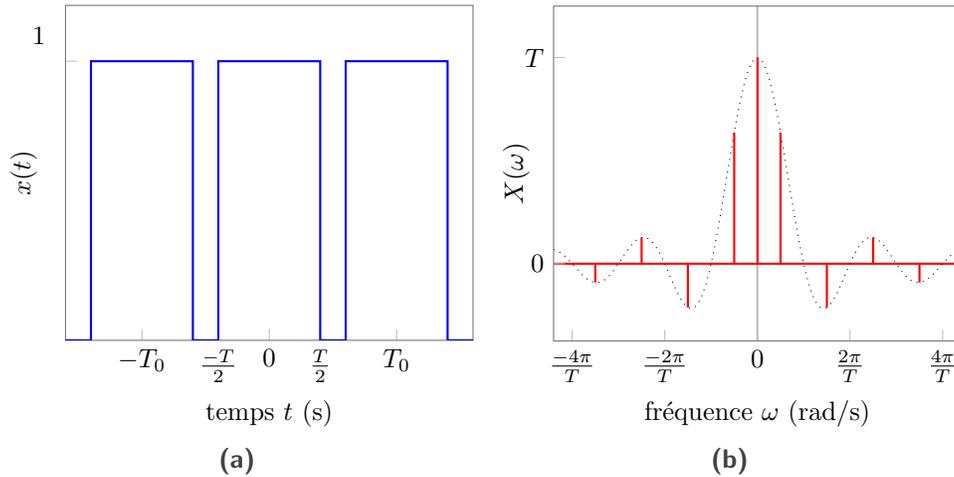


Figure 10. transformée de Fourier continue d'un signal en créneaux $x_{rp}(t)$:
 (a) signal en créneaux $x_{rp}(t)$, (b) spectre issu de la CFT

$F(\omega)$. Les propriétés de la CFT ne seront pas détaillées ici, mais on retiendra particulièrement que la transformation est linéaire :

$$\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = aF(\omega) + bG(\omega), \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (23)$$

Les transformées de quelques fonctions usuelles sont données en annexe A.2 ainsi que les spectres correspondants. On remarque qu'un signal court en temps est long en fréquence, et inversement.

CFT d'un signal périodique On considère x_{rp} le signal périodique issu de la répétition de $x_r(t)$ toutes les T_0 secondes. Ce signal est communément appelé signal créneaux (figure a). On peut montrer que la CFT de $x_{rp}(t)$ est donné par :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 T \operatorname{sinc}\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad (24)$$

avec $\delta(f)$ la distribution de Dirac (voir note au bas de l'annexe A.2). Le spectre est présenté sur la figure b).

Si on compare les spectres obtenus pour la fenêtre rectangulaire $x_r(t)$ et pour sa répétition périodique (signal créneaux $x_{rp}(t)$), on constate la présence d'un sinus cardinal dans les deux expressions. En effet, la CFT d'un signal périodique $x(t)$ de période T_0 peut être obtenue à partir de la CFT d'une seule période du signal par la formule :

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 X_p(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (25)$$

où $X_p(\omega)$ est la CFT d'une période de $x(t)$ et $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Cette propriété permet de retrouver l'équation (24) à partir de la CFT d'une période (équation (21)). Le spectre obtenu en calculant la CFT d'un signal périodique est appelé spectre de raies. Il est important de rappeler que ce spectre est à support continu : les contributions sont nulles partout sauf sur les raies.

Lien avec la série de Fourier Pour expliciter le lien entre la transformée de Fourier et la série de Fourier que l'on a évoqué auparavant, on utilise l'exemple de la fonction créneaux $x_{rp}(t)$. On calcule son expansion en série de Fourier à partir de la forme exponentielle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, C_n \in \mathbb{C} \quad (16)$$

avec :

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (17)$$

On souhaite obtenir le spectre d'amplitude donc on calcule les coefficients C_n :

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \times e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{1}{T_0 n\omega_0} \cdot \frac{1}{-j} (e^{-jn\omega_0 T/2} - e^{jn\omega_0 T/2}) \\ &= \frac{2}{T_0 n\omega_0} \cdot \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 T/2} - e^{-jn\omega_0 T/2}) \\ &= \frac{2}{T_0 n\omega_0} \cdot \sin\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right) \\ &= \frac{T}{T_0} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 T/2)}{n\omega_0 T/2} \\ &= \frac{T}{T_0} \cdot \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (26)$$

L'amplitude de chaque sinusoïde en fonction de n est donc : $|C_n| = |\frac{T}{T_0} \cdot \text{sinc}(\frac{n\omega_0 T}{2})|$. On compare cette expression avec l'amplitude de la transformée de Fourier continue du même signal (tiré de l'équation (24)) :

$$|X(\omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 T \text{sinc}\left(\frac{n\omega_0 T}{2}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \right| \quad (27)$$

L'amplitude est nulle pour tout f sauf lorsque f est un multiple de la pulsation fondamentale ω_0 . On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} |X(\omega_0 n)| &= |\omega_0 T \operatorname{sinc}(\frac{n\omega_0 T}{2})| \\ &= |2\pi \frac{T}{T_0} \operatorname{sinc}(\frac{n\omega_0 T}{2})| \end{aligned} \tag{28}$$

On peut constater à partir des équations (26) et (28) que :

- la CFT est définie pour toute valeur ω mais n'est non nulle que lorsque $\omega = n\omega_0$. La série de Fourier n'est quand à elle définie que pour les fréquences $\omega = n\omega_0$. Cette différence est visible sur le spectre de la figure 6b obtenu à partir de l'expansion en série de Fourier : le support de la fréquence est discret.
- les amplitudes obtenues pour les pulsations $\omega = n\omega_0$ ne diffèrent que d'un facteur 2π entre la CFT et les coefficients de la série de Fourier. Il est donc possible de passer directement d'une expression à l'autre pour les signaux périodiques.

En conclusion, on peut considérer que l'expansion en série de Fourier n'est qu'une représentation appauvrie de la transformée de Fourier continue, définie uniquement pour des valeurs de ω multiples de la pulsation fondamentale. De plus, l'expansion en série de Fourier n'est applicable qu'à des signaux périodiques. On peut donc utiliser systématiquement la transformée de Fourier continue et, au besoin, retrouver l'expansion en série de Fourier à partir de celle-ci.

3.3 À retenir sur la transformation de Fourier continue

- La CFT ne s'applique qu'à des fonctions $f(t)$ définies sur un domaine continu, que l'on peut écrire sous forme analytique.
- La CFT est un outil de calcul formel. Dans le cadre du traitement du signal numérique, on ne manipule que des signaux discrets, et cette transformation est donc inapplicable.
- La CFT d'un signal réel est une fonction à valeurs réelles.
- La CFT d'un signal périodique conduit à un spectre de raies à support continu.
- La CFT d'un signal non périodique conduit généralement à un spectre à valeurs continues.
- L'expansion en série de Fourier est une version appauvrie de la CFT, applicable uniquement à des signaux périodiques.

4 GÉNÉRALISER : de l'analyse continue à l'analyse discrète

Jusqu'ici, on a donné quelques outils pour réaliser l'analyse de signaux continus. Néanmoins, on ne peut traiter numériquement que des signaux discrets. Nous allons maintenant voir que l'on peut généraliser les outils précédents aux signaux discrets. Nous verrons que la discrétisation du signal continu et sa troncature pour obtenir le signal numérique sont deux phénomènes qui vont avoir une influence sur le spectre. Dans cette partie, pour éviter toute ambiguïté entre le caractère continu du support ou des valeurs, on nommera $x(t)$ signal à support continu et $x[n]$ signal à support discret. Le terme de continuité seule sera utilisé en référence à la continuité mathématique \mathbb{C}^0 usuelle d'une fonction.

4.1 Principe de l'analyse discrète

La démarche la plus directe pour analyser un signal discret $x[n]$ consiste à utiliser la CFT sur celui-ci. Pour ce faire, on doit transformer le signal discret en un signal continu sur lequel on peut appliquer la CFT. On considère pour cela que le signal discret est constitué d'une série d'impulsions à des multiples de la durée d'échantillonnage t_s et est nul partout ailleurs (figure 11). On note cette expression continue $x_c(t)$:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nt_s]\delta(t - nt_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nt_s) \quad (29)$$

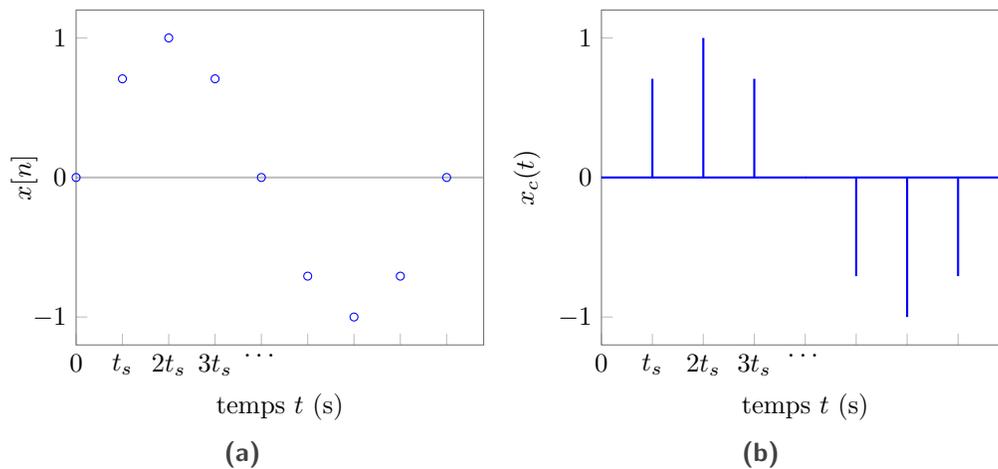


Figure 11. modélisation d'un signal continu à partir d'un signal discret :
 (a) signal discret, (b) signal continu issu du signal discret

On calcule la CFT $X_c(\omega)$ de $x_c(t)$:

$$\begin{aligned}
 X_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) \delta(t - nt_s) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_s) e^{-j\omega t} dt \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_s) e^{-j\omega nt_s} \quad \text{par définition de la distribution de Dirac} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nt_s}
 \end{aligned} \tag{30}$$

On obtient une combinaison linéaire et pondérée d'exponentielles complexes dont les poids correspondent aux valeurs du signal discret $x[n] = x(nt_s)$. C'est à partir de cette expression qu'est définie la Transformée de Fourier à temps discret (DTFT) :

$$X_{DTFT}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nt_s} \tag{31}$$

4.2 Transformée de Fourier à temps discret

But Soit $x[n]$ un signal à support discret résultant de l'échantillonnage de $x(t)$ toutes les t_s secondes. La DTFT permet d'obtenir un spectre à support continu à partir d'un signal discret $x[n]$ que l'on écrit sous la forme d'une somme d'impulsions. Comme on vient de le voir, la DTFT est en réalité l'application de la CFT sur le signal continu $x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s)$.

Définition On notera $X_{DTFT}(\omega)$ la transformée de Fourier à temps discret. L'opérateur de la transformations sera noté \mathcal{F}_{DTFT} .

a. transformée directe

$$X_{DTFT}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega nt_s} \tag{31}$$

La transformée existe seulement si le signal est absolument sommable : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$. Dans le cas de signaux numériques à valeurs et durée finies, cette condition est toujours vérifiée. Néanmoins, certains signaux analytiques usuels, comme un signal discret constant de durée infinie, ne sont pas absolument sommables. Dans ce cas, on a recours à certaines approximations mathématiques, non détaillées ici, pour trouver la transformée.

Remarque : Très souvent, on trouve la définition suivante pour la DTFT :

$$\forall \omega \in [0, 2\pi], \quad X_{DTFT}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (32)$$

Cette expression est développée en considérant que la durée d'échantillonnage t_s est de 1 seconde. Étant donné que pour un signal quelconque la durée d'échantillonnage n'est pas nécessairement de 1 seconde, nous avons choisi de garder l'expression (31) pour la DTFT dans ce qui suit.

b. transformée inverse permettant de retrouver le signal discret $x[n]$.

$$x[n] = \mathcal{F}_{DTFT}^{-1}\{X_{DTFT}(\omega)\} = \frac{t_s}{2\pi} \int_0^{2\pi/t_s} X_{DTFT}(\omega)e^{j\omega n t_s} d\omega \quad (33)$$

Ces définitions peuvent bien sûr être données en fonction de f en Hertz à partir de la relation $\omega = 2\pi f = 2\pi/t$. On a dans ce cas :

$$X_{DTFT}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f n t_s} \quad , \text{transformée directe} \quad (34)$$

$$x[n] = \mathcal{F}_{DTFT}^{-1}\{X_{DTFT}(f)\} = t_s \int_0^{f_s} X_{DTFT}(f)e^{j2\pi f n t_s} df \quad , \text{transformée inverse} \quad (35)$$

Propriétés Tout d'abord, il est important de remarquer que le support de la DTFT est continue : $X_{DTFT}(\omega)$ est définie pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. On énonce certaines propriétés intéressantes :

- Périodicité : la DTFT est périodique de période $\Omega = 2\pi/t_s$ rad/s = f_s Hz. Il est à noter que la période est bien en rad/s car la DTFT est définie sur une variable de pulsation (ω). L'information continue dans le signal est donc contenue dans une seule période, par exemple $\omega \in [0, 2\pi/t_s]$.
- Linéarité : comme la CFT, la DTFT est linéaire,
- Parité : si le signal d'entrée est réel, alors le spectre d'amplitude est une fonction paire, on peut se restreindre à l'étude de l'intervalle $[0, f_s/2]$.

Spectre d'un signal apériodique On calcule la DTFT d'une fenêtre rectangulaire discrète $x_r[n]$ (figure REF) résultant de l'échantillonnage de la fenêtre rectangulaire continue $x_r(t)$ de durée T (figure REF) définie par :

$$x_r(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T/2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (36)$$

On échantillonne cette fenêtre de façon à obtenir une fenêtre discrète de même durée définie par :

$$x_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq (N-1)/2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (37)$$

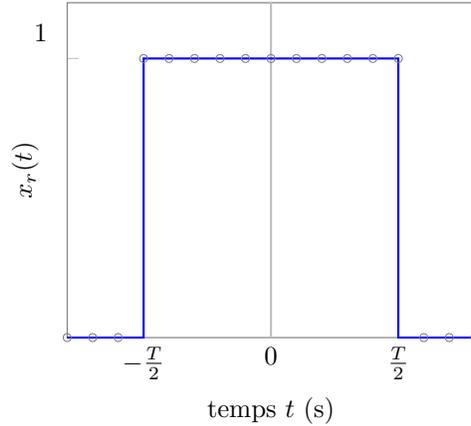


Figure 12. fenêtre rectangulaire x_r à support continu (—) et à support discret (o) de largeur $N + 1 = 11$ échantillons.

avec $n \in \mathbb{N}$ et N échantillons. On se place dans le cas où N est impair sans perte de généralité.

On effectue la DTFT de ce signal discret. Seul le nombre d'échantillons non nuls intervient dans le calcul de la DTFT et non le nombre d'échantillons total. On obtient les résultats suivants, dont la démonstration figure en annexe B :

$$X_{\text{DTFT}}(\omega) = \frac{\sin(\omega t_s(N+1)/2)}{\sin(\omega t_s/2)} \in \mathbb{R} \quad (38)$$

$$X_{\text{DTFT}}(f) = \frac{\sin(\pi f t_s(N+1))}{\sin(\pi f t_s)} \in \mathbb{R} \quad (39)$$

Le spectre correspondant est montré sur la figure 13.

On constate que le spectre est bien périodique de période f_s . Les « pics » de plus grande amplitude sont appelés lobes principaux (3 d'entre-eux sont visibles sur la figure) tandis que les plus petits sont appelés lobes secondaires.

Spectre d'un signal périodique On s'intéresse maintenant au cas particulier d'un signal discret périodique. Comme pour la CFT, il existe une formule pour calculer facilement la DTFT d'un signal périodique à partir de la DTFT d'une période du signal. Soit $x_p[n]$ un signal à N_p échantillons de durée $T = N_p t_s$. On répète ce signal tous les L échantillons ($L > N_p$) pour obtenir le signal périodique $x[n]$ de période $T_0 = L t_s$. La DTFT de $x[n]$ est donnée par :

$$X_{\text{DTFT}}(\omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi t_s \frac{k}{L}) X_{\text{DTFT},p}(2\pi \frac{k}{L}) \quad (40)$$

avec :

L le nombre d'échantillons d'une période de $x[n]$

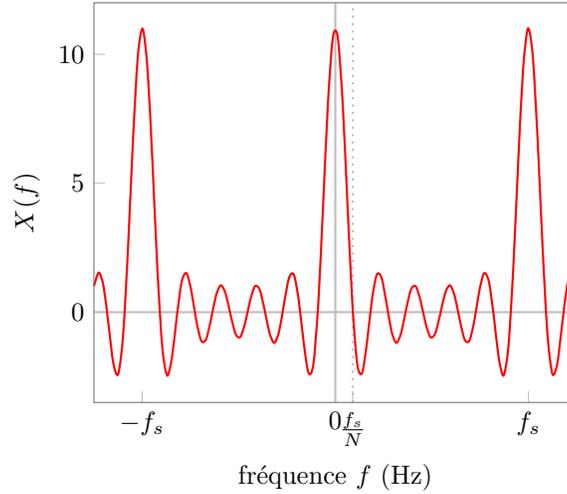


Figure 13. spectre issu du calcul de la DTFT d'une fenêtre rectangulaire discrète $x_r[n]$ comprenant $N + 1 = 11$ échantillons

$X_{\text{DTFT},p}(\omega)$ la DTFT d'une période de $x[n]$.

On considère la fenêtre rectangulaire de largeur $N + 1$ échantillons introduite au paragraphe précédent et on la répète pour obtenir le signal en créneaux $x_{rp}[n]$ périodique comportant L échantillons par période (figure 14). On applique la formule (40) à $x_{rp}[n]$. On a donc :

$$\begin{aligned} X_{\text{DTFT}}(\omega) &= \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi t_s \frac{k}{L}) X_{\text{DTFT},p}(\overbrace{2\pi \frac{k}{L}}^{\text{rad/s}}) \\ &= \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi t_s \frac{k}{L}) \frac{\sin(\frac{2\pi t_s k(N+1)}{2L})}{\sin(\frac{2\pi t_s k}{2L})} \end{aligned}$$

En terme de fréquence f , on peut écrire :

$$X_{\text{DTFT}}(f) = \frac{1}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - t_s \frac{k}{L}) \frac{\sin(\pi \frac{k}{L} t_s (N+1))}{\sin(\pi \frac{k}{L} t_s)}$$

Le spectre correspondant est représenté sur la figure 15. On remarque que le spectre du signal périodique $x_{rp}[n]$ correspond à l'échantillonnage du spectre du signal $x_r[n]$, à un facteur multiplicatif près. La largeur de créneaux ($N + 1$) influence le nombre de lobes secondaires tandis que le nombre d'échantillons par période (L) correspond au nombre de points fréquentiels utilisés pour l'échantillonnage. Ces aspects seront approfondis dans la section consacrée à la DFT . En conclusion, on constate que la DTFT d'un signal périodique donne un spectre de raies discontinu : la périodisation dans le domaine temporel implique une discrétisation dans le domaine fréquentiel.

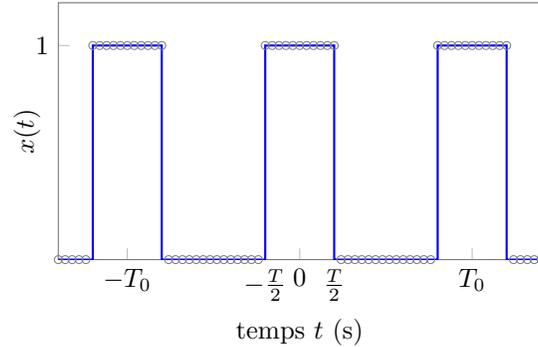


Figure 14. signal en créneaux x_{rp} à support continu (—) et à support discret (o) de durée infinie ($L = 25$ échantillons par période, créneaux de largeur $N + 1 = 11$ échantillons)

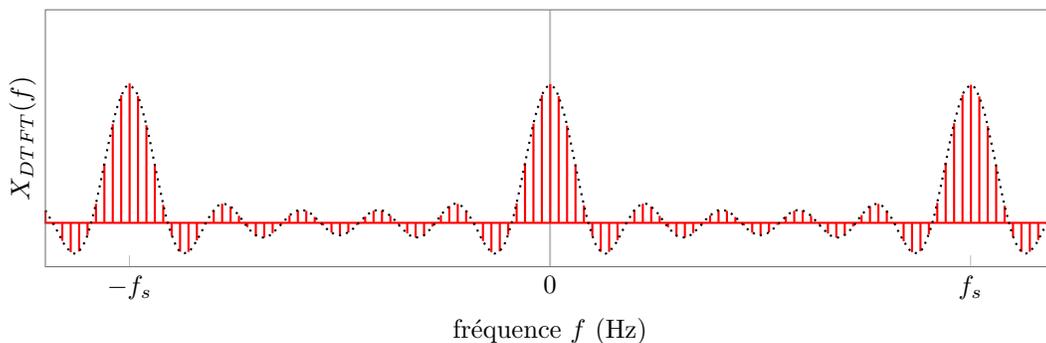


Figure 15. spectre issu du calcul de la DTFT d'un signal en créneaux x_{rp}

4.3 Limites de la DTFT

La DTFT est la première transformation que nous abordons qui permet d'analyser les signaux discrets. Néanmoins, certains problèmes la rendent difficile à utiliser en pratique :

- le calcul de la DTFT nécessite de connaître $x[n]$ dans son intégralité (signal infini). Or, en pratique, il n'est pas toujours possible de disposer de cette information.
- la DTFT produit un spectre à support continu, mais on ne peut l'évaluer numériquement qu'en un nombre fini de points. Il faut calculer la DTFT en un très grand nombre de points pour reproduire fidèlement le spectre continu.

On cherche donc à obtenir un spectre discret facile à stocker numériquement. Pour cela, on se restreint à des signaux discrets de durée finie (N échantillons), et on va également échantillonner la DTFT en considérant un nombre fini de points fréquentiels (L fréquences). On souhaite tout de même obtenir la meilleur approximation possible du spectre continu produit par la DTFT .

L'idée est donc d'échantillonner la DTFT en fréquence et de l'appliquer sur un signal discret tronqué de une durée finie. Ces modifications vont conduire à la définition de la transformation de Fourier discrète (DFT), la seule transformation utilisée en pratique pour le traitement numérique

du signal.

4.4 De la transformée de Fourier à temps discret à la transformée de Fourier discrète

On applique les modifications précédentes à la DTFT dont la définition est rappelée ci-dessous :

$$X_{DTFT}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fnt_s} \quad (34)$$

On prend en compte les points suivants :

- Le signal $x[n]$ a une durée finie et donc un nombre fini de points N . La sommation se fera donc pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$.
- On échantillonne la DTFT sur L points fréquentiels. Étant donné que $X_{DTFT}(f)$ est périodique de période f_s , on n'a besoin d'échantillonner que sur l'intervalle $[0, f_s]$. En conséquence, on souhaite que parmi les L points fréquentiels choisis, le premier soit en $f = 0$ et le dernier en $f = f_s$. On remplace donc f par $\frac{k}{L}f_s$ où $k = 0, 1, \dots, L$. Le dernier point est redondant, donc on aura finalement $k = 0, 1, \dots, L - 1$.

Si on insère ces modifications dans l'expression (34), on obtient :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n\frac{k}{L}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, L - 1\} \quad (41)$$

Cette expression est celle de la transformée de Fourier discrète; on verra que les spectres obtenus avec cette transformée sont fortement liés à ceux obtenus avec la DTFT. Par la suite, on considérera que $N = L$ afin de manipuler des vecteurs de même taille dans les domaines fréquentiel et temporel.

5 EXPÉRIMENTER : influence de l'échantillonnage

Avec la DTFT, nous avons commencé à aborder l'analyse de signaux discrets. Néanmoins, nous n'avons pour l'instant pas questionné le choix de la fréquence d'échantillonnage f_s . En réalité, ce choix est fondamental ; sur les applications précédentes de la DTFT, la fréquence d'échantillonnage a été volontairement « bien choisie » pour ne pas altérer les résultats.

5.1 Ambiguïté liée à l'échantillonnage

Comme on l'a vu précédemment, l'échantillonnage consiste à relever la valeur d'un signal continu $x(t)$ à intervalles de temps fixes t_s . Il faut bien garder en tête que *le signal discret n'est qu'un sous-ensemble du signal continu*. Une partie de l'information contenue dans le signal est inévitablement perdue à cause de l'échantillonnage car on ne sait pas ce qui se passe entre deux mesures.

Lorsque le taux d'échantillonnage est trop faible, la forme du signal discret diffère fortement de celle du signal d'origine et la reproduction n'est pas fidèle. Par exemple, supposons que l'on échantillonne une sinusoïde de fréquence f_0 à un taux d'échantillonnage f_s . On obtient donc le signal discret :

$$\begin{aligned} x[n] &= x(nt_s) \\ &= \sin(2\pi f_0 nt_s) \\ &= \sin(2\pi f_0 nt_s + 2\pi m), \quad m \in \mathbb{Z} \\ &= \sin(2\pi nt_s(f_0 + \frac{m}{nt_s})) \end{aligned} \tag{42}$$

On considère le cas où m est un multiple de n , on a donc $m = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} x[n] &= \sin(2\pi nt_s(f_0 + \frac{k}{t_s})) \\ &= \sin(2\pi nt_s(f_0 + kf_s)) \quad \text{avec } f_s = \frac{1}{t_s} \end{aligned} \tag{43}$$

On constate que l'échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence f_0 et d'une sinusoïde de fréquence $f_0 + kf_s$ conduit à la même série de valeurs discrètes $x[n]$. Réciproquement, si on considère la série de points $x[n]$, celle-ci ne peut pas représenter sans ambiguïté une et une seule sinusoïde : on peut faire passer différentes sinusoïdes fréquences $f_0 + kf_s$ par les points.

Pour observer graphiquement ce phénomène, on trace sur la figure 16 une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1$ Hz que l'on échantillonne avec différentes fréquences d'échantillonnage. On remarque qu'il semble exister une valeur seuil à partir de laquelle il n'est plus possible de reconstituer correctement le signal d'origine. En effet, sur la figure c, on remarque que la fréquence de la sinusoïde échantillonnée ne correspond pas à f_0 . La fréquence apparente est de 0,5 Hz. On définira ce terme par la suite.

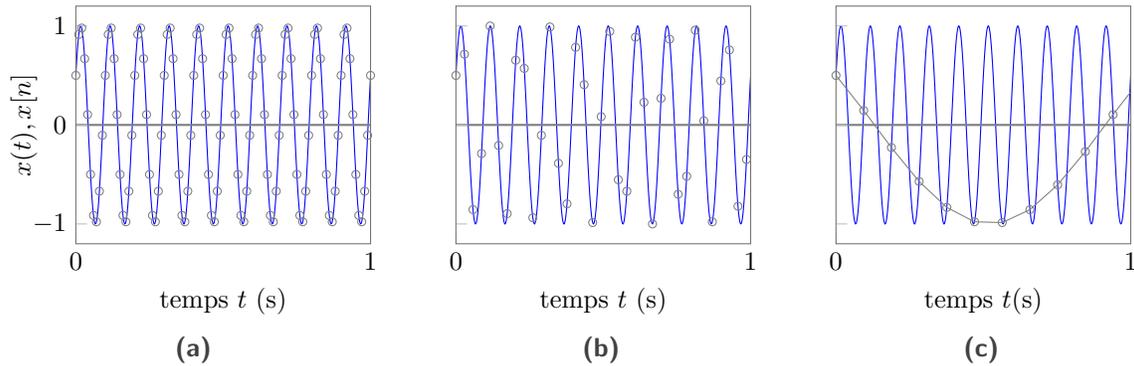


Figure 16. échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence $f_0 = 1$ Hz avec différents taux d'échantillonnage f_s : (a) $f_s = 10f_0$, (b) $f_s = 3,5f_0$, (c) $f_s = 1,05f_0$. (—) : $x(t)$, (○) : $x[n]$

5.2 Exemple à partir de la DTFT

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence de l'échantillonnage sur le spectre, en reprenant le même exemple. On calcule donc la DTFT d'un sinus de fréquence fondamentale f_0 échantillonné à la fréquence f_s . Dans ce cas, on obtient le spectre d'amplitude de la figure 17. Des impulsions sont situées à f_0 et $-f_0$, et le motif se répète autour des multiples de f_s puisque la DTFT est périodique de période f_s .

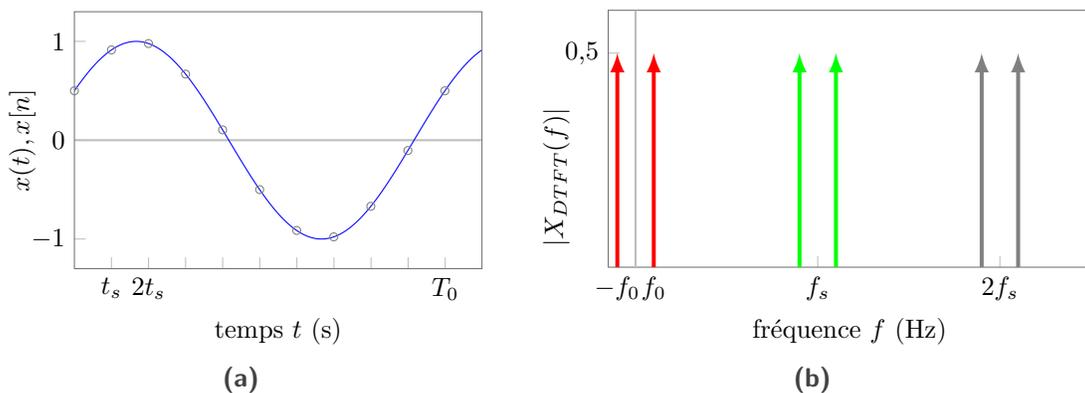


Figure 17. sinusoïde de durée infinie de fréquence $f_0 = 1$ Hz échantillonné au taux $f_s = 10f_0$ (a) et son spectre d'amplitude issu du calcul de la DTFT (b) montrant quelques répliques spectrales

Sur la figure, les différentes « répétitions » sont représentées par différentes couleurs. Par la suite, on appellera ces répétitions des répliques spectrales. Pour l'instant, on a $f_s = 10f_0$. Que se passe-t-il lorsque la fréquence d'échantillonnage est plus faible ? On trace les sinusoïdes associés à deux autres taux d'échantillonnage et les spectre associés, en ne montrant que deux répliques spectrales (figure 18).

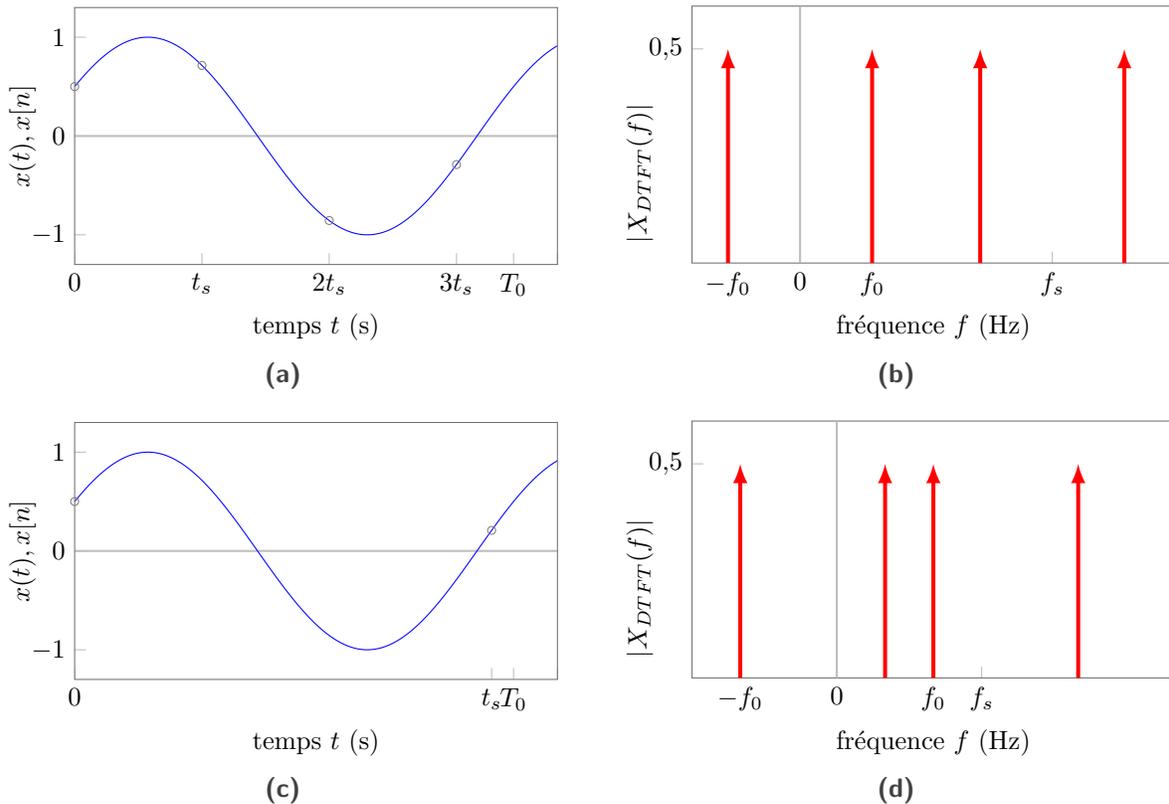


Figure 18. spectres d'amplitude issus du calcul de la DTFT d'un sinus de fréquence $f_0 = 1$ Hz échantillonné à différents taux : (a) $f_s = 3,5 f_0$, (c) $f_s = 1,05 f_0$.
 (b) spectre d'amplitude associé à (a), (d) spectre d'amplitude associé à (c)

On remarque que les répliques spectrales se superposent ; nous allons voir que cela crée une ambiguïté concernant l'interprétation du spectre. Supposons que l'on souhaite déterminer le contenu fréquentiel d'un signal inconnu : on calcule la DTFT et on trace le spectre d'amplitude du signal seulement sur $f \in [0, f_s]$ en raison de la périodicité de la DTFT . On suppose que l'on obtient la portion correspondante du spectre de la figure 19 :

On observe deux impulsions, aux fréquences $f - 0$ et $f_0 - f_s$. Or, le signal ne contient qu'une seule sinusoïde, on ne devrait donc observer qu'un pic. Si on ne connaît pas le signal d'origine, on pourrait donc conclure à tort qu'il contient deux sinusoïdes. On peut tirer de mauvaises conclusions d'un spectre si on n'échantillonne pas le signal suffisamment. On va généraliser le problème à un signal quelconque et voir quelles sont les précautions à prendre pour garantir un taux d'échantillonnage suffisant.

5.3 Taux de Nyquist

Soit un signal quelconque $x[n]$ dont on considère que le contenu fréquentiel est compris entre 0 et f_0 . On trace son spectre d'amplitude avec la DTFT , le contenu fréquentiel ,potentiellement

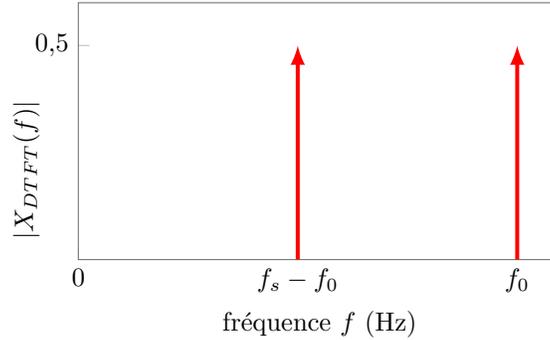


Figure 19. spectre d'amplitude issu du calcul de la DTFT de la sinusoïde de la figure c

complexe, est simplement représenté ici par une enveloppe triangulaire (figure 20).

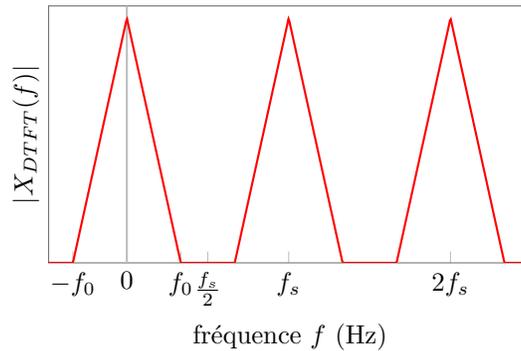


Figure 20. illustration du taux de Nyquist à partir du spectre d'amplitude d'un signal quelconque

On constate que les répliques spectrales sont centrées autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_s , un résultat que nous avons déjà évoqué. Dans notre cas, $f_s > 2f_{max}$ et les répliques ne se recouvrent pas. En revanche, pour $f_s < 2f_{max}$, les répliques se recouvrent. Si on ne s'intéresse qu'à la bande de fréquence d'intérêt, on constate une perte d'information : dans la pratique, les contributions des différentes répliques s'additionnent et on ne peut plus déterminer les fréquences du signal d'origine.

On dit que les fréquences plus élevées que $0,5f_s$ sont « repliées » sur la bande d'intérêt $f \in [-f_s/2, f_s/2]$. C'est le phénomène de repliement. Pour empêcher le repliement, le contenu fréquentiel du signal doit être contenu dans la bande $[-f_s/2, f_s/2]$. Sinon, une fréquence plus élevée f_k sera repliée à une fréquence apparente f_a définie par :

$$f_a = f_k - Mf_s \quad (44)$$

où M est un entier tel que $-0,5f_s < f_a < 0,5f_s$.

Le théorème de Nyquist ou théorème de l'échantillonnage donne le taux d'échantillonnage

minimal permettant d'éviter le repliement pour un signal continu de fréquence maximale f_{max} :

$$f_s > 2f_{max} \quad (45)$$

Le taux de Nyquist est la fréquence maximale que peut contenir le signal pour éviter le phénomène de repliement :

$$f_{Nyquist} = \frac{f_s}{2} \quad (46)$$

En pratique, comme on connaît rarement la fréquence maximale contenue dans un signal, on utilise un filtre anti-repliement qui coupe les fréquences supérieures au taux de Nyquist. Pour les paragraphes suivants, on considère que le taux d'échantillonnage est toujours suffisamment élevé pour respecter le critère de Nyquist. En effet, la transformée de Fourier discrète hérite directement des phénomènes que nous avons abordé avec la DTFT, les conclusions sur le taux d'échantillonnage minimal restent donc valables. Nous pouvons ainsi observer correctement l'influence des autres phénomènes qui entrent en jeu dès lors qu'on applique la transformation de Fourier discrète.

6 IMPLÉMENTER : analyse de signaux discrets

La transformée de Fourier discrète (DFT) est un outil fondamental pour le traitement du signal. Nous allons voir comment obtenir le spectre en pratique et nous abordons le phénomène de la fuite spectrale.

6.1 Transformée de Fourier discrète

But Obtenir la représentation fréquentielle d'un signal discret de longueur finie, périodique ou non.

Définition

a. transformée directe (analyse) :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n \frac{k}{L}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, L-1\} \quad (47)$$

b. transformée inverse (synthèse) :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{L-1} X[k]e^{j2\pi n \frac{k}{L}} \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (48)$$

avec :

N : nombre de points temporels (*i.e.* nombre d'échantillons dans le signal),

n : indice de temps,

L : nombre de points fréquentiels (*i.e.* nombre de points où on va échantillonner la DTFT)

k : indice de fréquence.

Par la suite, on considère, sauf mention contraire, que $N = L$. En effet, il est plus facile de manipuler des vecteurs ayant la même taille dans le domaine fréquentiel et dans le domaine temporel. On retiendra donc la définition suivante pour la transformée de Fourier discrète à N points :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (49)$$

Pour un signal quelconque, les termes $X[k]$ sont *a priori* complexes :

$$X[k] = \Re(X[k]) + j\Im(X[k]) \quad (50)$$

Comme pour la transformée de Fourier continue, on les notera souvent sous forme exponentielle, en calculant le module (ou l'amplitude) $|X[k]|$ et l'argument (ou phase spectrale) $\psi[k]$ définis par :

$$|X[k]| = \sqrt{\Re(X[k])^2 + \Im(X[k])^2} \quad (51)$$

$$\psi[k] = \arctan\left(\frac{\Im(X[k])}{\Re(X[k])}\right) \quad (52)$$

Propriétés importantes

1. La DFT est linéaire : la DFT de la somme de deux signaux est égale à la somme des DFT de chaque signal. Soit $x_1[n]$ dont la DFT est $X_1[k]$ et $x_2[n]$ dont la DFT est $X_2[k]$. Alors si $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$:

$$X[k] = X_1[k] + X_2[k] \quad (53)$$

2. Pour un signal $x[n]$ réel, sa transformée de Fourier discrète est telle que :

$$X[k] = X^*[N - k] \quad (54)$$

où $X^*[N - k]$ désigne le complexe conjugué de $X[N - k]$

3. Pour un signal $x[n]$ périodique, si on effectue un décalage cyclique des indices, le spectre d'amplitude ne sera pas modifié par rapport au signal sans changement d'indice. En revanche, le spectre de phase sera modifié, un retard en temps se traduisant dans le domaine fréquentiel par un changement de phase. Ce principe est connu en anglais sous le nom de « shifting theorem ».
4. La DFT hérite également de la périodicité de la DTFT , ce qui est logique puisque la DFT est une version échantillonnée de la DTFT .

6.2 Obtention du spectre d'amplitude à partir de la transformée de Fourier discrète

On va reprendre et traiter l'exemple du signal harmonique $x_h(t)$ illustré sur la figure 1. Comment passer du signal discret aux spectres d'amplitude et de phase ? On rappelle l'expression du signal, composé de 4 sinusoides :

$$x_h(t) = 6 \cos(2\pi \underbrace{1}_{f_0} t) + 10 \cos(2\pi \underbrace{2}_{f_1} t + \pi/4) + 4 \cos(2\pi \underbrace{5}_{f_2} t + \pi/2) + 2 \cos(2\pi \underbrace{9}_{f_3} t)$$

Ce signal est échantillonné à la fréquence $f_s = 20$ Hz sur une durée $T = 2,95$ s. La durée entre deux échantillons est donc $t_s = 0,05$ s et on aura en tout $N = 60$ échantillons. On applique la DFT sur ce signal (équation (49)). On obtient donc 60 valeurs complexes $X[k]$. Comme on l'a vu, on peut représenter ces valeurs sous différentes formes. On s'intéresse d'abord aux amplitudes $|X[k]|$ et on trace le spectre directement en fonction de l'indice k , sur la figure 21.

On constate que le spectre obtenu de manière directe est difficile à interpréter. On voit apparaître 8 raies dans le spectre alors qu'on a seulement 4 sinusoides dans l'expression analytique du signal. De plus, les amplitudes ne correspondent pas à celles du signal analytique, et l'axe des abscisses est difficile à interpréter en termes de fréquences. On va corriger chacun de ces aspects pour obtenir un spectre fidèle au signal d'origine et plus lisible.

Axe des fréquences Il est important de se souvenir que la DFT est un échantillonnage en fréquence de la DTFT . On échantillonne la DTFT en N points fréquentiels entre 0 et f_s étant donné que la DTFT est périodique de période f_s (voir démarche section 4.4). Les fréquences

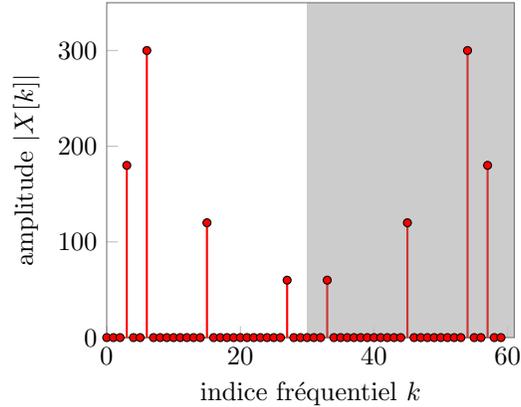


Figure 21. spectre d'amplitude de $x_h(t)$ issu de la DFT avant correction des abscisses et ordonnées

choisies sont donc situées aux points $f = \frac{k}{N}f_s$ avec $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Ces fréquences sont appelées fréquences d'analyse ; elles correspondent aux points où on évalue la DTFT :

$$f_{analyse,k} = \frac{k}{N}f_s, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (55)$$

Sur la figure 21, l'axe des fréquences (abscisse) peut donc être graduée en fonction de l'indice k comme c'est le cas, ou en fonction de la fréquence d'analyse correspondante, plus facile à interpréter (figure 22). Dans le cadre de notre exemple, les fréquences d'analyse sont :

$$f_{analyse,k} = k \cdot \frac{1}{3}, \quad k = 0, 1, \dots, 59$$

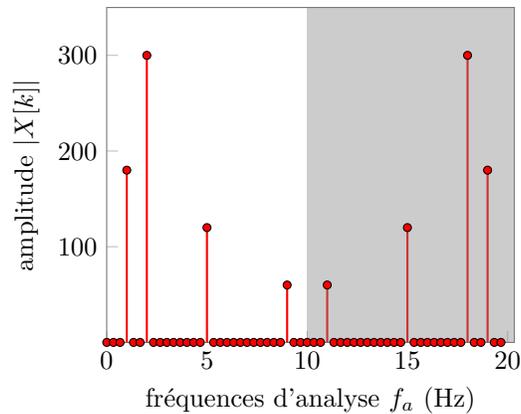


Figure 22. spectre d'amplitude de $x_h(t)$ issu de la DFT avec axe des abscisses exprimés en termes de fréquences

On définit la précision spectrale comme l'espace entre deux fréquences d'analyse consécutives. Dans notre cas, la précision spectrale est de $1/3$ Hz. Cette quantité est parfois appelé espacement

spectral car c'est la distance entre deux points pris pour échantillonner la DTFT . Pour améliorer la précision du spectre, il faut diminuer l'espacement entre les fréquences d'analyse. On peut pour cela réduire la fréquence d'échantillonnage ou augmenter le nombre d'échantillons.

Correction des amplitudes On observe huit raies dans le spectre d'amplitude alors que l'on n'a dans l'expression analytique $x(t)$ que quatre sinusoïdes. Quel sens faut-il alors donner aux quatre raies de fréquences les plus élevées ? Une fois encore, il ne faut pas oublier que la DFT résulte de l'échantillonnage de la DTFT qui est périodique de période f_s ; les répliques spectrales sont donc centrées autour des multiples de f_s . On a défini l'indice $k \in 0, \dots, N - 1$ et représenté le spectre en conséquence sur $f \in [0f_s]$ mais on peut tout aussi bien le représenter sur $[-f_s/2 f_s/2]$ en raison de la périodicité (figure 23).

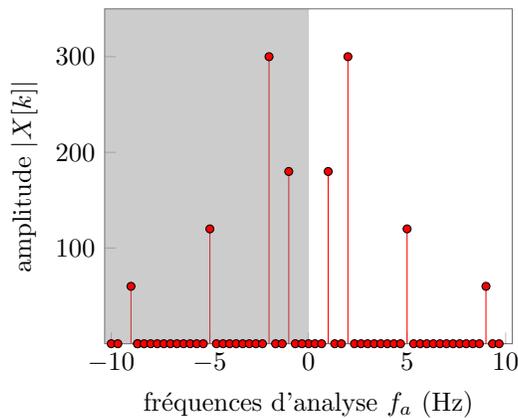


Figure 23. spectre d'amplitude de $x_h(t)$ issu de la DFT présenté sur $[-f_s/2 f_s/2]$

On constate que le spectre est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Cela est dû à la propriété de symétrie conjuguée des amplitudes évoquée précédemment dans le cadre des signaux réels, que l'on peut récrire :

$$X[-f_{analyse,k}] = X^*[f_{analyse,k}] \quad (56)$$

On voit par exemple que les fréquences $f = -5$ Hz et $f = 5$ Hz sont contenues dans le signal $x_h(t)$. L'usage de fréquences négatives peut être interprété physiquement comme un changement de phase : l'analyse de Fourier consiste à décomposer le signal en sommes de cosinus et sinus, or $\cos(-f) = \cos(f + \pi)$. On peut donc considérer qu'une raie à une fréquence négative $-f$ contribue en réalité à la fréquence f avec un changement de phase. Comme le changement de phase n'est pas visible sur le spectre d'amplitude, on peut représenter le spectre d'amplitude sur l'intervalle $[0 f_s/2]$ uniquement pour un signal d'entrée réel. La contribution de chaque fréquence non nulle est donc doublée pour prendre en compte la partie négative du spectre. On peut donc montrer la relation suivante entre l'amplitude réelle d'une sinusoïde A_k et l'amplitude correspondante renvoyée par la DFT $|X[k]|$, on a :

$$A_k = |X[k]| \cdot \frac{2}{N}, \quad k = 1, \dots, N/2 - 1 \quad (57)$$

Pour l'indice $k = 0$, on a vu que le terme $A_0 = A_k$ correspond à la valeur moyenne, également appelée valeur DC (*direct current*) du signal. La propriété de symétrie conjuguée ne s'applique pas dans ce cas et on a donc pour un signal réel :

$$A_0 = \frac{|X[0]|}{N} \quad (58)$$

Avec ces modifications concernant l'axe des fréquences et l'axe des amplitudes, on peut tracer correctement le spectre d'amplitude (figure 24). En général, les amplitudes nulles sont omises afin de ne pas surcharger les graphiques.

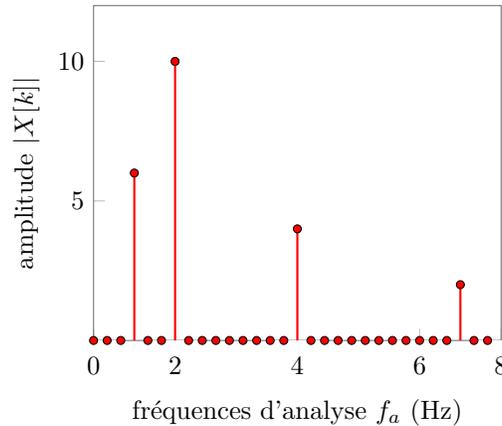


Figure 24. spectre d'amplitude de $x_h(t)$ issu de la DFT avec axes corrigés

6.3 Obtention du spectre de phases à partir de la transformée de Fourier discrète

Axe des fréquences Comme pour le spectre d'amplitudes, il est commun de représenter l'axe des fréquences en utilisant les fréquences d'analyse définies précédemment.

En revanche, la propriété de symétrie conjuguée ne s'applique pas pour le spectre de phase que l'on présente généralement dans sa totalité, de $k = 0$ à $N - 1$.

Correction des phases Il faut être vigilant concernant le calcul des phases sur ordinateur. En effet, la phase est calculée à partir de la relation :

$$\psi[k] = \arctan \left(\frac{\Im(X[k])}{\Re(X[k])} \right) \quad (52)$$

Or, si $\Re(X[k])$ est petit, le calcul de la phase ne sera pas correct en raison des problèmes de précision numérique. Dans ce cas, $X[k]$ est purement imaginaire et sa phase vaut $\pi/2$ ou $-\pi/2$, respectivement pour $\Im(X[k]) > 0$ et $\Im(X[k]) < 0$.

Enfin, on choisit souvent de ne pas afficher les phases sous une certaine tolérance afin de ne pas alourdir le spectre. Les phases sont en effet rarement exactement nulles en raison des problèmes de

précision numérique, il faut donc utiliser un seuil de tolérance à bon escient pour discriminer les phases très faibles.

Grâce aux modifications des deux axes, on obtient le spectre de phase de la figure 25 (les phases très faibles ne sont pas représentées pour afin de ne pas surcharger le graphique).

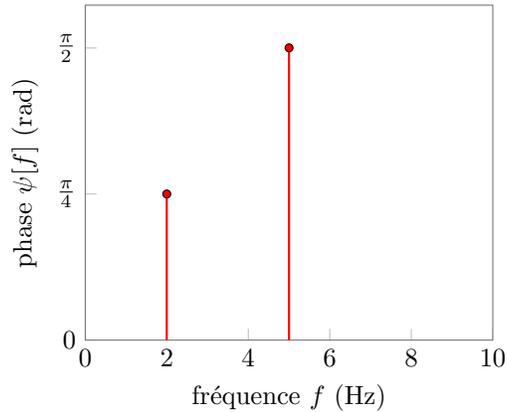


Figure 25. spectre de phase de $x_h(t)$ issu de la DFT avec axes corrigés

6.4 À retenir sur la transformation de Fourier discrète

Fonctionnement

- La transformée de Fourier discrète s'applique à des *signaux discrets de durée finie* quelconques, qu'ils soient périodiques ou non ;
- la DFT est une *version échantillonnée de la transformée de Fourier à temps discret* (DTFT). Les fréquences discrètes sont les *fréquences d'analyse* et la DFT a donc un support discret.
- pour réaliser le spectre, on présente généralement l'axe des abscisses en fonction des fréquences d'analyse et on corrige les amplitudes et le calcul des phases ;
- la résolution d'un spectre Δf est l'écart minimal entre 2 fréquences du signal d'origine tel que ces deux fréquences puissent être distingués dans le spectre. Dans le cas d'un spectre avec des lobes, la résolution spectrale correspond à la demi-largeur du lobe principal.
- l'espacement spectral est l'écart entre deux fréquences d'analyse prises pour échantillonner la DTFT. Plus l'espacement spectral est faible, meilleure est la précision du spectre.
- la *fuite spectrale* est un phénomène inévitable qui mène à l'apparition de raies à des fréquences autres que celles contenues dans le signal d'origine ;
- pour réduire la fuite spectrale, on peut utiliser le *fenêtrage* ou la technique du *zero-padding*.

Enjeux de la DFT

- La DFT est la *seule transformée utilisable sur des signaux numériques* qui sont par nature discret et de durée limitée ;

- le calcul de la DFT tel que présenté précédemment conduit à une implémentation coûteuse en terme de temps de calcul. L'utilisation massive de la DFT n'a été permise que par l'algorithme de la transformation de Fourier rapide (FFT) que nous aborderons par la suite.
- « La DFT suppose que le signal d'entrée est périodique ». Même si on trouve souvent cette affirmation dans de nombreux livres de traitement du signal, elle n'est pas correcte. On peut appliquer la DFT à n'importe quel type de signaux discrets, périodique ou non. En réalité, il faudrait plutôt dire : « La DFT donne le même résultat que la DTFT d'un signal discret périodique de longueur infinie ».

À propos de la transformée de Fourier rapide La transformée de Fourier rapide est une implémentation intelligente de la transformée de Fourier discrète qui permet d'obtenir des temps de calculs satisfaisants pour des signaux de grande taille. Cet algorithme, mis au point par Cooley et Tukey en 1965 [2], a permis la démocratisation et l'utilisation massive de la DFT . Le calcul de la DFT à N points nécessite N^2 multiplications complexes tandis que le calcul de la FFT nécessite seulement $\frac{N}{2} \log_2(N)$ multiplications si N est une puissance de 2.

La transformée de Fourier rapide est implémentée dans la quasi-totalité des outils numériques actuels de traitement du signal. Par exemple, le module `scipy.signal`¹ en langage Python est suggéré pour comparer une première implémentation « manuelle » de la transformée de Fourier discrète à la transformée de Fourier rapide, optimisée.

Références

- [1] Nuttall, A., 1981. “Some windows with very good sidelobe behavior”. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, **29**(1), pp. 84–91.
- [2] Cooley, J. W., and Tukey, J. W., 1965. “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”. *Mathematics of computation*, **19**(90), pp. 297–301.

1. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/signal.html>

A Compléments sur l'analyse de Fourier

A.1 Remarques sur la distribution de Dirac

Il est question à plusieurs reprises dans ce document de la distribution de Dirac, parfois appelé abusivement « fonction de Dirac » et noté $\delta(t)$. Cette distribution est fortement utilisée dans le domaine du traitement du signal pour représenter une impulsion et est alors appelé « pic de Dirac ». Nous ne détaillerons pas la théorie des distributions dans ce documents et nous nous contenterons de donner quelques propriétés de cette distribution, utiles pour les divers calculs de transformées. On utilisera la définition suivante :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette notation n'est effectivement pas rigoureuse car la valeur en 0 est infinie, ce n'est donc pas à proprement parler une fonction. On peut la voir comme une densité de probabilité où la masse est concentrée en 0 et vaut donc 1 en ce point : l'intégrale de cette fonction sur \mathbb{R} vaut 1. Pour cette raison, le pic de Dirac est représenté par une impulsion telle que montrée sur la figure 26. On

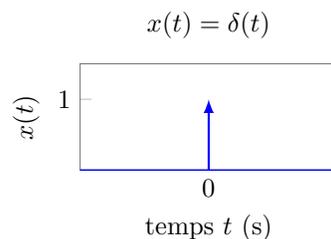


Figure 26. représentation d'une impulsion par un pic de Dirac

retient les propriétés suivantes concernant la distribution de Dirac :

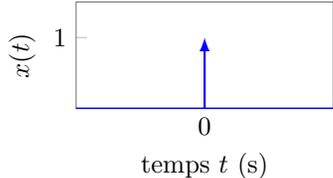
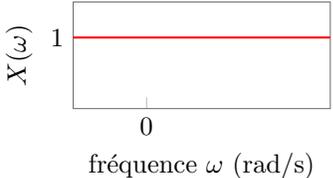
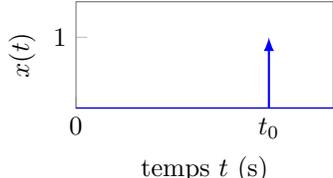
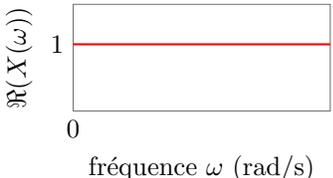
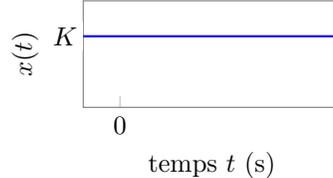
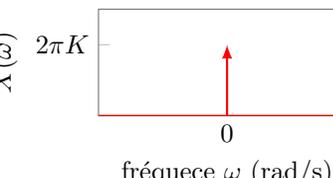
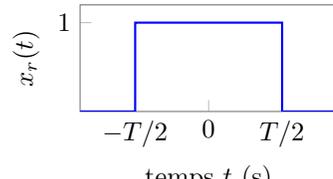
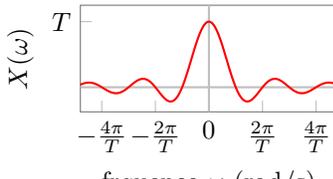
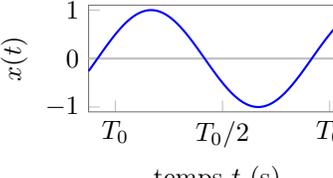
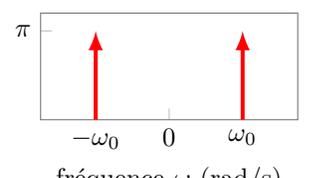
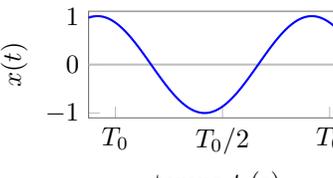
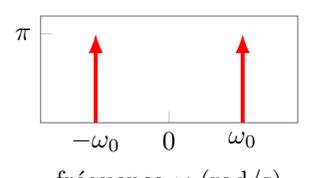
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (59)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = \delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{notation intégrale du pic}) \quad (60)$$

où $f(t)$ est une fonction quelconque. On rappelle enfin que les définitions et propriétés données ici sont loin d'être rigoureuses sur un plan mathématique ; elles permettent simplement de manipuler le pic de Dirac dans les calculs.

A.2 Transformées de Fourier usuelles

Tableau 3. transformées de Fourier continues usuelles

signal	domaine temporel	domaine fréquentiel
pic de Dirac	$x(t) = \delta(t)$ 	$X(\omega) = 1$ 
pic de Dirac décalé	$x(t) = \delta(t - t_0)$ 	$X(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ 
constante	$x(t) = K$ 	$X(\omega) = 2\pi K\delta(\omega)$ 
fenêtre rectangulaire	$x_r(t) = 1 \text{ si } t \leq T/2$ 	$X(\omega) = T \text{sinc}(\frac{\omega T}{2})$ 
sinus	$x(t) = \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ 	$X(\omega) = \frac{\pi}{j}(e^{j\phi_0}\delta(\omega - \omega_0) - e^{-j\phi_0}\delta(\omega + \omega_0))$ 
cosinus	$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ 	$X(\omega) = \pi(e^{j\phi_0}\delta(\omega - \omega_0) + e^{-j\phi_0}\delta(\omega + \omega_0))$ 

B Démonstrations mathématiques

B.1 Calcul de la DTFT de la fenêtre rectangulaire discrète

Démonstration. Soit la fenêtre rectangulaire discrète à $N + 1$ (N pair) points définie par :

$$x_r[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N/2, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (37)$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Le calcul de la DTFT donne :

$$\begin{aligned} X_{DTFT}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n t_s} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} 1 \times e^{-j\omega n t_s} \\ &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} q^n \quad \text{avec } q = e^{-j\omega t_s} \end{aligned}$$

Il s'agit de la somme de termes d'une suite géométrique de raison q , de premier terme $q^{-N/2}$ comportant $N + 1$ termes. On peut ré-écrire cette somme avec une formule bien connue :

$$\begin{aligned} X_{DTFT}(\omega) &= \sum_{n=-N/2}^{N/2} q^n \quad \text{avec } q = e^{-j\omega t_s} \\ &= q^{-N/2} \cdot \left(\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \right) \end{aligned}$$

Pour écrire cette expression plus lisiblement, on tente de faire apparaître des sinus grâce aux

formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
 X_{DTFT}(\omega) &= q^{-N/2} \cdot \left(\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \right) \\
 &= q^{-N/2} \cdot \left(\frac{q^{-(N+1)/2}}{q^{-(N+1)/2}} \right) \cdot \left(\frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \right) \\
 &= q^{-N/2} \cdot \left(\frac{1}{q^{-(N+1)/2} \cdot (1 - q)} \right) \cdot \left(\frac{q^{-(N+1)/2} \cdot (1 - q^{N+1})}{1} \right) \\
 &= \frac{q^{-N/2}}{q^{-N/2}} \cdot \left(\frac{1}{q^{-1/2} \cdot (1 - q)} \right) \cdot \left(\frac{(q^{-(N+1)/2} - q^{(N+1)/2})}{1} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{q^{-1/2} - q^{1/2}} \right) \cdot \left(\frac{q^{-(N+1)/2} - q^{(N+1)/2}}{1} \right) \\
 &= \left(\frac{2j}{q^{-1/2} - q^{1/2}} \right) \cdot \left(\frac{q^{-(N+1)/2} - q^{(N+1)/2}}{2j} \right)
 \end{aligned}$$

On remplace q par son expression et on obtient :

$$\begin{aligned}
 X_{DTFT}(\omega) &= \left(\frac{2j}{e^{(j\omega t_s)/2} - q^{-(j\omega t_s)/2}} \right) \cdot \left(\frac{e^{j\omega t_s(N+1)/2} - q^{-j\omega t_s(N+1)/2}}{2j} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin(\omega t_s/2)} \cdot \sin(\omega t_s(N+1)/2) \\
 &= \frac{\sin(\omega t_s(N+1)/2)}{\sin(\omega t_s/2)}
 \end{aligned}$$

En terme de fréquence $f = \omega/2\pi$, on obtient bien :

$$X_{DTFT}(f) = \frac{\sin(\pi f t_s(N+1))}{\sin(\pi f t_s)} \tag{61}$$

□

C Compléments sur la fuite spectrale

C.1 Fuite spectrale

Dans tout le document, nous avons bien échantillonné nos signaux sur un nombre entier de périodes et les fréquences d'analyse correspondaient exactement aux fréquences contenues dans le signal. Pourtant, en pratique, on ne connaît pas *a priori* la période du signal, en admettant que le signal soit périodique. On voit donc apparaître un phénomène parasite dénommé fuite spectrale.

Phénomène La fuite spectrale désigne l'apparition de raies dans le spectre à des fréquences autres que celles contenues dans le signal d'origine. Le phénomène se produit lorsque une fréquence contenue dans le signal ne correspond pas exactement à une fréquence d'analyse.

On reprend le signal harmonique donné en exemple à la section 6.2, mais cette fois on l'échantillonne avec $f_s = 21$ Hz sur une durée $T = 3$ s. On a donc $N = 62$ échantillons. Les fréquences d'analyse sont de la forme :

$$f_{analyse,k} = k \cdot \frac{f_s}{N} = k \cdot \frac{21}{62}, \quad k = 0, 1, \dots, 61$$

On constate qu'il n'y pas de fréquences d'analyse aux valeurs exactes des sinusoides contenues dans le signal (à 1 Hz, 2 Hz, 5 Hz et 9 Hz). On trace le spectre d'amplitude sur la figure 27 pour pouvoir observer le phénomène.

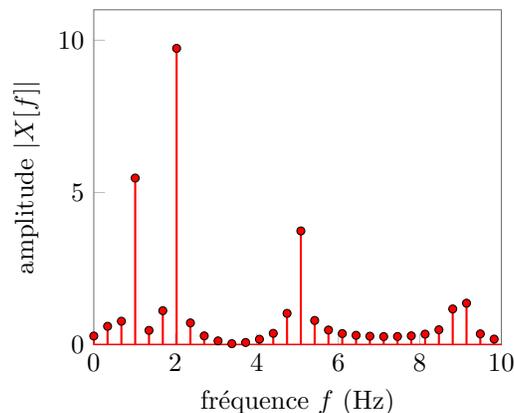


Figure 27. illustration de la fuite spectrale

On constate qu'il y a plus de 4 raies dans le spectre, même si les plus importantes semblent tout de même localisées aux fréquences contenues dans le signal. Les amplitudes aux fréquences d'intérêt ne sont pas tout à fait exactes non plus ; elles sont légèrement sous-estimées.

Causes du phénomène Pour expliciter ce phénomène, il faut revenir à certaines notions vues dans les sections précédentes et que nous allons détailler ici :

- Un signal discret de durée T finie $x[n]$ peut s'écrire comme le produit du signal continu échantillonné avec une fenêtre rectangulaire finie à N points.

- Lorsqu'on fait la DTFT d'un tel signal, la transformée de la fenêtre rectangulaire, qui est un sinus cardinal, va apparaître dans le calcul de la DTFT et créer des ondulations.
- La DFT étant une version échantillonnée en fréquence de la DTFT, les ondulations vont également apparaître dans cette transformée. Pour une sinusoïde de fréquence f_0 , le lobe principal se situe à la fréquence f_0 .
- Dans certains cas, les fréquences d'analyse prises pour échantillonner la DTFT vont correspondre aux fréquences où les ondulations s'annulent et seuls les fréquences contenues dans le signal de départ vont alors apparaître dans le spectre.
- Souvent, les fréquences d'analyse ne correspondent pas aux fréquences où les ondulations s'annulent. On voit donc apparaître des raies dans le spectre à des fréquences qui n'existent pas dans le signal : c'est le phénomène de fuite spectrale.

Nous allons détailler chacun des points dans ce qui suit. Tout d'abord, on a vu qu'un signal numérique discret résulte de l'échantillonnage d'un signal continu sur une durée T finie. La troncature peut être interprétée comme le produit du signal d'origine discrétisé avec une fenêtre rectangulaire discrète de durée T . Tout signal numérique peut donc s'écrire comme le produit d'un signal continu avec une fenêtre rectangulaire discrète. Dans le domaine temporel, le signal discret tronqué à N échantillons $x_N[n]$ peut donc s'écrire ainsi :

$$x_N[n] = x(nt_s)w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (62)$$

où :

- $x(nt_s) = x[n]$: signal continu de durée infinie échantillonné toutes les t_s secondes,
- $w[n]$: fenêtre rectangulaire discrète à N échantillons.

On effectue la DTFT de $x_N[n]$. La multiplication dans le domaine temporel correspond à une opération nommée convolution dans le domaine fréquentiel. Nous n'allons pas expliciter cette opération ici mais l'important est de retenir que la DTFT de la fenêtre rectangulaire $w[n]$ va avoir une influence sur la DTFT du signal tronqué $x_N[n]$: des ondulations vont apparaître dans le spectre.

En effet, on a vu en abordant la DTFT que la transformée d'une fenêtre rectangulaire était un sinus cardinal, répété périodiquement, dont le spectre est montré à la figure 13. Les lobes principaux (les plus importants en amplitude), sont situés à des multiples de la fréquence d'échantillonnage et la fonction passe par 0 aux points $f = l \frac{f_s}{N}, l \in \mathbb{Z}^*$.

Comme la DFT est simplement la DTFT échantillonnée en fréquence, les ondulations seront également présentes pour cette transformée. Nous allons illustrer ces aspects avec un exemple. On considère la DFT d'un cosinus de fréquence f_0 échantillonné sur m périodes, $m \in \mathbb{R}$. La DFT du cosinus peut être approximé par :

$$X[k] \approx \frac{N \sin[\pi(m-k)]}{2 \pi(m-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (63)$$

On considère pour l'instant qu'on a échantillonné une sinusoïde de fréquence $f_0 = 2$ Hz avec $f_s = 6$ Hz sur 1,5 secondes. On a donc $m = 3$ cycles. En conséquence, les valeurs $(m - k)$ sont des

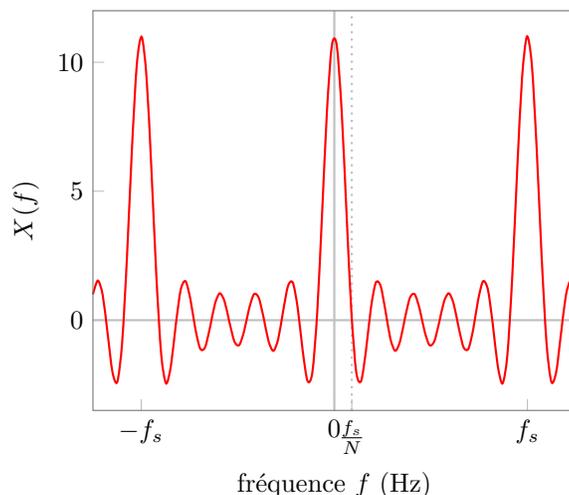


Figure 13. DTFT d'une fenêtre rectangulaire $x_r[n]$ (repeated from page 23)

entiers. Sur la figure a, on trace la DTFT à support continu du cosinus tronqué (sur une période) et la DFT issue de l'équation précédente (points discrets dans le domaine fréquentiel) en fonction de la fréquence (Hz). On indique la position de la première fréquence d'analyse $f_{analyse,1} = 1 \cdot \frac{21}{62} \approx 0,39$ Hz ; elle sera notée sur les graphiques $f_{a,1}$.

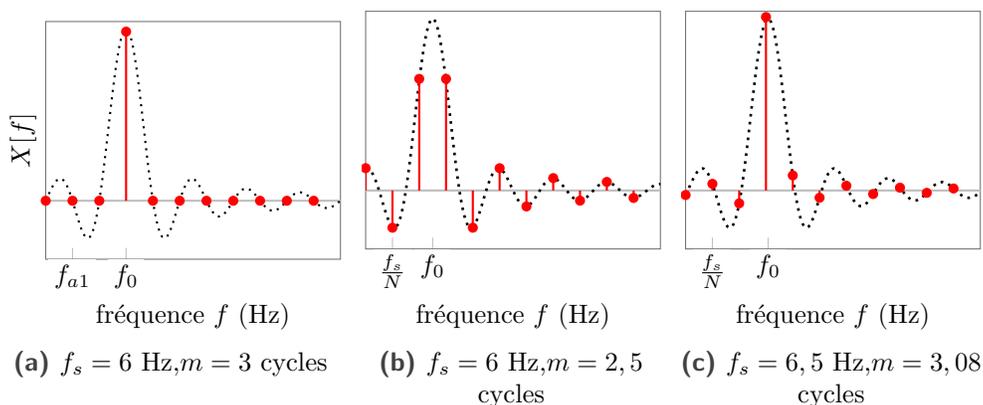


Figure 29. illustration de la fuite spectrale sur la DFT d'un signal cosinus de fréquence $f_0 = 2$ Hz tronqué à m périodes. Pointillés : DTFT du signal. Ronds : DFT du signal

On remarque que dans ce cas tout se passe bien : seul la contribution de f_0 apparaît dans le spectre, il n'y a pas de fuite spectrale. En effet, pour une fréquence d'analyse $f_{analyse,k}$ donnée, et donc un indice k fixé, la valeur $m - k$ est entière, et on a donc $X[k] = 0$ pour cette fréquence d'analyse : les fréquences d'analyse correspondent exactement aux zéros de la DTFT .

On considère maintenant qu'on a échantillonné la même sinusoïde, avec le même taux d'échantillonnage,

mais cette fois sur une durée correspondant à 2,5 cycles seulement. Dans ce cas, on constate sur la figure **b** que le phénomène de fuite spectrale apparaît. En effet, cette fois, pour un indice $k \in \mathbb{Z}^*$ fixé, la valeur $(m - k)$ n'est pas entière et les valeurs $X[k]$ ne sont donc pas nulles : les fréquences d'analyse ne coïncident plus avec les zéros de la DTFT.

Enfin, on reprend le sinuséide d'origine que l'on échantillonne sur $T = 1,5s$ avec une fréquence d'échantillonnage de $f_s = 6,5$ Hz. Dans ce cas, on a donc 3,25 points par période. On veut échantillonner sur 1,5 secondes (3 périodes) ; il nous faudrait donc 9,75 points. On ne peut prendre qu'un nombre entier de points : on a donc 10 points, ce qui correspond à environ 3,08 périodes. Dans ce cas, les fréquences d'analyse ne correspondent plus à des valeurs nulles sur le spectre, comme dans le cas précédent. Le résultat est présenté sur la figure **c**.

On constate que le phénomène de fuite spectrale apparaît lorsque les fréquences d'analyse ne correspondent pas aux fréquences contenues dans le signal. Ceci peut se produire quand les fréquences d'analyse sont trop éloignées ; la précision du spectre est alors mauvaise. Ceci peut également se produire lorsqu'on a pas un nombre entier de points par période, ce qui conduit à ne pas avoir un nombre entier de périodes dans l'échantillon en général.

C.2 Réduction de la fuite spectrale

En pratique, on ne sais pas si le signal que l'on souhaite analyser est périodique, et même si on le sait on ne connaît pas *a priori* sa période. La fuite spectrale est donc un phénomène qui ne peut être éliminé complètement. Néanmoins, il est possible de le limiter par diverses méthodes.

Utilisation de fenêtres adéquates On cherche à utiliser une fenêtre dont la DTFT présente une forme plus intéressante que la fenêtre rectangulaire, avec des lobes secondaires d'amplitudes faible devant le lobe principal et/ou un lobe principal plus étroit. On doit donc définir des quantités permettant d'évaluer la qualité d'une fenêtre.

On définit la résolution fréquentielle comme la capacité à distinguer deux fréquences proches. Sur la DTFT de la fenêtre rectangulaire de la figure **13**, on peut voir que la résolution fréquentielle Δ_f , correspondant à la largeur du lobe principal, vaut $2 \cdot \frac{f_s}{N}$. Si un signal contient deux fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 - f_2 \leq \Delta_f$, ces deux fréquences ne seront pas distinctes sur le spectre issu de la DFT puisque elles correspondront toutes les deux au lobe principal. On cherche donc à avoir le lobe principal le plus étroit possible afin de discriminer au mieux les fréquences contenues dans le signal.

L'utilisation de fenêtres autre que la fenêtre rectangulaire permet également d'obtenir un lobe primaire dont le « pic » est particulièrement élevé par rapport aux lobes secondaires. On appelle gain d'une fenêtre sa valeur moyenne que l'on note DC_w . Pour la fenêtre rectangulaire, sa valeur est de 1, c'est pourquoi elle n'apparaît pas dans les équations des paragraphes précédents. En revanche, lorsqu'on utilise une fenêtre différente, le gain est différent et les expressions données précédemment pour les amplitudes de la DFT ne sont plus correctes. Les amplitudes corrigées A_k sont obtenues ainsi, pour une DFT à N points :

$$A_k = |X[k]*| \cdot \frac{2}{N \cdot DC_w}, \quad k = 1, \dots, N/2 - 1 \quad (64)$$

et

$$A_0 = |X[k]*| \cdot \frac{1}{N \cdot DC_w}, \quad k = 1, \dots, N/2 - 1 \quad (65)$$

Diminution de la fréquence d'échantillonnage Dans ce cas, l'espacement spectral (distance entre 2 fréquences d'analyse) est plus faible et la précision meilleure. Il faut néanmoins faire attention à ne pas sous-échantillonner le signal, auquel cas on a vu qu'une partie de l'information contenue dans le signal d'origine pouvait être perdue (en cas de non-respect du critère de Nyquist).

Augmentation du nombre de points du signal En augmentant le nombre de points du signal, l'espacement spectral va également diminuer et les fréquences d'analyse seront plus proches : la précision du spectre est meilleure. Pour augmenter le nombre de points, on ajoute en général des zéros à la fin du signal, c'est la technique du zero-padding.

Soit N le nombre de points du signal d'origine, on note L le nombre de points du signal après zero-padding. On parle alors de DFT à L points. Le zero-padding entraîne quelques changements dans la façon d'obtenir le spectre :

- les fréquences d'analyse sont définies par rapport à la taille totale L du signal :

$$f_{analyse,k} = k \cdot \frac{f_s}{L}, \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (66)$$

- la résolution spectrale n'est pas modifiée ; la largeur du lobe principal est toujours de $2 \cdot \frac{f_s}{N}$. La seule façon de réduire la largeur du lobe est d'augmenter le nombre N d'échantillons non nuls.