



**HAL**  
open science

## Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires

Michel Balazard, Leila Benferhat, Mihoub Bouderbala

► **To cite this version:**

Michel Balazard, Leila Benferhat, Mihoub Bouderbala. Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires. *Communications in Mathematics*, 2021, 29 (3), pp.407-430. 10.2478/cm-2020-0021 . hal-02190613v1

**HAL Id: hal-02190613**

**<https://hal.science/hal-02190613v1>**

Submitted on 22 Jul 2019 (v1), last revised 11 May 2022 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur la variation de certaines suites de parties fractionnaires

Michel Balazard, Leila Benferhat et Mihoub Bouderbala

## ABSTRACT

Let  $b > a > 0$ . We prove the following asymptotic formula

$$\sum_{n \geq 0} |\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}| = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + O(c^{2/9} x^{4/9}),$$

with  $c = b - a$ , uniformly for  $x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$ .

## KEYWORDS

Fractional part, Elementary methods, van der Corput estimates

MSC classification : 11N37

## 1 Introduction

Notons  $\{t\} = t - [t]$  la partie fractionnaire du nombre réel  $t$ , où  $[t]$  est la partie entière de  $t$ . Pour  $x > 0$  et  $b > a > 0$ , les différences de parties fractionnaires

$$\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

sont les termes d'une série absolument convergente, puisque, pour  $n > x - a$ , cette différence vaut  $cx/(n+a)(n+b)$ , avec

$$c = b - a,$$

notation que nous conserverons dans tout cet article. On peut donc considérer la norme au sens  $\ell^1$  de cette suite, c'est-à-dire la quantité

$$W(x; a, b) = \sum_{n \geq 0} |\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}|.$$

La somme  $W(x; 1, 2)$  joue un rôle auxiliaire dans l'article [5] de Wintner. Il y démontra l'ordre de grandeur  $W(x; 1, 2) \asymp \sqrt{x}$  (pour  $x \geq 1$ ), et en déduisit l'optimalité de l'estimation  $O(\sqrt{x})$  pour

le terme d'erreur de formules asymptotiques pour certaines moyennes arithmétiques. L'estimation de Wintner a été précisée par le premier auteur : on a

$$W(x; 1, 2) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{x} + O(x^{2/5}) \quad (x > 0), \quad (1)$$

où  $\zeta$  désigne la fonction zêta de Riemann (cf. [1]).

Le but du présent article est de généraliser (1) à la somme  $W(x; a, b)$ . Afin d'énoncer notre premier résultat, il nous faut introduire les quantités

$$R_0(x; a, b) = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K(x/c)} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (2)$$

$$R_j(x; a, b) = \sum_{K_{j-1}(x/c) < k \leq K_{j+1}(x/c)} (k^2 c/x - j) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (j \in \mathbb{N}^*), \quad (3)$$

où, pour  $t > 0$  et  $j \in \mathbb{N}$ , nous notons

- $K(t)$  le plus grand nombre entier  $k$  tel que  $k(k+1) \leq t$  ;
- $K_j(t)$  le plus grand nombre entier  $k \geq j$  tel que  $(k-j)k \leq jt$  (en particulier,  $K_0(t) = 0$ ).

Enfin, nous posons, pour  $J$  réel et positif,

$$\mathcal{R}(J, x; a, b) = \sum_{0 \leq j \leq J} R_j(x; a, b).$$

Observons que, pour  $c$  entier, en particulier si  $a = 1$  et  $b = 2$ , les quantités  $R_j(x; a, b)$  sont nulles ; elles ne jouaient donc aucun rôle dans l'étude effectuée dans [1]. Notre premier résultat est une généralisation de (1).

**Théorème A** *Pour  $x \geq 40c^{-3}(1+b)^4$ , on a*

$$W(x; a, b) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{R}(J, x; a, b) + O((1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}),$$

où  $J = c^{3/5}(1+b)^{-4/5} x^{1/5}$ .

La somme  $\mathcal{R}(J, x; a, b)$  peut être estimée grâce aux résultats classiques de van der Corput, obtenus grâce à l'utilisation de sommes trigonométriques. Nous obtenons le résultat suivant.

**Théorème B** *Pour  $x \geq 40c^{-5}(1+b)^{27/2}$ ,*

$$W(x; a, b) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + O(c^{2/9} x^{4/9}).$$

Observons que l'on en déduit l'estimation  $W(x; a, b) \ll \sqrt{cx}$  sous la même hypothèse.

La quantité  $W(x; a, b)$  est reliée à la suivante, définie pour  $x > 0$  et  $b > a > 0$  par

$$V(x; a, b) = \sum_{n \geq 0} (\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}).$$

On a  $V(x; 1, 2) = \{x\}$  et, plus généralement,

$$V(x; a, b) = \{x/a\} + \dots + \{x/(b-1)\}$$

si  $c = b - a$  est entier, mais l'estimation de  $V(x; a, b)$  dans le cas général est un problème non trivial.

Cette somme intervient dans l'étude de la question suivante. Soit  $f$  une fonction arithmétique de période  $q \in \mathbb{N}^*$ , et de moyenne nulle. Sa fonction sommatoire  $F$  est donc aussi périodique, de période  $q$ . Considérons le produit de convolution  $g = f * \mathbf{1}$ . On a alors

$$G(x) = \sum_{n \leq x} g(n) = \sum_{n \geq 1} f(n) [x/n] = Cx - \Delta(x),$$

où  $C = \sum_{n \geq 1} f(n)/n$  et

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sum_{n \geq 1} f(n) \{x/n\} = \sum_{n \geq 1} F(n) (\{x/n\} - \{x/(n+1)\}) = \\ &= \sum_{k=1}^q F(k) \sum_{j \geq 0} (\{x/(jq+k)\} - \{x/(jq+k+1)\}) = \sum_{k=1}^q F(k) V(x/q; k/q, (k+1)/q). \end{aligned}$$

La connaissance du comportement de  $V(x; a, b)$  est donc susceptible d'apporter des informations sur celui du terme d'erreur  $\Delta(x)$ . La méthode de démonstration des théorèmes A et B ci-dessus s'applique également à l'étude de la somme  $V(x; a, b)$ . Cela étant, la forme plus simple de cette quantité, relativement à  $W(x; a, b)$ , se prête *a priori* à un traitement élémentaire classique via la méthode de l'hyperbole, suivi d'une application de la théorie de van der Corput, ou à une étude analytique à l'aide de la fonction  $\zeta$  d'Hurwitz. Pour conserver au présent texte une unité méthodologique, nous n'y abordons donc pas l'étude de  $V(x; a, b)$ , nous contentant de signaler ici la majoration évidente  $|V(x; a, b)| \leq W(x; a, b)$ . En particulier, en utilisant la majoration  $W(x; a, b) \ll \sqrt{cx}$ , valable sous les conditions du Théorème B, on obtient l'estimation uniforme

$$\Delta(x) \ll \frac{\sum_{k=1}^q |F(k)|}{q} \sqrt{x} \quad (1 \leq q \leq x^{1/6}/22).$$

L'étude de  $V(x; a, b)$  pourrait permettre de préciser ce résultat.

Le plan de cet article est le suivant. Au §2, nous décomposons  $W(x; a, b)$  en somme de quantités  $W_j(x; a, b)$ , regroupant les entiers  $n$  tels que

$$\lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor = j \quad (j \in \mathbb{N}),$$

et nous donnons des expressions de  $W_j(x; a, b)$  (formules (8) au §2.2, et (21) au §2.9). Au §3, nous donnons des estimations des quantités  $W_j(x; a, b)$ , faisant intervenir les sommes  $R_j(x; a, b)$  définies par (2) et (3) ci-dessus. Nous en déduisons le Théorème A au §4. Enfin, au §5, nous exposons quelques éléments de la théorie de van der Corput ; ils sont ensuite utilisés pour estimer les quantités  $R_j(x; a, b)$ . Cela nous permet d'obtenir le Théorème B.

## 2 Décomposition de la somme $W(x; a, b)$

Comme  $x$ ,  $a$  et  $b$  sont fixés dans ce paragraphe et les paragraphes 3 et 4, nous allégeons la notation en écrivant simplement  $W$  au lieu de  $W(x; a, b)$ , et nous adopterons la même convention pour les quantités et ensembles, dépendant de  $x$ ,  $a$  et  $b$ , intervenant dans la démonstration. Les lettres  $j, k, h, n$  désigneront toujours des variables entières positives ou nulles.

### 2.1 Les sommes $W_j$

En utilisant la notation d'Iverson ( $[P] = 1$  si la propriété  $P$  est vraie,  $[P] = 0$  sinon), posons, pour  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$W_j = \sum_{n \geq 0} [\lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor = j] \cdot |\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\}|,$$

de sorte que

$$W = \sum_{j \in \mathbb{N}} W_j.$$

Nous allons évaluer  $W_j$  en suivant la méthode adoptée dans [1]. Par souci de lisibilité, nous reproduisons, *mutatis mutandis*, les détails des transformations opérées sur ces sommes.

Pour commencer, les relations

$$\begin{aligned} k &= \lfloor x/(n+a) \rfloor \\ h &= \lfloor x/(n+b) \rfloor \end{aligned}$$

entraînent  $0 \leq h \leq k \leq x/a$  et équivalent à

$$\begin{aligned} k &\leq x/(n+a) < k+1 \\ h &\leq x/(n+b) < h+1, \end{aligned}$$

autrement dit

$$\max\left(\frac{x}{k+1} - a, \frac{x}{h+1} - b\right) < n \leq \min\left(\frac{x}{k} - a, \frac{x}{h} - b\right). \quad (4)$$

(avec la convention  $x/0 = \infty$ ).

Nous désignerons par  $I(h, k)$  l'intervalle de valeurs de  $n$  défini par l'encadrement (4), c'est-à-dire

$$I(h, k) = \mathbb{N} \cap ]x/(k+1) - a, x/k - a] \cap ]x/(h+1) - b, x/h - b].$$

La collection des  $I(h, k)$  non vides constitue une partition de  $\mathbb{N}$ .

Notons que, pour  $n \in I(h, k)$ , on a

$$\{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} = cx/(n+a)(n+b) - k + h,$$

où nous rappelons que  $c$  désigne la différence  $b - a$ . En particulier,

$$0 \leq k - h < y + 1,$$

où l'on a posé  $y = cx/ab$ .

La somme  $W_j$  est donc nulle si  $j \geq y + 1$ . Posons

$$W(h, k) = \sum_{n \in I(h, k)} |cx/(n+a)(n+b) - k + h|$$

et, pour  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq j < y + 1$ ,

$$\begin{aligned} E_j &= \{(h, k) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq h \leq k \leq x/a, k - h = j\} \\ &= \{(k - j, k), k \in \mathbb{N}, j \leq k \leq x/a\} \end{aligned} \quad (5)$$

Nous aurons

$$W_j = \sum_{(h, k) \in E_j} W(h, k).$$

Nous allons établir une expression de la somme  $W_j$ , en commençant par le cas  $j = 0$ .

## 2.2 Expression de $W_0$

Nous avons

$$E_0 = \{(k, k), k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq x/a\}.$$

L'intervalle  $I(k, k)$  de  $\mathbb{N}$  est défini par l'encadrement

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k} - b. \quad (6)$$

Il est vide si  $k(k+1) > x/c$ . Pour  $t > 0$ , désignons par  $K(t)$  le plus grand nombre entier  $k$  tel que  $k(k+1) \leq t$ , et observons simplement, pour l'instant, que  $K(t) \leq \sqrt{t}$ .

Posons également

$$F(t) = \sum_{n>t} 1/(n+a)(n+b) \quad (t \geq 0) \quad (7)$$

et, par convention,

$$\begin{aligned} F(\infty) &= 0 \\ F(t) = F(0^-) &= \sum_{n \geq 0} 1/(n+a)(n+b) \quad (t < 0). \end{aligned}$$

Pour  $x \geq a^2/c$ , en notant  $K = K(x/c)$ , on aura  $K \leq \sqrt{x/c} \leq x/a$ , donc

$$\begin{aligned} W_0 &= \sum_{0 \leq k \leq K} W(k, k) \\ &= \sum_{0 \leq k \leq K} \sum_{x/(k+1)-a < n \leq x/k-b} cx/(n+a)(n+b) \\ &= cx \sum_{0 \leq k \leq K} \left( F(x/(k+1)-a) - F(x/k-b) \right) \\ &= cx F(x/(K+1)-a) + cx \sum_{1 \leq k \leq K} \left( F(x/k-a) - F(x/k-b) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.3 Décomposition de l'ensemble $E_j$

Nous supposons maintenant  $j \geq 1$ . Toujours en adaptant la démarche suivie dans [1], nous allons décomposer l'ensemble  $E_j$  défini par (5) en une partition de trois sous-ensembles sur lesquels l'encadrement (4) s'exprimera sans recours aux fonctions max et min.

Si  $k > h \geq 0$  et  $x > 0$ , l'inégalité

$$\frac{x}{k} - a \leq \frac{x}{h} - b$$

équivaut à

$$\frac{hk}{k-h} \leq x/c.$$

En particulier, on a les implications

$$\frac{x}{k+1} - a \leq \frac{x}{h+1} - b \implies \frac{x}{k} - a \leq \frac{x}{h} - b$$

et

$$\frac{x}{k} - a > \frac{x}{h} - b \implies \frac{x}{k+1} - a > \frac{x}{h+1} - b.$$

Nous considérons donc les trois parties suivantes de  $E_j$  (la définition de chaque  $E_{j,i}$  est suivie par la forme que prend l'encadrement (4) lorsque  $(k-j, k) \in E_{j,i}$ ) :

$$E_{j,1} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j+1)(k+1) \leq jx/c\}$$

$$\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a \quad (9)$$

$$E_{j,2} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j)k > jx/c\}$$

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b \quad (10)$$

$$E_{j,3} = \{(k-j, k) : j \leq k \leq x/a, (k-j)k \leq jx/c < (k-j+1)(k+1)\}$$

$$\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k} - a \quad (11)$$

Celles des trois parties  $E_{j,i}$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) qui sont non vides forment une partition de  $E_j$ . Par conséquent, on a

$$W_j = W_{j,1} + W_{j,2} + W_{j,3},$$

où

$$W_{j,i} = \sum_{(h,k) \in E_{j,i}} W(h, k) \quad (1 \leq i \leq 3).$$

Avant d'évaluer successivement les trois quantités  $W_{j,i}$ , nous allons définir, aux sous-paragraphes suivants, deux fonctions auxiliaires,  $K_j$  et  $N_j$ .

## 2.4 La fonction $K_j(t)$

Pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $t > 0$ , nous définissons  $K_j(t)$  comme le plus grand nombre entier  $k \geq j$  tel que  $(k-j)k \leq jt$ . En particulier,  $K_0(t) = 0$ .

Au moyen de la fonction  $K_j(t)$ , on peut, pour  $j \geq 1$ , récrire les conditions, quadratiques relativement à  $k$ , intervenant dans les définitions des ensembles  $E_{j,i}$ , sous les formes suivantes, respectivement :

$$k \leq K_j(x/c) - 1 \quad (i = 1) \quad (12)$$

$$k > K_j(x/c) \quad (i = 2) \quad (13)$$

$$k = K_j(x/c) \quad (i = 3) \quad (14)$$

De plus, la condition  $k \leq x/a$ , qui figure également dans la définition de ces ensembles, est superflue pour  $i = 1, 3$ , si  $j \leq y = cx/ab$ . En effet la relation  $j \leq y$  peut s'écrire sous la forme

$$jx/c \leq \left(\frac{x}{a} - j\right) \frac{x}{a}.$$



Les inégalités

$$(K_j(x/c) - j)K_j(x/c) \leq jx/c \quad ; \quad j \leq y \leq x/a,$$

et le fait que  $t \mapsto (t - j)t$  est strictement croissante pour  $t \geq j$  entraînent alors l'inégalité

$$K_j(x/c) \leq x/a. \tag{15}$$

## 2.5 La fonction $N_j(x; a, b)$

Pour exprimer la quantité  $|j - cx/(n + a)(n + b)|$  sans valeur absolue, nous sommes conduits à définir, pour  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_j = N_j(x; a, b)$  comme le plus grand nombre entier  $n$  tel que

$$(n + a)(n + b) \leq cx/j.$$

On a donc  $N_j \geq 0$  si  $j \leq y = cx/ab$ .

Établissons maintenant une relation entre les quantités  $K_j = K_j(x/c)$  et  $N_j = N_j(x; a, b)$ .

**Proposition 1** *Si  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $j \leq y$ , on a*

$$\left\lfloor \frac{x}{K_j + 1} - a \right\rfloor \leq N_j \leq \left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor.$$

### Démonstration

L'encadrement définissant  $K_j$ ,

$$(K_j - j)K_j \leq jx/c < (K_j + 1 - j)(K_j + 1),$$

équivalent à

$$\frac{x}{K_j + 1} \left( \frac{x}{K_j + 1} + c \right) < \frac{cx}{j} \leq \frac{x}{K_j} \left( \frac{x}{K_j} + c \right),$$

c'est-à-dire à

$$\left( \frac{x}{K_{j+1}} - a + a \right) \cdot \left( \frac{x}{K_{j+1}} - a + b \right) < \frac{cx}{j} \leq \left( \frac{x}{K_j} - a + a \right) \cdot \left( \frac{x}{K_j} - a + b \right).$$

On a  $N_j \geq 0$ , et  $t \mapsto (t + a)(t + b)$  est strictement croissante pour  $t \geq -a$ . Le dernier encadrement entraîne donc celui de l'énoncé.  $\square$

## 2.6 Calcul de $W_{j,1}$

Supposons  $1 \leq j \leq y$ . En notant simplement  $K_j$  pour  $K_j(x/c)$ , nous aurons, d'après (9), (12) et (15),

$$\begin{aligned} W_{j,1} &= \sum_{(h,k) \in E_{j,1}} W(h,k) \\ &= \sum_{j \leq k \leq K_j-1} \sum_{\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a} |cx/(n+a)(n+b) - j|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k-j+1} - b < \frac{x}{k} - a,$$

autrement dit seulement si  $k > K_{j-1}$  (rappelons que  $K_0 = 0$ ). Les nombres entiers  $n$  intervenant dans cette somme intérieure sont strictement supérieurs à

$$\frac{x}{K_j - j} - b \geq \frac{x}{K_j} - a \geq N_j,$$

d'après la proposition 1.

Dans le calcul qui suit, ainsi qu'au paragraphe suivant, nous emploierons la fonction  $F$  définie par (7), et l'identité « $r$ -télescopique»,

$$\sum_{\alpha < k \leq \beta} (u_k - u_{k-r}) = \sum_{\beta-r < k \leq \beta} u_k - \sum_{\alpha-r < k \leq \alpha} u_k.$$

On a donc

$$\begin{aligned} W_{j,1} &= \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \sum_{\frac{x}{k-j+1} - b < n \leq \frac{x}{k} - a} (j - cx/(n+a)(n+b)) \\ &= j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad - cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left( F\left(\frac{x}{k-j+1} - b\right) - F\left(\frac{x}{k} - a\right) \right). \end{aligned} \tag{16}$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) &= \\ \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) &+ \sum_{K_{j-1} < k \leq K_j-1} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right), \end{aligned}$$

où, par l'identité «  $(j - 1)$ -télescopique »,

$$\sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j-1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j+1} - b \right\rfloor \right) = \sum_{K_{j-j} < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor.$$

Une manipulation similaire s'applique à la dernière somme de (16), et on obtient finalement

$$\begin{aligned} W_{j,1} = & j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j-1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\ & + j \sum_{K_{j-j} < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\ & + cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j-1}} \left( F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\ & + cx \sum_{K_{j-j} < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1} - (j-1) < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right). \quad (17) \end{aligned}$$

## 2.7 Calcul de $W_{j,2}$

On a ici, toujours pour  $1 \leq j \leq y$ , et d'après (10), (13) et (15),

$$\begin{aligned} W_{j,2} &= \sum_{(h,k) \in E_{j,2}} W(h,k) \\ &= \sum_{K_j < k \leq x/a} \sum_{\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b} |cx/(n+a)(n+b) - j|. \end{aligned}$$

La somme intérieure est non vide seulement si

$$\frac{x}{k+1} - a \leq \frac{x}{k-j} - b,$$

autrement dit seulement si  $k \leq K_{j+1} - 1$ . Nous supposons donc maintenant que  $j \leq y - 1$ , de sorte que  $K_{j+1} \leq x/a$ , d'après (15). On obtient alors

$$W_{j,2} = \sum_{K_j < k \leq K_{j+1} - 1} \sum_{\frac{x}{k+1} - a < n \leq \frac{x}{k-j} - b} |cx/(n+a)(n+b) - j|.$$

Les nombres entiers  $n$  intervenant dans la somme intérieure sont inférieurs ou égaux à

$$\frac{x}{K_j + 1 - j} - b < \frac{x}{K_j + 1} - a,$$

par définition de  $K_j$ . La proposition 1 prouve alors que ces nombres entiers sont  $\leq N_j$ .

On a donc

$$\begin{aligned}
W_{j,2} &= \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \sum_{\frac{x}{k+1}-a < n \leq \frac{x}{k-j}-b} (cx/(n+a)(n+b) - j) \\
&= j \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \left( \left\lfloor \frac{x}{k+1} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j} - b \right\rfloor \right) \\
&\quad + cx \sum_{K_j < k \leq K_{j+1}-1} \left( F\left(\frac{x}{k+1} - a\right) - F\left(\frac{x}{k-j} - b\right) \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

L'avant-dernière somme vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right) = \\
&\quad \sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) + \sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right),
\end{aligned}$$

où, par l'identité «  $(j+1)$ -télescopique »,

$$\begin{aligned}
&\sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k-j-1} - b \right\rfloor \right) = \\
&\quad \sum_{K_{j+1}-j-1 < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Une manipulation similaire s'applique à la somme (18), et on obtient finalement

$$\begin{aligned}
W_{j,2} &= j \sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\
&\quad + j \sum_{K_{j+1}-j-1 < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\
&\quad + cx \sum_{K_{j+1} < k \leq K_{j+1}} \left( F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\
&\quad + cx \sum_{K_{j+1}-j-1 < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_j-j < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right). \tag{19}
\end{aligned}$$

## 2.8 Calcul de $W_{j,3}$

Pour  $1 \leq j \leq y$ , on a, d'après (11), (14), et (15),

$$\begin{aligned} W_{j,3} &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq \frac{x}{K_j}-a} |j - cx/(n+a)(n+b)| \\ &= \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq N_j} (cx/(n+a)(n+b) - j) + \sum_{N_j < n \leq \frac{x}{K_j}-a} (j - cx/(n+a)(n+b)), \end{aligned}$$

d'après la proposition 1. Observons que l'avant-dernière somme est vide si  $N_j = \lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \rfloor$ .

On a

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{x}{K_j+1}-a < n \leq N_j} (cx/(n+a)(n+b) - j) &= cx \left( F \left( \frac{x}{K_j+1} - a \right) - F(N_j) \right) \\ &\quad - j \left( N_j - \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \right\rfloor \right) \\ \sum_{N_j < n \leq \frac{x}{K_j}-a} (j - cx/(n+a)(n+b)) &= j \left( \left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor - N_j \right) - cx \left( F(N_j) - F \left( \frac{x}{K_j} - a \right) \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} W_{j,3} &= cx \left( F \left( \frac{x}{K_j+1} - a \right) + F \left( \frac{x}{K_j} - a \right) - 2F(N_j) \right) \\ &\quad + j \left( \left\lfloor \frac{x}{K_j} - a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{K_j+1} - a \right\rfloor - 2N_j \right). \quad (20) \end{aligned}$$

## 2.9 Expression de $W_j$ pour $j \geq 1$

En regroupant les identités (17), (19) et (20), on obtient, pour  $1 \leq j \leq y-1$ ,

$$\begin{aligned} W_j &= j \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) \\ &\quad + j \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - 2jN_j \\ &\quad + cx \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left( F \left( \frac{x}{k} - a \right) - F \left( \frac{x}{k} - b \right) \right) \\ &\quad + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} F \left( \frac{x}{k} - b \right) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} F \left( \frac{x}{k} - b \right) - 2cx F(N_j). \quad (21) \end{aligned}$$

### 3 Estimation des sommes $W_j$

Nous allons maintenant utiliser les identités obtenues au paragraphe précédent pour estimer les contributions à  $W$  des sommes  $W_j$ . Nous commençons par le cas  $j = 0$ .

#### 3.1 La fonction $K$

Au §2.2, pour  $t > 0$ , nous avons introduit la notation  $K(t)$  pour désigner le plus grand nombre entier  $k$  tel que  $k(k + 1) \leq t$ , c'est-à-dire

$$K(t) = \lfloor \sqrt{t + 1/4} - 1/2 \rfloor,$$

et noté simplement  $K$  la valeur  $K(x/c)$ . Nous utiliserons l'encadrement

$$\sqrt{t} - 3/2 \leq \sqrt{t + 1/4} - 3/2 \leq K(t) \leq \sqrt{t}.$$

**Proposition 2** *Pour  $x \geq 9b^2/c$ , on a*

$$\frac{x}{K+1} - b \geq \frac{\sqrt{cx}}{6}.$$

#### Démonstration

On a

$$\frac{x}{K+1} - b \geq cK - b \geq c(\sqrt{x/c} - 3/2) - b \geq \sqrt{cx} - 5b/2 \geq \frac{\sqrt{cx}}{6},$$

si  $x \geq 9b^2/c$ . □

#### 3.2 Estimation de la fonction $F$

Rappelons la définition (7) :

$$F(t) = \sum_{n>t} 1/(n+a)(n+b).$$

**Proposition 3** *Pour  $b > a > 0$  et  $t > 0$ , on a*

$$F(t) = \frac{1}{t} + O((1+b)/t^2). \tag{22}$$

$$F(t) = \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + O((1+b)^2/t^3) \tag{23}$$

#### Démonstration

Nous démontrons (23); la démonstration de (22) est similaire, et plus simple.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} - \frac{1}{n^2} + \frac{a+b}{n^3} = \frac{(a^2 + ab + b^2)n + ab(a+b)}{n^3(n+a)(n+b)} \leq \frac{3b^2}{n^4}.$$

Pour  $t > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n>t} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - 1/2}{t^2} + O(t^{-3}) \\ \sum_{n>t} \frac{1}{n^3} &= \frac{1}{2t^2} + O(t^{-3}) \\ \sum_{n>t} \frac{1}{n^4} &= O(t^{-3}). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(t) &= \sum_{n>t} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{a+b}{n^3} + O(b^2/n^4) \right) \\ &= \frac{1}{t} + \frac{\{t\} - (a+b+1)/2}{t^2} + O((1+b)^2/t^3). \end{aligned} \quad \square$$

### 3.3 Estimation de $W_0$

Nous commençons par estimer le premier terme de l'expression (8) de  $W_0$ .

**Proposition 4** *Pour  $x \geq 9b^2/c$ , on a*

$$F(x/(K+1) - a) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + O((1+b)/cx).$$

#### Démonstration

On a  $K+1 = \sqrt{x/c} + \vartheta_0$ , où  $|\vartheta_0| \leq 1$  et  $\sqrt{x/c} \geq 3b/c \geq 3$ . Par conséquent,

$$\frac{x}{K+1} - a = \frac{x}{\sqrt{x/c} + \vartheta_0} - a = \sqrt{cx} + O(b).$$

On a donc  $x/(K+1) - a = \sqrt{cx}(1 + \vartheta_1)$ , avec  $\vartheta_1 \geq -5/6$  (d'après la proposition 2), et  $\vartheta_1 = O(b/\sqrt{cx})$ . L'estimation (22) nous donne alors

$$F(x/(K+1) - a) = \frac{1 + O(b/\sqrt{cx})}{\sqrt{cx}} + O((1+b)/cx) = \frac{1}{\sqrt{cx}} + O((1+b)/cx). \quad \square$$

Passons à la somme apparaissant dans (8).

**Proposition 5** Pour  $x \geq 9b^2/c$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq K} (F(x/k - a) - F(x/k - b)) = \\ - \frac{1}{3\sqrt{cx}} + x^{-2} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + O((1+b)^2/c^2 x). \end{aligned}$$

**Démonstration**

Nous allons utiliser l'estimation (23). Par la proposition 2, les quantités  $x/k - a$  et  $x/k - b$ , figurant dans la somme à évaluer, sont toutes  $\geq \sqrt{cx}/6$ . Par conséquent, la contribution à cette somme du terme d'erreur de (23) est

$$\ll (1+b)^2 K / (cx)^{3/2} \leq (1+b)^2 / c^2 x.$$

Pour  $1 \leq k \leq K$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} &= -\frac{ck^2}{x^2} \left(1 - \frac{ak}{x}\right)^{-1} \left(1 - \frac{bk}{x}\right)^{-1} \\ &= -ck^2/x^2 + O(cbk^3/x^3), \end{aligned}$$

car  $bk/x \leq 1/3$  si  $1 \leq k \leq K$ .

Par conséquent, la contribution à la somme étudiée du terme  $1/t$  de (23) vaut

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq K} \left( \frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} \right) &= -\frac{c}{x^2} (K^3/3 + O(K^2)) + O(cbK^4/x^3) \\ &= -\frac{1}{3\sqrt{cx}} + O(b/cx). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \frac{\{x/k - a\} - (a+b+1)/2}{(x/k - a)^2} - \frac{\{x/k - b\} - (a+b+1)/2}{(x/k - b)^2} = \\ (\{x/k - a\} - (a+b+1)/2) (k^2/x^2 + O(bk^3/x^3)) \\ - (\{x/k - b\} - (a+b+1)/2) (k^2/x^2 + O(bk^3/x^3)) \\ = k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) / x^2 + O((1+b)^2 k^3 / x^3). \end{aligned}$$

La contribution du dernier terme d'erreur à la somme figurant dans (8) est

$$\ll (1+b)^2 K^4 / x^3 \ll (1+b)^2 / c^2 x.$$

Le résultat découle de ces estimations. □

Les propositions 4 et 5 et la formule (8) fournissent l'expression suivante de  $W_0$ .



**Proposition 6** Pour  $x \geq 9b^2/c$ , on a

$$W_0 = \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0 + O((1+b)^2/c).$$

où

$$R_0 = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) \quad (x > 0). \quad (24)$$

### 3.4 Grandes valeurs de $j$

Avant d'examiner en détail chaque quantité  $W_j$ , notons l'estimation suivante, qui nous permettra de limiter les valeurs de  $j$  à considérer.

**Proposition 7** Soit  $J$  un nombre réel supérieur à 1. Pour  $x > 0$ , et  $b > a > 0$ , on a

$$\sum_{j>J} W_j < \sqrt{cx/(J-1)} + 1.$$

#### Démonstration

Si  $j = \lfloor x/(n+a) \rfloor - \lfloor x/(n+b) \rfloor > J$ , alors

$$\frac{cx}{n^2} > \frac{cx}{(n+a)(n+b)} = j + \{x/(n+a)\} - \{x/(n+b)\} > J - 1,$$

donc  $n < \sqrt{cx/(J-1)}$ . On en déduit que

$$\sum_{j>J} W_j \leq \sum_{0 \leq n < \sqrt{cx/(J-1)}} 1 < \sqrt{cx/(J-1)} + 1.$$

### 3.5 Résultats auxiliaires sur les quantités $K_j$

Nous allons utiliser les résultats, démontrés dans [1], concernant les fonctions  $K_j(t)$ , dont la définition a été rappelée au §2.4, ici évaluées en  $t = x/c$ .

Pour  $0 \leq j \leq x/c$  et  $x \geq c$ , les propositions 2 et 3, p. 12 de [1], affirment que

$$K_{j+1} - K_j = (\sqrt{j+1} - \sqrt{j})\sqrt{x/c} + O(1) \quad (25)$$

$$\sum_{K_j < k \leq K_{j+1}} k^2 = \frac{(j+1)\sqrt{j+1} - j\sqrt{j}}{3} (x/c)^{3/2} + O((j+1)x/c). \quad (26)$$

Notons que (25) entraîne

$$K_{j+1} - K_j \ll (x/cj)^{1/2} \quad (0 < j \leq x/c). \quad (27)$$

L'encadrement (17), p. 11 de [1] se récrit

$$\sqrt{jx/c} + j/2 - 1 < K_j \leq \sqrt{jx/c} + j. \quad (28)$$

En particulier, pour  $0 < j \leq x/c$ , on a

$$K_j \geq \frac{1}{2}\sqrt{jx/c}, \quad (29)$$

et

$$K_{j+1} \leq \sqrt{(j+1)x/c} + j + 1 \leq 2\sqrt{jx/c} + 2j \leq 4\sqrt{jx/c}. \quad (30)$$

Les quatre propositions suivantes sont des lemmes utilisés lors des calculs des paragraphes suivants.

**Proposition 8** *Pour  $0 < j \leq x/c$  et  $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$ , on a*

$$-1 < ck^2/x - j \leq 1 + 8j^{3/2}(c/x)^{1/2}.$$

**Démonstration**

En effet, par définition de  $K_{j\pm 1}$ , on a, pour  $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$ ,

$$(j-1)x/c + (j-1)k < k^2 \leq (j+1)x/c + (j+1)k,$$

donc

$$-1 + (j-1)kc/x < ck^2/x - j \leq 1 + (j+1)kc/x.$$

L'encadrement annoncé résulte alors de la majoration  $K_{j+1} \leq 4\sqrt{jx/c}$ .  $\square$

**Proposition 9** *Pour  $0 < j \leq x/c$*

$$\sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |k^2c/x - j| \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

**Démonstration**

En utilisant (27) et la proposition 8, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |k^2c/x - j| &\ll (x/cj)^{1/2} (1 + j^{3/2}(c/x)^{1/2}) \\ &= (x/cj)^{1/2} + j. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposition 10** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$  et  $k \leq K_j$ , on a*

$$\lfloor x/k - b \rfloor \geq \frac{5}{12}\sqrt{cx/j} \quad (31)$$

$$x/k - b \geq x/2k. \quad (32)$$

**Démonstration**

En utilisant (28), on a, d'une part,

$$\lfloor x/k - b \rfloor \geq x/K_j - b - 1 \geq \frac{x}{\sqrt{jx/c} + j} - b - 1 \geq \frac{3}{4} \sqrt{cx/j} - b - 1 \geq \frac{5}{12} \sqrt{cx/j}.$$

D'autre part,

$$kb \leq K_j b \leq b\sqrt{jx/c} + jb \leq \frac{bx}{3(1+b)} + \frac{bcx}{9(1+b)^2} \leq \frac{x}{2}. \quad \square$$

**Proposition 11** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$  et  $K_j - j < k \leq K_j$ , on a*

$$j\lfloor x/k - b \rfloor + cx/\lfloor x/k - b \rfloor = 2\sqrt{jcx} + O((1+b)^2 j^{3/2} (cx)^{-1/2}).$$

**Démonstration**

Il s'agit d'une adaptation de la proposition 5, p. 17 de [1].

Posons  $q = \lfloor x/k - b \rfloor$ . On a

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = p^2,$$

où

$$p = \sqrt{jq} - \sqrt{cx/q} = \frac{jq^2 - cx}{q(\sqrt{jq} + \sqrt{cx/q})}.$$

D'après (28), on a

$$\sqrt{jx/c} + j \geq K_j \geq k \geq K_j - j + 1 \geq \sqrt{jx/c} - j/2 \geq \frac{5}{6} \sqrt{jx/c},$$

donc, compte également tenu de la proposition 10,

$$q = \lfloor x/k - b \rfloor = x/k + O(1+b) = \frac{x}{\sqrt{jx/c} + O(j)} + O(1+b) = \sqrt{cx/j} + O(1+b). \quad (33)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} jq^2 - cx &= O((1+b)\sqrt{c j x}) \\ p &= O((1+b)j^{3/4}(cx)^{-1/4}) \end{aligned}$$

et

$$jq + cx/q - 2\sqrt{jcx} = O((1+b)^2 j^{3/2} (cx)^{-1/2}). \quad \square$$

### 3.6 Estimation de $W_j$ pour $j \geq 1$

Commençons en observant que la condition  $j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$ , qui va figurer dans les trois premiers énoncés de ce sous-paragraphe, entraîne l'inégalité  $j \leq y - 1$ , condition d'application de l'identité (21).

Nous estimons en premier lieu la contribution à  $W_j$  des sommes de (21) où  $a$  ne figure pas.

**Proposition 12** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$ , on a*

$$\begin{aligned}
& j \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor - j \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \\
& + cx \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) - cx \sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} F\left(\frac{x}{k} - b\right) \\
& = ((2j+1)\sqrt{j+1} - (2j-1)\sqrt{j-1})\sqrt{cx} \\
& \quad + O((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}) + O((1+b)j). \quad (34)
\end{aligned}$$

#### Démonstration

Observons que, si  $j = 1$ , la deuxième et la quatrième somme sont vides.

Pour  $t \geq 1$ , nous récrivons (23) sous la forme

$$F(t) = \frac{1}{[t]} - \frac{a+b+1}{2t^2} + O((1+b)^2/t^3) \quad (35)$$

D'après (31), la contribution à la troisième et quatrième somme de (34) du terme d'erreur de (35) est

$$\ll j(1+b)^2 (cx/j)^{-3/2} = j^{5/2} (1+b)^2 (cx)^{-3/2}. \quad (36)$$

On a ensuite, en utilisant (33) et (31),

$$\begin{aligned}
\sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \frac{1}{(x/k - b)^2} &= \sum_{K_{j+1}-(j+1) < k \leq K_{j+1}} \left( (j+1)/cx + O((1+b)(j/cx)^{3/2}) \right) \\
&= (j+1)^2/cx + O(j^{5/2}(1+b)(cx)^{-3/2}), \quad (37)
\end{aligned}$$

et, de même,

$$\sum_{K_{j-1}-(j-1) < k \leq K_{j-1}} \frac{1}{(x/k - b)^2} = (j-1)^2/cx + O(j^{5/2}(1+b)(cx)^{-3/2}). \quad (38)$$

La proposition 11 et (33) nous donnent

$$\begin{aligned}
& \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leq K_{j+1}} (j \lfloor x/k - b \rfloor + cx / \lfloor x/k - b \rfloor) = \\
& = \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leq K_{j+1}} (2\sqrt{(j+1)cx} + O((1+b)^2 j^{3/2} (cx)^{-1/2})) - \sum_{K_{j+1}-(j+1)<k\leq K_{j+1}} \lfloor x/k - b \rfloor \\
& = (2j+1)\sqrt{(j+1)cx} + O((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}) + O((1+b)j) \quad (39)
\end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned}
& \sum_{K_{j-1}-(j-1)<k\leq K_{j-1}} (j \lfloor x/k - b \rfloor + cx / \lfloor x/k - b \rfloor) = \\
& = (2j-1)\sqrt{(j-1)cx} + O((1+b)^2 j^{5/2} (cx)^{-1/2}) + O((1+b)j) \quad (40)
\end{aligned}$$

En regroupant les résultats (36), (37), (38), (39) et (40), on obtient le résultat annoncé.  $\square$

Passons maintenant à la contribution à  $W_j$  des sommes de (21) où figure  $a$ .

**Proposition 13** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$ , on a*

$$\begin{aligned}
j \sum_{K_{j-1}<k\leq K_{j+1}} \left( \left\lfloor \frac{x}{k} - a \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{k} - b \right\rfloor \right) + cx \sum_{K_{j-1}<k\leq K_{j+1}} \left( F\left(\frac{x}{k} - a\right) - F\left(\frac{x}{k} - b\right) \right) \\
= \frac{(2j-1)\sqrt{j+1} - (2j+1)\sqrt{j-1}}{3} \sqrt{cx} + R_j + O((1+b)^2 j/c), \quad (41)
\end{aligned}$$

avec

$$R_j = R_j(x; a, b) = \sum_{K_{j-1}<k\leq K_{j+1}} (k^2 c/x - j) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}).$$

### Démonstration

D'après la proposition 10 et (27), la contribution à la seconde somme du terme d'erreur de (23) est

$$\ll (K_{j+1} - K_{j-1})(1+b)^2 (cx/j)^{-3/2} \ll (1+b)^2 j/c^2 x.$$

Pour  $k \leq K_{j+1}$ , l'inégalité (32) nous permet d'écrire

$$\frac{\{x/k - b\} - (a+b+1)/2}{(x/k - b)^2} = \frac{k^2}{x^2} (\{x/k - b\} - (a+b+1)/2) + O((1+b)^2 k^3/x^3).$$

La contribution à cette seconde somme du terme  $(\{t\} - (a+b+1)/2)/t^2$  de (23) est donc

$$x^{-2} \sum_{K_{j-1}<k\leq K_{j+1}} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + O((1+b)^2 j/c^2 x).$$

En utilisant (26), (27) et (32), on voit que la contribution du terme  $1/t$  de (23) est

$$\begin{aligned} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \left( \frac{1}{x/k - a} - \frac{1}{x/k - b} \right) &= -\frac{c}{x^2} \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (k^2 + O(bk^3/x)) \\ &= -\frac{(j+1)\sqrt{j+1} - (j-1)\sqrt{j-1}}{3\sqrt{cx}} + O(bj/cx). \end{aligned}$$

Enfin, la première somme du premier membre de (41) vaut, d'après (25),

$$\begin{aligned} c(K_{j+1} - K_{j-1}) - \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) &= \\ (\sqrt{j+1} - \sqrt{j-1})\sqrt{cx} + O(c) - \sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}). \end{aligned}$$

On obtient la relation (41) en collectant ces estimations.  $\square$

Notons que la majoration « triviale » de  $R_j$  est donnée par la proposition 9 :

$$R_j \ll (x/cj)^{1/2} + j.$$

Estimons enfin la contribution à  $W_j$  des termes de (21) où figure  $N_j$ .

**Proposition 14** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$ , on a*

$$jN_j + cxF(N_j) = 2\sqrt{jcx} + O((1+b)j).$$

### Démonstration

Rappelons que  $N_j$  est le plus grand nombre entier  $n$  tel que

$$(n+a)(n+b) \leq cx/j.$$

On a donc

$$N_j = \left\lfloor \sqrt{cx/j + c^2/4} - (a+b)/2 \right\rfloor.$$

En particulier,

$$\sqrt{cx/j} - (a+b)/2 - 1 \leq N_j \leq \sqrt{cx/j}.$$

Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2$ , la borne inférieure de cet encadrement de  $N_j$  est  $\geq \frac{2}{3}\sqrt{cx/j}$ . Par suite, en utilisant (22),

$$\begin{aligned} jN_j + cxF(N_j) &= j(\sqrt{cx/j} + O(1+b)) + cx \left( \frac{1}{\sqrt{cx/j} + O(1+b)} + O((1+b)/(cx/j)) \right) \\ &= 2\sqrt{jcx} + O((1+b)j). \end{aligned} \quad \square$$

Nous sommes maintenant en mesure d'adapter la proposition 6, p. 18 de [1].

**Proposition 15** *Pour  $0 < j \leq cx/9(1+b)^2 - 1$ , on a*

$$W_j = f(j)\sqrt{cx} + R_j + O((1+b)^2 j/c) + O((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}).$$

avec

$$f(j) = \frac{8j+2}{3}\sqrt{j+1} - \frac{8j-2}{3}\sqrt{j-1} - 4\sqrt{j},$$

et où  $R_j$  est défini par (3).

**Démonstration**

On obtient cette estimation en insérant dans (21) les résultats des propositions 12, 13 et 14.  $\square$

## 4 Estimation de la somme $W(x; a, b)$

### 4.1 Mise en évidence du terme principal

Nous donnons d'abord une expression de  $W = W(x; a, b)$  faisant intervenir un paramètre réel  $J$ .

**Proposition 16** *Pour  $x$  et  $J$  réels tels que  $3/2 \leq J \leq cx/9(1+b)^2 - 1$ , on a*

$$W = \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O((1+b)^2 J^2/c) + O((cx/J)^{1/2}) + O((1+b)^2 J^{7/2}(cx)^{-1/2}),$$

où l'on a posé

$$\mathcal{R}(J) = R_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} R_j,$$

les quantités  $R_j$  étant définies par (2) ( $j = 0$ ) et (3) ( $j > 0$ ).

**Démonstration**

On a

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} W_j + \sum_{j > J} W_j \\ &= W_0 + \sum_{1 \leq j \leq J} W_j + O((cx/J)^{1/2}) \quad (\text{d'après la proposition 7, et car } 1 \leq cx/J) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{cx} + R_0 + O((1+b)^2/c) \\ &\quad + \sum_{1 \leq j \leq J} \left( f(j)\sqrt{cx} + R_j + O((1+b)^2 j/c) + O((1+b)^2 j^{5/2}(cx)^{-1/2}) \right) \\ &\quad + O((cx/J)^{1/2}) \quad (\text{d'après les propositions 6 et 15}) \\ &= \frac{2}{\pi}\zeta(3/2)\sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O((1+b)^2 J^2/c) + O((cx/J)^{1/2}) + O((1+b)^2 J^{7/2}(cx)^{-1/2}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la somme de la série

$$\frac{2}{3} + \sum_{j \geq 1} f(j) = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \quad (\text{cf. [1], (35), p. 20}),$$

et l'estimation  $f(j) \ll j^{-3/2}$ . □

En restreignant l'intervalle de variation de  $J$ , simplifions légèrement l'énoncé de la proposition 16.

**Proposition 17** *Pour  $x \geq 40(1+b)^3 c^{-2}$  et  $J$  tel que  $3/2 \leq J \leq (x/c)^{1/3}$ , on a*

$$W = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O((1+b)^2 J^2/c) + O((cx/J)^{1/2}).$$

**Démonstration**

D'une part, on vérifie que

$$x \geq 40(1+b)^3 c^{-2} \Rightarrow (x/c)^{1/3} \leq cx/9(1+b)^2 - 1.$$

D'autre part, on a

$$J \leq (x/c)^{1/3} \Leftrightarrow (1+b)^2 J^{7/2} (cx)^{-1/2} \leq (1+b)^2 J^2/c. \quad \square$$

## 4.2 Démonstration du Théorème A

**Proposition 18** *Pour  $x \geq 40(1+b)^4/c^3$ ,*

$$W = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + \mathcal{R}(J) + O((1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}),$$

où  $J = c^{3/5} (1+b)^{-4/5} x^{1/5}$ .

**Démonstration**

Nous choisissons  $J$  pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur de la proposition 16 :

$$J = c^{3/5} (1+b)^{-4/5} x^{1/5}.$$

On vérifie que

$$x \geq 40(1+b)^4/c^3 \Rightarrow 3/2 \leq J \leq (x/c)^{1/3},$$

et les deux termes d'erreur de la proposition 17 sont

$$\ll (1+b)^{2/5} c^{1/5} x^{2/5}. \quad \square$$



## 5 Démonstration du Théorème B

### 5.1 Rappels sur la théorie de van der Corput

Afin d'estimer la somme  $\mathcal{R}(J)$ , nous utiliserons l'énoncé suivant, dû à van der Corput, qui résulte de la version la plus simple de sa méthode d'estimation de sommes trigonométriques (cf. [4], Satz 5, p. 252; [3], Satz 1, p. 215; [2], (12), p. 23).

Soit  $u, v$  des nombres réels tels que  $v - u \geq 1$ , et  $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est monotone et de signe constant. On a alors

$$\sum_{u < n \leq v} (\{f(n)\} - 1/2) \ll \int_u^v |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(v)|}}, \quad (42)$$

où la constante implicite est absolue.

Par sommation partielle, on déduit de (42) l'estimation suivante.

Soit  $u, v$  des nombres entiers tels que  $u \leq v$ , et  $f : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable, dont la dérivée seconde est monotone et de signe constant. Soit  $(\gamma_n)_{u < n \leq v}$  une suite de nombres réels. On a alors

$$\sum_{u < n \leq v} \gamma_n (\{f(n)\} - 1/2) \ll G \int_u^v |f''(t)|^{1/3} dt + \frac{G}{\sqrt{|f''(u)|}} + \frac{G}{\sqrt{|f''(v)|}}, \quad (43)$$

où

$$G = \max_{u < n \leq v} |\gamma_n| + \sum_{u < n < v} |\gamma_{n+1} - \gamma_n|,$$

et où la constante implicite est absolue.

### 5.2 Estimation de la somme $\mathcal{R}(J)$

**Proposition 19** *Pour  $2 \leq j \leq (x/c)^{1/3}$ , on a*

$$R_j \ll x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}.$$

#### Démonstration

Pour  $K_{j-1} < k \leq K_{j+1}$ , posons

$$\gamma_k = \gamma_k(x, c, j) = ck^2/x - j.$$

La suite  $(\gamma_k)$  étant croissante, la proposition 8 implique l'estimation

$$\max_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} |\gamma_n| + \sum_{K_{j-1} < k < K_{j+1}} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \ll 1 + j^{3/2} (c/x)^{1/2} \ll 1,$$

en tenant compte de l'hypothèse  $j \leq (x/c)^{1/3}$ .

En appliquant (43) aux deux fonctions  $f(t) = x/t - a$  et  $f(t) = x/t - b$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{K_{j-1} < k \leq K_{j+1}} \gamma_k (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) &\ll \int_{K_{j-1}}^{K_{j+1}} (x/t^3)^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j-1}^3}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_{j+1}^3}} \\
&\ll x^{1/3} \ln \frac{K_{j+1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2} K_{j+1}^{3/2} \\
&\ll x^{1/3} \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{K_{j-1}} + x^{-1/2} (jx/c)^{3/4} \\
&\quad \text{(d'après (30))} \\
&\ll x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4},
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (25) et (29). □

**Proposition 20** *Pour  $x \geq 1 + c$ , on a*

$$R_0 + R_1 \ll x^{1/3} \ln(2x/c) + c^{-3/4} x^{1/4}.$$

**Démonstration**

On a

$$R_0 + R_1 = \frac{c}{x} \sum_{1 \leq k \leq K} k^2 (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}) + \sum_{0 < k \leq K_2} (k^2 c/x - 1) (\{x/k - a\} - \{x/k - b\}).$$

Un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 19 fournit l'estimation

$$\begin{aligned}
R_0 + R_1 &\ll 1 + \int_1^{K_2} (x/t^3)^{1/3} dt + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x/K_2^3}} \\
&\ll x^{1/3} \ln(2x/c) + c^{-3/4} x^{1/4}.
\end{aligned}$$
□

**Proposition 21** *Pour  $x$  et  $J$  réels tels que  $3/2 \leq J \leq (x/(1+c))^{1/3}$ , on a*

$$\mathcal{R}(J) \ll x^{1/3} \ln(x/c) + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4}.$$

**Démonstration**

D'après les propositions 19 et 20, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(J) &= \sum_{0 \leq j \leq J} R_j \\
&\ll x^{1/3} \ln(x/c) + \sum_{0 < j \leq J} (x^{1/3} j^{-1} + x^{1/4} j^{3/4} c^{-3/4}) \\
&\ll x^{1/3} \ln(x/c) + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4}.
\end{aligned}$$
□

### 5.3 Conclusion

**Proposition 22** *Pour*  $x \geq 40 c^{-5}(1+b)^{27/2}$ ,

$$W = \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} + O(c^{2/9} x^{4/9}).$$

#### Démonstration

Pour

$$x \geq 40(1+b)^3 c^{-2} \tag{44}$$

et  $3/2 \leq J \leq (x/(1+c))^{1/3}$ , la conjonction des résultats des propositions 17 et 21 montre que

$$W - \frac{2}{\pi} \zeta(3/2) \sqrt{cx} \ll (cx/J)^{1/2} + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4} + x^{1/3} \ln(x/c) + (1+b)^2 J^2/c.$$

Nous choisissons  $J$  pour équilibrer les deux premiers termes d'erreur :  $J = c^{5/9} x^{1/9}$ . Cette quantité vérifie l'encadrement  $3/2 \leq J \leq (x/(1+c))^{1/3}$  si

$$x \geq 40 \max(c^{-5}, (1+c)^4). \tag{45}$$

On a alors, d'une part,

$$(cx/J)^{1/2} + x^{1/4} J^{7/4} c^{-3/4} \asymp c^{2/9} x^{4/9}.$$

D'autre part, sous les hypothèses (44) et (45), on a

$$x^{1/3} \ln(x/c) \ll x^{1/3} (x/c)^{1/18} \ll c^{2/9} x^{4/9},$$

et l'inégalité

$$x \geq c^{-1/2} (1+b)^9 \tag{46}$$

entraîne

$$(1+b)^2 J^2/c \asymp (1+b)^2 c^{1/9} x^{2/9} \ll c^{2/9} x^{4/9},$$

Si  $x \geq 40 c^{-5}(1+b)^{27/2}$ , les trois conditions (44), (45) et (46) sont vérifiées, et le résultat est démontré.  $\square$

#### REMERCIEMENTS

Le premier auteur remercie Julien Cassaigne de lui avoir suggéré de généraliser à  $W(x; a, b)$  l'étude, effectuée dans [1], du cas  $a = 1, b = 2$ .

## Références

- [1] M. BALAZARD – « Sur la variation totale de la suite des parties fractionnaires des quotients d'un nombre réel positif par les nombres entiers naturels consécutifs. », *Mosc. J. Comb. Number Theory* **7** (2017), p. 3–23.
- [2] J. G. VAN DER CORPUT – « Méthodes d'approximation dans le calcul du nombre des points à coordonnées entières. », *Enseign. Math.* **23** (1923), p. 5–29.
- [3] — , « Neue zahlentheoretische Abschätzungen. », *Math. Ann.* **89** (1923), p. 215–254.
- [4] — , « Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. », *Math. Z.* **17** (1923), p. 250–259.
- [5] A. WINTNER – « Square root estimates of arithmetical sum functions », *Duke Math. J.* **13** (1946), p. 185–193.

BALAZARD, Michel  
Institut de Mathématiques de Marseille  
CNRS, Université d'Aix-Marseille  
Campus de Luminy, Case 907  
13288 Marseille Cedex 9  
FRANCE  
Adresse électronique : [balazard@math.cnrs.fr](mailto:balazard@math.cnrs.fr)

BENFERHAT, Leila  
Institut de Mathématiques-USTHB  
LA3C, Université des sciences et de la technologie Houari-Boumediène  
Bab Ezzouar  
ALGÉRIE  
Adresse électronique : [lbenferhat@hotmail.com](mailto:lbenferhat@hotmail.com)

BOUDERBALA, Mihoub  
Institut de Mathématiques-USTHB  
LA3C, Université des sciences et de la technologie Houari-Boumediène  
Bab Ezzouar  
ALGÉRIE  
Adresse électronique : [mihoub75bouder@gmail.com](mailto:mihoub75bouder@gmail.com)