



HAL
open science

Commande en boucle fermée d'une couche de mélange soumise à des perturbations exogènes

Christophe Collewet, Johan Carlier

► To cite this version:

Christophe Collewet, Johan Carlier. Commande en boucle fermée d'une couche de mélange soumise à des perturbations exogènes. CFM 2019 - 24e Congrès Français de Mécanique, Aug 2019, Brest, France. pp.1-15. hal-02189111v1

HAL Id: hal-02189111

<https://hal.science/hal-02189111v1>

Submitted on 19 Jul 2019 (v1), last revised 10 Sep 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Commande en boucle fermée d'une couche de mélange soumise à des perturbations exogènes

C. COLLEWET ^{a,b}, J. CARLIER ^{a,b}

a. Irstea, UR OPAALE, 17 avenue de Cucillé, 35 044 Rennes Cedex, mail : nom.prénom@irstea.fr

b. Inria, Équipe Fluminance, Campus de Beaulieu, 35 042 Rennes Cedex, mail : nom.prénom@inria.fr

Résumé :

Cet article traite de la commande en boucle fermée d'un écoulement soumis à une perturbation exogène. Le but recherché est de le maintenir dans un état désiré quelles que soient les perturbations auxquelles il est soumis. L'approche retenue est générique. Elle consiste dans un premier temps à linéariser les équations de Navier-Stokes autour de cet écoulement désiré pour obtenir une représentation d'état sous forme canonique. Les composantes du vecteur d'état sont la fonction courant en plusieurs points de l'espace supposée obtenue via des techniques image. Nous montrons tout d'abord que, la couche de mélange faisant partie de la classe des systèmes sous-actionnés, il n'est pas possible de rejeter une perturbation exogène mais uniquement de l'atténuer. Une loi de commande est alors proposée dans ce but. Elle est composée de deux termes, un premier terme permettant d'imposer un comportement en régulation, et un second dédié à l'atténuation de la perturbation. Nous montrons tout d'abord que ce second terme s'écrit simplement sous la forme d'un retour sur la perturbation. La perturbation étant inconnue, nous décrivons un observateur asymptotique à même de fournir une estimation de cette perturbation et prouvons analytiquement la stabilité du schéma de commande obtenu. Des résultats de simulations sur le solveur DNS Incompact3d valident l'approche proposée et montrent qu'elle s'avère plus performante qu'une commande par retour d'état uniquement.

Abstract :

This paper deals with the closed-loop control of a fluid flow subjected to exogenous disturbances. The goal is to maintain it in a desired state whatever the external disturbances. The main idea consists of linearizing the Navier-Stokes equations about the desired state to obtain a linear state formulation. The components of the state vectors are the stream function evaluated at different points of the space. It is assumed that it can be estimated via image techniques. First we show that, since the mixing layer is an under-actuated system, the disturbance can only be attenuated but not rejected. Therefore, a control law is proposed to cope with our problem. It writes as the sum of two terms. The first one allows to impose a behavior in regulation while the second one describes a behavior in rejection. We show that this second term writes simply as a feedback gain that has to apply to the perturbation value. Consequently, we propose a disturbance observer to derive the control law. Next, we prove the stability of our observer based control scheme. Simulations results on the DNS solver Incompact3d validate our control scheme and show that it overcomes a control law only based on a state feedback.

Mots clefs : Commande d'écoulement ; commande en boucle fermée ; degrés de liberté commandés ; observateur ; rejet de perturbations.

1 Introduction

De façon générale, la commande des écoulements vise à modifier l'état d'un écoulement donné pour l'amener d'un état courant à un état désiré (problème dit de « poursuite ») ou encore à le maintenir dans son état courant quelles que soient les perturbations qui peuvent l'affecter (problème dit de « régulation »). Précisons dès à présent que par perturbation on entend ici toute grandeur permettant de modifier l'état de l'écoulement considéré, hormis bien sûr le signal de commande lui-même dont le but consiste précisément à contrer les conséquences de cette perturbation. Il peut s'agir par exemple d'un dysfonctionnement de l'actionneur comme dans [1], nous qualifions alors cette perturbation « d'endogène », mais encore de tout autre événement « extérieur » à l'écoulement. Nous qualifions alors cette perturbation « d'exogène » car ne pouvant pas être directement générée par l'actionneur.

Nous nous focalisons dans cet article sur le problème de la régulation d'un écoulement autour d'un écoulement désiré lorsqu'il est soumis à des perturbations exogènes. Les perturbations considérées ici sont donc de nature foncièrement différente à celles traitées dans [1], tout comme le schéma de commande. Notons que ce problème a largement été investigué dans d'autres domaines applicatifs que la commande d'écoulement. Citons, entre autres, la régulation de vitesse d'une voiture automobile quelles que soient la pente et la nature du terrain, ou encore la régulation de la vitesse de croisière d'un avion quelles que soient les conditions de vol. Toutefois, à notre connaissance, ce problème n'a pas encore été directement abordé par la communauté de la commande des écoulements. En effet, dans le cadre d'une représentation dans l'espace d'état, une commande de type LQR est le plus souvent utilisée. Elle vise alors à minimiser la norme du vecteur d'état caractérisant l'état de l'écoulement [2–6]. Par conséquent, même si ce type de commande permet de limiter les conséquences d'une perturbation en cherchant à minimiser la norme du vecteur d'état, elle n'agit pas directement sur cette perturbation. De même, dans le cas d'une représentation du système à commander sous la forme entrée / sortie, une approche classique cherchant à minimiser la norme du vecteur de sortie ne peut que limiter indirectement l'influence de la perturbation [7, 8]. Signalons toutefois [9] où un schéma de commande permet de prendre partiellement en compte une perturbation exogène. Par ailleurs, il est essentiel d'imposer une dynamique en régulation différente de celle en rejet de perturbation où il est nécessaire d'agir rapidement. De plus amples détails sont données par exemple dans [10]. À notre connaissance, ce problème n'a pour l'instant jamais été abordé en commande d'écoulement.

La principale contribution de cet article réside dans le fait qu'un schéma de commande générique permettant de rejeter une perturbation exogène inconnue est proposé. L'architecture proposée repose sur le couplage de la loi de commande avec la synthèse d'un observateur de la perturbation. Nous montrons que ce schéma de commande est stable localement. Il est validé dans le cas de la couche de mélange spatiale plane. L'actionneur est supposé agir sur la condition limite amont de l'écoulement, au niveau de la plaque séparatrice. Cet écoulement est particulièrement bien adapté à la validation de notre approche puisqu'il s'agit d'un écoulement amplificateur de toute perturbation. De plus, cet écoulement étant commandé via un unique actionneur, nous abordons le problème de la commande des systèmes sous-actionnés et validons ainsi nos premiers résultats décrits dans [11]. Comme dans [1], nous supposons l'état de l'écoulement disponible via des mesures image (voir [12] où ce type d'approche dite d'« asservissement visuel » est détaillé).

Ce document est organisé comme suit. La section 2 est consacrée à la modélisation de l'écoulement de couche de mélange en vue de sa commande. La section 3 est dédiée à la conception de la loi de commande, tout d'abord dans le cas général d'un système dynamique ; la notion de système sous-actionné

est abordée. Nous nous focalisons ensuite sur le cas de la couche de mélange. La section 4 est dédiée à la synthèse de l'observateur de la perturbation. La section 5 est consacrée à l'étude de la stabilité du schéma de commande proposé. La section 6 valide notre approche via des résultats de simulations.

2 Modélisation de la couche de mélange

L'écoulement de couche de mélange spatiale est obtenu via la rencontre de deux écoulements en co-courant de vitesses différentes en amont d'une plaque séparatrice sur laquelle est disposé un actionneur. Au niveau du lieu de rencontre des deux écoulements se produisent des instabilités de type Kelvin-Helmholtz conduisant à l'amplification de petites perturbations et par suite au développement de la couche de mélange.

Nous notons l'axe x l'axe coïncidant avec la direction principale de l'écoulement, l'axe y avec la direction normale à la couche de mélange supposée plane et l'axe z avec la direction de l'envergure. Un trièdre orthonormé direct $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ est attaché au niveau de la plaque séparatrice. L'écoulement au dessus de la plaque séparatrice est supposé parallèle à l'axe x mais de vitesse constante : $\mathbf{U}_1 = U_1 \mathbf{e}_x$, l'écoulement en dessous de la plaque séparatrice est également supposé parallèle à l'axe x et de vitesse constante : $\mathbf{U}_2 = U_2 \mathbf{e}_x$ (voir figure 1).

Nous reprenons à présent le cheminement proposé dans [1] et renvoyons à cet article le lecteur intéressé par de plus amples détails. Dans [1], nous avons considéré le cas où l'écoulement subissait des petites variations autour d'un état stationnaire (ou dit « de base »). Cet état stationnaire est supposé être régi par une approximation de la solution de Blasius. Dans ce cas, la seule composante non nulle du vecteur vitesse est la composante suivant l'axe y . Nous notons U_b cette composante non nulle en précisant que U_b ne dépend que de y . Comme dans [1], nous considérons également le cas d'un écoulement bidimensionnel de telle sorte que les équations de Navier-Stokes linéarisées et adimensionnées peuvent s'écrire grâce à la fonction courant $\psi(\mathbf{x}, t)$ avec $\mathbf{x} = [x, y]^T$ de la façon suivante :

$$\Delta \dot{\psi} = \mathcal{D}\psi, \quad (1)$$

où $\mathcal{D} = \left(-U_b \partial_x \Delta + U_b'' \partial_x + \frac{1}{Re} \Delta^2 \right)$ est un opérateur différentiel agissant sur ψ , Δ l'opérateur Laplacien, et où $U_b''(y)$ désigne la dérivée seconde de U_b par rapport à y . L'adimensionnement a été réalisé en divisant les distances par l'épaisseur initiale de la couche de mélange δ_0 , les vitesses par la vitesse $U_0 = U_2 - U_1$, la pression par $\rho_0 U_0^2$ où ρ_0 est la masse volumique et le temps par U_0 / δ_0 . Dans \mathcal{D} , il apparaît alors le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 U_0 \delta_0}{\mu}$ où μ est la viscosité dynamique du fluide.

2.1 Conditions aux bords

La résolution effective de (1) nécessite de spécifier les conditions aux bords de l'écoulement, c'est-à-dire aux bords de la zone d'étude de l'écoulement défini ici par ses dimensions L_x et L_y . Nous considérons ainsi les conditions de Dirichlet à l'entrée du domaine ($x = 0$), à la sortie ($x = L_x$) ainsi qu'aux bords supérieur et inférieur ($y = \pm \frac{L_y}{2}$) :

- À l'entrée du domaine, $\psi(\mathbf{x}, t)|_{x=0}$ est imposée par le profil de la perturbation $\psi_d(\mathbf{x}, t)|_{x=0}$ et par le profil du signal de commande $\psi_q(\mathbf{x}, t)|_{x=0}$ généré par la loi de commande.

Nous notons $\psi_{q,d}(\mathbf{x}, t)$ la somme de ces deux termes, sans les définir précisément pour l'instant, soit $\psi_{q,d}(\mathbf{x}, t) = \psi_d(\mathbf{x}, t) + \psi_q(\mathbf{x}, t)$. Il vient alors :

$$\psi(\mathbf{x}, t)|_{x=0} = \psi_{q,d}(\mathbf{x}, t)|_{x=0}; \quad (2)$$

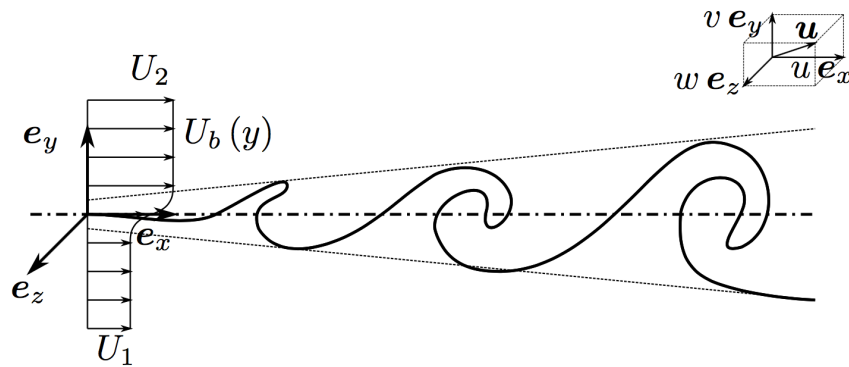


FIGURE 1 – Couche de mélange plane : une petite perturbation est spatialement amplifiée dans la direction de l'écoulement.

- Les conditions en sortie du domaine nous sont données via la résolution d'une équation simplifiée de convection :

$$\left(\partial_t + \left(U_1 + \frac{1}{2}\right)\partial_x\right)\psi(\mathbf{x}, t)|_{x=L_x} = 0 ; \quad (3)$$

- Aux bords supérieur et inférieur du domaine, nous supposons qu'aucune commande n'est appliquée, ainsi qu'aucune perturbation de telle sorte qu'il est possible d'écrire :

$$\psi(\mathbf{x}, t)|_{y=\pm\frac{L_y}{2}} = 0. \quad (4)$$

2.2 Modélisation pour la commande

Pour clairement faire apparaître le signal de commande et le terme de perturbation $\psi_{q,d}$ dans (1), nous transformons (1) qui est une équation différentielle non homogène en une équation homogène en posant :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_h(\mathbf{x}, t) + \psi_q(\mathbf{x}, t) + \psi_d(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

où ψ_h est la solution de la nouvelle équation différentielle à conditions homogènes cette fois. Cette équation s'obtient en substituant (5) dans (1), il vient alors :

$$\Delta\dot{\psi}_h(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}\psi_h(\mathbf{x}, t) - \left(\Delta\dot{\psi}_q(\mathbf{x}, t) - \mathcal{D}\psi_q(\mathbf{x}, t)\right) - \left(\Delta\dot{\psi}_d(\mathbf{x}, t) - \mathcal{D}\psi_d(\mathbf{x}, t)\right). \quad (6)$$

Comme plusieurs auteurs l'ont proposé (e.g. [9, 13]), nous supposons maintenant que les termes de commande et de perturbations s'écrivent sous la forme de fonctions séparables du temps et de l'espace :

$$\begin{cases} \psi_q(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})q(t) \\ \psi_d(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x})d(t). \end{cases} \quad (7)$$

où les fonctions f et g sont des fonctions de pénétration. Elles modélisent respectivement la façon dont l'actionneur et la perturbation impactent spatialement l'écoulement. Il est important de noter que ces fonctions sont soumises à certaines contraintes afin que (6) aient bien des conditions de Dirichlet homogènes (voir (10)).

L'équation (6) se réécrit alors comme suit :

$$\Delta\dot{\psi}_h(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}\psi_h(\mathbf{x}, t) - \Delta f(\mathbf{x})\dot{q}(t) + D_f(\mathbf{x})q(t) - \Delta g(\mathbf{x})\dot{d}(t) + D_g(\mathbf{x})d(t) \quad (8)$$

dans laquelle $D_f(\mathbf{x}) = \mathcal{D}f(\mathbf{x})$ et $D_g(\mathbf{x}) = \mathcal{D}g(\mathbf{x})$.

Les conditions aux bords de la section 2.1 deviennent alors homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_h(\mathbf{x}, t)|_{x=0} = 0 \\ \psi_h(\mathbf{x}, t)|_{y=\pm \frac{L_y}{2}} = 0 \\ \left(\partial_t + (U_1 + \frac{1}{2})\partial_x \right) \psi_h(\mathbf{x}, t)|_{x=L_x} = 0 \end{array} \right. \quad (9)$$

pourvues que les conditions suivantes soient réunies :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(\mathbf{x}, t)|_{x=0} = \psi_q(\mathbf{x}, t)|_{x=0} + \psi_d(\mathbf{x}, t)|_{x=0} \\ \left(\partial_t + (U_1 + \frac{1}{2})\partial_x \right) \psi_q(\mathbf{x}, t)|_{x=L_x} = - \left(\partial_t + (U_1 + \frac{1}{2})\partial_x \right) \psi_d(\mathbf{x}, t)|_{x=L_x} \\ \psi_q(\mathbf{x}, t)|_{y=\pm \frac{L_y}{2}} = -\psi_d(\mathbf{x}, t)|_{y=\pm \frac{L_y}{2}} \end{array} \right. \quad (10)$$

Un schéma aux différences finies centré et d'ordre 2 permet de transformer cette équation différentielle non linéaire (8) en un système d'équations différentielles linéaires en chaque point d'un maillage du domaine d'étude. Les fonctions courants en ces différents points du maillage ont été rassemblées dans le vecteur $\psi(t)$. Cette façon de faire permet donc de transformer (8) en le système différentiel suivant :

$$\mathbf{L}\dot{\psi}(t) = \mathbf{M}\psi_h(t) + \mathbf{F}\dot{q}(t) + \mathbf{F}_D q(t) + \mathbf{G}\dot{d}(t) + \mathbf{G}_D d(t) \quad (11)$$

qui à son tour devient :

$$\dot{\psi}_h(t) = \mathbf{A}_c \psi_h(t) + \mathbf{B}_1 \dot{q}(t) + \mathbf{B}_2 q(t) + \mathbf{B}_3 \dot{d}(t) + \mathbf{B}_4 d(t) \quad (12)$$

où $\mathbf{A}_c = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{F}_D$, $\mathbf{B}_3 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}$ et $\mathbf{B}_4 = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}_D$ la matrice \mathbf{L} étant de rang plein $n = n_x \times n_y$ avec n_x et n_y les pas de discrétisation spatiale respectivement dans les directions x et y .

Toutefois, l'équation (12) n'est pas adaptée vraiment à la commande de la couche de mélange. En effet, le vecteur ψ_h n'est pas mesurable, seul le vecteur ψ (donné par (5)) l'est.

En remarquant que les termes $\dot{q}(t)$ et $\dot{d}(t)$ dans (12) proviennent de l'opérateur Laplacien appliqué à (7), nous pouvons en déduire que le vecteur \mathbf{z} défini par :

$$\mathbf{z}(t) = \psi_h(t) - \mathbf{B}_1 q(t) - \mathbf{B}_3 d(t) \quad (13)$$

n'est autre qu'une approximation discrétisée spatialement de ψ , mesurable par exemple par des techniques basées image comme nous l'avons mentionné en introduction de cet article.

Dans ces conditions, (12) devient :

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_{c,q} q(t) + \mathbf{B}_{c,d} d(t) \quad (14)$$

avec $\mathbf{B}_{c,q} = \mathbf{A}_c \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ et $\mathbf{B}_{c,d} = \mathbf{A}_c \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$.

De plus, dans la suite de cet article nous considérons la version discrète de (14) comme cela est souvent le cas en automatique numérique puisque le signal de commande est maintenu constant pendant une durée T . Cela se fait en intégrant (14) entre les instants kT et $(k+1)T$ en prenant en compte le fait

que le signal de commande $q(t)$ est constant dans cet intervalle, nous supposons également l'amplitude de la perturbation $d(t)$ constante dans cet intervalle. Nous justifierons cette hypothèse plus avant dans ce document. Dans ces conditions, (14) devient :

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q q_k + \mathbf{B}_d d_k \quad (15)$$

où :

$$\mathbf{A} = \exp(\mathbf{A}_c T) \text{ et } \mathbf{B}_i = \int_0^T \exp(\mathbf{A}_c \tau) \mathbf{B}_{c,i} d\tau \quad \text{avec } i \in \{q, d\}. \quad (16)$$

3 Rejet d'une perturbation exogène

3.1 Cas général

Dans le cas le plus général, il convient de généraliser (15) au cas où les scalaires q_k et d_k sont des vecteurs, l'équation d'état du système à commander s'écrit alors comme suit :

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_k \quad (17)$$

où $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$. Les matrices \mathbf{B}_q et \mathbf{B}_d sont bien sûr supposées différentes, ce problème est alors connu dans la littérature anglo-saxonne sous le terme « mismatched case ».

Afin de pouvoir spécifier des performances différentes en régulation et en rejet de perturbations, l'approche classique consiste à écrire la loi de commande comme la somme de deux termes :

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \quad (18)$$

où \mathbf{u} permet de réguler le vecteur d'état \mathbf{z} et \mathbf{v} de rejeter la perturbation \mathbf{d} . On supposera ici pour fixer les idées que \mathbf{u} s'écrit sous la forme d'un retour d'état : $\mathbf{u} = -\mathbf{K}_z^\top \mathbf{z}$. En injectant (18) dans (17), il vient alors

$$\mathbf{z}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}_q \mathbf{K}_z^\top) \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q \mathbf{v}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_k \quad (19)$$

Le gain de retour d'état \mathbf{K}_z est calculé de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A} - \mathbf{B}_q \mathbf{K}_z^\top$ intervenant dans (19) soient toutes strictement à l'intérieur du cercle unité de telle sorte qu'en l'absence de perturbation la suite $\{\mathbf{z}_k\}$ converge vers $\mathbf{0}$. Il en résulte qu'une façon d'aborder le problème de rejet de perturbations consiste à trouver \mathbf{v}_k telle que $\mathbf{B}_q \mathbf{v}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_k = \mathbf{0}$, la perturbation est alors complètement rejetée. Ce problème a été traité par Johnson dans [14]. En effet, Johnson a montré que $\mathbf{B}_q \mathbf{v}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{d}_k = \mathbf{0}$ si, et seulement si, \mathbf{B}_d s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{B}_q \mathbf{\Gamma} \quad (20)$$

où $\mathbf{\Gamma}$ est une matrice de dimension $m \times p$. Dans ces conditions, il est aisé de vérifier que la loi de commande $\mathbf{v}_k = -\mathbf{\Gamma} \mathbf{d}_k$ assure une convergence vers zéro de l'état et cela en présence d'une perturbation (en supposant toutefois la perturbation \mathbf{d} parfaitement connue à l'instant k).

Dans le cas contraire, le concepteur de la loi de commande n'a nul autre choix que de chercher à atténuer l'effet de la perturbation tout en s'assurant que le système bouclé reste stable simplement puisque la stabilité asymptotique de (19) ne peut être atteinte (voir [15] pour une définition précise de ce type de stabilité). Nous y reviendrons en détails à la section 5.

3.2 Influence du nombre de degrés de liberté commandés

Avant de décrire la loi de commande proposée, il est important de noter que le nombre de degrés de liberté commandés joue un rôle essentiel, comme c'est toujours le cas en automatique, qu'il s'agisse d'un problème de rejet de perturbation ou non.

Le cas $m = n$ est, quant à lui, particulièrement intéressant puisqu'il permet de rejeter complètement la perturbation. En effet, dans ce cas la matrice \mathbf{B}_q est carrée et, si elle de rang plein, traduisant ainsi que les actionneurs sont tous complémentaires, il vient :

$$\mathbf{v}_k = -(\mathbf{B}_q)^{-1}\mathbf{B}_d\mathbf{d}_k. \quad (21)$$

Cette condition ne peut pas toujours être remplie mais, augmenter le nombre de degrés de liberté commandés conduit toujours à améliorer les performances du système bouclé (voir par exemple [11]). Malheureusement, dans le cas de notre couche de mélange un unique actionneur est disponible et les résultats obtenus seront donc moins bons que si plusieurs actionneurs étaient utilisés comme en témoigne la figure 2a. En effet, cette figure montre la norme du vecteur d'état en régime établi lorsque le système est soumis à une perturbation échelon en fonction du nombre d'actionneurs m utilisés ($m \in [1, n]$), et cela dans le cas où $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Ce résultat montre clairement le bénéfice d'augmenter le nombre de degrés de liberté commandés : l'efficacité d'une loi de commande augmente avec la valeur de m . De ce fait, certains écoulements sont plus efficacement commandables. C'est le cas par exemple de l'écoulement de canal où un grand nombre d'actionneurs peut être mobilisés pourvu, bien sûr, que leur comportement soit découplé.

Dans cette simulation, nous avons considéré le cas où les fonctions $f(\mathbf{x})$ et $g(\mathbf{x})$ impliquées dans (7) s'expriment comme des fonctions séparables en x, y : $f(\mathbf{x}) = 2e^{(-x/4)^2}e^{-4y^2}$ et $g(\mathbf{x}) = e^{(-x/4)^2}\tanh(2y)$ conduisant aux champs de vecteurs rapportés respectivement sur les figures 2b et 2c. De plus amples détails concernant le choix de ces fonctions sont donnés dans [1]. La figure 2b montre en quelque sorte comment peut agir la loi de commande et la figure 2c la façon dont la perturbation agit sur l'écoulement. Du fait ici de la forme particulière de $g(\mathbf{x})$, il est important de noter que la perturbation se situe à l'entrée du domaine et agit donc comme un pseudo actionneur le ferait, mais, pas comme l'actionneur responsable de l'application du signal de commande le fait, contrairement au cas décrit dans [1].

Remarque : L'ajout du nombre d'actionneurs a été réalisé simplement en ajoutant des colonnes à la matrice \mathbf{B}_q sans tenir compte de leur faisabilité physique. Le but étant ici de montrer l'intérêt de l'influence du nombre de degrés de liberté commandés sur les performances d'une loi de commande.

3.3 Cas de la couche de mélange

Nous considérerons le cas où l'amplitude de la perturbation d_k est scalaire et constante, c'est-à-dire $d_k = d, \forall k$. De plus, comme d est *a priori* inconnu, il est légitime de considérer que le vecteur \mathbf{B}_d l'est aussi puisque la fonction de pénétration de la perturbation est *a priori* inconnue. De ce fait, l'équation d'état (19) devient :

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_{bf}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q v_k + \mathbf{W} \quad (22)$$

dans laquelle on a posé $\mathbf{A}_{bf} = \mathbf{A} - \mathbf{B}_q\mathbf{K}_z^\top$ et $\mathbf{W} = \mathbf{B}_d d$.

Nous considérerons dans un premier temps que le vecteur de perturbation \mathbf{W} est parfaitement estimé.

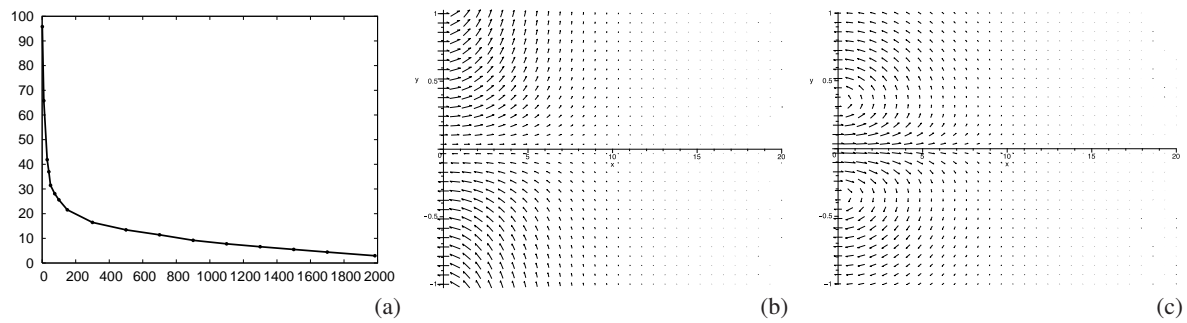


FIGURE 2 – Cas d’une perturbation de type échelon. (a) Comportement de la norme du vecteur d’état en régime établi en fonction du nombre m de degrés de liberté commandés ; (b) Champ de vitesses résultant de la fonction de pénétration relative à $f(\mathbf{x})$; (c) Champ de vitesses résultant de la fonction de pénétration relative à $g(\mathbf{x})$.

Dans ce cas, il est légitime de vouloir minimiser à chaque instant $\|\mathbf{B}_q v_k + \mathbf{W}\|^2$ soit

$$\begin{aligned} J &= (\mathbf{B}_q v_k + \mathbf{W})^\top (\mathbf{B}_q v_k + \mathbf{W}) \\ &= \mathbf{B}_q^\top \mathbf{B}_q v_k^2 + 2\mathbf{B}_q^\top \mathbf{W} v_k + \mathbf{W}^\top \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (23)$$

La commande s’obtient en cherchant le minimum de J par rapport à v_k :

$$\frac{\partial J}{\partial v_k} = 2\mathbf{B}_q^\top \mathbf{B}_q v_k + 2\mathbf{B}_q^\top \mathbf{W} \quad (24)$$

qui fournit la solution recherchée :

$$v^* = -\mathbf{K}_w^\top \mathbf{W} \quad (25)$$

avec

$$\mathbf{K}_w^\top = \frac{\mathbf{B}_q^\top}{\mathbf{B}_q^\top \mathbf{B}_q}. \quad (26)$$

Précisons qu’il s’agit bien d’un minimum car $\frac{\partial^2 J}{\partial^2 v_k} = \mathbf{B}_q^\top \mathbf{B}_q$ est un scalaire positif. On peut remarquer également que le gain \mathbf{K}_w est un vecteur constant, il peut donc être calculé hors ligne.

La commande totale (18) s’écrit alors simplement comme un retour d’état additionné d’un retour sur la perturbation :

$$\mathbf{q}_k = -\mathbf{K}_z^\top \mathbf{z}_k - \mathbf{K}_w^\top \mathbf{W}. \quad (27)$$

Remarque : Dans le cas où la perturbation est en fait une perturbation endogène, on a alors $\mathbf{W} = \mathbf{B}_q d$ qui, une fois injecté dans (25), conduit à $v^* = -d$ et qui, une fois injecté à son tour dans (23), conduit à un coût nul. On retrouve là le fait que la loi de commande annule complètement l’effet de la perturbation.

La loi de commande (27) dépendant du vecteur de perturbation \mathbf{W} , il est essentiel de pouvoir l’estimer précisément. C’est l’objet de la section suivante où un observateur de \mathbf{W} est développé.

4 Conception d’un observateur de la perturbation

L’approche proposée est inspirée de l’observateur décrit dans [16]. Nous en proposons une approche discrète et dédiée à une expression linéaire de l’équation d’état.

Le problème consiste à assurer une convergence asymptotique de l’erreur de prédiction $\widetilde{\mathbf{W}}_k$ vers $\mathbf{0}$, $\widetilde{\mathbf{W}}_k$

étant défini par

$$\widetilde{\mathbf{W}}_k = \widehat{\mathbf{W}}_k - \mathbf{W}_k. \quad (28)$$

L'approche proposée est classique dans le sens où on recherche les conditions assurant une décroissance exponentielle de $\widetilde{\mathbf{W}}$, c'est-à-dire

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu \widetilde{\mathbf{W}}_k \quad (29)$$

où μ est un scalaire réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Il fixe la dynamique de l'estimation.

Dans ces conditions, en injectant (28) dans (29), il vient

$$\widehat{\mathbf{W}}_{k+1} - \mathbf{W}_{k+1} = \mu \left(\widehat{\mathbf{W}}_k - \mathbf{W}_k \right). \quad (30)$$

La perturbation étant supposée constante, $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k$ et (30) devient

$$\widehat{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu \widehat{\mathbf{W}}_k + (1 - \mu) \mathbf{W}_k. \quad (31)$$

Dans cette équation, \mathbf{W}_k n'étant pas accessible, on cherche une expression dans laquelle il intervient directement, à savoir

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k + \mathbf{W}_k \quad (32)$$

ce qui permet d'écrire

$$\widehat{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu \widehat{\mathbf{W}}_k + (1 - \mu) (\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{A}\mathbf{z}_k - \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k) \quad (33)$$

Cette dernière relation dépend maintenant uniquement de grandeurs mesurables, toutefois la mesure de \mathbf{z}_{k+1} n'est pas disponible à l'instant k . Une façon d'aboutir est de réaliser le changement de variable proposé dans [16] :

$$\boldsymbol{\xi}_k = \widehat{\mathbf{W}}_k - (1 - \mu) \mathbf{z}_k. \quad (34)$$

Il est alors possible d'exprimer $\boldsymbol{\xi}_{k+1}$ comme suit

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \widehat{\mathbf{W}}_{k+1} - (1 - \mu) \mathbf{z}_{k+1} \quad (35)$$

qui se simplifie sous la forme suivante en utilisant (33) :

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \mu \widehat{\mathbf{W}}_k - (1 - \mu) (\mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k) \quad (36)$$

et qui devient à son tour en exprimant $\widehat{\mathbf{W}}_k$ grâce à (34) :

$$\boldsymbol{\xi}_{k+1} = \mu (\boldsymbol{\xi}_k + (1 - \mu) \mathbf{z}_k) - (1 - \mu) (\mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k). \quad (37)$$

D'où la formulation recherchée de l'observateur :

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{W}}_k &= \boldsymbol{\xi}_k + (1 - \mu) \mathbf{z}_k \\ \boldsymbol{\xi}_{k+1} &= \mu \boldsymbol{\xi}_k + (1 - \mu) \left((\mu \mathbb{I}_n - \mathbf{A}) \mathbf{z}_k - \mathbf{B}_q \mathbf{q}_k \right) \end{cases} \quad (38)$$

sachant que \mathbf{q}_k est maintenant donné par :

$$\mathbf{q}_k = -\mathbf{K}_z^\top \mathbf{z}_k - \mathbf{K}_w^\top \widehat{\mathbf{W}}_k. \quad (39)$$

La section suivante est dédiée à l'étude de la stabilité du système bouclé (22) par (39).

5 Étude de la stabilité du système bouclé

La notion de stabilité en automatique est un concept fondamental. En effet, une loi de commande mal conçue peut rendre un système inutilisable voire même dangereux. C'est pourquoi dès le milieu du 19^e siècle des travaux fondamentaux ont été entrepris sur la stabilité des systèmes dynamiques (voir les travaux fondateurs de Hermite, Routh, Hurwitz et Lyapunov pour ne citer qu'eux).

C'est ainsi que cette section se propose d'étudier le comportement du système linéarisé et bouclé autour du point d'équilibre $\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

En l'absence de perturbation, le point d'équilibre $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ est asymptotiquement stable pour le système linéarisé. En revanche, s'il est perturbé, comme nous l'avons vu en 3.1, l'état ne pourra pas converger vers $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Nous allons montrer ici que si la perturbation est bornée, l'état reste borné lui aussi. Il s'agit en fait du concept de stabilité entrée-état (connu dans la littérature anglo-saxonne sous la dénomination ISS pour « Input to state stability ») introduit dans [17] pour les systèmes nonlinéaires. Dans le cadre linéaire ce concept est voisin de la stabilité BIBO (pour « Bounded Input Bounded Output »). En effet, un système est stable au sens BIBO si, et seulement si, pour toute entrée bornée la sortie est bornée. Dans la stabilité ISS, il s'agit de l'état et non pas de la sortie.

Réécrivons les équations qui régissent le système bouclé linéarisé :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q\mathbf{q}_k + \mathbf{W}_k & (40a) \\ \mathbf{q}_k = -\mathbf{K}_z^\top\mathbf{z}_k - \mathbf{K}_w^\top\widehat{\mathbf{W}}_k & (40b) \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu\widetilde{\mathbf{W}}_k & (40c) \\ \widehat{\mathbf{W}}_k = \widetilde{\mathbf{W}}_k - \mathbf{W}_k. & (40d) \end{cases}$$

qui peut se réécrire comme suit en injectant (40b) dans (40a) :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_{bf}\mathbf{z}_k - \mathbf{B}_q\mathbf{K}_w^\top\widehat{\mathbf{W}}_k + \mathbf{W}_k & (41a) \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu\widetilde{\mathbf{W}}_k & (41b) \\ \widehat{\mathbf{W}}_k = \widetilde{\mathbf{W}}_k + \mathbf{W}_k & (41c) \end{cases}$$

et encore en injectant (41c) dans (41a) :

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_{bf}\mathbf{z}_k - \mathbf{B}_q\mathbf{K}_w^\top\widetilde{\mathbf{W}}_k + (\mathbb{I}_n - \mathbf{B}_q\mathbf{K}_w^\top)\mathbf{W}_k \\ \widetilde{\mathbf{W}}_{k+1} = \mu\widetilde{\mathbf{W}}_k \end{cases} \quad (42)$$

qui s'écrit sous la forme d'un système augmenté de la façon suivante :

$$\zeta_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\zeta_k + \bar{\mathbf{B}}\varrho_k \quad (43)$$

où

$$\zeta_k = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \widetilde{\mathbf{W}}_k \end{bmatrix}, \varrho_k = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{bf} & -\mathbf{B}_q\mathbf{K}_w^\top \\ \mathbf{0} & \mu\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n - \mathbf{B}_q\mathbf{K}_w^\top & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

L'équation de récurrence (43) s'intègre facilement :

$$\zeta_k = \bar{\mathbf{A}}^k \zeta_0 + \sum_{j=0}^{j=k-1} \bar{\mathbf{A}}^{k-j-1} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\varrho}_j. \quad (45)$$

En considérant que la perturbation est bornée par \mathbf{W}_{max} , il vient $\boldsymbol{\varrho}_k < \boldsymbol{\varrho}_{max}$ avec $\boldsymbol{\varrho}_{max} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{max} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ et par conséquent

$$\zeta_k < \bar{\mathbf{A}}^k \zeta_0 + \left(\sum_{j=0}^{j=k-1} \bar{\mathbf{A}}^{k-j-1} \right) \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\varrho}_{max}. \quad (46)$$

À ce stade, il est facile de démontrer que

$$\sum_{j=0}^{j=k-1} \bar{\mathbf{A}}^{k-j-1} = (\bar{\mathbf{A}} - \mathbb{I}_n)^{-1} (\bar{\mathbf{A}}^k - \mathbb{I}_n) \quad (47)$$

et dans ces conditions (45) devient :

$$\zeta_k < \bar{\mathbf{A}}^k \zeta_0 + (\bar{\mathbf{A}} - \mathbb{I}_n)^{-1} (\bar{\mathbf{A}}^k - \mathbb{I}_n) \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\varrho}_{max}. \quad (48)$$

Comme $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{A}}^k = \mathbf{0}$ (puisque toutes les valeurs propres de $\bar{\mathbf{A}}$ sont à l'intérieur du cercle unité), il vient finalement le résultat recherché :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k < (\mathbb{I}_n - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\varrho}_{max}. \quad (49)$$

Par conséquent, nous venons de prouver qu'à chaque instant k l'état reste bornée en présence d'une perturbation inconnue, pourvue qu'elle soit bornée (expression (48)). De plus, à l'infini l'état converge vers un domaine constant de l'espace (expression (49)). Les frontières de cet espace dépendent des gains \mathbf{K}_z et \mathbf{K}_w .

Remarque : Il va sans dire qu'aucune approche basée apprentissage sans modèle ne permet d'aboutir à une telle preuve de stabilité.

6 Résultats de simulations

Le schéma de commande complet a été porté dans le solveur des équations de Navier-Stokes Incompact3d [18]. La loi de commande a été obtenue grâce à (40b). Le gain \mathbf{K}_z a été obtenu par commande optimale (le détail des calculs est donné dans [1]). Les vecteur \mathbf{B}_q et \mathbf{B}_d , tout comme les fonctions de pénétration modélisées dans Incompact3d, sont ceux présentés dans la section 3.2. L'estimation de la perturbation a été obtenue quant à elle via l'observateur décrit en (38) (la valeur de μ a été fixée à 0.6). La période d'échantillonnage T a été fixée à 20 fois celle d'Incompact3d (soit $T = 0.1$) pour tenir compte de la durée effective de la loi de commande et, en particulier de la durée de calcul du vecteur d'état qui pourra s'avérer, le cas échéant longue, lors du passage à l'expérimentation. Toutes les autres grandeurs étant adimensionnées, seule la connaissance du nombre de Reynolds est suffisante, nous avons fixé sa valeur à 300.

Nous nous sommes focaliser dans un premier temps sur la validation de l'observateur. La vérité terrain

n'étant pas accessible (le vecteur \mathbf{W} n'est pas une entité connue dans Incompact3d), cette validation n'est pas direct. Néanmoins, pour apprécier le comportement de l'observateur nous avons considéré le signal d'erreur suivant :

$$E_{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^{\top} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1} \quad (50)$$

où $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \widehat{\mathbf{z}}_{k+1}$ avec

$$\widehat{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_k + \mathbf{B}_q q_k + \widehat{\mathbf{W}}_k. \quad (51)$$

et où \mathbf{z}_{k+1} donné par (40a). En effet, si $\widehat{\mathbf{W}}_k$ tend vers la valeur exacte de \mathbf{W} alors $E_{\mathbf{W}}$ tendra vers 0. La figure 3 rapporte le comportement de $\log_{10}(E_{\mathbf{W}})$ en fonction du temps lorsque la couche de mélange est soumise à une perturbation exogène d'amplitude constante appliquée à partir de $t = 0$ en temps adimensionné. Comme on peut le constater, après une phase d'initialisation où le signal d'erreur $E_{\mathbf{W}}$ est chahuté, il tend ensuite vers 0.

Pour éviter de perturber la loi de commande durant la phase d'initialisation de l'observateur, nous avons opéré comme suit. Dans un premier temps, nous avons appliqué uniquement le retour d'état, le terme de compensation a été appliqué au bout d'un temps t_{act} afin d'assurer un temps suffisant de convergence de l'observateur. Le terme de compensation v^* a été également filtré par un simple filtre moyenné à horizon infini (figures 4.c et 4.d). C'est cette valeur filtrée qui est utilisée dans la loi de commande, notée v_f^* . Il est important de choisir t_{act} correctement, un choix judicieux est celui qui vérifie $v_f^*(t_{act}) = 0$. En effet, cela permet d'éviter un saut dans la commande car c'est à $t = t_{act}$ que le terme de compensation est ajouté au retour d'état.

Dans ces conditions, la figure 4.b rapporte l'évolution des signaux de commande dans le cas de la commande LQR et de la commande proposée. Dans un premier temps, les lois de commande sont similaires puis se différencient une fois le terme de compensation pris en compte dans la loi de commande proposée. Comme on peut le constater, ce terme a une valeur importante. Cette figure montre également que la loi de commande se stabilise et une converge vers une valeur constante.

Pour terminer, la figure 4.a compare la norme de l'état en fonction du temps dans les cas suivants : en boucle ouverte ($\mathbf{q}_k = 0$), pour une commande LQR ($\mathbf{K}_w^{\top} = \mathbf{0}$), puis pour la commande proposée. Comme on peut le constater tout d'abord, une simple commande par retour d'état, même si elle se comporte mieux que la boucle ouverte, éprouve des difficultés à maintenir l'état du système proche de l'état désiré. En revanche, le bénéfice de l'ajout d'un terme de compensation par rapport au seul retour d'état est clair, plus particulièrement une fois le régime transitoire terminé, la norme du vecteur d'état est divisée par un facteur 2. Cette figure montre enfin la convergence du schéma de commande proposée, la loi de commande couplée à l'observateur permet d'atténuer la perturbation inconnue à laquelle la couche de mélange est soumise.

Une autre simulation a été réalisée, le signe de l'amplitude de la perturbation a été inversée par rapport à la simulation précédente. Le comportement du système est rapporté sur les figures 5 et 6. Ici aussi la loi de commande proposée permet d'atténuer l'effet de la présence de la perturbation.

Il est important de noter que tous les gains ont été obtenus via une modélisation du système linéarisé qui ne reflète que localement le comportement de la couche de mélange modélisé par Incompact3d. De plus, comme on peut le constater sur les figures 4.a et 6.4, le vecteur d'état est très loin de l'état d'équilibre $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ autour duquel la linéarisation a été réalisée. Ces deux points montrent la robustesse de la loi de commande proposée.

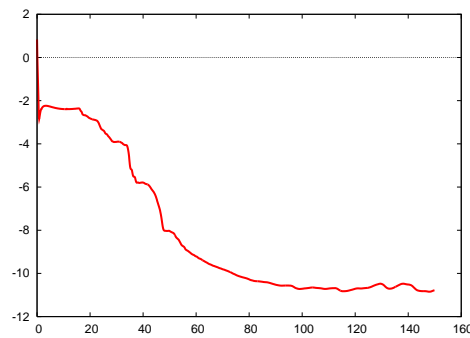


FIGURE 3 – Perturbation d’amplitude $d = 0.1$. Validation de l’observateur : évolution de $\log_{10}(E_{\mathbf{w}})$ en fonction du temps.

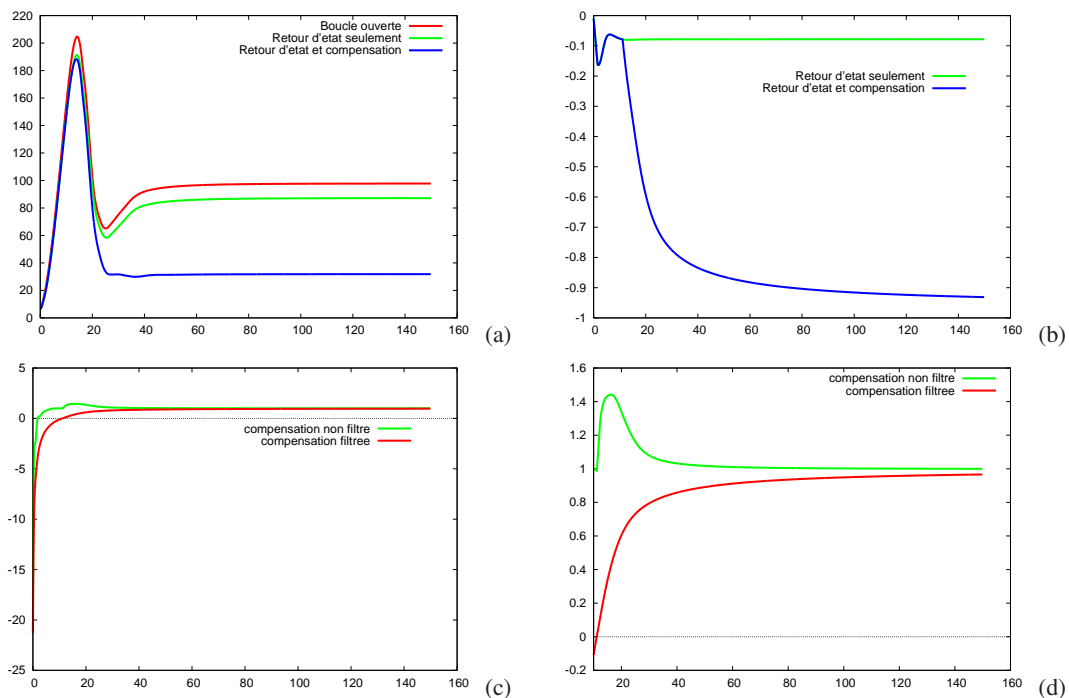


FIGURE 4 – Perturbation d’amplitude $d = 0.1$. (a) Norme de l’état en fonction du temps ; (b) Signaux de commande ; (c) Signaux de compensation filtré v_f^* et non filtrés v^* ; (d) Signaux de compensation filtré v_f^* et non filtrés v^* zoomés.

7 Conclusion et travaux futurs

Nous avons montré dans cet article que le rejet d’une perturbation exogène dans le cas d’un système sous actionné, comme c’est le cas de la couche de mélange étudiée ici, ne peut pas conduire de façon générale à un rejet total de la perturbation mais uniquement à une atténuation. Il est donc préférable, quand cela est possible, d’augmenter le nombre de degrés de liberté commandés. Dans le cas contraire, une loi de commande basée sur l’utilisation d’un observateur de la perturbation a été proposée. Les conditions conduisant à une stabilité ISS ont pu être exhibées, elles sont très simples à obtenir, et permettent ainsi un bon comportement du système bouclé. Des simulations sous Incompact3d ont validé l’ensemble du schéma de commande proposé et sa robustesse. L’approche proposée permet d’atténuer grandement les conséquences de l’apparition d’une perturbation exogène.

Les travaux futurs porteront sur le cas de perturbations lentement variables afin d’appréhender les limites

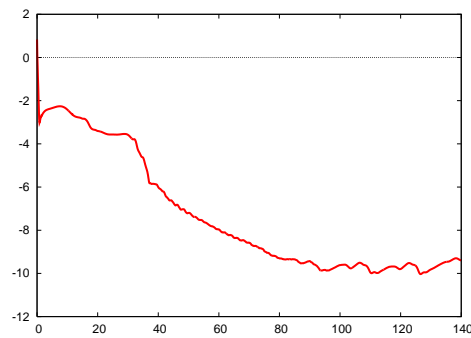


FIGURE 5 – Perturbation d’amplitude $d = -0.1$. Validation de l’observateur : évolution de $\log_{10}(E_{\mathbf{w}})$ en fonction du temps.

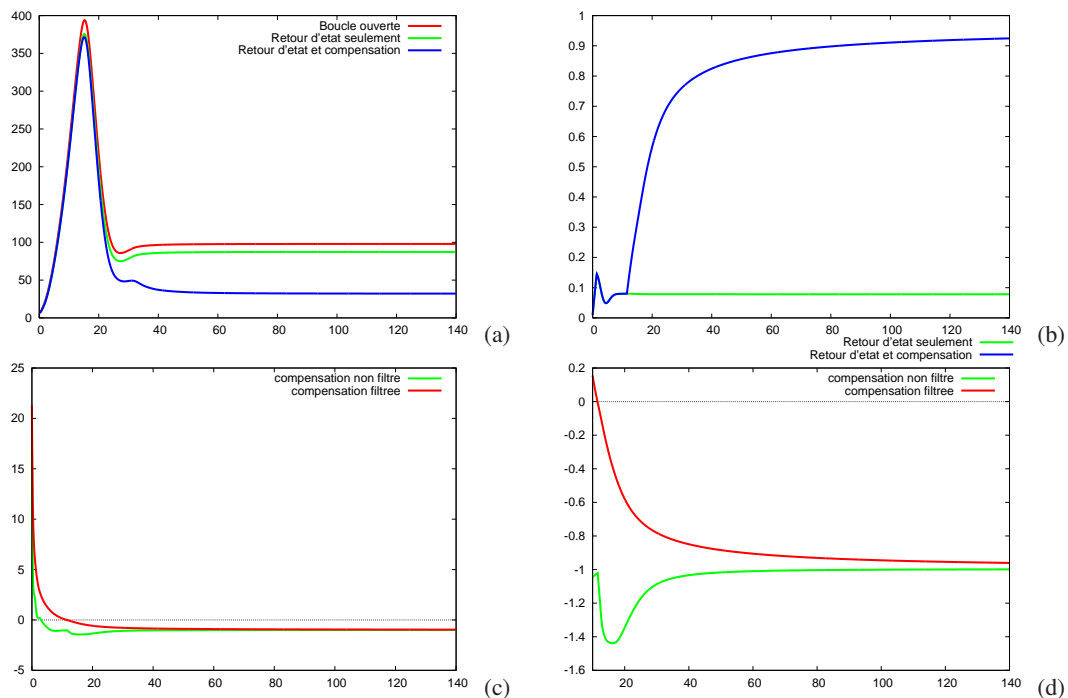


FIGURE 6 – Perturbation d’amplitude $d = -0.1$. (a) Norme de l’état en fonction du temps ; (b) Signaux de commande ; (c) Signaux de compensation filtré v_f^* et non filtrés v^* ; (d) Signaux de compensation filtré v_f^* et non filtrés v^* zoomés.

de notre approche. Il est vraisemblable que si la dynamique de l’observateur est suffisamment rapide par rapport à celle de la perturbation de bons résultats pourront être obtenus. Ce travail sera ensuite validé par des expérimentations en soufflerie.

Références

- [1] D. Anda-Ondo, J. Carrier, and C. Collewet. Closed-loop control of a spatially developing free shear flow around a steady state. In *20th IFAC World Congress*, Toulouse, France, July 2017.
- [2] L. Cortelezzi, K. H. Lee, J. Kim, and J. L. Speyer. Skin-friction drag reduction via robust reduced-order linear feedback control. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 11 :79–92, 1998.

- [3] S.M. Kang, V. Ryder, L. Cortelezzi, and J.L. Speyer. State-space formulation and controller design for three-dimensional channel flows. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. IEEE, June 1999.
- [4] J. Kim and T. Bewley. A linear systems approach to flow control. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39 :383–417, 2007.
- [5] A. Barbagallo, D. Sipp, and P. J. Schmid. Input-output measures for model reduction and closed-loop control : application to global modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 685 :23–53, 2011.
- [6] T. Duriez, S.L. Brunton, and B.R. Noack. Methods of linear control theory. In *Machine Learning Control – Taming Nonlinear Dynamics and Turbulence*, pages 49–68. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [7] S-C. Huang and J. Kim. Control and system identification of a separated flow. *Physics of Fluids*, 20(10) :101509, 2008.
- [8] P. Roca, A. Cammilleri, T. Duriez, L. Mathelin, and G. Artana. Streakline-based closed-loop control of a bluff body flow. *Physics of Fluids*, 26(4), April 2014.
- [9] A. Hervé, D. Sipp, P.J. Schmid, and M. Samuelides. A physics-based approach to flow control using system identification. *J. Fluid Mech.*, 702 :26–58, 2012.
- [10] I.D. Landau. *Commande des systèmes : conception, identification et mise en œuvre*. Lavoisier, 2002.
- [11] T. Airimitoiaie and C. Collewet. Improving robust stability by increasing the number of controlled degrees of freedom. In *7th AIAA Flow Control Conference*, Atlanta, USA, June 2014.
- [12] R. Tatsambon Fomena and C. Collewet. Fluid flow control : a vision-based approach. *Int. Journal of Flow Control*, 3(2) :133–169, 2011.
- [13] S. Joshi, J. L. Speyer, and J. Kim. A system theory approach to the feedback stabilization of infinitesimal and finite amplitude disturbances in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 332 :157–184, 1997.
- [14] C. D. Johnson. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(5) :635–644, December 1971.
- [15] S. Sastry and M. Bodson. *Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall, 1994.
- [16] W.-H Chen, D. J. Ballance, P. J. Gawthrop, J. J. Gribble, and J. O’Reilly. Nonlinear PID predictive controller. *IEE Proc-Control Theory Appl.*, 146(6) :603–611, 1999.
- [17] E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 34(4) :435–443, 1989.
- [18] S. Laizet and E. Lamballais. High-order compact schemes for incompressible flows : A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *J. Comput. Phys.*, 228(16) :5989–6015, 2009.