



**HAL**  
open science

## Comportement dynamique d'un système non linéaire sous excitation harmonique

Etienne Gourc, Guilhem Michon, Sébastien Seguy, Alain Berlioz

► **To cite this version:**

Etienne Gourc, Guilhem Michon, Sébastien Seguy, Alain Berlioz. Comportement dynamique d'un système non linéaire sous excitation harmonique. 20ème Congrès Français de Mécanique, 28 août - 2 septembre 2011, Besançon, France, Aug 2011, Besançon, France. hal-02187945

**HAL Id: hal-02187945**

**<https://hal.science/hal-02187945>**

Submitted on 1 Jul 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comportement dynamique d'un système non linéaire sous excitation harmonique

E. Gourc<sup>a</sup>, G. Michon<sup>b</sup>, S. Seguy<sup>a</sup>, A. Berlioz<sup>c</sup>

a. Université de Toulouse, INSA, ICA, 135 Avenue de Rangueil, F-31077 TOULOUSE

b. Université de Toulouse, ISAE, ICA, 10 Avenue Edouard Belin, F-31055 TOULOUSE

c. Université de Toulouse, UPS, ICA, 118 Route de Narbonne, F-31062 TOULOUSE

## Résumé :

*Cette étude s'intéresse au comportement dynamique d'un système non linéaire à 2ddl soumis à une excitation harmonique. Le système principal, linéaire, est couplé à un oscillateur non linéaire. Expérimentalement, la masse principale, excitée par un pot vibrant, est liée au bâti par l'intermédiaire d'une raideur linéaire. La non-linéarité est réalisée géométriquement, donc de nature cubique. De nombreux phénomènes sont mis en évidence : on y retrouve entre autres, des sauts dans la réponse en fréquence, ainsi que des bifurcations donnant lieu à l'apparition de régimes quasi-périodiques. Une étude analytique est conduite et comparée au comportement observé expérimentalement.*

## Abstract :

*This study dealt with the dynamical behavior of a nonlinear 2dof system under harmonic forcing. The main linear system is coupled to a purely cubic nonlinear oscillator. Experimentally, the main mass is directly excited via an electrodynamic shaker, and grounded with a linear spring. The nonlinear behavior is realized geometrically and is cubic in nature. Various nonlinear phenomenon are observed, such as jump, and bifurcation, leading to quasiperiodic regimes. An analytic treatment of the equation of motion is then compared to the experimentally obtained frequency response curve.*

**Mots clefs :** Dynamique non linéaire, Pompage énergétique, Complexification

## 1 Introduction

Le système le plus souvent utilisé pour réduire les vibrations des structures est l'étouffeur de vibration. Cependant, l'efficacité de ces systèmes est limitée à une bande fréquentielle relativement étroite, et des pics supplémentaires apparaissent autour de la fréquence à atténuer. Cette caractéristique pose problème notamment quand la fréquence d'excitation, ou la fréquence propre de la structure à atténuer n'est pas connue précisément. Dans des études récentes, il a été démontré que des systèmes composés d'un Oscillateur Linéaire (OL) couplé à un Oscillateur Non Linéaire (ONL) sont capables, sous l'effet d'un chargement transitoire, de transférer l'énergie de manière irréversible de l'OL vers l'ONL [1, 2]. Le principe à la source du transfert irréversible de l'énergie (aussi appelé pompage énergétique) est la capture de la résonance 1 : 1 [3]. Le pompage énergétique en régime instationnaire a également été vérifié expérimentalement [4, 5].

Les résultats intéressants en transitoire ont motivées l'étude de ce phénomène en régime établi [6, 7, 8]. Il a été démontré qu'au voisinage de la résonance principale, l'ONL peut répondre de manière quasi-périodique [9]. Ce type de réponse conduit à des échanges d'énergie entre l'OL et l'ONL, ce qui peut avoir un intérêt pratique pour la réduction des vibrations. L'objectif de ce papier est l'étude expérimentale et théorique de la réponse d'un système non linéaire à 2ddl en régime établi.

Dans la section suivante, le dispositif expérimental est présenté. La troisième section est dédiée au traitement analytique des équations du mouvement. Enfin dans la dernière section, les courbes de résonance expérimentale sont présentées et comparées aux résultats théoriques.

## 2 Présentation du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est présenté en Fig. 1. Le système est composé d'une masse principale (OL) liée au bâti par l'intermédiaire d'un ressort linéaire, et directement connectée au pot vibrant. Le système auxiliaire (ONL) est embarqué sur la masse principale, ces deux systèmes sont liés par l'intermédiaire d'une raideur essentiellement non linéaire. Les guidages sont assurés par des glissières à billes.

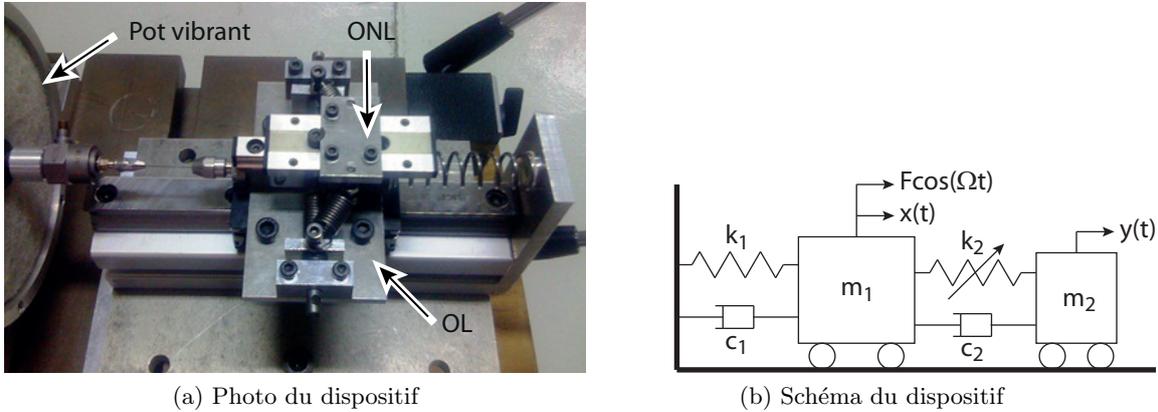


FIGURE 1 – Dispositif expérimental étudié

Comme on peut le voir sur la Fig. 1, l'OL reçoit directement la force électrodynamique du pot vibrant. Cette force est constante quelque soit la réponse du système, elle a donc été prise comme source d'excitation dans le modèle. La raideur ainsi que la masse embarquée du pot ont été prises en compte dans la modélisation au niveau de l'OL. La force d'excitation est obtenue à partir de la mesure du courant de commande délivré par l'amplificateur du pot.

Les déplacements des deux systèmes sont mesurés à l'aide de capteurs de déplacement laser. La raideur non linéaire a été implémentée géométriquement à l'aide de deux ressorts de traction qui sont libres de pivoter en leur base (voir Fig. 2). Comme le montre la relation force-déplacement (Eq. (1)) obtenue à l'aide d'une décomposition en série de Taylor, la force de rappel peut être considérée de nature cubique.

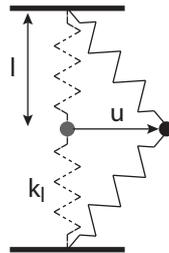


FIGURE 2 – Création de la non-linéarité cubique

$$f = 2k_l u + \frac{2u(P - k_l l)}{\sqrt{l^2 + u^2}} \approx \frac{2P}{l} u + \frac{k_l - P}{l^3} u^3 + O(u^5) \quad (1)$$

Où  $u$  représente le déplacement,  $k_l$  la raideur des ressorts linéaire,  $l$  la longueur initiale des ressorts, et  $P$ , la force de précharge. Sur le dispositif, l'entraxe de l'attache des ressorts est réglable afin de réduire la partie linéaire  $2P/l$  de l'Eq. (1) au minimum.

La courbe force-déplacement expérimentale est présentée en Fig. 3. La valeur de la raideur non linéaire utilisée dans la modélisation a été obtenue par une approximation cubique de la courbe expérimentale.

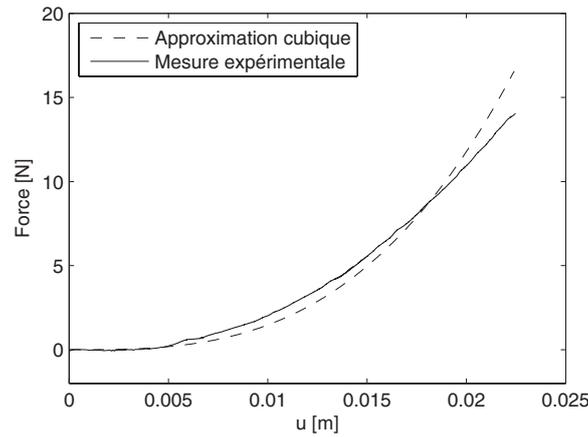


FIGURE 3 – Relation force-déplacement

Les paramètres identifiés sur le banc expérimental et utilisés pour les calculs sont donnés dans la Tab. 1.

$m_1$	0,761 kg	$m_2$	0,098 kg
$k_1$	5690 N/m	$k_2$	$1,473 * 10^6$ N/m <sup>3</sup>
$c_1$	2,4 Ns/m	$c_2$	0,1 Ns/m

TABLE 1 – Paramètres dynamiques du système

### 3 Etude théorique

Dans cette section, l'étude des points d'équilibres, et leur stabilité est développée. L'objectif est d'obtenir la réponse en fréquence du système au voisinage de la résonance principale pour expliquer les comportements rencontrés expérimentalement. D'après la Fig. 1, les équations du mouvement sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x + c_2(\dot{x} - \dot{y}) + k_2(x - y)^3 &= F \cos(\Omega t) \\
 m_2 \ddot{y} + c_2(\dot{y} - \dot{x}) + k_2(y - x)^3 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$x$  et  $y$  représentent respectivement le déplacement de l'OL et de l'ONL,  $m_1$  est la somme de la masse principale et de la partie mobile du pot vibrant,  $m_2$  est la masse du système auxiliaire,  $k_1$  représente la somme de la raideur du ressort linéaire et du pot vibrant.  $c_1$  et  $c_2$  sont respectivement l'amortissement de l'OL et de l'ONL,  $k_2$  est la raideur non-linéaire,  $F$  et  $\Omega$  sont l'amplitude et la fréquence d'excitation.

#### 3.1 Points fixes

Le traitement des équations du mouvement (2) suit la procédure proposée par Starosvetsky [10] basée sur la complexification [11]. Le changement de variable suivant est introduit :

$$v = x + \varepsilon y \quad w = x - y. \tag{3}$$

Le système d'Eq. (2) est réduit sous la forme adimensionnée suivante :

$$\ddot{v} + \frac{\varepsilon \lambda_1}{1 + \varepsilon} \dot{v} + \frac{\varepsilon^2 \lambda_1}{1 + \varepsilon} \dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1 + \varepsilon} v + \frac{\varepsilon \omega_1^2}{1 + \varepsilon} w = \varepsilon A \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{w} + \frac{\varepsilon\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{v} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{1+\varepsilon}\dot{w} + \frac{\omega_1^2}{1+\varepsilon}v + \frac{\varepsilon\omega_1^2}{1+\varepsilon}w + \lambda_2(1+\varepsilon)\dot{w} + \omega_2^2(1+\varepsilon)w^3 = \varepsilon A \cos(\Omega t), \quad (4)$$

avec  $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ ,  $\lambda_1 = \frac{c_1}{m_2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{c_2}{m_2}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$ ,  $A = \frac{F}{m_2}$ . Ce changement de variable correspond physiquement au passage en coordonnées barycentriques. Le comportement dynamique est ensuite décomposé en une partie à variation rapide et lente en introduisant les variables complexes suivantes :

$$\phi_1 e^{i\Omega t} = \dot{v} + i\Omega v \quad \phi_2 e^{i\Omega t} = \dot{w} + i\Omega w, \quad (5)$$

où  $\phi_1$  représente l'enveloppe des oscillations à la fréquence d'excitation  $e^{i\Omega t}$ . En introduisant le changement de variable (5) dans l'Eq. (4), et en gardant uniquement les termes en  $e^{i\Omega t}$ , les équations de modulation suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 + \frac{i\Omega\phi_1}{2} + \frac{\varepsilon\lambda_1\phi_1}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1\phi_2}{2(1+\varepsilon)} - \frac{i\omega_1^2\phi_1}{2\Omega(1+\varepsilon)} - \frac{i\varepsilon\omega_1^2\phi_2}{2\Omega(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon A}{2} &= 0 \\ \dot{\phi}_2 + \frac{i\Omega\phi_2}{2} + \frac{\varepsilon\lambda_1\phi_1}{2(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2\lambda_1\phi_2}{2(1+\varepsilon)} - \frac{i\omega_1^2\phi_1}{2\Omega(1+\varepsilon)} - \frac{i\varepsilon\omega_1^2\phi_2}{2\Omega(1+\varepsilon)} + \frac{\lambda_2(1+\varepsilon)\phi_2}{2} - \\ &\frac{3i\omega_2^2(1+\varepsilon)|\phi_2|^2\phi_2}{8\Omega^3} - \frac{\varepsilon A}{2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Les solutions périodiques du système correspondent aux points fixes de l'Eq. (6). Ces points fixes sont calculés en posant  $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0$ . Le système ainsi obtenu peut être exprimé sous forme polynomiale, et les points d'équilibre sont ensuite calculés pour chaque fréquence d'excitation. La réponse des deux oscillateurs est obtenue en effectuant un changement de variable inverse.

### 3.2 Stabilité des points fixes

Dans cette partie, la stabilité des points fixes ( $\phi_{1e}$  et  $\phi_{2e}$ ) est étudiée. Pour ce faire, des perturbations complexes sont introduites :

$$\phi_1 = \phi_{1e} + \delta_1 \quad \phi_2 = \phi_{2e} + \delta_2. \quad (7)$$

En remplaçant l'Eq. (7) dans l'Eq. (6), et en ne gardant que les termes linéaires en  $\delta_i$ , un système différentiel du premier ordre est obtenu. En écrivant ce système sous forme matricielle, la stabilité des points fixes est obtenue en observant les valeurs propres de cette matrice. Si toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative, le point fixe est stable. Si et seulement si une valeur propre est à partie réelle positive, le point fixe est instable. Si un point fixe possède une paire de valeurs propres purement imaginaires conjuguées, alors il s'agit d'un point de bifurcation de Hopf, qui conduit à une réponse quasi-périodique. Si les valeurs propres sont réelles en changeant du signe négatif à positif, le point fixe est un point selle.

La Fig. 5 montre une comparaison entre l'enveloppe des oscillations relatives de l'ONL obtenues en intégrant pas-à-pas les équations de modulation (6), et les équations du mouvement (2). Le point *a* (voir Fig. 5a) a été choisi dans une région stable, ce qui est confirmé par l'intégration pas-à-pas. Au contraire, le point *b* choisi après le point de bifurcation de Hopf montre clairement un comportement quasi-périodique.

## 4 Résultats expérimentaux et comparaisons

L'objectif des essais est d'obtenir la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) du système autour de la résonance de l'OL. Dans ce but, les déplacements du système linéaire et de l'ONL ont été enregistrés en faisant varier la fréquence d'excitation de façon croissante et décroissante de 5 à 20 Hz par pas de 0,5 Hz. Les essais présentés ont été effectués pour un niveau d'excitation de 2,7 N. Les valeurs

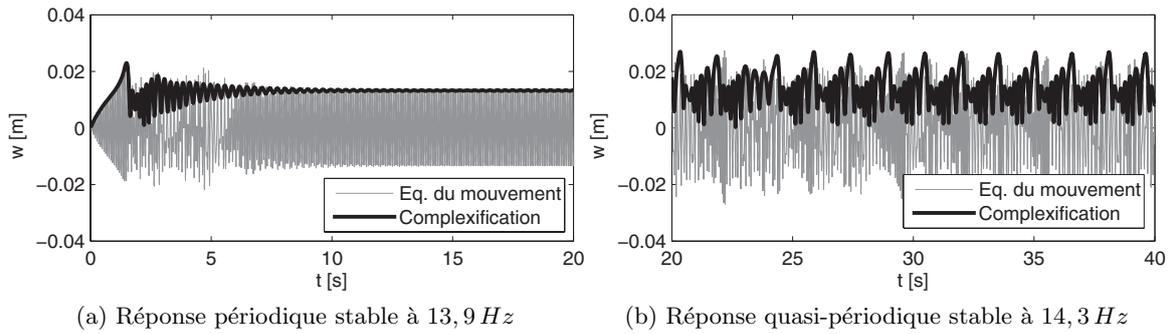


FIGURE 4 – Comparaison du déplacement relatif de l’ONL obtenu avec les équations de modulations et celles du mouvement ( $F = 2,7 N$ )

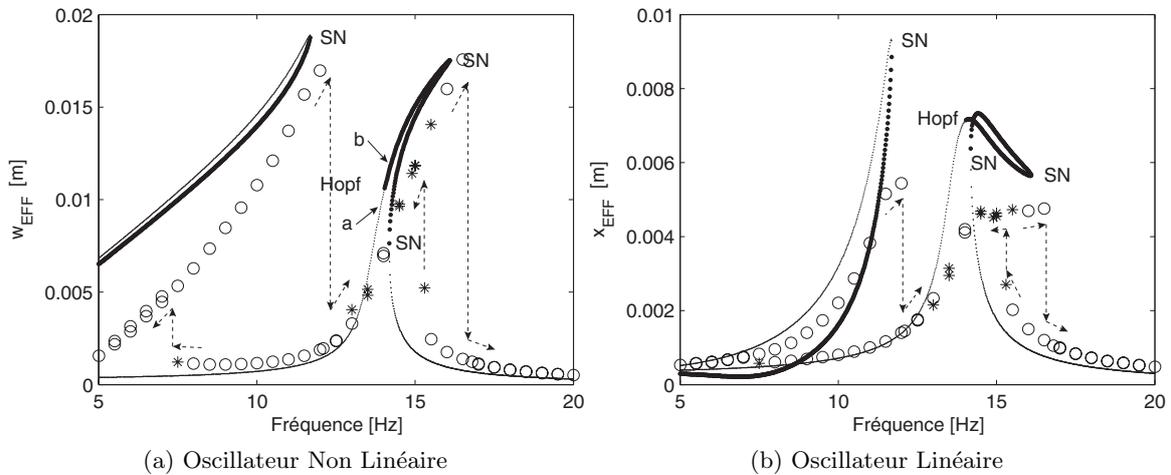


FIGURE 5 – FRF analytiques et expérimentales pour  $F = 2,7 N$  (“o” : régime périodique expérimental, “\*” : régime quasi-périodique expérimental, traits fins : points fixe stable, traits épais : point fixe instable)

efficaces du déplacement absolu de l’OL ( $x$ ), et du déplacement relatif de l’ONL ( $w$ ) sont affichées en fonction de la fréquence d’excitation.

Les Fig. 5a et 5b présentent les FRFs pour l’ONL et l’OL respectivement. Les lignes en traits fins correspondent aux points fixes stables, et en traits épais à ceux instables. Les cercles correspondent aux solutions périodiques expérimentales, les étoiles à celles quasi-périodiques, et les flèches indiquent les sauts et leurs directions. Une bonne corrélation entre les courbes théoriques et expérimentales est observée. Au début ( $5 Hz$ ), lorsque la fréquence d’excitation augmente, la réponse du système prend place sur la branche supérieure stable avant de sauter sur la branche principale à  $12,5 Hz$ . L’amplitude des oscillations augmente, puis des régimes quasi-périodiques s’installent comme montrés sur la Fig. 6. En effet, il s’agit clairement d’une réponse quasi-périodique qui correspond bien avec la bifurcation de Hopf prédite par l’étude de stabilité. Les fréquences auxquelles les sauts s’effectuent correspondent à celles prédites dans l’étude théorique.

## 5 Conclusions

L’objectif de ce papier était l’étude du comportement d’un système non linéaire sous excitation harmonique, autour de la résonance principale. Ces genres de systèmes font apparaître des comportements dynamiques complexes, tels que des sauts et des bifurcations conduisant à des régimes quasi-périodiques.

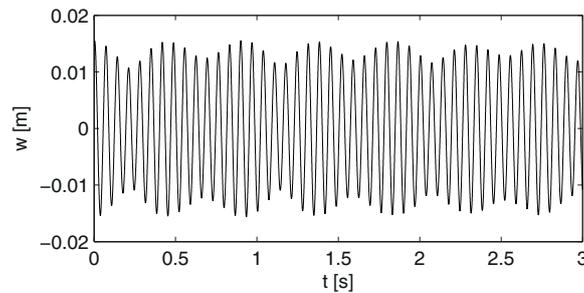


FIGURE 6 – Mesure temporelle d’un régime quasi-périodique ( $F = 2,7 N$   $f = 14,5 Hz$ )

Les régimes modulés sont d’un grand intérêt, car ils conduisent à des échanges d’énergie entre l’OL et l’ONL. Le comportement de ces systèmes peut être bien expliqué par la technique de complexification, même si des différences au niveau des amplitudes sont observées. Celles-ci peuvent être attribuées à des incertitudes dans l’identification des paramètres. Les futurs travaux vont s’attacher à utiliser la décomposition en échelle multiple afin d’expliquer plus précisément les régimes rencontrés.

## Références

- [1] E. Gourdon, N.A. Alexander, C.A. Taylor, C.H. Lamarque, et S. Pernot. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5) :522 – 551, 2007.
- [2] G. Kerschen, Y.S. Lee, A.F. Vakakis, D.M. McFarland, et L.A. Bergman. Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(2) :648–679, 2005.
- [3] O.V. Gendelman, L.I. Manevitch, A.F. Vakakis, et R. M’Closkey. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : Part i—dynamics of the underlying hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 68(1) :34–41, 2001.
- [4] E. Gourdon, N.A. Alexander, C.A. Taylor, C.H. Lamarque, et S. Pernot. Nonlinear energy pumping under transient forcing with strongly nonlinear coupling : Theoretical and experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5) :522 – 551, 2007.
- [5] D.M. McFarland, L.A. Bergman, et A.F. Vakakis. Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(6) :891 – 899, 2005.
- [6] A. Berlioz, R. Dufour, et S.C. Sinha. Bifurcation in a nonlinear autoparametric system using experimental and numerical investigations. *Nonlinear Dynamics*, 23 :175–187, 2000.
- [7] N.A. Alexander et F. Schilder. Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2) :445 – 462, 2009.
- [8] X. Jiang, D.M. McFarland, L.A. Bergman, et A.F. Vakakis. Steady state passive nonlinear energy pumping in coupled oscillators : Theoretical and experimental results. *Nonlinear Dynamics*, 33 :87–102, 2003.
- [9] O.V. Gendelman, E. Gourdon, et C.H. Lamarque. Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 294(4-5) :651 – 662, 2006.
- [10] Y. Starosvetsky et O.V. Gendelman. Response regimes of linear oscillator coupled to nonlinear energy sink with harmonic forcing and frequency detuning. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :746 – 765, 2008.
- [11] L.I. Manevitch. The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables. *Nonlinear Dynamics*, 25 :95–109, 2001.