

随机环境中几种类型种群的灭绝

C. R. Biol. 341 (2018) 145–151
<https://doi.org/10.1016/j.crvi.2018.01.009>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
复杂系统的数学和计算机建模单元
Les Cordeliers, 法国巴黎
nicolas.bacaer@ird.fr

摘要

我们研究了随机环境中连续时间内几种类型分支过程的灭绝率。在一个受流行病模型启发的特定示例中的数值计算为该灭绝速率提出了一个明确的公式，但仅针对某些参数值。

1. 简介

我们假设环境（记为 k ）根据马尔可夫链在连续时间内在有限数量的状态 $1, \dots, K$ 之间随机振荡。对于 $k \neq h$ ，环境从 h 切换到 k 的概率为 $Q_{k,h} dt$ 在每个无穷小时间间隔 dt 内， $Q_{k,h} \geq 0$ 。我们定义矩阵 $\mathbf{Q} = (Q_{k,h})$ 与

$$Q_{h,h} = - \sum_{k \neq h} Q_{k,h} \quad \forall h.$$

它是链的无穷小生成器的转置矩阵（Sericola, 2013）。

考虑可能具有以下几种类型的个人群体： $1, 2, \dots, J$ 。该种群在我们刚刚描述的随机环境中演化。假设当时人口中至少有一个人 $t = 0$ 。环境 k 中类型为 i 的个体有概率 $c_i^{(k)} dt$ 在每个无穷小时间间隔 dt 内经历一些事件， $c_i^{(k)} > 0$ 。如果事件发生，我们会代替这个人 n_j 型的个人 i 为 $1 \leq j \leq J$ 的概率 $\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J)$ 。换句话说，在环境的两次跳跃之间，每个人都有个随机的“寿命”，该寿命遵循参数的指数定律 $c_i^{(k)}$ 。在这段时间结束时，复制定律由 $(\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J))$ ，独立于其他个人。因此，这是一个连续不断地与多种类型联系的过程（Méléard, 2016年）。

我们定义 $p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J)$ ，人口构成的概率 n_i 型的个人 $1 \leq i \leq J$ 和环境是 k 在时间 t 。我们安排 (k, n_1, \dots, n_J) 根据个人总数按组划分 $n = n_1 + \dots + n_J$ ，以便具有无限列向量 $\mathbf{p}(t)$ 。我们在第2节中观察到 $\mathbf{p}(t)$ 是微分方程线性系统的解 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Z} \mathbf{p}(t)$ 。 \mathbf{Z} 是形式的无限矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,1} & \mathbf{Z}_{n,2} & \ddots & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

和块 $\mathbf{Z}_{m,n}$ 本身就是大小不同的矩阵。我们在此矩阵的结构上看到，当一个人经历一个事件时，总人数只能减少一个单位，但可以增加几个单位。此外，拥有零个人的国家类别令人着迷：它对应于人口的灭绝。在以下情况中，我们将自己局限于人口几乎绝迹的亚临界情况。与离散时间模型有关的结果（Athreya和Karlin, 1971）使得确定连续模型的灭绝条件成为可能。然后的目的是试图确定人口灭绝的速度。

文章（Dyakonova, 2008；Dyakonova, 2013；Vatutin和Wachtel, 2017）在一个类似的模型中但在离散的时间中计算了这种灭绝速率，其中连续的环境是随机的，独立的并且分布均匀。前两个参考文献给出了一个简单的灭绝速率公式，但在不同环境下具有相当严格的条件（平均矩阵必须具有相同的特征向量）。（Vatutin和Wachtel, 2017年）给出了一个不太明确的公式，但具有更普遍的假设，而在这种情况下仍然保持“强烈次临界”。

消光率取决于从 (1) 中提取的无限子矩阵的光谱特性 $\mathbf{Z}_{1,1}$ 在其左上角。我们定义

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\sum_{n_1, \dots, n_J \geq 0} n_i \pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J) - \delta_{i,j} \right), \quad (2)$$

与 $\delta_{i,j} = 1$ 如果 $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ 如果 $i \neq j$ 。我们定义

- $\mathbf{M}^{(k)}$: 矩阵 $(M_{i,j}^{(k)})$
- $\text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)})$: 对角线块矩阵 $\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}$ 在对角线上
- ω_1 : 频谱范围, 即矩阵最大实部的特征值

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}).$$

\mathbf{I} 是顺序的单位矩阵, 和 $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$ 是两个矩阵的张量积。

第2节中的计算表明 ω_1 某些参数值的人口灭绝率。但是, 这仍然是一个猜测。

在第3节中, 我们首先考虑几种类型的出生和死亡过程的特殊情况, 然后将自己限制在只有两种类型的个人的人群中。我们提供了一个示例, 其中我们比较了 ω_1 与极限 α_1 如果 $n \rightarrow \infty$ (1) 的有限子矩阵的谱界为 $\mathbf{Z}_{1,1}$ 在它的左上角 $\mathbf{Z}_{n,n}$ 在其右下角。数值结果表明, 对于某些参数值, 这两个数字是相等的, 但并非对所有参数都相等, 就像只有一种类型的个体的情况一样 (Bacaer, 2017c)。我们也猜想极限 α_1 是人口灭绝率, 例如定义为极限

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J).$$

根据 (Collet等人, 2013, 第4.5节), 此限制 (称为Kingman参数) 不依赖于 k , 也不依赖于 (n_1, \dots, n_J) 规定 $n_1 + \dots + n_J \geq 1$, 也没有初始条件 (环境和不同类型的个体的数量)。

2. 一般情况

2.1 微分方程组

记号:

- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$: J 分量等于0的向量。
- $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$ 意思 $n_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\mathbf{u}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$: 在位置 j 中具有1的向量。

该模型假设暗示

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(k)}(t, \mathbf{n})}{dt} = & - \sum_{j=1}^J n_j c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} p^{(h)}(t, \mathbf{n}) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}} (r_j + 1) c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) \pi_j^{(k)}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_J) \geq \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_J) \geq \mathbf{0}$ 是正整数或零整数的向量。确实, 如果环境 k 在时间 t 处有 \mathbf{n} 个个体, 那么在无限小时间 dt 的每个时间间隔内都有一个概率 $n_j c_j^{(k)} dt$ 该事件之一发生 n_j 类型 j 的个体, 还有一个概率 $-Q_{k,k} dt$ 环境切换到另一个状态。另一方面, 如果在 $h \neq k$ 的环境中有 \mathbf{n} 个个体, 则存在概率 $Q_{k,h} dt$ 环境切换到状态 k 。最后, 如果有 $\mathbf{r} + \mathbf{u}_j$ 在环境 k 中的个人, 事件发生在其中一个 $(r_j + 1)$ 键入 j 个人的概率 $(r_j + 1) c_j^{(k)} dt$ 我们找到了它的位置 \mathbf{s} 不同类型的个体具有概率 $\pi_j^{(k)}(\mathbf{s})$ 。如果我们有 $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$, 我们最终 n_i 我所有类型为 i 的个人。系统 (3) 具有结构 (1)。

2.2 偏微分方程组

我们定义 $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ 和 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$ 。我们定义生成函数

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J},$$

在哪里 x_i 是复数和索引 n_i 整数。因为

$$\sum_k \sum_{n_i \geq 0} p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J) = 1,$$

这些系列的收敛域包括集合 $\{(x_1, \dots, x_J); |x_i| < 1 \forall i\}$ (Cartan, 1961, 第四章)。我们定义

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \pi_j^{(k)}(\mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

我们有 $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ 。然后我们有

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r} \geq 0} (r_j + 1) p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) x_1^{r_1} \dots x_J^{r_J}.$$

和

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

通过系统 (3), 我们获得

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) - x_j) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

它是 (Bacaër, 2017c) 中系统 (3) 的推广, 对应于 $J = 1$ 。

2.3 均值向量

我们定义平均值

$$E_i^{(k)}(t) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(t, \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} n_i p^{(k)}(t, \mathbf{n}).$$

用 $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$, 我们从等式 (4) 推导, 取其相对于 x_i 然后服用 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$,

$$\frac{dE_i^{(k)}}{dt} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} E_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} E_j^{(k)},$$

与

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) - \delta_{i,j} \right) \quad (5)$$

就像在简介中一样, 我们假设 $M_{i,j}^{(k)} < +\infty$ 所有索引值。是 (Bacaër, 2017c) 的等式 (4) 的推广, 对应于 $J = 1$ 。我们定义 \mathbf{E} , 列向量

$$(E_1^{(1)}, \dots, E_J^{(1)}, \dots, E_1^{(K)}, \dots, E_J^{(K)}).$$

然后我们有 $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{\Omega}^{[1]} \mathbf{E}$ 与

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \begin{pmatrix} Q_{1,1} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(1)} & Q_{1,2} \mathbf{I} & \dots & Q_{1,K} \mathbf{I} \\ Q_{2,1} \mathbf{I} & Q_{2,2} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{K-1,K} \mathbf{I} \\ Q_{K,1} \mathbf{I} & \dots & Q_{K,K-1} \mathbf{I} & Q_{K,K} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(K)} \end{pmatrix}$$

如简介中所述。我们记得 ω_1 是该矩阵的光谱范围, 即最大实部的特征值。因为 $Q_{k,h} \geq 0 \forall k \neq h$ 和 $M_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall i \neq j$, 我们确实注意到 $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ 是一个矩阵, 其对角线之外的系数都 ≥ 0 。根据 Perron 和 Frobenius 定理的推论, $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ 具有主导的实际特征值, 也就是说, 大于所有其他特征值的实部。

为了简化, 我们假设矩阵 \mathbf{Q} 是不可约的: $\forall k \neq h, \exists (k_0, \dots, k_N), k_0 = k, k_N = h, Q_{k_n, k_{n+1}} > 0 \forall n$ 。我们还假设矩阵 $\mathbf{M}^{(k)}$ 都是不可约的。所以矩阵 $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ 也是不可约的。用 $\mathbf{E}(0) \neq 0$, 我们有

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{E}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_1$$

和 ω_1 是期望向量的增长率或下降率 $\mathbf{E}(t)$ 。

2.4 亚临界情况

让我们考虑由马尔可夫链在矩阵 \mathbf{Q} 的连续时间内生成的固定环境序列：环境是第一个 k_0 对于 $t_0 < t < t_1$ 与 $t_0 = 0$ ，然后 k_1 对于 $t_1 < t < t_2$ 等在环境的两次飞跃之间，种群根据连续的时间连接过程在恒定的环境中演化，并具有几种类型。因此，对于我们的连续时间过程，我们可以将离散时间过程与仅考虑瞬时状态的总体状态相关联 t_n 环境在哪里变化。这两个过程同时是超临界，临界或亚临界的。

每种类型的人口的期望向量， $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_J(t))$ 知道环境是 k_n 对于 $t_n < t < t_{n+1}$ ，是 $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{M}^{(k_n)} \mathbf{e}(t)$ 在此时间间隔内。用 $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ ，我们有 $\mathbf{e}(t_{n+1}) = \exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \mathbf{e}(t_n)$ 。根据 (Athreya 和 Karlin, 1971 年, 第 4 节)，以下内容

$$\frac{1}{n} \log \|\exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \cdots \exp(\tau_0 \mathbf{M}^{(k_0)})\| \quad (6)$$

几乎肯定会收敛到极限 λ_1 独立于特定的环境套件。此外，在亚临界情况下，离散时间过程中的种群几乎肯定会消失， $\lambda_1 < 0$ 而且如果 $\lambda_1 > 0$ 。因此，在我们的初始模型中，如果 $\lambda_1 < 0$ 。如果 T 是极限 t_n/n 如果 $n \rightarrow +\infty$ ，我们注意到 λ_1/T 是 Lyapounoff 的微分系统指数 $\mathbf{e}(t)$ 。

最后，请注意光谱范围 ω_1 上一节的内容可以是正面的 λ_1 是负面的。当只有一种类型的个人时，这已经成为可能 (Bacaër 和 Ed-Darraz, 2014 年)。

2.5 常规情况下的特征值

对于系统 (4)，我们正在寻找解决方案

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = e^{\omega t} F^{(k)}(\mathbf{x})$$

具有功能 $F^{(k)}(\mathbf{x})$ 并非全为零。因此，我们有

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(\mathbf{x}) - x_j) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

服用 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ，我们看到

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{1}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{1}).$$

有两种可能的情况：

- $F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0 \forall k$,
- ω 是矩阵 \mathbf{Q} 的特征值。

如果功能 $F^{(k)}(\mathbf{x})$ 在...附近进行分析 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ (这是“常规情况”)，那么我们就如 2.3 节所示，通过推导关于 x_i 并采取 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$

$$\omega \phi_i^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} \phi_j^{(k)},$$

与 $\phi_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1})$ 。因此，还有两种可能的情况：

- $\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = 0 \forall i, \forall k$,
- ω 是的特征值 $\Omega^{[1]}$ 。

我们定义

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_n}}(\mathbf{1}).$$

我们选择 $n \geq 2$ 。我们认为 $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(k)} = 0 \forall 1 \leq k \leq K, 1 \leq m < n$ 和 $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, J\}^m$ 。我们推导关于 x_{i_1}, \dots, x_{i_n} 然后我们 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 。由于对阶数 $< n$ 的偏导数的假设，并且 $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ ，仅保留以下条款：

$$\omega \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \sum_{j=1}^J \left[M_{i_1, j}^{(k)} \phi_{j, i_2, \dots, i_n}^{(k)} + \dots + M_{i_n, j}^{(k)} \phi_{i_1, i_2, \dots, j}^{(k)} \right] + \sum_{h=1}^K Q_{k, h} \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(h)} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, 1 \leq k \leq K. \quad (8)$$

因此，有两种可能的情况：

- $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = 0 \forall i_1, \dots, i_n, \forall k$,
- ω 是方阵的特征值 $\Omega^{[n]}$ 顺序 $K \times J^n$ 由线性方程 (8) 定义。

总而言之，我们得出结论，如果本征函数 $F^{(k)}(\mathbf{x})$ 与特征值 ω 相关的是在 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ，则 ω 是矩阵 \mathbf{Q} 的特征值，否则 ω 是矩阵的特征值 $\Omega^{[n]}$ 一定 $n \geq 1$ ，事实上，如果不是这种情况下，我们将有

$$F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0, \quad \phi_i^{(k)} = 0 \quad \forall i, \forall k.$$

根据以上内容，我们可以归纳为 $\phi_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$ 对于具有的所有索引 $n \geq 2$ 。根据分析扩展的原理 (Cartan, 1961, 第四章)， $F(x)$ 等于零，这是不可能的。

如果 $J = 1$ ，我们写得更简单

$$\psi_n^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_1^n}(\mathbf{1}), \quad M^{(k)} = c_1^{(k)} \left(\frac{\partial g_1^{(k)}}{\partial x_1}(\mathbf{1}) - 1 \right).$$

然后写等式 (8)

$$\omega \psi_n^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k, h} \psi_n^{(h)} + n M^{(k)} \psi_n^{(k)}.$$

我们推断 ω 是矩阵的特征值 \mathbf{Q} 或矩阵 $\mathbf{Q} + n \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$ 与 $n \geq 1$ 。(Bacaër, 2017a) 的第4.2节已经注意到这种特殊情况，即一种类型的出生和死亡的线性过程。

2.6 截断的矩阵

我们定义 \mathbf{Y}_n ，矩阵 (1) 的有限子矩阵具有 $\mathbf{Z}_{1,1}$ 在它的左上角 $\mathbf{Z}_{n,n}$ 在其右下角。该矩阵的光谱界使得 $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 0$ 。与 (Bacaër, 2017a) 的命题2中一样，我们定义 $\mathbf{1}$ 线向量 $(1, \dots, 1)$ 合适的大小。然后我们有

$$\mathbf{1} \mathbf{Y}_n \leq \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}.$$

所以我们有 $\mu_n \leq 0$ (例如参见 (Nkague Nkamba, 2012, 定理30.1))。有列向量 $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ 与

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mu_n \mathbf{v}_n$$

和 $\mathbf{v}_n \geq \mathbf{0}$ 。我们定义 \mathbf{w}_n 列向量 $(\mathbf{v}_n, \mathbf{0})$ 。然后我们有

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{w}_n \geq \mu_n \mathbf{w}_n$$

因为矩阵的系数 $\mathbf{Z}_{n+1,1}, \dots, \mathbf{Z}_{n+1,n}$ 是 ≥ 0 。我们推断 $\mu_{n+1} \geq \mu_n$ 来自 (Nkague Nkamba, 2012, 定理30.3)。由此也可以得出极限 α_1 的 μ_n 如果 $n \rightarrow \infty$ 存在。

3. 特殊情况

3.1 出生和死亡过程

对于每个环境 k ，我们给自己 (如 Bacaër, 2017b) 中三个相同大小的矩阵：出生矩阵 $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{i,j}^{(k)})$ 带有系数 ≥ 0 ，传输矩阵 $\mathbf{T}^{(k)} = (T_{i,j}^{(k)})$ 与

$$\sum_i T_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j, \quad T_{i,j}^{(k)} \leq 0 \quad \forall i \neq j,$$

和对角输出矩阵 $\mathbf{S}^{(k)} = (S_{i,j}^{(k)})$ 与 $S_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall j$ 。换句话说，在每个无穷小时间间隔 dt 内，环境 k 中每个类型 j 的个体

- 可能性 $A_{i,j}^{(k)} dt$ 要生出一种新的我个人 ,
- 可能性 $-T_{i,j}^{(k)} dt$ 变换成类型的单个 我与我 $\neq j$,
- 可能性 $S_{j,j}^{(k)} dt$ 死亡或离开人口。

因此, 我们有

$$c_j^{(k)} = \sum_i A_{i,j}^{(k)} + T_{j,j}^{(k)} + S_{j,j}^{(k)}$$

和

$$g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) = \left[\sum_i A_{i,j}^{(k)} x_i x_j + S_{j,j}^{(k)} - \sum_{i \neq j} T_{i,j}^{(k)} x_i \right] / c_j^{(k)}.$$

我们定义 $B_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k)} + S_{i,j}^{(k)}$ 。然后写出等式 (4)

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J [x_i - 1] [A_{i,j}^{(k)} x_j - B_{i,j}^{(k)}] \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

如果是随机环境, 则是 (Bacaërand Ait Dads, 2014) 第2节中提出的方程的推广; 如果是随机环境, 则是 (Bacaër, 2017a) 的方程 (5) 的推广。几种类型。通过将 $i=j$ 的情况与 $i \neq j$ 的情况区分开来, 我们很容易地表明 $M_{i,j}^{(k)}$ 等式 (5) 定义的 $M_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - B_{i,j}^{(k)}$ 。人口是次临界的, 如果 $\lambda_1 < 0$ 。

3.2 两种类型的个人

以只有 $J=2$ 种类型的生与死过程为例, 这使得可以轻松地排序人口的不同状态。让我们介绍一下对角矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_j &= \text{diag}(c_j^{(1)}, \dots, c_j^{(K)}), & \mathbf{A}_{i,j} &= \text{diag}(A_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(K)}), \\ \mathbf{T}_{i,j} &= \text{diag}(T_{i,j}^{(1)}, \dots, T_{i,j}^{(K)}), & \mathbf{S}_{j,j} &= \text{diag}(S_{j,j}^{(1)}, \dots, S_{j,j}^{(K)}). \end{aligned}$$

我们安排功能 $p^{(k)}(t, n_1, n_2)$ 根据总数 $n_1 + n_2$ 的数量, 并且此数量是固定的, 首先是1类个体的数量, 然后是环境。以此顺序, 我们考虑无限列向量

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (p^{(1)}(t, 0, 0), \dots, p^{(K)}(t, 0, 0), \\ & p^{(1)}(t, 1, 0), \dots, p^{(K)}(t, 1, 0), \\ & p^{(1)}(t, 0, 1), \dots, p^{(K)}(t, 0, 1), \\ & p^{(1)}(t, 2, 0), \dots, p^{(K)}(t, 2, 0), \\ & p^{(1)}(t, 1, 1), \dots, p^{(K)}(t, 1, 1), \\ & p^{(1)}(t, 0, 2), \dots, p^{(K)}(t, 0, 2), \dots). \end{aligned}$$

然后系统 (3) 也被写成 $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{Z}\mathbf{p}(t)$ 。

- \mathbf{Z} 是由块组成的无限对角矩阵

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,n-1} & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right)$$

零是适当大小的零矩阵;

- $\mathbf{Z}_{n,n}$ 是方阵, 其大小为 $(n+1)K$, 由块组成的三对角线, 描述了当个体总数为 n 且不变时 (从环境或个体转移到两种其他类型的个体) 时的过渡

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_1 & -\mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -n\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-1)\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & -2\mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(n-1)\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-2)\mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n\mathbf{T}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

和 $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{Q}$

- $\mathbf{Z}_{n-1,n}$ 是具有的矩形矩阵 nK 线和 $(n+1)K$ 仅有两个非零块带的列，它描述了总数从 n 在 $n-1$ （死亡或出院）

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{S}_{1,1} & 2\mathbf{S}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{1,1} & n\mathbf{S}_{2,2} \end{pmatrix};$$

- $\mathbf{Z}_{n+1,n}$ 是具有的矩形矩阵 $(n+2)K$ 线和 $(n+1)K$ 列，还带有两个非零的块带，它们描述了总数从 n 在 $n+1$ （出生）

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ n\mathbf{A}_{2,1} & (n-1)\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{A}_{1,1} + (n-1)\mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{A}_{2,1} + (n-1)\mathbf{A}_{2,2} & n\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & n\mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}$$

3.3 范例

作为具有两种类型个体的过程的示例，请考虑线性流行病模型（Bacaër和Ait Dads, 2014）的情况，其中1型个体被感染但尚未具有传染性（即在潜伏期）和2型感染者。亚临界线性情况例如对应于疾病被输入到不利于其传播的随机环境中的情况。然后我们有

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

参数 τ 是潜伏期的人被传染的速率，与环境无关。参数 $\beta^{(k)}$ 是传染病在流行开始时感染新人的比率；由于气候对传播概率的影响，它取决于环境。 γ 参数是传染病的治愈率。因此，我们有

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\tau & \beta^{(k)} \\ \tau & -\gamma \end{pmatrix}.$$

我们还假设只有 $K=2$ 个不同的环境，并且

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

系统 (9) 已编写

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = q_2 f^{(2)} - q_1 f^{(1)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + \left[\beta^{(1)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1) \right] \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}$$

和

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = q_1 f^{(1)} - q_2 f^{(2)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_1} + \left[\beta^{(2)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1) \right] \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2}.$$

我们为麻疹选择了以下数值，用于（Bacaër, Ait Dads, 2014）： $1/\tau = 8$ 天， $1/\gamma = 5$ 天。对于 $\beta^{(k)}$ ，我们认为 $\beta^{(1)} = 4\epsilon$ 每月（每月30天），并且 $\beta^{(2)} = 8\epsilon$ 每月。在（Bacaër和Ait Dads, 2014年）中，系数 β 每月在4至8之间周期性变化，与流行曲线保持良好拟合。参数 ϵ 旨在改变。最后假设 $q_1 = q_2 = 1$ ，因此在这两种状态下，环境平均要花费一半的时间。

通过利用三对角块结构的迭代方法 (Ciarlet, 2006), 我们估计了光谱界 μ_n 有限子矩阵的 Y_n 的 Z 如果 n 依次为25、50、100和200.这个正方形子矩阵的大小

$$2K + 3K + \dots + (n + 1)K = n(n + 3)K/2.$$

我们还估算了关键参数 λ_1 使用例如环境中的5000个跃点链接到Lyapounov的指数。结果如图1所示。请注意, 如果环境恒定, 则该过程对于 $\beta < \gamma$ 。

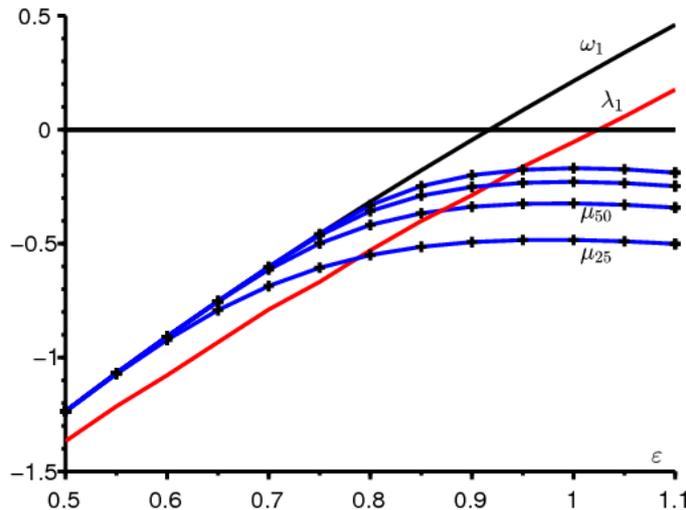


图1.关键参数 λ_1 (红色的), ω_1 (黑色) 和 μ_n (蓝色为带有十字的 $n \in \{25, 50, 100, 200\}$ 从下到上) 作为 ε 的函数。灭绝率 α_1 是极限 μ_n 如果 $n \rightarrow \infty$ 。

该图表明我们有 $\alpha_1 = \omega_1$ 如果 ε 很小, 尤其是只要 $\beta^{(1)} < \gamma$ 和 $\beta^{(2)} < \gamma$, 换一种说法 $\frac{8\varepsilon}{30} < \frac{1}{5}$, 也就是说 $\varepsilon < 0.75$ 。但 $\alpha_1 < \omega_1$ 在一个地方 λ_1 严格来说仍然是负面的。不幸的是, 我们无法确定 α_1 更明确地。预计 $\alpha_1 = 0$ 如果 $\lambda_1 = 0$ 。请记住, 只有一种类型的个人 ($J = 1$), 矩阵 $M^{(k)}$ 实际上是标量数字 $M^{(k)}$ (Bacaër, 2017c) 在这种情况下倾向于表明

$$\alpha_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 1} s(\mathbf{Q} + \theta \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})).$$

$s(\cdot)$ 表示矩阵的光谱范围。当有几种类型的个人时, 该公式的类似物仍有待确定。(Dyakonova, 2008; Dyakonova, 2013; Vatutin and Wachtel, 2017) 在离散时间模型中也没有做到这一点。无疑更好地了解了功能的行为 $F^{(k)}(\mathbf{x})$ 在奇点附近 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 在系统 (7) 中允许进度。

书目参考

- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I. Extinction probabilities, Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- N. Bacaër (2017a) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. 75, 85–108.
- N. Bacaër (2017b) Sur la probabilité d’extinction dans des modèles mathématiques d’épidémies, C. R. Biol. 340, 453–455.
- N. Bacaër (2017c) Sur la vitesse d’extinction d’une population dans un environnement aléatoire, C. R. Biol. 340, 259–263.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014) Sur les processus linéaires de naissance et de mort dans un environnement aléatoire, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266287>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d’extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>.
- H. Cartan (1961) Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris.
- P. G. Ciarlet (2006) Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation, Dunod, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi-stationary Distributions, Springer, Berlin.
- E. E. Dyakonova (2008) On subcritical multi-type branching process in random environment, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AI, 397–404.
- E. E. Dyakonova (2013) Multitype subcritical branching processes in a random environment, Proc. Steklov Inst. Math. 282, 80–89.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer/SMIAI, Berlin.

- L. Nkague Nkamba (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle, Thèse de l'Université de Lorraine.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- V. Vatutin, V. Wachtel (2017) Subcritical multitype branching process in random environment, <https://arxiv.org/abs/1711.07453>