

# На вымирание популяций с несколькими типами в случайной среде

C. R. Biol. 341 (2018) 145–151  
<https://doi.org/10.1016/j.crvi.2018.01.009>

Nicolas Bacaer

Institut de recherche pour le développement  
 Отдел математического и компьютерного моделирования сложных систем  
 Les Cordeliers, Париж, Франция  
 nicolas.bacaer@ird.fr

## резюме

Мы изучаем скорость исчезновения ветвящегося процесса с несколькими типами в непрерывном времени в случайной среде. Численные расчеты в конкретном примере, основанном на эпидемической модели, предлагают четкую формулу для этой скорости исчезновения, но только для определенных значений параметров.

## 1. Введение

Предположим, что среда, обозначаемая  $k$ , случайно колеблется между конечным числом состояний  $1, \dots, K$  в соответствии с цепью Маркова за непрерывное время. Для  $k \neq h$  вероятность того, что среда переключится с  $h$  на  $k$ , равна  $Q_{k,h} dt$  в течение каждого бесконечно малого промежутка времени  $dt$ , с  $Q_{k,h} \geq 0$ . Определим матрицу  $\mathbf{Q} = (Q_{k,h})$  с

$$Q_{h,h} = - \sum_{k \neq h} Q_{k,h} \quad \forall h.$$

Это транспонированная матрица бесконечно малого генератора цепочки (Sericola, 2013).

Рассмотрим популяцию особей, которые могут быть нескольких типов:  $1, 2, \dots, J$ . Эта популяция развивается в случайной среде, которую мы только что описали. Предполагается, что на момент  $t = 0$ , Индивидуум типа  $i$  в среде  $k$  имеет вероятность  $c_i^{(k)} dt$  пройти какое-то событие в течение каждого бесконечно малого промежутка времени  $dt$ , с  $c_i^{(k)} > 0$ . Если событие происходит, мы находим вместо этого человека  $n_j$  особи типа  $j$  для  $1 \leq j \leq J$  с вероятностью  $\pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J)$ . Другими словами, между двумя прыжками в среде каждый индивид имеет случайное «время жизни», которое следует экспоненциальному закону параметра  $c_i^{(k)}$ . В конце этого времени закон воспроизводства  $(\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J))$  независимо от других лиц. Таким образом, это процесс ветвления с несколькими типами в непрерывном времени (Méléard, 2016).

Мы определяем  $p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J)$  вероятность того, что население состоит из  $n_i$  особи типа  $i$  для  $1 \leq i \leq J$  и того, что среда является  $k$  в момент времени  $t$ . Устраиваем штаты  $(k, n_1, \dots, n_J)$  системы по группам в соответствии с общим числом лиц  $n = n_1 + \dots + n_J$ , чтобы иметь бесконечный вектор столбца  $\mathbf{p}(t)$ . Мы наблюдаем в разделе 2, что  $\mathbf{p}(t)$  является решением линейной системы дифференциальных уравнений  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Z} \mathbf{p}(t)$ ,  $\mathbf{Z}$  является бесконечной матрицей вида

$$\left( \begin{array}{c|cccc} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,1} & \mathbf{Z}_{n,2} & \ddots & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \quad (1)$$

и блоки  $\mathbf{Z}_{m,n}$  сами являются матрицами разных размеров. Мы видим на структуре этой матрицы, что, когда человек подвергается событию, общее количество людей может уменьшиться только на одну единицу, но может увеличиться на несколько единиц. Кроме того, поглощает класс государств с нулевыми индивидами: он соответствует вымиранию населения. Мы ограничимся в следующем докритическом случае, когда население почти наверняка вымирает. Результат (Athreya и Karlin, 1971), относящийся к моделям с дискретным временем, позволяет нам определить условие, при котором происходит исчезновение в нашей модели с непрерывным временем. Цель состоит в том, чтобы попытаться определить темпы вымирания населения.

В статьях (Дьяконова, 2008; Дьяконова, 2013; Ватутин и Вахтель, 2017) эта скорость вымирания рассчитывалась в аналогичной модели, но в дискретном времени, где последовательные среды являются случайными, независимыми и одинаково распределенными. Первые две ссылки дают простую формулу для скорости исчезновения, но с довольно ограничительными условиями в различных средах (средние матрицы должны иметь общий собственный вектор). (Vatutin and Wachtel, 2017) дает менее явную формулу, но с более общими гипотезами, оставаясь в случае «сильно докритической».

Скорость экстинкции зависит от спектральных свойств бесконечной подматрицы, извлеченной из (1) с  $\mathbf{Z}_{1,1}$  в его верхнем левом углу. Мы определяем

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left( \sum_{n_1, \dots, n_J \geq 0} n_i \pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J) - \delta_{i,j} \right), \quad (2)$$

с  $\delta_{i,j} = 1$  если  $i = j$ ,  $\delta_{i,j} = 0$  если  $i \neq j$ , Мы определяем

- $\mathbf{M}^{(k)}$  : матрица  $(M_{i,j}^{(k)})$
- $\text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)})$  : диагональная матрица по блокам с  $\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}$  по диагонали
- $\omega_1$  : спектральная граница, то есть собственное значение наибольшей действительной части матрицы

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}).$$

$\mathbf{I}$  это единичная матрица порядка  $J$  и  $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$  является тензорным произведением двух матриц.

Расчеты в разделе 2 предполагают, что  $\omega_1$  будет скорость вымирания населения для определенных значений параметров. Это остается догадкой, однако.

В разделе 3 мы сначала рассмотрим частный случай процессов рождения и смерти нескольких типов, а затем ограничимся группами только с двумя типами людей. Мы представляем пример, где мы сравниваем числовое значение  $\omega_1$  с ограничением  $\alpha_1$  если  $n \rightarrow \infty$  спектральной границы конечной подматрицы  $(1)$  с  $\mathbf{Z}_{1,1}$  в верхнем левом углу и  $\mathbf{Z}_{n,n}$  в правом нижнем углу. Численные результаты предполагают равенство этих двух чисел для определенных значений параметров, но не для всех, как в случае, когда существует только один тип индивидуума (Васаёв, 2017с). Мы также предполагаем, что предел  $\alpha_1$  показатель вымирания населения, определяемый, например, как предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J).$$

Согласно (Collet et al., 2013, раздел 4.5), этот предел (называемый параметром Кингмана) не зависит ни от  $k$ , ни от  $(n_1, \dots, n_J)$  при условии, что  $n_1 + \dots + n_J \geq 1$  и начальные условия (среда и количество особей разных типов).

## 2. Общий случай

### 2.1 Система дифференциальных уравнений

Условные обозначения:

- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ : вектор, чьи  $J$ - компоненты равны 0.
- $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$  жадный  $n_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\mathbf{u}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ : вектор с 1 в положении  $j$ .

Модельные гипотезы подразумевают, что

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) = & - \sum_{j=1}^J n_j c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} p^{(h)}(t, \mathbf{n}) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} (r_j + 1) c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) \pi_j^{(k)}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_J) \geq \mathbf{0}$  а также  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_J) \geq \mathbf{0}$  векторы положительных или нулевых целых чисел. Действительно, если есть  $\mathbf{n}$  индивиды в среде  $k$  в момент времени  $t$ , то есть в течение каждого интервала бесконечно малое время  $Dt$  вероятности  $n_j c_j^{(k)} dt$  что событие происходит для одного из  $n_j$  особи типа  $j$ , а также вероятность  $-Q_{k,k} dt$  что среда переключается в другое состояние. Если, с другой стороны, в среде  $h \neq k$  есть  $\mathbf{n}$  особей, существует вероятность  $Q_{k,h} dt$  что среда переходит в состояние  $k$ . Наконец, если есть  $\mathbf{r} + \mathbf{u}_j$  лиц в среде  $k$ , событие происходит в одном из  $(r_j + 1)$  тип  $J$  лиц с вероятностью  $(r_j + 1) c_j^{(k)} dt$  и мы находим его на своем месте  $\mathbf{s}$  особи разных типов с вероятностью  $\pi_j^{(k)}(\mathbf{s})$ , Если мы имеем  $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$  мы в конечном итоге  $n_j$  лица типа  $j$  для всех  $j$ . Система (3) имеет структуру (1).

### 2.2 Система уравнений в частных производных

Мы определяем  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  а также  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$ , Определим производящие функции

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J},$$

где  $x_j$  комплексные числа и индексы  $n_j$  целые числа. Потому что

$$\sum_k \sum_{\mathbf{n}_i \geq 0} p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J) = 1,$$

область сходимости этих рядов включает множество  $\{(x_1, \dots, x_J); |x_i| < 1 \forall i\}$  (Карган, 1961, глава IV). Мы определяем

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \pi_j^{(k)}(\mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

У нас есть  $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ , У нас тогда

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r} \geq \mathbf{0}} (r_j + 1) p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) x_1^{r_1} \dots x_J^{r_J}.$$

а также

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

С помощью системы (3) получаем

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) - x_j) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Это обобщение системы (3) в (Васаёв, 2017с), которое соответствует  $J = 1$ ,

### 2.3 Вектор средних

Определяем средние значения

$$E_i^{(k)}(t) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(t, \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} n_i p^{(k)}(t, \mathbf{n}).$$

С  $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$  мы выводим из уравнения (4), взяв его частную производную по  $x_i$  затем принимая  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ,

$$\frac{dE_i^{(k)}}{dt} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} E_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} E_j^{(k)},$$

с

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left( \frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) - \delta_{i,j} \right) \quad (5)$$

как во введении, и где предполагается, что  $M_{i,j}^{(k)} < +\infty$  для всех значений индекса. Это обобщение уравнения (4) (Васаёв, 2017с), которое соответствует  $J = 1$ . Определим  $\mathbf{E}$ , вектор столбца

$$(E_1^{(1)}, \dots, E_J^{(1)}, \dots, E_1^{(K)}, \dots, E_J^{(K)}).$$

У нас тогда  $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{\Omega}^{[1]} \mathbf{E}$  с

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \begin{pmatrix} Q_{1,1}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(1)} & Q_{1,2}\mathbf{I} & \dots & Q_{1,K}\mathbf{I} \\ Q_{2,1}\mathbf{I} & Q_{2,2}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{K-1,K}\mathbf{I} \\ Q_{K,1}\mathbf{I} & \dots & Q_{K,K-1}\mathbf{I} & Q_{K,K}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(K)} \end{pmatrix}$$

как во введении. Напомним, что  $\omega_1$  является спектральной границей этой матрицы, то есть собственным значением наибольшей действительной части. Потому что  $Q_{k,h} \geq 0 \forall k \neq h$  а также  $M_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall i \neq j$  мы действительно замечаем, что  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  является матрицей, все коэффициенты которой вне диагонали  $\geq 0$ . Согласно следствию из теоремы Перрона и Фробениуса,  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  имеет доминирующее реальное собственное значение, то есть больше, чем действительная часть всех других собственных значений.

Для упрощения предположим, что матрица  $\mathbf{Q}$  неприводима:  $\forall k \neq h, \exists (k_0, \dots, k_N), k_0 = k, k_N = h, Q_{k_n, k_{n+1}} > 0 \forall n$ , Мы также предполагаем, что матрицы  $\mathbf{M}^{(k)}$  все неприводимы. Итак, матрица  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  также неснижаемо. С  $\mathbf{E}(0) \neq 0$ , у нас есть

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{E}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_1$$

а также  $\omega_1$  скорость роста или уменьшения вектора ожидания  $\mathbf{E}(t)$ ,

### 2.4 Подкритический случай

Рассмотрим фиксированную последовательность сред, порожденных цепью Маркова в непрерывном времени матрицы  $\mathbf{Q}$ : среда является первой  $k_0$  за  $t_0 < t < t_1$  с  $t_0 = 0$ , тогда  $k_1$  за  $t_1 < t < t_2$ , так далее. Между двумя скачками в окружающей среде популяция развивается в соответствии с непрерывным процессом связи во времени с несколькими типами в постоянной среде. Таким образом, к нашему непрерывному процессу времени мы можем связать процесс с дискретным временем, который учитывает только состояние населения в моменты времени.  $t_n$  где среда меняется. Эти два процесса являются одновременно сверхкритическими, критическими или докритическими.

Вектор ожиданий населения каждого типа,  $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_J(t))$  зная, что среда  $k_n$  за  $t_n < t < t_{n+1}$  является решением  $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{M}^{(k_n)} \mathbf{e}(t)$  в течение этого временного интервала. С  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ , у нас есть  $\mathbf{e}(t_{n+1}) = \exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \mathbf{e}(t_n)$ , Согласно (Атрейя и Карлин, 1971, раздел 4), следующее

$$\frac{1}{n} \log \|\exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \dots \exp(\tau_0 \mathbf{M}^{(k_0)})\| \quad (6)$$

почти наверняка сходится к пределу  $\lambda_1$  не зависит от конкретного набора сред. Кроме того, население в процессе с дискретным временем почти наверняка вымирает в докритическом случае, когда  $\lambda_1 < 0$  и нет вымирания со строго положительной вероятностью, если  $\lambda_1 > 0$ , Таким образом, непрерывный процесс времени в нашей стартовой модели также является докритическим, если  $\lambda_1 < 0$ , Если  $T$  является пределом  $t_n/n$  если  $n \rightarrow +\infty$  отметим, что  $\lambda_1/T$  показатель Ляпунова дифференциальной системы для  $\mathbf{e}(t)$ ,

Наконец, отметим, что спектральная граница  $\omega_1$  из предыдущего раздела может быть положительным, а  $\lambda_1$  отрицательно. Это уже возможно, когда существует только один тип индивидуума (Basař and Ed-Darraz, 2014).

## 2.5 Собственные значения в регулярном случае

Для системы (4) мы ищем решения

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = e^{\omega t} F^{(k)}(\mathbf{x})$$

с функциями  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  которые не все тождественно равны нулю. У нас есть таким образом

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(\mathbf{x}) - x_j) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Взяв  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ , Мы видим, что

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{1}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{1}).$$

Есть два возможных случая:

- $F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0 \forall k$ ,
- $\omega$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{Q}$ .

Если функции  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  аналитические в окрестности  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$  (это «регулярный случай»), то мы видим, как в разделе 2.3, выводим уравнение (7) относительно  $x_i$  и принимая  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ,

$$\omega \phi_i^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} \phi_j^{(k)},$$

с  $\phi_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1})$ , Таким образом, есть также два возможных случая:

- $\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = 0 \forall i, \forall k$ ,
- $\omega$  является собственным значением  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ ,

Мы определяем

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}(\mathbf{1}).$$

Мы выбираем  $n \geq 2$ , Мы предполагаем, что  $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(k)} = 0 \forall 1 \leq k \leq K, 1 \leq m < n$  а также  $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, J\}^m$ , Выведем уравнение (7) относительно  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  и мы берем  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ , Из-за предположения о частных производных порядка  $< n$  и потому  $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$  остаются только следующие условия:

$$\omega \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \sum_{j=1}^J \left[ M_{i_1, j}^{(k)} \phi_{j, i_2, \dots, i_n}^{(k)} + \dots + M_{i_n, j}^{(k)} \phi_{i_1, i_2, \dots, j}^{(k)} \right] + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(h)} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (8)$$

Итак, есть два возможных случая:

- $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = 0 \forall i_1, \dots, i_n, \forall k$ ,
- $\omega$  является собственным значением квадратной матрицы  $\mathbf{\Omega}^{[n]}$  порядка  $K \times J^n$  определяется линейными уравнениями (8).

Таким образом, мы заключаем, что если собственные функции  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  связанные с собственным значением  $\omega$  являются аналитическими в окрестности  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$  тогда  $\omega$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{Q}$ , или же  $\omega$  является собственным значением матрицы  $\mathbf{\Omega}^{[n]}$  для некоторого  $n \geq 1$ . Действительно, если бы это было не так, мы бы

$$F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0, \quad \phi_i^{(k)} = 0 \quad \forall i, \forall k.$$

Из вышесказанного можно сделать вывод, что по индукции  $\phi_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$  для всех показателей с  $n \geq 2$ , Согласно принципу аналитического расширения (Картан, 1961, глава IV),  $F(x)$  будет тождественно ноль, что невозможно.

Если  $J = 1$ , мы пишем проще

$$\psi_n^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_1^n}(\mathbf{1}), \quad M^{(k)} = c_1^{(k)} \left( \frac{\partial g_1^{(k)}}{\partial x_1}(\mathbf{1}) - 1 \right).$$

Уравнение (8) затем записывается

$$\omega \psi_n^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \psi_n^{(h)} + n M^{(k)} \psi_n^{(k)}.$$

Мы выводим, что  $\omega$  собственное значение матрицы  $\mathbf{Q}$  или матрица  $\mathbf{Q} + n \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$  с  $n \geq 1$ , Раздел 4.2 (Basař, 2017a) уже заметил этот конкретный случай для линейных процессов рождений и смертей с одним типом.

## 2.6 Усеченная матрица

Мы определяем  $\mathbf{Y}_n$  конечная подматрица матрицы (1) с  $\mathbf{Z}_{1,1}$  в верхнем левом углу и  $\mathbf{Z}_{n,n}$  в правом нижнем углу. Спектральная граница этой матрицы такова, что  $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 0$ , Как и в предложении 2 (Васаёв, 2017а), мы определяем  $\mathbf{1}$  вектор линии  $(1, \dots, 1)$  подходящего размера. У нас тогда

$$\mathbf{1Y}_n \leq \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}.$$

Итак, мы имеем  $\mu_n \leq 0$  (см., например, (Нкаге Нкамба, 2012, теорема 30.1)). Есть столбец вектор  $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$  с

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mu_n \mathbf{v}_n$$

а также  $\mathbf{v}_n \geq \mathbf{0}$ , Мы определяем  $\mathbf{w}_n$  вектор столбца  $(\mathbf{v}_n, \mathbf{0})$ , У нас тогда

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{w}_n \geq \mu_n \mathbf{w}_n$$

потому что коэффициенты матриц  $\mathbf{Z}_{n+1,1}, \dots, \mathbf{Z}_{n+1,n}$  находятся  $\geq 0$ , Мы выводим, что  $\mu_{n+1} \geq \mu_n$  из (Нкаге Нкамба, 2012, теорема 30.3). Из этого также следует, что предел  $\alpha_1$  из  $\mu_n$  если  $n \rightarrow \infty$  существовать.

## 3. Особые случаи

### 3.1 Процессы рождения и смерти

Для каждой среды  $k$  мы даем себе, как в (Васаёв, 2017b), три матрицы одинакового размера: матрица рождения  $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{i,j}^{(k)})$  с коэффициентами  $\geq 0$  матрица передачи  $\mathbf{T}^{(k)} = (T_{i,j}^{(k)})$  с

$$\sum_i T_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j, \quad T_{i,j}^{(k)} \leq 0 \quad \forall i \neq j,$$

и диагональная выходная матрица  $\mathbf{S}^{(k)} = (S_{i,j}^{(k)})$  с  $S_{j,j}^{(k)} \geq 0 \forall j$ , Другими словами, в течение каждого бесконечно малого интервала времени  $dt$  каждый индивидум типа  $j$  находится в среде  $k$  а

- вероятность  $A_{i,j}^{(k)} dt$  родить нового человека типа  $i$ ,
- вероятность  $-T_{i,j}^{(k)} dt$  превратить в человека типа  $i$  с  $i \neq j$ ,
- вероятность  $S_{j,j}^{(k)} dt$  умереть или покинуть население.

У нас есть таким образом

$$c_j^{(k)} = \sum_i A_{i,j}^{(k)} + T_{j,j}^{(k)} + S_{j,j}^{(k)}$$

а также

$$g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) = \left[ \sum_i A_{i,j}^{(k)} x_i x_j + S_{j,j}^{(k)} - \sum_{i \neq j} T_{i,j}^{(k)} x_i \right] / c_j^{(k)}.$$

Мы определяем  $B_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k)} + S_{i,j}^{(k)}$ , Тогда уравнение (4) записывается

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J [x_i - 1] [A_{i,j}^{(k)} x_j - B_{i,j}^{(k)}] \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

который является обобщением уравнения, представленного в разделе 2 (Васаёв and Ait Dads, 2014) в случае случайной среды, или обобщением уравнения (5) из (Васаёв, 2017а) в случае Несколько видов. Различая случай, когда  $i = j$ , и  $i \neq j$ , легко показать, что  $M_{i,j}^{(k)}$ , определяемый уравнением (5), определяется как  $M_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - B_{i,j}^{(k)}$ , Население является докритическим, если  $\lambda_1 < 0$ ,

### 3.2 Два типа лиц

Возьмите случай процесса рождения и смерти, когда есть только  $J = 2$  типа, что позволяет легко упорядочить различные состояния населения. Давайте введем диагональные матрицы

$$\mathbf{C}_j = \text{diag}(c_j^{(1)}, \dots, c_j^{(K)}), \quad \mathbf{A}_{i,j} = \text{diag}(A_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(K)}),$$

$$\mathbf{T}_{i,j} = \text{diag}(T_{i,j}^{(1)}, \dots, T_{i,j}^{(K)}), \quad \mathbf{S}_{j,j} = \text{diag}(S_{j,j}^{(1)}, \dots, S_{j,j}^{(K)}).$$

Мы организуем функции  $p^{(k)}(t, n_1, n_2)$  по общему количеству  $n_1 + n_2$  индивидумов, и это число фиксировано числом индивидов типа 1, а затем средой. При таком порядке мы рассматриваем вектор бесконечного столбца

$$\mathbf{p}(t) = (p^{(1)}(t, 0, 0), \dots, p^{(K)}(t, 0, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 0), \dots, p^{(K)}(t, 1, 0), \\ p^{(1)}(t, 0, 1), \dots, p^{(K)}(t, 0, 1), \\ p^{(1)}(t, 2, 0), \dots, p^{(K)}(t, 2, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 1), \dots, p^{(K)}(t, 1, 1), \\ p^{(1)}(t, 0, 2), \dots, p^{(K)}(t, 0, 2), \dots).$$

Тогда система (3) также записывается  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{Z}\mathbf{p}(t)$ ,

- $\mathbf{Z}$  является бесконечной трехугольной матрицей по блокам

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,n-1} & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

и нули - это нулевые матрицы соответствующего размера;

- $\mathbf{Z}_{n,n}$  квадратная матрица, размер которой  $(n+1)K$ , который является трехдиагональным по блокам, который описывает переходы, когда общее число индивидуумов равно  $n$ , и когда это не изменяется (переход из среды или переход индивидуума в другой из двух типов)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_1 & -\mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -n\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-1)\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & -2\mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(n-1)\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-2)\mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n\mathbf{T}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

а также  $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{Q}$

- $\mathbf{Z}_{n-1,n}$  прямоугольная матрица с  $nK$  линии и  $(n+1)K$  столбцы, которые имеют только две ненулевые полосы блоков и которые описывают переходы, из которых происходит общее количество людей  $n$  в  $n-1$  (смерть или выписка)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{S}_{1,1} & 2\mathbf{S}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{1,1} & n\mathbf{S}_{2,2} \end{pmatrix};$$

- $\mathbf{Z}_{n+1,n}$  прямоугольная матрица с  $(n+2)K$  линии и  $(n+1)K$  столбцы, также с двумя ненулевыми полосами блоков, которые описывают переходы, откуда общее количество людей идет от  $n$  в  $n+1$  (роды)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ n\mathbf{A}_{2,1} & (n-1)\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{A}_{1,1} + (n-1)\mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A}_{2,1} + (n-1)\mathbf{A}_{2,2} & n\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & n\mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}.$$

### 3.3 Пример

В качестве примера процесса с двумя типами индивидуумов рассмотрим случай линейной эпидемической модели (Васаёр and Ait Dads, 2014), где индивидуумы типа 1 инфицированы, но еще не заразны (т.е. в латентной фазе) и 2 типа лиц, которые являются заразными. Подкритический линейный случай соответствует, например, ситуации, когда заболевание импортируется в случайную среду, неблагоприятную для его распространения. У нас тогда

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Параметр  $\tau$  - это скорость, с которой люди в латентной фазе становятся заразными независимо от окружающей среды. Параметр  $\beta^{(k)}$  скорость, с которой инфекционные люди заражают новых людей в начале эпидемии; это зависит от окружающей среды из-за влияния климата на вероятность передачи. Параметр  $\gamma$  - это показатель излечения для инфекционных людей. У нас есть таким образом

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\tau & \beta^{(k)} \\ \tau & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Мы также предполагаем, что существует только  $K = 2$  различных сред и что

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

Система (9) написана

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = q_2 f^{(2)} - q_1 f^{(1)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + [\beta^{(1)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}$$

а также

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = q_1 f^{(1)} - q_2 f^{(2)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_1} + [\beta^{(2)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2}.$$

Мы выбрали следующие числовые значения, используемые в (Васаёр, Ait Dads, 2014) для кори:  $1/\tau = 8$  дней,  $1/\gamma = 5$  дней. За  $\beta^{(k)}$  мы предполагаем, что  $\beta^{(1)} = 4\varepsilon$  в месяц (с месяцем 30 дней) и что  $\beta^{(2)} = 8\varepsilon$  в месяц. В (Васаёр and Ait Dads, 2014) коэффициент  $\beta$  периодически менялся от 4 до 8 в месяц, чтобы хорошо соответствовать эпидемической кривой. Параметр  $\varepsilon$  предназначен для изменения. Наконец предположим, что  $q_1 = q_2 = 1$ , так что среда тратит в среднем половину времени в каждом из двух состояний.

С помощью итерационного метода, который использует трехдиагональную блочную структуру (Ciarlet, 2006), мы оцениваем спектральную границу  $\mu_n$  конечной подматрицы  $\mathbf{Y}_n$  из  $\mathbf{Z}$  если  $n$  последовательно 25, 50, 100 и 200. Эта квадратная подматрица имеет размер

$$2K + 3K + \dots + (n + 1)K = n(n + 3)K/2.$$

Мы также оцениваем критический параметр  $\lambda_1$  связан с показателем Ляпунова, используя, например, 5000 прыжков из окружающей среды. Результаты показаны на рисунке 1. Обратите внимание, что если бы среда была постоянной, процесс был бы докритическим для  $\beta < \gamma$ ,

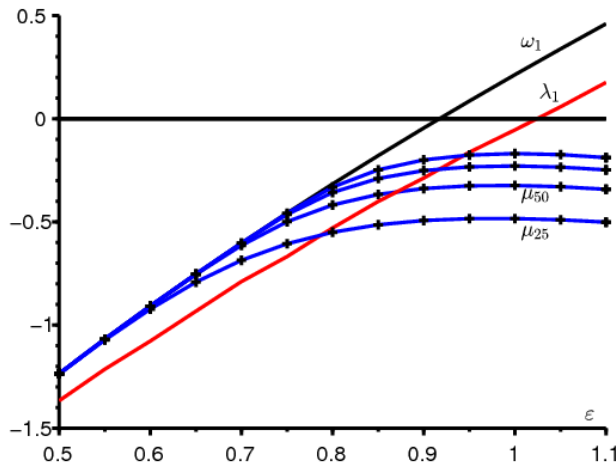


Рисунок 1. Критический параметр  $\lambda_1$  (в красном),  $\omega_1$  (в черном цвете) и  $\mu_n$  (синим цветом с крестиками для  $n \in \{25, 50, 100, 200\}$  снизу вверх) как функция  $\varepsilon$ . Скорость вымирания  $\alpha_1$  это предел  $\mu_n$  если  $n \rightarrow \infty$ ,

На рисунке видно, что у нас есть  $\alpha_1 = \omega_1$  если  $\varepsilon$  маленький, особенно до тех пор, пока  $\beta^{(1)} < \gamma$  а также  $\beta^{(2)} < \gamma$ , другими словами  $\frac{8\varepsilon}{30} < \frac{1}{5}$  то есть  $\varepsilon < 0,75$ . Но  $\alpha_1 < \omega_1$  в области, где  $\lambda_1$  остается строго отрицательным. К сожалению, мы не смогли определить  $\alpha_1$  более явно. Ожидается, что  $\alpha_1 = 0$  если  $\lambda_1 = 0$ . Помните, что когда есть только один тип личности ( $J = 1$ ), матрицы  $\mathbf{M}^{(k)}$  на самом деле скалярные числа  $M^{(k)}$  и (Васаёр, 2017с) имели тенденцию показывать в этом случае, что

$$\alpha_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 1} s(\mathbf{Q} + \theta \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})).$$

$s(\cdot)$  обозначает спектральную границу матрицы. Аналог этой формулы, когда есть несколько типов людей, еще предстоит определить. (Дьяконова, 2008; Дьяконова, 2013; Ватутин и Вахтель, 2017) также не удалось сделать это в моделях с дискретным временем. Без сомнения, лучшее понимание поведения функций  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  около особой точки  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$  в системе (7) позволит прогресс.

## Библиографические ссылки

- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I. Extinction probabilities, Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- N. Vasaër (2017a) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. 75, 85–108.
- N. Vasaër (2017b) Sur la probabilité d'extinction dans des modèles mathématiques d'épidémies, C. R. Biol. 340, 453–455.
- N. Vasaër (2017c) Sur la vitesse d'extinction d'une population dans un environnement aléatoire, C. R. Biol. 340, 259–263.
- N. Vasaër, A. Ed-Darraz (2014) Sur les processus linéaires de naissance et de mort dans un environnement aléatoire, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266287>
- N. Vasaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d'extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>.

- H. Cartan (1961) Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris.
- P. G. Ciarlet (2006) Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Dunod, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi-stationary Distributions, Springer, Berlin.
- E. E. Dyakonova (2008) On subcritical multi-type branching process in random environment, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AI, 397–404.
- E. E. Dyakonova (2013) Multitype subcritical branching processes in a random environment, Proc. Steklov Inst. Math. 282, 80–89.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer/SMAI, Berlin.
- L. Nkague Nkamba (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d'un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle, Thèse de l'Université de Lorraine.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- V. Vatutin, V. Wachtel (2017) Subcritical multitype branching process in random environment, <https://arxiv.org/abs/1711.07453>