

Sobre a extinção de populações com vários tipos em um ambiente aleatório

C. R. Biol. 341 (2018) 145–151
<https://doi.org/10.1016/j.crvi.2018.01.009>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
 Unidade de modelagem matemática e computacional de sistemas complexos
 Les Cordeliers, Paris, França
 nicolas.bacaer@ird.fr

resumo

Estudamos a taxa de extinção de um processo de ramificação com vários tipos em tempo contínuo em um ambiente aleatório. Cálculos numéricos em um exemplo específico inspirado em um modelo epidêmico sugerem uma fórmula explícita para essa taxa de extinção, mas apenas para determinados valores dos parâmetros.

1. Introdução

Supomos que o ambiente, observado k , oscila aleatoriamente entre um número finito de estados $1, \dots, K$ de acordo com uma cadeia de Markov em tempo contínuo. Para $k \neq h$, a probabilidade de o ambiente mudar de h para k é $Q_{k,h} dt$ durante cada intervalo de tempo infinitesimal dt , com $Q_{k,h} \geq 0$. Nós definimos a matriz $\mathbf{Q} = (Q_{k,h})$ com

$$Q_{h,h} = - \sum_{k \neq h} Q_{k,h} \quad \forall h.$$

É a matriz transposta do gerador infinitesimal da cadeia (Sericola, 2013).

Considere uma população de indivíduos que podem ser de vários tipos: $1, 2, \dots, J$. Essa população evolui no ambiente aleatório que acabamos de descrever. Supõe-se que exista pelo menos um indivíduo na população no momento $t = 0$. Um indivíduo do tipo i no ambiente k tem uma probabilidade $c_i^{(k)} dt$ sofrer algum evento durante cada intervalo de tempo infinitesimal dt , com $c_i^{(k)} > 0$. Se o evento ocorrer, encontraremos no lugar desse indivíduo n_j indivíduos do tipo j para $1 \leq j \leq J$ com probabilidade $\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J)$. Em outras palavras, entre dois saltos no ambiente, cada indivíduo tem um "tempo de vida" aleatório que segue uma lei exponencial de parâmetro $c_i^{(k)}$. No final deste período, a lei da reprodução é dada por $(\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J))$, independentemente de outros indivíduos. É, portanto, um processo de conexão com vários tipos em tempo contínuo (Méléard, 2016).

Nós definimos $p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J)$, a probabilidade de a população ser composta por n_i indivíduos do tipo i para $1 \leq i \leq J$ e que o ambiente é k no tempo t . Organizamos os estados (k, n_1, \dots, n_J) do sistema por grupos de acordo com o número total de indivíduos $n = n_1 + \dots + n_J$, de modo a ter um vetor de coluna infinito $\mathbf{p}(t)$. Observamos na seção 2 que $\mathbf{p}(t)$ é a solução de um sistema linear de equações diferenciais $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Z} \mathbf{p}(t)$. \mathbf{Z} é uma matriz infinita da forma

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,1} & \mathbf{Z}_{n,2} & \ddots & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \quad (1)$$

e os blocos $\mathbf{Z}_{m,n}$ são matrizes de tamanhos diferentes. Vemos na estrutura dessa matriz que, quando um indivíduo passa por um evento, o número total de indivíduos só pode diminuir em uma unidade, mas pode aumentar em várias unidades. Além disso, a classe de estados com zero indivíduos é absorvente: corresponde à extinção da população. A seguir, nos restringimos ao caso subcrítico em que a população quase certamente morre. Um resultado de (Athreya e Karlin, 1971) relacionado a modelos de tempo discretos nos permite determinar a condição sob a qual existe extinção em nosso modelo de tempo contínuo. O objetivo é tentar determinar a taxa de extinção da população.

Os artigos (Dyakonova, 2008; Dyakonova, 2013; Vatutin e Wachtel, 2017) calcularam essa taxa de extinção em um modelo análogo, mas em tempo discreto, onde os ambientes sucessivos são aleatórios, independentes e distribuídos de forma idêntica. As duas primeiras referências fornecem uma fórmula simples para a taxa de extinção, mas com condições bastante restritivas nos diferentes ambientes (as matrizes médias devem ter um vetor próprio em comum). (Vatutin e Wachtel, 2017) fornece uma fórmula menos explícita, mas com hipóteses mais gerais, enquanto permanece no caso "fortemente subcrítico".

A taxa de extinção depende das propriedades espectrais da sub-matriz infinita extraída de (1) com $\mathbf{Z}_{1,1}$ no canto superior esquerdo. Nós definimos

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\sum_{n_1, \dots, n_J \geq 0} n_i \pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J) - \delta_{i,j} \right), \quad (2)$$

com $\delta_{i,j} = 1$ E se $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ E se $i \neq j$. Nós definimos

- $\mathbf{M}^{(k)}$: o Matrix $(M_{i,j}^{(k)})$
- $\text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)})$: a matriz de blocos diagonal com $\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}$ na diagonal
- ω_1 : o limite espectral, ou seja, o autovalor da maior parte real da matriz

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}).$$

\mathbf{I} é a matriz de identidade da ordem J e $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$ é o produto tensorial das duas matrizes.

Os cálculos da Seção 2 sugerem que ω_1 seria a taxa de extinção da população para certos valores dos parâmetros. Isso permanece um palpite, no entanto.

Na seção 3, primeiro consideramos o caso particular dos processos de nascimento e morte de vários tipos, depois nos restringimos a populações com apenas dois tipos de indivíduos. Apresentamos um exemplo em que comparamos o valor numérico de ω_1 com o limite α_1 E se $n \rightarrow \infty$ da ligação espectral da sub-matriz finita

de (1) com $\mathbf{Z}_{1,1}$ no canto superior esquerdo e $\mathbf{Z}_{n,n}$ no canto inferior direito. Resultados numéricos sugerem a igualdade desses dois números para alguns valores dos parâmetros, mas não para todos, como no caso em que existe apenas um tipo de indivíduo (Bacaër, 2017c). Também conjecturamos que o limite α_1 é a taxa de extinção da população, definida, por exemplo, como o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J).$$

De acordo com (Collet et al., 2013, seção 4.5), esse limite (chamado parâmetro Kingman) não depende de k , nem de (n_1, \dots, n_J) providenciou que $n_1 + \dots + n_J \geq 1$, nem as condições iniciais (ambiente e número de indivíduos dos diferentes tipos).

2. Caso geral

2.1 O sistema de equações diferenciais

Notações:

- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$: o vetor cujos componentes J são iguais a 0.
- $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$ significar $n_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\mathbf{u}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$: o vetor com o 1 na posição j .

As hipóteses do modelo implicam que

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) = & - \sum_{j=1}^J n_j c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} p^{(h)}(t, \mathbf{n}) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} (r_j + 1) c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) \pi_j^{(k)}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_J) \geq \mathbf{0}$ e $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_J) \geq \mathbf{0}$ são vetores de números inteiros positivos ou zero. Com efeito, se houver \mathbf{n} indivíduos no ambiente k no momento t , então existe durante cada intervalo de tempo infinitesimal dt uma probabilidade $n_j c_j^{(k)} dt$ que um evento ocorre para um dos n_j indivíduos do tipo j , e também uma probabilidade $-Q_{k,k} dt$ que o ambiente muda para outro estado. Se, por outro lado, houver \mathbf{n} indivíduos em um ambiente $h \neq k$, existe uma probabilidade $Q_{k,h} dt$ que o ambiente muda para o estado k . Finalmente, se houver $\mathbf{r} + \mathbf{u}_j$ indivíduos no ambiente k , ocorre um evento em um dos $(r_j + 1)$ indivíduos do tipo j com probabilidade $(r_j + 1) c_j^{(k)} dt$ e encontramos em seu lugar \mathbf{s} indivíduos de diferentes tipos com probabilidade $\pi_j^{(k)}(\mathbf{s})$. Se tiver-mos $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$, acabamos com n_i indivíduos do tipo i para todos i . O sistema (3) possui a estrutura (1).

2.2 O sistema de equações diferenciais parciais

Nós definimos $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$. Definimos as funções geradoras

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J},$$

onde o x_i são números complexos e os índices n_i inteiros. Porque

$$\sum_k \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J) = 1,$$

o domínio de convergência dessas séries inclui o conjunto $\{|x_i| < 1 \forall i\}$ (Cartan, 1961, capítulo IV). Nós definimos

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \pi_j^{(k)}(\mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

Nós temos $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$. Nós temos então

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r} \geq \mathbf{0}} (r_j + 1) p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) x_1^{r_1} \dots x_J^{r_J}.$$

e

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

Com o sistema (3), obtemos

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) - x_j) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

É uma generalização do sistema (3) em (Bacaër, 2017c), que corresponde a $J = 1$.

2.3 O vetor de médias

Definimos os valores médios

$$E_i^{(k)}(t) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(t, \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} n_i p^{(k)}(t, \mathbf{n}).$$

Com $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$, deduzimos da equação (4), tomando sua derivada parcial em relação a x_i então tomando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$,

$$\frac{dE_i^{(k)}}{dt} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} E_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} E_j^{(k)},$$

com

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) - \delta_{i,j} \right) \quad (5)$$

como na introdução, e onde assumimos que $M_{i,j}^{(k)} < +\infty$ para todos os valores de índice. É a generalização da equação (4) de (Bacaër, 2017c), que correspondeu a $J = 1$. Definimos \mathbf{E} , o vetor da coluna

$$(E_1^{(1)}, \dots, E_J^{(1)}, \dots, E_1^{(K)}, \dots, E_J^{(K)}).$$

Nós temos então $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{\Omega}^{[1]}\mathbf{E}$ com

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \begin{pmatrix} Q_{1,1}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(1)} & Q_{1,2}\mathbf{I} & \cdots & Q_{1,K}\mathbf{I} \\ Q_{2,1}\mathbf{I} & Q_{2,2}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{K-1,K}\mathbf{I} \\ Q_{K,1}\mathbf{I} & \cdots & Q_{K,K-1}\mathbf{I} & Q_{K,K}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(K)} \end{pmatrix}$$

como na introdução. Lembramos que ω_1 é o limite espectral dessa matriz, ou seja, o autovalor da maior parte real. Porque $Q_{k,h} \geq 0 \forall k \neq h$ e $M_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall i \neq j$, notamos de fato que $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ é uma matriz cujos coeficientes fora da diagonal são todos ≥ 0 . De acordo com um corolário do teorema de Perron e Frobenius, $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ tem um autovalor real dominante, ou seja, maior que a parte real de todos os outros autovalores.

Para simplificar, assumimos que a matriz \mathbf{Q} é irredutível: $\forall k \neq h, \exists (k_0, \dots, k_N), k_0 = k, k_N = h, Q_{k_n, k_{n+1}} > 0 \forall n$. Também supomos que as matrizes $\mathbf{M}^{(k)}$ são todos irredutíveis. Então a matriz $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ também é irredutível. Com $\mathbf{E}(0) \neq 0$, temos

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{E}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_1$$

e ω_1 é a taxa de crescimento ou diminuição do vetor de expectativa $\mathbf{E}(t)$.

2.4 O caso subcrítico

Vamos considerar uma sequência fixa de ambientes gerados pela cadeia de Markov em tempo contínuo da matriz \mathbf{Q} : o ambiente é o primeiro k_0 para $t_0 < t < t_1$ com $t_0 = 0$, então k_1 para $t_1 < t < t_2$ etc. Entre dois saltos no ambiente, a população evolui de acordo com um processo contínuo de conexão de tempo com vários tipos em um ambiente constante. No nosso processo de tempo contínuo, podemos, portanto, associar um processo de tempo discreto que considera apenas o estado da população nos instantes t_n onde o ambiente muda. Os dois processos são simultaneamente supercríticos, críticos ou subcríticos.

O vetor das expectativas das populações de cada tipo, $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_J(t))$, sabendo que o ambiente é k_n para $t_n < t < t_{n+1}$, é solução de $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{M}^{(k_n)}\mathbf{e}(t)$ durante esse intervalo de tempo. Com $\tau_n = t_{n+1} - t_n$, temos $\mathbf{e}(t_{n+1}) = \exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \mathbf{e}(t_n)$. De acordo com (Athreya e Karlin, 1971, seção 4), os seguintes

$$\frac{1}{n} \log \|\exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \cdots \exp(\tau_0 \mathbf{M}^{(k_0)})\| \quad (6)$$

quase certamente converge para um limite λ_1 independente do conjunto particular de ambientes. Além disso, a população no processo de tempo discreto quase certamente morre no caso subcrítico em que $\lambda_1 < 0$ e não há extinção com uma probabilidade estritamente positiva se $\lambda_1 > 0$. Portanto, o processo de tempo contínuo em nosso modelo inicial também é subcrítico se $\lambda_1 < 0$. Se T é o limite de t_n/n e se $n \rightarrow +\infty$, nós notamos que λ_1/T é o expoente de Lyapunoff do sistema diferencial de $\mathbf{e}(t)$.

Por fim, observe que o limite espectral ω_1 da seção anterior pode ser positivo enquanto λ_1 é negativo. Isso já é possível quando existe apenas um tipo de indivíduo (Bacaër e Ed-Darraz, 2014).

2.5 Autovalores no caso regular

Para o sistema (4), estamos procurando soluções

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = e^{\omega t} F^{(k)}(\mathbf{x})$$

com funções $F^{(k)}(\mathbf{x})$ que não são todos idênticos zero. Temos assim

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(\mathbf{x}) - x_j) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Levando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, nós vemos que

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{1}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{1}).$$

Há duas possibilidades:

- $F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0 \forall k$,
- ω é um valor próprio da matriz \mathbf{Q} .

Se as funções $F^{(k)}(\mathbf{x})$ são analíticas em um bairro de $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ (este é o "caso regular"), vemos como na seção 2.3, derivando a equação (7) com relação a x_i e tomando $\mathbf{x} = \mathbf{1}$,

$$\omega \phi_i^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} \phi_j^{(k)},$$

com $\phi_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1})$. Portanto, há também dois casos possíveis:

- $\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = 0 \forall i, \forall k$,
- ω é um autovalor de $\Omega^{[1]}$.

Nós definimos

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}(\mathbf{1}).$$

Nós escolhemos $n \geq 2$. Supomos que $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(k)} = 0 \forall 1 \leq k \leq K, 1 \leq m < n$ e $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, J\}^m$. Derivamos a equação (7) em relação a x_{i_1}, \dots, x_{i_n} e tomamos $\mathbf{x} = \mathbf{1}$. Por causa da suposição sobre derivadas parciais de ordem $< n$ e porque $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$, apenas os seguintes termos permanecem:

$$\omega \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \sum_{j=1}^J \left[M_{i_1, j}^{(k)} \phi_{j, i_2, \dots, i_n}^{(k)} + \dots + M_{i_n, j}^{(k)} \phi_{i_1, i_2, \dots, j}^{(k)} \right] + \sum_{h=1}^K Q_{k, h} \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(h)} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (8)$$

Portanto, existem dois casos possíveis:

- $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = 0 \forall i_1, \dots, i_n, \quad \forall k$,
- ω é um autovalor da matriz quadrada $\Omega^{[n]}$ de ordem $K \times J^n$ definido pelas equações lineares (8).

Em resumo, concluímos que, se as funções próprias $F^{(k)}(\mathbf{x})$ associados ao valor próprio ω são analíticas em uma vizinhança de $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, então ω é um autovalor da matriz \mathbf{Q} , ou então ω é um autovalor de uma matriz $\Omega^{[n]}$ para um certo $n \geq 1$. De fato, se não fosse esse o caso, teríamos

$$F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0, \quad \phi_i^{(k)} = 0 \quad \forall i, \forall k.$$

Do exposto, deduziríamos por indução que $\phi_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$ para todos os índices com $n \geq 2$. De acordo com o princípio da extensão analítica (Cartan, 1961, capítulo IV), $F(x)$ seria idêntico a zero, o que não é possível.

Se $J = 1$, escrevemos mais simplesmente

$$\psi_n^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_1^n}(\mathbf{1}), \quad M^{(k)} = c_1^{(k)} \left(\frac{\partial g_1^{(k)}}{\partial x_1}(\mathbf{1}) - 1 \right).$$

A equação (8) é então escrita

$$\omega \psi_n^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k, h} \psi_n^{(h)} + n M^{(k)} \psi_n^{(k)}.$$

Deduzimos que ω é um autovalor da matriz \mathbf{Q} ou uma matriz $\mathbf{Q} + n \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$ com $n \geq 1$. A Seção 4.2 de (Bacaër, 2017a) já havia notado esse caso específico para os processos lineares de nascimentos e mortes com um único tipo.

2.6 A matriz truncada

Nós definimos \mathbf{Y}_n , a sub-matriz finita da matriz (1) com $\mathbf{Z}_{1,1}$ no canto superior esquerdo e $\mathbf{Z}_{n,n}$ no canto inferior direito. O limite espectral dessa matriz é tal que $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 0$. Como na Proposição 2 de (Bacaër, 2017a), definimos $\mathbf{1}$ o vetor de linha $(1, \dots, 1)$ de tamanho adequado. Nós temos então

$$\mathbf{1} \mathbf{Y}_n \leq \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}.$$

Então nós temos $\mu_n \leq 0$ (ver, por exemplo, (Nkague Nkamba, 2012, Teorema 30.1)). Existe um vetor de coluna $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ com

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mu_n \mathbf{v}_n$$

e $\mathbf{v}_n \geq \mathbf{0}$. Nós definimos \mathbf{w}_n o vetor da coluna $(\mathbf{v}_n, \mathbf{0})$. Nós temos então

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{w}_n \geq \mu_n \mathbf{w}_n$$

porque os coeficientes das matrizes $\mathbf{Z}_{n+1,1}, \dots, \mathbf{Z}_{n+1,n}$ estamos ≥ 0 . Deduzimos que $\mu_{n+1} \geq \mu_n$ de (Nkague Nkamba, 2012, Teorema 30.3). A partir disso, segue-se também que o limite α_1 do μ_n E se $n \rightarrow \infty$ existir.

3. Casos especiais

3.1 Os processos de nascimento e morte

Para cada ambiente k , nos damos como em (Bacaër, 2017b) três matrizes do mesmo tamanho: uma matriz de nascimento $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{i,j}^{(k)})$ com coeficientes ≥ 0 , uma matriz de transferência $\mathbf{T}^{(k)} = (T_{i,j}^{(k)})$ com

$$\sum_i T_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j, \quad T_{i,j}^{(k)} \leq 0 \quad \forall i \neq j,$$

e uma matriz de saída diagonal $\mathbf{S}^{(k)} = (S_{j,j}^{(k)})$ com $S_{j,j}^{(k)} \geq 0 \forall j$. Em outras palavras, durante cada intervalo de tempo infinitesimal dt , cada indivíduo do tipo j que está no ambiente k a

- uma probabilidade $A_{i,j}^{(k)} dt$ dar à luz um novo tipo i indivíduo,
- uma probabilidade $-T_{i,j}^{(k)} dt$ transformar em um indivíduo do tipo i com $i \neq j$,
- uma probabilidade $S_{j,j}^{(k)} dt$ morrer ou deixar a população.

Temos assim

$$c_j^{(k)} = \sum_i A_{i,j}^{(k)} + T_{j,j}^{(k)} + S_{j,j}^{(k)}$$

$$g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) = \left[\sum_i A_{i,j}^{(k)} x_i x_j + S_{j,j}^{(k)} - \sum_{i \neq j} T_{i,j}^{(k)} x_i \right] / c_j^{(k)}.$$

Nós definimos $B_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k)} + S_{i,j}^{(k)}$. Então a equação (4) é escrita

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J [x_i - 1] [A_{i,j}^{(k)} x_j - B_{i,j}^{(k)}] \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

que é a generalização da equação apresentada na seção 2 de (Bacaër e Ait Dads, 2014) no caso de um ambiente aleatório, ou a generalização da equação (5) de (Bacaër, 2017a) no caso de Vários tipos. Ao distinguir o caso em que $i = j$ daquele em que $i \neq j$, mostramos facilmente que $M_{i,j}^{(k)}$, definido pela equação (5), é dado por $M_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - B_{i,j}^{(k)}$. A população é sub-crítica se $\lambda_1 < 0$.

3.2 Dois tipos de indivíduos

Tomemos o caso de um processo de nascimento e morte em que existem apenas tipos $J = 2$, o que torna possível ordenar os diferentes estados da população com facilidade. Vamos apresentar as matrizes diagonais

$$\mathbf{C}_j = \text{diag}(c_j^{(1)}, \dots, c_j^{(K)}), \quad \mathbf{A}_{i,j} = \text{diag}(A_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(K)}),$$

$$\mathbf{T}_{i,j} = \text{diag}(T_{i,j}^{(1)}, \dots, T_{i,j}^{(K)}), \quad \mathbf{S}_{j,j} = \text{diag}(S_{j,j}^{(1)}, \dots, S_{j,j}^{(K)}).$$

Organizamos as funções $p^{(k)}(t, n_1, n_2)$ de acordo com o número total $n_1 + n_2$ de indivíduos, e esse número fixo, pelo número de indivíduos do tipo 1 e depois pelo ambiente. Com essa ordem, consideramos o vetor de coluna infinita

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p^{(1)}(t, 0, 0), \dots, p^{(K)}(t, 0, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 0), \dots, p^{(K)}(t, 1, 0), \\ p^{(1)}(t, 0, 1), \dots, p^{(K)}(t, 0, 1), \\ p^{(1)}(t, 2, 0), \dots, p^{(K)}(t, 2, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 1), \dots, p^{(K)}(t, 1, 1), \\ p^{(1)}(t, 0, 2), \dots, p^{(K)}(t, 0, 2), \dots \end{pmatrix}.$$

Em seguida, o sistema (3) também é gravado $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{Z}\mathbf{p}(t)$.

- \mathbf{Z} é a matriz tridiagonal infinita por blocos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,n-1} & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

e zeros são zero matrizes do tamanho apropriado;

- $\mathbf{Z}_{n,n}$ é a matriz quadrada, cujo tamanho é $(n+1)K$, que é tridiagonal por blocos, que descreve as transições quando o número total de indivíduos é n e quando isso não muda (pule do ambiente ou do indivíduo transferido para o outro dos dois tipos)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_1 & -\mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -n\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-1)\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & -2\mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(n-1)\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-2)\mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n\mathbf{T}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

e $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{Q}$

- $\mathbf{Z}_{n-1,n}$ é a matriz retangular com nK linhas e $(n+1)K$ colunas que possuem apenas duas bandas de bloco diferentes de zero e que descrevem as transições de onde o número total de indivíduos passa n às $n-1$ (morte ou alta)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{S}_{1,1} & 2\mathbf{S}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{1,1} & n\mathbf{S}_{2,2} \end{pmatrix};$$

- $\mathbf{Z}_{n+1,n}$ é a matriz retangular com $(n+2)K$ linhas e $(n+1)K$ colunas, também com duas bandas de bloco diferentes de zero, que descrevem as transições de onde o número total de indivíduos passa n às $n+1$ (nascimentos)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ n\mathbf{A}_{2,1} & (n-1)\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{A}_{1,1} + (n-1)\mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & \mathbf{A}_{2,1} + (n-1)\mathbf{A}_{2,2} & n\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} & n\mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}.$$

3.3 Exemplo

Como exemplo de um processo com dois tipos de indivíduos, considere o caso do modelo linear epidêmico de (Bacaër e Ait Dads, 2014), em que indivíduos do tipo 1 são pessoas infectadas, mas ainda não infecciosas (ou seja, na fase latente) e indivíduos do tipo 2 aqueles que são infecciosos. O caso linear subcrítico corresponde, por exemplo, à situação em que a doença é importada para um ambiente aleatório desfavorável à sua propagação. Nós temos então

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

O parâmetro τ é a taxa na qual as pessoas na fase latente se tornam infecciosas, independentemente do ambiente. O parâmetro $\beta^{(k)}$ é a taxa na qual pessoas infecciosas infectam novas pessoas no início de uma epidemia; depende do meio ambiente por causa da influência do clima na probabilidade de transmissão. O parâmetro γ é a taxa de cura para pessoas infecciosas. Temos assim

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\tau & \beta^{(k)} \\ \tau & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Também assumimos que existem apenas $K = 2$ ambientes diferentes e que

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

O sistema (9) está escrito

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = q_2 f^{(2)} - q_1 f^{(1)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + [\beta^{(1)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}$$

e

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = q_1 f^{(1)} - q_2 f^{(2)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_1} + [\beta^{(2)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2}.$$

Escolhemos os seguintes valores numéricos, usados em (Bacaër, Ait Dads, 2014) para o sarampo: $1/\tau = 8$ dias, $1/\gamma = 5$ dias. Para $\beta^{(k)}$, supomos que $\beta^{(1)} = 4\varepsilon$ por mês (com um mês de 30 dias) e que $\beta^{(2)} = 8\varepsilon$ por mês. Em (Bacaër e Ait Dads, 2014), o coeficiente β variou periodicamente entre 4 e 8 por mês para se adequar à curva epidêmica. O parâmetro ε deve variar. Por fim, suponha que $q_1 = q_2 = 1$, para que o ambiente gaste, em média, metade do tempo em cada um dos dois estados.

Com um método iterativo que tira proveito da estrutura de blocos tridiagonal (Ciarlet, 2006), estimamos a ligação espectral μ_n da sub-matriz finita \mathbf{Y}_n do \mathbf{Z} se n for sucessivamente 25, 50, 100 e 200. Essa sub-matriz quadrada é do tamanho

$$2K + 3K + \dots + (n+1)K = n(n+3)K/2.$$

Também estimamos o parâmetro crítico λ_1 ligado ao expoente de Lyapounov, utilizando, por exemplo, 5000 saltos do ambiente. Os resultados são mostrados na Figura 1. Observe que, se o ambiente fosse constante, o processo seria subcrítico para $\beta < \gamma$.

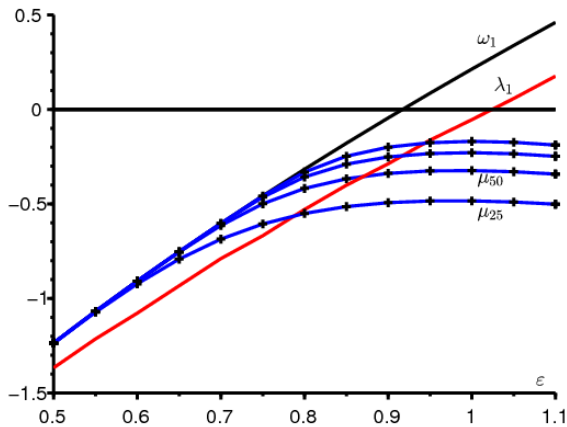


Figura 1. O parâmetro crítico λ_1 (em vermelho), ω_1 (em preto) e μ_n (em azul com cruzes para $n \in \{25, 50, 100, 200\}$) de baixo para cima) em função de ε . A taxa de extinção α_1 é o limite de μ_n E se $n \rightarrow \infty$.

A figura sugere que temos $\alpha_1 = \omega_1$ E se ε é pequeno, especialmente desde que $\beta^{(1)} < \gamma$ e $\beta^{(2)} < \gamma$, em outras palavras $\frac{8\varepsilon}{30} < \frac{1}{5}$, isto é, $\varepsilon < 0,75$. Mas $\alpha_1 < \omega_1$ em uma área onde λ_1 permanece estritamente negativo. Infelizmente, não conseguimos determinar α_1 mais explicitamente. É esperado que $\alpha_1 = 0$ E se $\lambda_1 = 0$. Lembre-se de que, quando houver apenas um tipo de indivíduo ($J = 1$), matrizes $\mathbf{M}^{(k)}$ na verdade são números escalares $M^{(k)}$ e (Bacaër, 2017c) tendiam a mostrar neste caso que

$$\alpha_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 1} s(\mathbf{Q} + \theta \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})).$$

$s(\cdot)$ denota o limite espectral de uma matriz. O análogo dessa fórmula quando existem vários tipos de indivíduos ainda precisa ser determinado. (Dyakonova, 2008; Dyakonova, 2013; Vatutin e Wachtel, 2017) também não conseguiram fazê-lo nos modelos de tempo discretos. Sem dúvida, uma melhor compreensão do comportamento das funções $F^{(k)}(\mathbf{x})$ perto do ponto singular $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ no sistema (7) permitiria progresso.

Referências bibliográficas

- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I. Extinction probabilities, Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- N. Bacaër (2017a) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. 75, 85–108.
- N. Bacaër (2017b) Sur la probabilité d’extinction dans des modèles mathématiques d’épidémies, C. R. Biol. 340, 453–455.
- N. Bacaër (2017c) Sur la vitesse d’extinction d’une population dans un environnement aléatoire, C. R. Biol. 340, 259–263.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014) Sur les processus linéaires de naissance et de mort dans un environnement aléatoire, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266287>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d’extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>.
- H. Cartan (1961) Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris.
- P. G. Ciarlet (2006) Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation, Dunod, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi-stationary Distributions, Springer, Berlin.
- E. E. Dyakonova (2008) On subcritical multi-type branching process in random environment, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AI, 397–404.
- E. E. Dyakonova (2013) Multitype subcritical branching processes in a random environment, Proc. Steklov Inst. Math. 282, 80–89.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer/SMIAI, Berlin.
- L. Nkague Nkamba (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle, Thèse de l’Université de Lorraine.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- V. Vatutin, V. Wachtel (2017) Subcritical multitype branching process in random environment, <https://arxiv.org/abs/1711.07453>