

# ランダムな環境におけるいくつかのタイプの個体群の絶滅について

C. R. Biol. 341 (2018) 145–151

<https://doi.org/10.1016/j.crvi.2018.01.009>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement  
複雑なシステムの数学およびコンピュータモデリングユニット  
Les Cordeliers、パリ、フランス  
nicolas.bacaer@ird.fr

## 概要

ランダムな環境での連続時間におけるいくつかのタイプの分岐プロセスの消滅率を調べます。流行モデルに触発された特定の例の数値計算は、この消滅率の明示的な公式を示唆していますが、パラメーターの特定の値についてのみです。

## 1.はじめに

$k$  で表される環境が、有限時間の状態1、...、 $K$ の間で、連続時間のマルコフ連鎖に従ってランダムに振動するとします。以下のために $K \neq H$ 、環境から切り替わる確率 $H$ に $k$ があります  $Q_{k,h} dt$  各微小時間間隔 $dt$ の間、 $Q_{k,h} \geq 0$ 。マトリックスを定義します  $\mathbf{Q} = (Q_{k,h})$  と

$$Q_{h,h} = - \sum_{k \neq h} Q_{k,h} \quad \forall h.$$

これは、チェーンの極小ジェネレーターの転置行列です (Sericola, 2013)。

いくつかのタイプである可能性のある個人の母集団を考慮してください：1、2、...、 $J$ 。この人口は、今説明したランダムな環境で進化します。当時の人口には少なくとも1人の個人がいると想定されます  $t = 0$ 。環境 $k$ のタイプ $i$ の個体には確率があります  $c_i^{(k)} dt$  各微小時間間隔 $dt$ の間に何らかのイベントを受けるには、 $c_i^{(k)} > 0$ 。イベントが発生した場合、この個人の代わりに  $n_j$  型の個人 $j$ の  $1 \leq j \leq J$  確率で  $\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J)$ 。言い換えると、環境内の2つの飛躍の間に、各個体は、パラメータの指数法則に従うランダムな「寿命」を持っています。  $c_i^{(k)}$ 。この時間の終わりに、複製の法則は  $(\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J))$  他の個人とは関係なく。したがって、それは連続した時間でいくつかのタイプと接続するプロセスです (Méléard, 2016)。

私たちは定義します  $p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J)$ 、人口が構成される確率  $n_i$  タイプの個人 $i$ が1のため  $1 \leq i \leq J$ と環境があるというの $k$ 時間でトン。州を整理  $(k, n_1, \dots, n_J)$  個人の総数に応じたグループによるシステムの  $n = n_1 + \dots + n_J$ 、無限列ベクトルを持つように  $\mathbf{p}(t)$ 。セクション2では、 $\mathbf{p}(t)$  微分方程式の線形システムの解です  $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Z} \mathbf{p}(t)$ 。  $\mathbf{Z}$  次の形式の無限行列です

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,1} & \mathbf{Z}_{n,2} & \ddots & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

そしてブロック  $\mathbf{Z}_{m,n}$  それ自体が異なるサイズの行列です。このマトリックスの構造を見ると、個人がイベントを経験した場合、個人の総数は1ユニットだけ減少することができますが、数ユニット増加することができます。さらに、個体数がゼロの状態のクラスは吸収されます。これは、人口の絶滅に対応します。以下では、人口がほぼ確実に死亡する未臨界のケ

一に限定します。離散時間モデルに関する (Athreya and Karlin, 1971) の結果により、連続時間モデルで消滅が発生する条件を特定することができます。その目的は、人口の絶滅率を決定しようとすることです。

記事 (Dyakonova, 2008; Dyakonova, 2013; Vatutin and Wachtel, 2017) は、連続的な環境がランダムで独立しており、同じように分布している離散時間での類似モデルでこの絶滅率を計算しました。最初の2つのリファレンスは、絶滅率の簡単な公式を示していますが、さまざまな環境でかなり制限的な条件を使用しています (平均行列には共通の固有ベクトルが必要です)。(Vatutin and Wachtel, 2017) は、それほど明確ではない式を提供していますが、より一般的な仮説を立てていますが、「非常に重要でない」ケースにとどまっています。

消光率は、(1) から抽出された無限サブマトリックスのスペクトル特性に依存します。 $\mathbf{Z}_{1,1}$  左上隅にあります。私たちは定義します

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left( \sum_{n_1, \dots, n_J \geq 0} n_i \pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J) - \delta_{i,j} \right), \quad (2)$$

と  $\delta_{i,j} = 1$  もし  $i = j$ 、 $\delta_{i,j} = 0$  もし  $i \neq j$ 。私たちは定義します

- $\mathbf{M}^{(k)}$  : マトリックス ( $M_{i,j}^{(k)}$ )
- $\text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)})$  : の対角ブロック行列  $\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}$  対角線上
- $\omega_1$  : スペクトル境界、つまり行列の最大実部の固有値

$$\Omega^{[1]} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} + \text{diag}(\mathbf{M}^{(1)}, \dots, \mathbf{M}^{(K)}).$$

$\mathbf{I}$  は次数  $J$  の単位行列であり、 $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$  は、2つの行列のテンソル積です。

セクション2の計算は、 $\omega_1$  パラメータの特定の値に対する人口消滅率になります。ただし、これは推測のままです。

セクション3では、最初にいくつかのタイプの出生と死亡のプロセスの特定のケースを検討し、次に2種類の個人のみを持つ人口に限定します。の数値を比較する例を示します  $\omega_1$  限界あり  $\alpha_1$  もし  $n \rightarrow \infty$  (1) の有限部分行列のスペクトル境界の  $\mathbf{Z}_{1,1}$  左上隅と  $\mathbf{Z}_{n,n}$  右下隅にあります。数値の結果は、パラメーターのいくつかの値についてこれらの2つの数値が等しいことを示唆していますが、個体のタイプが1つしかない場合のように (Bacaër, 2017c)、すべてではありません。また、限界は  $\alpha_1$  人口絶滅率であり、たとえば限界として定義されます

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J).$$

(コレット他、2013年、セクション4.5) によると、この制限 (キングマンパラメーターと呼ばれる) は  $k$  にも、 $(n_1, \dots, n_J)$  それを条件として  $n_1 + \dots + n_J \geq 1$ 、初期条件 (環境およびさまざまなタイプの個人の数) でもありません。

## 2. 一般的なケース

### 2.1 微分方程式系

表記:

- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  :  $J$ コンポーネントが0に等しいベクトル。
- $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$  平均  $n_i \geq 0 \quad \forall i$
- $\mathbf{u}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  : 位置  $j$  に 1 を持つベクトル。

モデルの仮説は、

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) = & - \sum_{j=1}^J n_j c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} p^{(h)}(t, \mathbf{n}) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} (r_j + 1) c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) \pi_j^{(k)}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_J) \geq \mathbf{0}$  そして  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_J) \geq \mathbf{0}$  正またはゼロの整数のベクトルです。実際、時間  $t$  で環境  $k$  に  $\mathbf{n}$  人の個体がいる場合、微小時間  $dt$  の各間隔中に確率が存在します。 $n_j c_j^{(k)} dt$  イベントのいずれかが発生すること  $n_j$  タイプ  $j$  の個体と確率

–  $Q_{k,k} dt$  環境が別の状態に切り替わること。一方、 $h \neq k$ の環境に $\mathbf{n}$ 人の個人がいる場合、確率があります。 $Q_{k,h} dt$  環境が状態 $k$ に切り替わること。最後に、 $\mathbf{r} + \mathbf{u}_j$  環境 $k$ の個人、イベントのいずれかで発生します  $(r_j + 1)$  確率でタイプ $j$ の個体  $(r_j + 1) c_j^{(k)} dt$  その場所で見つめます  $s$  確率の異なるタイプの個人  $\pi_j^{(k)}(s)$ 。私たちが持っている場合  $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$ 、私たちは結局  $n_i$  すべての $i$ に対してタイプ $i$ の個体。システム (3) の構造は (1) です。

## 2.2 偏微分方程式のシステム

私たちは定義します  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  そして  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$ 。生成関数を定義します

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J},$$

どこ  $x_i$  複素数とインデックスです  $n_i$  整数。なぜなら

$$\sum_k \sum_{n_i \geq 0} p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J) = 1,$$

これらのシリーズの収束ドメインには、セットが含まれています  $\{(x_1, \dots, x_J); |x_i| < 1 \forall i\}$  (カルタン、1961年、第IV章)。私たちは定義します

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \pi_j^{(k)}(\mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

我々は持っています  $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ 。私たちは

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r} \geq \mathbf{0}} (r_j + 1) p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) x_1^{r_1} \dots x_J^{r_J}.$$

そして

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

システム (3) では、

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) - x_j) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

これは、(Bacaër, 2017c) のシステム (3) の一般化であり、 $J = 1$ 。

## 2.3 平均のベクトル

平均値を定義します

$$E_i^{(k)}(t) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(t, \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} n_i p^{(k)}(t, \mathbf{n}).$$

と  $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ 、方程式 (4) から演繹し、 $x_i$  それから  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 、

$$\frac{dE_i^{(k)}}{dt} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} E_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} E_j^{(k)},$$

と

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left( \frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) - \delta_{i,j} \right) \quad (5)$$

はじめにと同様に、 $M_{i,j}^{(k)} < +\infty$  すべてのインデックス値。これは、 $J=1$ に対応する (Bacaër, 2017c) の式 (4) の一般化です。列ベクトル $E$ を定義します

$$(E_1^{(1)}, \dots, E_J^{(1)}, \dots, E_1^{(K)}, \dots, E_J^{(K)}).$$

私たちは  $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{\Omega}^{[1]}\mathbf{E}$  と

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \begin{pmatrix} Q_{1,1}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(1)} & Q_{1,2}\mathbf{I} & \cdots & Q_{1,K}\mathbf{I} \\ Q_{2,1}\mathbf{I} & Q_{2,2}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{K-1,K}\mathbf{I} \\ Q_{K,1}\mathbf{I} & \cdots & Q_{K,K-1}\mathbf{I} & Q_{K,K}\mathbf{I} + \mathbf{M}^{(K)} \end{pmatrix}$$

はじめに。私たちはそれを思い出します  $\omega_1$  これは、この行列のスペクトル境界です。つまり、最大実部の固有値です。なぜなら  $Q_{k,h} \geq 0 \forall k \neq h$  そして  $M_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall i \neq j$ 、私たちは確かにそれに気づきます  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  対角線の外側の係数がすべて  $\geq 0$  である行列です。ペロンとフロベニウスの定理の帰結によれば、 $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  支配的な実固有値を持ちます。つまり、他のすべての固有値の実数部分よりも大きくなります。

簡単にするために、行列  $\mathbf{Q}$  は既約であると仮定します。  $\forall k \neq h, \exists (k_0, \dots, k_N), k_0 = k, k_N = h, Q_{k_n, k_{n+1}} > 0 \forall n$ 。また、行列が  $\mathbf{M}^{(k)}$  すべて既約です。だからマトリックス  $\mathbf{\Omega}^{[1]}$  また、既約です。と  $\mathbf{E}(0) \neq 0$ 、我々は持っています

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{E}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_1$$

そして  $\omega_1$  期待ベクトルの増加または減少率  $\mathbf{E}(t)$ 。

## 2.4 亜臨界ケース

行列  $\mathbf{Q}$  の連続時間でマルコフ連鎖によって生成された環境の固定シーケンスを考えてみましょう。環境が最初です  $k_0$  ために  $t_0 < t < t_1$  と  $t_0 = 0$ 、その後  $k_1$  ために  $t_1 < t < t_2$ 、など環境の2つの飛躍の間に、人口は一定の環境でいくつかのタイプの継続的な時間接続プロセスに従って進化します。したがって、連続時間プロセスに、瞬間の母集団の状態のみを考慮する離散時間プロセスを関連付けることができます。  $t_n$  環境が変化する場所。2つのプロセスは同時に超臨界、臨界、または亜臨界です。

各タイプの人口の期待のベクトル、  $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_J(t))$ 、環境が  $k_n$  ために  $t_n < t < t_{n+1}$ 、の解決策です  $\frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{M}^{(k_n)}\mathbf{e}(t)$  この期間中。と  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ 、我々は持っています  $\mathbf{e}(t_{n+1}) = \exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)})\mathbf{e}(t_n)$ 。(Athreya and Karlin、1971、section 4) によれば、以下は

$$\frac{1}{n} \log \|\exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \cdots \exp(\tau_0 \mathbf{M}^{(k_0)})\| \quad (6)$$

ほぼ確実に限界に収束する  $\lambda_1$  特定の環境スイートに依存しません。さらに、離散時間プロセスの人口はほぼ確実に亜臨界の場合に死にます  $\lambda_1 < 0$  そして、厳密に正の確率で絶滅することはありません  $\lambda_1 > 0$ 。したがって、開始モデルの連続時間プロセスは、以下の場合も亜臨界です。  $\lambda_1 < 0$ 。場合  $T$  はの限界であります  $t_n/n$  もし  $n \rightarrow +\infty$ 、私たちはそれに注意します  $\lambda_1/T$  リャプノフの微分システムの指数です。  $\mathbf{e}(t)$ 。

最後に、スペクトル境界が  $\omega_1$  前のセクションからは肯定的なことができます  $\lambda_1$  負です。これは、個人のタイプが1つかない場合はすでに可能です (BacaërおよびEd-Darraz、2014年)。

## 2.5 通常の場合の固有値

システム (4) については、解決策を探しています

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = e^{\omega t} F^{(k)}(\mathbf{x})$$

機能付き  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  これらはすべて同じゼロではありません。このように

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(\mathbf{x}) - x_j) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

取る  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 、それがわかります

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{1}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{1}).$$

次の2つのケースが考えられます。

- $F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0 \forall k$ ,
- $\omega$ は行列 $\mathbf{Q}$ の固有値です。

関数が  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  近所で分析的で  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$  (これは「通常のケース」です)、セクション2.3と同様に、式 (7) を  $x_i$  として取る  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 、

$$\omega \phi_i^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} \phi_j^{(k)},$$

と  $\phi_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1})$ 。したがって、2つのケースが考えられます。

- $\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = 0 \forall i, \forall k$ ,
- $\omega$ は次の固有値です  $\Omega^{[1]}$ 。

私たちは定義します

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}(\mathbf{1}).$$

我々が選択しました  $n \geq 2$ 。と思う  $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(k)} = 0 \forall 1 \leq k \leq K, 1 \leq m < n$  そして  $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, J\}^m$ 。に関して式 (7) を導き出す  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  として私たちは取る  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 。次数  $< n$  の偏導関数に関する仮定と、 $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ 、次の用語のみが残ります：

$$\omega \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \sum_{j=1}^J \left[ M_{i_1, j}^{(k)} \phi_{j, i_2, \dots, i_n}^{(k)} + \dots + M_{i_n, j}^{(k)} \phi_{i_1, i_2, \dots, j}^{(k)} \right] + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(h)} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (8)$$

したがって、2つのケースが考えられます。

- $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = 0 \forall i_1, \dots, i_n, \quad \forall k$ ,
- $\omega$ は正方行列の固有値  $\Omega^{[n]}$  順序の  $K \times J^n$  線形方程式 (8) によって定義されます。

要約すると、固有関数が  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  固有値  $\omega$  に関連付けられているのは、 $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ 、次に  $\omega$  は行列  $\mathbf{Q}$  の固有値、または  $\omega$  は行列の固有値  $\Omega^{[n]}$  特定のための  $n$  が当てはまらなかった場合  $\geq$  実際に1、我々は持っているでしょう

$$F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0, \quad \phi_i^{(k)} = 0 \quad \forall i, \forall k.$$

上記から、帰納法により、 $\phi_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$  のすべてのインデックス  $n \geq 2$ 。分析的拡張の原理 (Cartan, 1961年、第IV章) によれば、 $F(x)$  完全にゼロになりますが、これは不可能です。

$J=1$  の場合、より簡単に記述します

$$\psi_n^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_1^n}(\mathbf{1}), \quad M^{(k)} = c_1^{(k)} \left( \frac{\partial g_1^{(k)}}{\partial x_1}(\mathbf{1}) - 1 \right).$$

次に、式 (8) が書き込まれます

$$\omega \psi_n^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \psi_n^{(h)} + n M^{(k)} \psi_n^{(k)}.$$

私たちはそれを推測します  $\omega$  行列の固有値です  $\mathbf{Q}$  またはマトリックス  $\mathbf{Q} + n \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$  と  $n \geq 1$ 。 (Bacaër, 2017a) のセクション4.2は、単一のタイプの出生と死亡の線形プロセスに関するこの特定のケースにすでに気づいていました。

## 2.6 打ち切り行列

私たちは定義します  $\mathbf{Y}_n$ 、行列 (1) の有限部分行列  $\mathbf{Z}_{1,1}$  左上隅と  $\mathbf{Z}_{n,n}$  右下隅にあります。この行列のスペクトル境界は次のようになります  $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 0$ 。 (Bacaër, 2017a) の命題2と同様に、1行ベクトル  $(1, \dots, 1)$  適切なサイズの。私たちは

$$\mathbf{1Y}_n \leq \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}.$$

だから私たちは  $\mu_n \leq 0$  (例を参照してください (Nkague Nkamba, 2012, 定理30.1) )。列ベクトルがあります  $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$  と

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mu_n \mathbf{v}_n$$

そして  $\mathbf{v}_n \geq \mathbf{0}$ 。私たちは定義します  $\mathbf{w}_n$  列ベクトル ( $\mathbf{v}_n, \mathbf{0}$ )。私たちは

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{w}_n \geq \mu_n \mathbf{w}_n$$

行列の係数は  $\mathbf{Z}_{n+1,1}, \dots, \mathbf{Z}_{n+1,n}$  は  $\geq 0$ 。私たちはそれを推測します  $\mu_{n+1} \geq \mu_n$  (Nkague Nkamba, 2012, 定理30.3) から。このことから、限界は  $\alpha_1$  の  $\mu_n$  もし  $n \rightarrow \infty$  存在します。

### 3. 特別な場合

#### 3.1 誕生と死のプロセス

各環境  $k$  について、(Bacaër, 2017b) のように、同じサイズの3つの行列を与えます。  $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{i,j}^{(k)})$  係数あり  $\geq 0$ 、転送行列  $\mathbf{T}^{(k)} = (T_{i,j}^{(k)})$  と

$$\sum_i T_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j, \quad T_{i,j}^{(k)} \leq 0 \quad \forall i \neq j,$$

対角出力行列  $\mathbf{S}^{(k)} = (S_{i,j}^{(k)})$  と  $S_{j,j}^{(k)} \geq 0 \forall j$ 。言い換えると、各微小時間間隔  $dt$  の間に、環境  $k$  a にいる タイプ  $j$  の各個体

- 確率  $A_{i,j}^{(k)} dt$  新しいタイプ  $i$  の個人を生み出すために、
- 確率  $-T_{i,j}^{(k)} dt$  タイプ  $j$  の個体に交換するために 私と私  $\neq j$  を、
- 確率  $S_{j,j}^{(k)} dt$  死ぬか、人口を去る。

このように

$$c_j^{(k)} = \sum_i A_{i,j}^{(k)} + T_{j,j}^{(k)} + S_{j,j}^{(k)}$$

そして

$$g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) = \left[ \sum_i A_{i,j}^{(k)} x_i x_j + S_{j,j}^{(k)} - \sum_{i \neq j} T_{i,j}^{(k)} x_i \right] / c_j^{(k)}.$$

私たちは定義します  $B_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k)} + S_{i,i}^{(k)}$ 。次に、式 (4) が記述されます。

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J [x_i - 1] [A_{i,j}^{(k)} x_j - B_{i,i}^{(k)}] \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

これは、ランダム環境の場合は (Bacaër and Ait Dads, 2014) のセクション2に示されている方程式の一般化、または (Bacaër, 2017a) の場合は (5) の一般化です。いくつかのタイプ。ケースを区別することで、私は  $=j$  であることから、私は  $\neq j$  を、私たちは簡単にことを示しているが  $M_{i,j}^{(k)}$ 、式 (5) で定義され、  $M_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - B_{i,i}^{(k)}$ 。人口が次の場合は亜臨界です  $\lambda_1 < 0$ 。

#### 3.2 種類の個人

$J=2$  タイプ のみの誕生と死のプロセスの場合を考えてみましょう。これにより、人口のさまざまな状態を簡単に順序付けることができます。対角行列を紹介しましょう

$$\mathbf{C}_j = \text{diag}(c_j^{(1)}, \dots, c_j^{(K)}), \quad \mathbf{A}_{i,j} = \text{diag}(A_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(K)}),$$

$$\mathbf{T}_{i,j} = \text{diag}(T_{i,j}^{(1)}, \dots, T_{i,j}^{(K)}), \quad \mathbf{S}_{j,j} = \text{diag}(S_{j,j}^{(1)}, \dots, S_{j,j}^{(K)}).$$

機能整理  $p^{(k)}(t, n_1, n_2)$  総数による  $n_1 + n_2$  個人の数、およびこの数はタイプ1の個人の数、次に環境によって固定されます。この順序で、無限列ベクトルを考慮します

$$\mathbf{p}(t) = (p^{(1)}(t, 0, 0), \dots, p^{(K)}(t, 0, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 0), \dots, p^{(K)}(t, 1, 0), \\ p^{(1)}(t, 0, 1), \dots, p^{(K)}(t, 0, 1), \\ p^{(1)}(t, 2, 0), \dots, p^{(K)}(t, 2, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 1), \dots, p^{(K)}(t, 1, 1), \\ p^{(1)}(t, 0, 2), \dots, p^{(K)}(t, 0, 2), \dots).$$

次に、システム (3) も書き込まれます  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{Z}\mathbf{p}(t)$ 。

- $\mathbf{Z}$  ブロックによる無限三重対角行列です

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,n-1} & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

ゼロは適切なサイズのゼロ行列です。

- $\mathbf{Z}_{n,n}$  正方形行列で、そのサイズは  $(n+1)K$ 、ブロックごとに三重対角であり、個体の総数が  $n$  であり、これが変化しない場合の遷移を記述します (環境からのジャンプまたは2つのタイプの他方に転送された個体)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_1 & -\mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -n\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-1)\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & -2\mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(n-1)\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-2)\mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n\mathbf{T}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_2 \end{pmatrix}$$

そして  $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{Q}$

- $\mathbf{Z}_{n-1,n}$  は、 $nK$  ラインと  $(n+1)K$  ゼロ以外のブロックバンドが2つだけあり、個人の総数がどこから移動するかを表す列  $n$  で  $n-1$  (死亡または退院)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{S}_{1,1} & 2\mathbf{S}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{1,1} & n\mathbf{S}_{2,2} \end{pmatrix};$$

- $\mathbf{Z}_{n+1,n}$  は、 $(n+2)K$  ラインと  $(n+1)K$  列も、非ゼロの2つのブロックバンドがあり、個人の総数がどこから移動するかを示します。  $n$  で  $n+1$  (出産)

$$\begin{pmatrix} n\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ n\mathbf{A}_{2,1} & (n-1)\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{A}_{1,1} + (n-1)\mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A}_{2,1} + (n-1)\mathbf{A}_{2,2} & n\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & n\mathbf{A}_{2,2} \end{pmatrix}.$$

### 3.3例

2種類の個人を含むプロセスの例として、(Bacaër and Ait Dads, 2014) の線形流行モデルのケースを考えます。この場合、タイプ1の個人は感染していますが、まだ感染性はありません (つまり潜伏期) および2型感染者 亜臨界線形のケース

は、例えば、病気がその伝播に不利なランダムな環境にインポートされる状況に対応します。私たちは

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

パラメータ  $\tau$  は、環境に関係なく潜伏期の人々が感染力を持つ割合です。パラメータ  $\beta^{(k)}$  伝染病が始まったときに感染者が新しい人に感染する割合です。感染の可能性に対する気候の影響のため、それは環境に依存します。 $\gamma$  パラメータは感染者の治療率です。このように

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\tau & \beta^{(k)} \\ \tau & -\gamma \end{pmatrix}.$$

また、 $K=2$ つの異なる環境しかなく、

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

システム (9) が書かれている

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = q_2 f^{(2)} - q_1 f^{(1)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + \left[ \beta^{(1)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1) \right] \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}$$

そして

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = q_1 f^{(1)} - q_2 f^{(2)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_1} + \left[ \beta^{(2)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1) \right] \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2}.$$

(Bacaër, Ait Dads, 2014) で麻疹に使用されている次の数値を選択しました。  $1/\tau = 8$  日々、  $1/\gamma = 5$  日々。ために  $\beta^{(k)}$ 、と仮定します  $\beta^{(1)} = 4\varepsilon$  1か月あたり (30か月)、それ  $\beta^{(2)} = 8\varepsilon$  月額。(BacaërとAit Dads, 2014) では、係数  $\beta$  は、流行曲線とよく一致するように、月に4~8の間で定期的に変化しました。パラメータ  $\varepsilon$  は変化することを意図しています。最後に、  $q_1 = q_2 = 1$ 、したがって、環境は2つの状態のそれぞれで平均半分の時間を費やします。

三重対角ブロック構造 (Ciarlet, 2006) を利用する反復法では、スペクトル境界を推定します  $\mu_n$  有限部分行列の  $\mathbf{Y}_n$  の  $\mathbf{Z}$  場合、  $n$  は連続25、50、100および200である。この正方サブ行列のサイズであります

$$2K + 3K + \dots + (n+1)K = n(n+3)K/2.$$

重要なパラメータも推定します  $\lambda_1$  例えば環境から5000ホップを使用して、Lyapounovの指数にリンクします。結果を図1に示します。環境が一定である場合、プロセスは  $\beta < \gamma$ 。

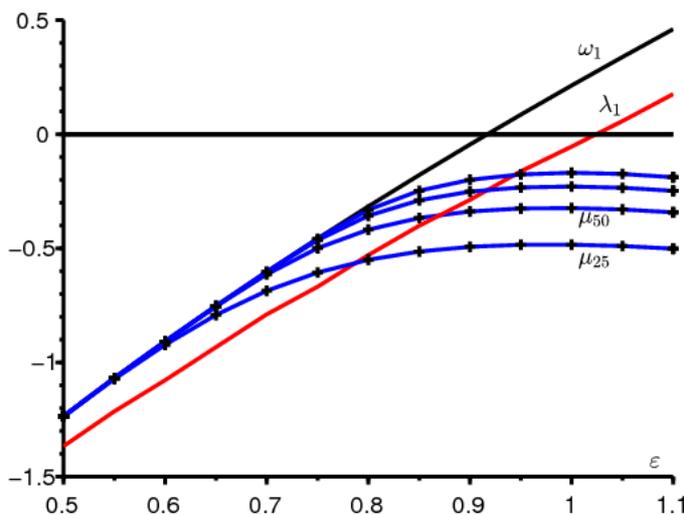


図1.重要なパラメーター  $\lambda_1$  (赤)、 $\omega_1$  (黒) と  $\mu_n$  (十字付きの青  $n \in \{25, 50, 100, 200\}$  下から上へ)  $\varepsilon$  の関数として。絶滅率  $\alpha_1$  の限界です  $\mu_n$  もし  $n \rightarrow \infty$ 。

この図は、  $\alpha_1 = \omega_1$  もし  $\varepsilon$  特に小さい限り、  $\beta^{(1)} < \gamma$  そして  $\beta^{(2)} < \gamma$ 、言い換えると  $\frac{8\varepsilon}{30} < \frac{1}{5}$ 、つまり  $\varepsilon < 0.75$ 。だが  $\alpha_1 < \omega_1$  地域で  $\lambda_1$  厳密に否定的なままです。残念ながら、私たちは決定することができませんでした  $\alpha_1$  より明確に。それ

は期待されています  $\alpha_1 = 0$  もし  $\lambda_1 = 0$ 。個人のタイプが1つだけの場合は、 $J = 1$ ）、行列  $\mathbf{M}^{(k)}$  実際にはスカラー数です  $M^{(k)}$  (Bacaër, 2017c) このケースでは、

$$\alpha_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 1} s(\mathbf{Q} + \theta \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})).$$

$s(\cdot)$  マトリックスのスペクトル境界を示します。いくつかのタイプの個人がいる場合、この式の類似体はまだ決定されていません。(Dyakonova, 2008; Dyakonova, 2013; Vatutin and Wachtel, 2017) も、離散時間モデルでは失敗しました。関数の動作をよりよく理解できることは間違いありません  $F^{(k)}(\mathbf{x})$  特異点の近く  $\mathbf{x} = \mathbf{1}$  システムの (7) で進行が可能になります。

## 参考文献

- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I. Extinction probabilities, Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- N. Bacaër (2017a) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. 75, 85–108.
- N. Bacaër (2017b) Sur la probabilité d’extinction dans des modèles mathématiques d’épidémies, C. R. Biol. 340, 453–455.
- N. Bacaër (2017c) Sur la vitesse d’extinction d’une population dans un environnement aléatoire, C. R. Biol. 340, 259–263.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014) Sur les processus linéaires de naissance et de mort dans un environnement aléatoire, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266287>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d’extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292>.
- H. Cartan (1961) Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris.
- P. G. Ciarlet (2006) Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation, Dunod, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi-stationary Distributions, Springer, Berlin.
- E. E. Dyakonova (2008) On subcritical multi-type branching process in random environment, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AI, 397–404.
- E. E. Dyakonova (2013) Multitype subcritical branching processes in a random environment, Proc. Steklov Inst. Math. 282, 80–89.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer/SMIAI, Berlin.
- L. Nkague Nkamba (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle, Thèse de l’Université de Lorraine.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- V. Vatutin, V. Wachtel (2017) Subcritical multitype branching process in random environment, <https://arxiv.org/abs/1711.07453>