

على انقراض السكان مع عدة أنواع في بيئة عشوائية

151–145 (2018) 341 C. R. Biol.
<https://doi.org/10.1016/j.crvi.2018.01.009>

Nicolas Bacaër

Institut de recherche pour le développement
 وحدة النمذجة الرياضية والحاسوبية للأنظمة المعقدة
 Les Cordeliers ، باريس ، فرنسا
 nicolas.bacaer@ird.fr

ملخص

نحن ندرس معدل الانقراض لعملية التفرع مع عدة أنواع في وقت مستمر في بيئة عشوائية. تقترح الحسابات العددية في مثال معين مستوحى من نموذج وبائي صيغة واضحة لهذا المعدل من الانقراض ولكن فقط لقيم معينة من المعلمات.

1 المقدمة

نفترض أن البيئة ، المشار إليها بـ k ، تتأرجح بشكل عشوائي بين عدد محدود من الحالات $1, \dots, K$ ، وفقاً لسلسلة ماركوف في وقت مستمر. بالنسبة إلى $k \neq h$ ، يكون احتمال تحول البيئة من h إلى k هو $Q_{k,h} dt$ خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt ، مع $Q_{k,h} \geq 0$. نحدد المصفوفة $\mathbf{Q} = (Q_{k,h})$ مع

$$Q_{h,h} = - \sum_{k \neq h} Q_{k,h} \quad \forall h.$$

وهي المصفوفة المنقولة للمولد اللامتناهي للسلسلة (Sericola ، 2013).

خذ بعين الاعتبار مجموعة الأفراد التي قد تكون من عدة أنواع: $1, 2, \dots, J$. يتطور هذا المجتمع في البيئة العشوائية التي وصفناها للتو. من المفترض أن هناك فرد واحد على الأقل في السكان في ذلك الوقت $t = 0$. احتمال وجود فرد من النوع i في البيئة dt $c_i^{(k)}$ للخضوع لبعض الأحداث خلال كل الوقت متناهية الصغر فترة دينارا ، مع $c_i^{(k)} > 0$. إذا حدث هذا ، نجد مكان هذا الفرد n_j الأفراد من النوع j لـ $1 \leq j \leq J$ باحتمال $\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J)$. وبعبارة أخرى ، بين القفزات في البيئة ، لكل فرد "وقت حياة" عشوائي يتبع قانوناً أسياً للمعلمات $c_i^{(k)}$. في نهاية هذا الوقت ، يتم إعطاء قانون الاستنساخ من قبل $(\pi_i^{(k)}(n_1, \dots, n_J))$ ، بغض النظر عن الأفراد الآخرين. وبالتالي فهي عملية متفرعة مع عدة أنواع في الوقت المستمر (Méléard ، 2016).

نحدد الاحتمال $p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J)$ الذي يتألف منه السكان n_i الأفراد من نوع i لـ $1 \leq i \leq J$ وأن البيئة هي k في وقت t . نرتب الدول (k, n_1, \dots, n_J) النظام حسب المجموعات حسب العدد الإجمالي للأفراد $n = n_1 + \dots + n_J$ ، بحيث يكون لناقل عمود غير محدود $\mathbf{p}(t)$. نلاحظ في القسم 2 ذلك $\mathbf{p}(t)$ هو حل لنظام خطي من المعادلات التفاضلية $\mathbf{Z} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{Z} \mathbf{p}(t)$ هي مصفوفة لا نهائية من النموذج

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,1} & \mathbf{Z}_{n,2} & \ddots & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

والكتل $\mathbf{Z}_{m,n}$ هم أنفسهم مصفوفات بأحجام مختلفة. نرى في هيكل هذه المصفوفة أنه عندما يخضع فرد لحدث ما ، فإن العدد الإجمالي للأفراد لا يمكن أن ينخفض إلا بوحدة واحدة ولكن يمكن أن يزيد بعدة وحدات. بالإضافة إلى ذلك ، تمتص فئة الدول التي لا يوجد فيها أفراد: فهي تتوافق مع انقراض السكان. نحن نقصر أنفسنا فيما يلي على الحالة شبه الحرجة حيث يموت السكان بالتأكيد. نتيجة لـ (Athreya and Karlin ، 1971) المتعلقة بنماذج الوقت المنفصل تجعل من الممكن تحديد حالة الانقراض في نموذجنا المستمر. الهدف هو محاولة تحديد معدل انقراض السكان.

تحتسب المقالات (Dyakonova ، 2008 ؛ Dyakonova ، 2013 ؛ Vatutin ؛ Wachtel ، 2017) معدل الانقراض هذا في نموذج مماثل ولكن في وقت منفصل ، حيث تكون البيانات المتعاقبة عشوائية ومستقلة وموزعة بشكل متماثل. يعطي المراجعان الأولان صيغة بسيطة لمعدل الانقراض ولكن مع شروط تقييمية إلى حد ما في البيانات المختلفة (يجب أن يكون للمصفوفات المتوسطة متجه داخلي مشترك). (Vatutin and Wachtel ، 2017) يعطي صيغة أقل وضوحاً ولكن مع فرضيات أكثر عمومية ، بينما تبقى في حالة "ناقذة بشدة".

يعتمد معدل الانقراض على الخصائص الطيفية للمصفوفة الفرعية اللانهائية المستخرجة من (1) مع $\mathbf{Z}_{1,1}$ في الزاوية اليسرى العليا. نحدد

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\sum_{n_1, \dots, n_J \geq 0} n_i \pi_j^{(k)}(n_1, \dots, n_J) - \delta_{i,j} \right), \quad (2)$$

مع $\delta_{i,j} = 1$ إذا $i = j$ ، $\delta_{i,j} = 0$ إذا $i \neq j$. نحدد

- $M^{(k)}$: المصفوفة $(M_{i,j}^{(k)})$
- $\text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$: مصفوفة كتلة قطرية مع $M^{(1)}, \dots, M^{(K)}$ على القطر
- ω_1 : الحد الطيفي، أي القيمة الذاتية الأكبر جزء حقيقي من المصفوفة

$$\Omega^{[1]} = \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} + \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)}).$$

\mathbf{I} هي مصفوفة هوية الأمر J و $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$ هو منتج الموتر من المصفوفتين.

الحسابات في القسم 2 تشير إلى ذلك ω_1 سيكون معدل انقراض السكان لقيم معينة من المعلمات. ومع ذلك، لا يزال هذا تخمينًا.

في القسم 3، ننظر أولاً في الحالة الخاصة لعمليات الولادة والوفاة من عدة أنواع، ثم نقتصر على السكان الذين لديهم نوعان فقط من الأفراد. نقدم مثالاً حيث نقارن القيمة العددية لـ ω_1 مع الحد α_1 إذا $n \rightarrow \infty$ الحد الطيفي للمصفوفة الفرعية المحدودة (1) مع $Z_{1,1}$ في الزاوية اليسرى العليا و $Z_{n,n}$ في الركن الأيمن السفلي. تشير النتائج العددية إلى المساواة بين هذين الرقمين لقيم معينة من المعلمات ولكن ليس للجميع، كما هو الحال في حالة وجود نوع واحد فقط من الأفراد (Bacaër, 2017c). نفترض أيضاً أن الحد α_1 هو معدل انقراض السكان، على سبيل المثال الحد

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J).$$

وفقاً لـ (Collet et al., 2013, section 4.5)، فإن هذا الحد (يسمى معلمة كينجمان) لا يعتمد على k ولا على (n_1, \dots, n_J) بشرط $n_1 + \dots + n_J \geq 1$ ، ولا الشروط الأولية (البيئة وعدد الأفراد من الأنواع المختلفة).

2. حالة عامة

2.1 نظام المعادلات التفاضلية

تدوينات:

- $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_J)$
- $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$: الناقل الذي J تساوي 0 المكونات.
- $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$ يعني $n_i \geq 0 \forall i$
- $\mathbf{u}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$: المتجه مع 1 في الموضع j .

يفترض النموذج أن ذلك

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) = & - \sum_{j=1}^J n_j c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} p^{(h)}(t, \mathbf{n}) \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{n}} (r_j + 1) c_j^{(k)} p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) \pi_j^{(k)}(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_J) \geq \mathbf{0}$ و $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_J) \geq \mathbf{0}$ هي ناقلات ذات أعداد صحيحة موجبة أو صفرية. في الواقع، إذا كان هناك \mathbf{n} أفراد في البيئة k في الوقت t ، فهناك احتمال خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt $n_j c_j^{(k)} dt$ أن حدث يحدث لأحد n_j الأفراد من النوع j ، وكذلك الاحتمال $Q_{k,k} dt$ أن البيئة تتحول إلى حالة أخرى. إذا كان هناك من ناحية أخرى \mathbf{n} في بيئة h ، فهناك احتمال $Q_{k,h} dt$ أن البيئة تتحول إلى الحالة k . أخيراً، إذا كان هناك $\mathbf{r} + \mathbf{u}_j$ الأفراد في البيئة k ، يحدث حدث في أحد $(r_j + 1)$ اكتبي الأفراد باحتمال $c_j^{(k)} dt$ ونجد في مكانها \mathbf{s} الأفراد من أنواع مختلفة مع الاحتمال $\pi_j^{(k)}(\mathbf{s})$. إذا كان لدينا $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{n}$ ، ينتهي بنا الأمر مع n_i الأفراد من نوع j لجميع j . النظام (3) له البنية (1).

2.2 نظام المعادلات التفاضلية الجزئية

نحدد $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$ و $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ نحدد وظائف التوليد

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J},$$

أين x_i هي أرقام معقدة ومؤشرات n_i أعداد صحيحة. لأن

$$\sum_k \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} p^{(k)}(t, n_1, \dots, n_J) = 1,$$

يتضمن مجال التقارب في هذه السلسلة المجموعه $\{(x_1, \dots, x_J); |x_i| < 1 \forall i\}$ (كارتان، 1961، الفصل الرابع). نحدد

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} \pi_j^{(k)}(\mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

نملك $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ لدينا بعد ذلك

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{r} \geq \mathbf{0}} (r_j + 1) p^{(k)}(t, \mathbf{r} + \mathbf{u}_j) x_1^{r_1} \dots x_J^{r_J}.$$

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} \frac{dp^{(k)}}{dt}(t, \mathbf{n}) x_1^{n_1} \dots x_J^{n_J}.$$

مع النظام (3) نحصل

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) - x_j) \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

هو تعميم للنظام (3) في (باقر ، 2017 ج) ، وهو ما يتوافق مع $J = 1$.

2.3 متجه الوسائل

نحدد القيم المتوسطة

$$E_i^{(k)}(t) = \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_i}(t, \mathbf{1}) = \sum_{\mathbf{n} \geq 0} n_i p^{(k)}(t, \mathbf{n}).$$

مع $g_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ نستنتج من المعادلة (4) مع أخذ مشتقها الجزئي بالنسبة إلى x_i ثم أخذ $\mathbf{x} = \mathbf{1}$

$$\frac{dE_i^{(k)}}{dt} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} E_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} E_j^{(k)},$$

مع

$$M_{i,j}^{(k)} = c_j^{(k)} \left(\frac{\partial g_j^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) - \delta_{i,j} \right) \quad (5)$$

كما في المقدمة ، وحيث نفترض ذلك $M_{i,j}^{(k)} < +\infty$ لجميع قيم الفهرس. هو تعميم المعادلة (4) من (Bac er، 2017c) ، التي تقابل $J = 1$. نحدد \mathbf{E} ، ناقل العمود

$$(E_1^{(1)}, \dots, E_J^{(1)}, \dots, E_1^{(K)}, \dots, E_J^{(K)}).$$

لدينا بعد ذلك $\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \mathbf{\Omega}^{[1]} \mathbf{E}$ مع

$$\mathbf{\Omega}^{[1]} = \begin{pmatrix} Q_{1,1} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(1)} & Q_{1,2} \mathbf{I} & \dots & Q_{1,K} \mathbf{I} \\ Q_{2,1} \mathbf{I} & Q_{2,2} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{K-1,K} \mathbf{I} \\ Q_{K,1} \mathbf{I} & \dots & Q_{K,K-1} \mathbf{I} & Q_{K,K} \mathbf{I} + \mathbf{M}^{(K)} \end{pmatrix}$$

كما في المقدمة. نتذكر ذلك ω_1 هو الحد الطيفي لهذه المصفوفة ، أي القيمة الذاتية لأكبر جزء حقيقي. لان $Q_{k,h} \geq 0 \forall k \neq h$ و $M_{i,j}^{(k)} \geq 0 \forall i \neq j$ ، نلاحظ ذلك بالفعل $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ هي مصفوفة تكون معاملات خارج القطر كلها $0 \leq$ وفقاً للنتيجة الطبيعية لنظرية Perron و Frobenius ، $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ لديها قيمة eigenvalue حقيقية مهيمنة ، وهذا يعني أكبر من الجزء الحقيقي من جميع القيم الذاتية الأخرى.

للتبسيط ، نفترض أن المصفوفة \mathbf{Q} غير قابلة للاختزال: $\forall k \neq h: \exists (k_0, \dots, k_N), \forall k \neq h: Q_{k,k_0} > 0 \forall n \cdot k_N = h \cdot k_0 = k$. نفترض أيضاً أن المصفوفات $\mathbf{M}^{(k)}$ كلها غير قابلة للاختزال. لذا المصفوفة $\mathbf{\Omega}^{[1]}$ هو أيضاً غير قابل للاختزال. مع $\mathbf{E}(0) \neq 0$ ، نملك

$$\frac{1}{t} \log \|\mathbf{E}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \omega_1$$

و ω_1 هو معدل نمو أو نقص متجه التوقعات $\mathbf{E}(t)$.

2.4 القضية دون الدرجة

دعونا نفكر في تسلسل ثابت للبيانات الناتجة عن سلسلة ماركوف في وقت مستمر من المصفوفة \mathbf{M} : البيئة هي الأولى k_0 إلى عن على $t_0 < t < t_1$ مع $t_0 = 0$ ، ثم k_1 إلى عن على $t_1 < t < t_2$ ، إلخ. بين فترتين في البيئة ، يتطور السكان وفقاً لعملية اتصال وقت مستمرة مع عدة أنواع في بيئة ثابتة. بالنسبة إلى عملية الزمن المستمرة ، يمكننا ربط عملية زمنية منفصلة تراعي فقط حالة السكان في instans t_n حيث تتغير البيئة. كلتا العمليتين في نفس الوقت فوق الدرجة أو الحرجة أو دون الحرجة.

متجه توقعات السكان من كل نوع ، $\mathbf{e}(t) = (e_1(t), \dots, e_J(t))$ ، مع العلم أن البيئة k_n إلى عن على $t_n < t < t_{n+1}$ ، هو حل $\frac{de}{dt} = \mathbf{M}^{(k_n)} \mathbf{e}(t)$ خلال هذه الفترة الزمنية. مع $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ ، نملك $\mathbf{e}(t_{n+1}) = \exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \mathbf{e}(t_n)$ بحسب (أثرنا وكارلين ، 1971 ، قسم 4) ، ما يلي

$$\frac{1}{n} \log \|\exp(\tau_n \mathbf{M}^{(k_n)}) \dots \exp(\tau_0 \mathbf{M}^{(k_0)})\| \quad (6)$$

يكاد يكون من المؤكد أن يتقارب إلى أقصى حد λ_1 بغض النظر عن مجموعة البيانات الخاصة. بالإضافة إلى ذلك ، من شبه المؤكد أن السكان في عملية الوقت المنفصل يمتون في الحالة دون الدرجة حيث $\lambda_1 < 0$ وليس هناك انقراض مع احتمال إيجابي بحت إذا $\lambda_1 > 0$. لذا فإن عملية الوقت المتواصل في نموذج البداية لدينا هي أيضًا حرجة إذا $\lambda_1 < 0$. إذا كانت T هي الحد الأقصى t_n/n إذا $n \rightarrow +\infty$ ، نلاحظ أن λ_1/T هو داعية ليايونوف للنظام التفاضلي $e(t)$.

أخيرًا ، لاحظ أن الحد الطيفي ω_1 من القسم السابق يمكن أن يكون إيجابيا بينما λ_1 سلبي. هذا ممكن بالفعل عندما يكون هناك نوع واحد فقط من الأفراد (Bacaër and Ed-) (Darraz، 2014).

2.5 القيم الذاتية في الحالة العادية

بالنسبة للنظام (4) ، نحن نبحث عن حلول

$$f^{(k)}(t, \mathbf{x}) = e^{\omega t} F^{(k)}(\mathbf{x})$$

مع وظائف $F^{(k)}(x)$ وهي ليست جميعها متطابقة تمامًا. لقد فعلنا ذلك

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J c_j^{(k)} (g_j^{(k)}(\mathbf{x}) - x_j) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_j}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

مع الأخذ $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ، نحن نرى ذلك

$$\omega F^{(k)}(\mathbf{1}) = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} F^{(h)}(\mathbf{1}).$$

هناك نوعان من الحالات الممكنة:

- $F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0 \forall k$
- ω هو القيمة الذاتية للمصفوفة \mathbf{Q} .

إذا كانت الوظائف $F^{(k)}(\mathbf{x})$ تحليلية في حي $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ (هذه هي "الحالة العادية") ، ثم نرى كما في القسم 2.3 ، باشتقاق المعادلة (7) فيما يتعلق x_i وأخذ $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ،

$$\omega \phi_i^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_i^{(h)} + \sum_{j=1}^J M_{i,j}^{(k)} \phi_j^{(k)},$$

مع $\phi_i^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1})$. لذلك هناك أيضًا حالتان محتملتان:

- $\frac{\partial F^{(k)}}{\partial x_i}(\mathbf{1}) = 0 \forall i, \forall k$
- ω هو قيمة ذاتية لـ $\Omega^{[1]}$.

نحدد

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}(\mathbf{1}).$$

يتم تحديد $n \geq 2$. نحن نفترض ذلك $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{(k)} = 0 \forall 1 \leq k \leq K$ و $1 \leq m < n$ و $(i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, J\}^m$. نستمد المعادلة (7) فيما يتعلق ب x_{i_1}, \dots, x_{i_n} ونأخذ $\mathbf{x} = \mathbf{1}$. بسبب الافتراض على المشتقات الجزئية للأمر $n > 1$ ولسبب $\phi_j^{(k)}(\mathbf{1}) = 1$ ، تبقى فقط المصطلحات التالية:

$$\omega \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = \sum_{j=1}^J \left[M_{i_1, j}^{(k)} \phi_{j, i_2, \dots, i_n}^{(k)} + \dots + M_{i_n, j}^{(k)} \phi_{i_1, i_2, \dots, j}^{(k)} \right] + \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(h)} \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, J\}^n, \quad 1 \leq k \leq K. \quad (8)$$

لذلك هناك حالتان محتملتان:

- $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(k)} = 0 \forall i_1, \dots, i_n, \quad \forall k$
- ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة المربعة $\Omega^{[n]}$ من أجل $K \times J^n$ محددة بالمعادلات الخطية (8).

باختصار ، نستنتج أنه إذا كانت الوظائف الذاتية $F^{(k)}(\mathbf{x})$ المرتبطة ω eigenvalue التحليلية في حي $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ ، ثم ω هي قيمة ذاتية للمصفوفة \mathbf{Q} ، أو ω هي قيمة ذاتية للمصفوفة $\Omega^{[n]}$ ل $n \geq 1$. معينة في الواقع ، إذا لم يكن هذا هو الحال ، لكننا

$$F^{(k)}(\mathbf{1}) = 0, \quad \phi_i^{(k)} = 0 \quad \forall i, \forall k.$$

من ما سبق ، نستنتج ذلك بالبحث $\phi_{i_1, \dots, i_n}^{(k)} = 0$ لجميع المؤشرات $n \geq 2$. وفقا لمبدأ التمديد التحليلي (كارتان ، 1961 ، الفصل الرابع) ، $F(x)$ سيكون صفرًا تمامًا ، وهو أمر غير ممكن.

إذا كانت $J = 1$ ، فإننا نكتب ببساطة أكبر

$$\psi_n^{(k)} = \frac{\partial^n F^{(k)}}{\partial x_1^n}(\mathbf{1}), \quad M^{(k)} = c_1^{(k)} \left(\frac{\partial g_1^{(k)}}{\partial x_1}(\mathbf{1}) - 1 \right).$$

$$\omega \psi_n^{(k)} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} \psi_n^{(h)} + n M^{(k)} \psi_n^{(k)}.$$

نستنتج ذلك ω هو قيمة ذاتية للمصفوفة $\mathbf{Q} + n \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})$ مع $n \geq 1$. وقد لاحظ القسم 4.2 من (Bacaër, 2017a) بالفعل هذه الحالة الخاصة للعمليات الخطية للولادات والوفيات بنوع واحد.

2.6 المصفوفة المقطوعة

نحدد \mathbf{Y}_n المصفوفة الفرعية المحدودة للمصفوفة (1) مع $\mathbf{Z}_{1,1}$ في الزاوية اليسرى العليا و $\mathbf{Z}_{n,n}$ في الركن الأيمن السفلي. الحد الطيفي لهذه المصفوفة هو ذلك $\mu_n \leq \mu_{n+1} \leq 0$. كما هو الحال في الاقتراح 2 من (Bacaër, 2017a)، فإننا نحدد 1 ناقلات الخط $(1, \dots, 1)$ بحجم مناسب. لدينا بعد ذلك

$$\mathbf{1} \mathbf{Y}_n \leq \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{1}.$$

إذا لدينا $\mu_n \leq 0$ (انظر على سبيل المثال (Nkague Nkamba, 2012, Theorem 30.1)). يوجد ناقل العمود $\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ مع

$$\mathbf{Y}_n \mathbf{v}_n = \mu_n \mathbf{v}_n$$

و $\mathbf{v}_n \geq 0$. نحدد \mathbf{w}_n ناقل العمود $(\mathbf{v}_n, \mathbf{0})$. لدينا بعد ذلك

$$\mathbf{Y}_{n+1} \mathbf{w}_n \geq \mu_n \mathbf{w}_n$$

لأن معاملات المصفوفات $\mathbf{Z}_{n+1,1}, \dots, \mathbf{Z}_{n+1,n}$ هم ≥ 0 . نستنتج ذلك $\mu_{n+1} \geq \mu_n$ من (Nkague Nkamba, 2012, Theorem 30.3). من هذا، يتبع ذلك أيضًا الحد α_1 من μ_n إذا $n \rightarrow \infty$ يوجد.

3. حالات خاصة

3.1 عمليات الولادة والوفاة

لكل بيئة k ، نعطي أنفسنا كما في (Bacaër, 2017b) ثلاث مصفوفات من نفس الحجم: مصفوفة الولادة $\mathbf{A}^{(k)} = (A_{i,j}^{(k)})$ مع المعاملات ≥ 0 مصفوفة نقل $\mathbf{T}^{(k)} = (T_{i,j}^{(k)})$ مع

$$\sum_i T_{i,j}^{(k)} = 0 \quad \forall j, \quad T_{i,j}^{(k)} \leq 0 \quad \forall i \neq j,$$

ومصفوفة إخراج قطرية $\mathbf{S}^{(k)} = (S_{j,j}^{(k)})$ مع $S_{j,j}^{(k)} \geq 0 \quad \forall j$. بمعنى آخر، خلال كل فترة زمنية متناهية الصغر dt ، كل فرد من النوع j الموجود في البيئة a

- الاحتمال $A_{i,j}^{(k)} dt$ لتلد نوع جديد أنا فرد،
- الاحتمال $-T_{i,j}^{(k)} dt$ للتحول إلى فرد من النوع i مع $i \neq j$ ،
- الاحتمال $S_{j,j}^{(k)} dt$ أن يموت أو يترك السكان.

لقد فعلنا ذلك

$$c_j^{(k)} = \sum_i A_{i,j}^{(k)} + T_{j,j}^{(k)} + S_{j,j}^{(k)}$$

و

$$g_j^{(k)}(x_1, \dots, x_J) = \left[\sum_i A_{i,j}^{(k)} x_i x_j + S_{j,j}^{(k)} - \sum_{i \neq j} T_{i,j}^{(k)} x_i \right] / c_j^{(k)}.$$

نحدد $B_{i,j}^{(k)} = T_{i,j}^{(k)} + S_{i,i}^{(k)}$. ثم نُكتب المعادلة (4)

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \sum_{h=1}^K Q_{k,h} f^{(h)} + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J [x_i - 1] [A_{i,j}^{(k)} x_j - B_{i,j}^{(k)}] \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x_j}, \quad (9)$$

وهو تعميم المعادلة الواردة في القسم 2 من (Bacaër and Ait Dads, 2014) في حالة البيئة العشوائية، أو تعميم المعادلة (5) من (Bacaër, 2017a) في حالة أنواع متعددة. من خلال تمييز الحالة حيث $i = j$ من تلك حيث $i \neq j$ ، فإننا نظهر ذلك بسهولة $M_{i,j}^{(k)}$ ، محددة بالمعادلة (5)، تعطى بواسطة $M_{i,j}^{(k)} = A_{i,j}^{(k)} - B_{i,j}^{(k)}$. السكان دون حرج إذا $\lambda_1 < 0$.

3.2 نوعان من الأفراد

خذ حالة عملية الولادة والوفاة حيث لا يوجد سوى نوعين من $J = 2$ ، مما يجعل من الممكن ترتيب الحالات المختلفة للسكان بسهولة. دعونا نقدم المصفوفات القطرية

$$\mathbf{C}_j = \text{diag}(c_j^{(1)}, \dots, c_j^{(K)}), \quad \mathbf{A}_{i,j} = \text{diag}(A_{i,j}^{(1)}, \dots, A_{i,j}^{(K)}),$$

$$\mathbf{T}_{i,j} = \text{diag}(T_{i,j}^{(1)}, \dots, T_{i,j}^{(K)}), \quad \mathbf{S}_{j,j} = \text{diag}(S_{j,j}^{(1)}, \dots, S_{j,j}^{(K)}).$$

نرتب الوظائف $p^{(k)}(t, n_1, n_2)$ حسب العدد الكلي $n_1 + n_2$ من الأفراد ، وهذا الرقم ثابت ، حسب عدد الأفراد من النوع 1 ثم بالبيئة. بهذا الترتيب ، نعتبر متجه العمود اللامتاهي

$$\mathbf{p}(t) = (p^{(1)}(t, 0, 0), \dots, p^{(K)}(t, 0, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 0), \dots, p^{(K)}(t, 1, 0), \\ p^{(1)}(t, 0, 1), \dots, p^{(K)}(t, 0, 1), \\ p^{(1)}(t, 2, 0), \dots, p^{(K)}(t, 2, 0), \\ p^{(1)}(t, 1, 1), \dots, p^{(K)}(t, 1, 1), \\ p^{(1)}(t, 0, 2), \dots, p^{(K)}(t, 0, 2), \dots).$$

ثم يتم كتابة النظام (3) $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{Z}\mathbf{p}(t)$.

• \mathbf{Z} هي المصفوفة الثلاثية اللانهائية بالكتل

$$\left(\begin{array}{c|cccc} \mathbf{Z}_{0,0} & \mathbf{Z}_{0,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{1,1} & \mathbf{Z}_{1,2} & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{2,1} & \mathbf{Z}_{2,2} & \ddots & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{Z}_{n-1,n} & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{n,n-1} & \mathbf{Z}_{n,n} & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right)$$

والأصفار هي صفر مصفوفات من الحجم المناسب ؛

• $\mathbf{Z}_{n,n}$ هي المصفوفة المربعة ، وحجمها $(n+1)K$ ، وهو ثلاثي الأبعاد بواسطة الكتل ، والذي يصف التحولات عندما يكون العدد الإجمالي للأفراد n وعندما لا يتغير هذا (القفز من البيئة أو نقل الفرد إلى الآخر من النوعين)

$$\left(\begin{array}{cccc} \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_1 & -\mathbf{T}_{1,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -n\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-1)\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 & -2\mathbf{T}_{1,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -(n-1)\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - (n-2)\mathbf{C}_1 - 2\mathbf{C}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -n\mathbf{T}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -\mathbf{T}_{2,1} & \mathbf{Q} - n\mathbf{C}_2 \end{array} \right)$$

و $\mathbf{Z}_{0,0} = \mathbf{Q}$

• $\mathbf{Z}_{n-1,n}$ هي مصفوفة مستطيلة مع nK خطوط و $(n+1)K$ الأعمدة التي تحتوي فقط على نطاقات كتلة غير صفريين ويصف التحولات التي ينتقل منها العدد الإجمالي للأفراد n إلى $n-1$ (الموت أو الإفرازات)

$$\left(\begin{array}{cccc} n\mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{2,2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{S}_{1,1} & 2\mathbf{S}_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{1,1} & n\mathbf{S}_{2,2} \end{array} \right);$$

• $\mathbf{Z}_{n+1,n}$ هي مصفوفة مستطيلة مع $(n+2)K$ خطوط و $(n+1)K$ الأعمدة ، أيضاً مع شريطين كتلة غير صفريين ، يصف التحولات حيث ينتقل العدد الإجمالي للأفراد n إلى $n+1$ (المواليد)

$$\left(\begin{array}{cccc} n\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ n\mathbf{A}_{2,1} & (n-1)\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} & & \vdots \\ \mathbf{0} & (n-1)\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \mathbf{A}_{1,1} + (n-1)\mathbf{A}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{A}_{2,1} + (n-1)\mathbf{A}_{2,2} & n\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & n\mathbf{A}_{2,2} \end{array} \right)$$

كمثال على عملية مع نوعين من الأفراد ، ضع في اعتبارك حالة نموذج الوباء الخطي (Bacær and Ait Dads، 2014) ، حيث النوع الأول من الأفراد هم مصابون ولكن ليسوا معديين بعد (أي في المرحلة الكامنة) ونوع 2 الأفراد المعدية. تتوافق الحالة الخطية دون الدرجة على سبيل المثال مع الحالة التي يتم فيها استيراد المرض إلى بيئة عشوائية غير مواتية لانتشاره. لدينا بعد ذلك

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^{(k)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

المعلمة τ هي المعدل الذي يصبح فيه الأشخاص في المرحلة الكامنة معدية ، بغض النظر عن البيئة. المعلمة $\beta^{(k)}$ هو المعدل الذي يصيب فيه الأشخاص المعديون الأشخاص الجدد في بداية الوباء ؛ يعتمد على البيئة بسبب تأثير المناخ على احتمالية انتقاله. المعلمة γ هي معدل الشفاء للعدوى. لقد فعلنا ذلك

$$\mathbf{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} -\tau & \beta^{(k)} \\ \tau & -\gamma \end{pmatrix}.$$

نفترض أيضاً أنه لا يوجد سوى بيئات مختلفة K و 2

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_1 & q_2 \\ q_1 & -q_2 \end{pmatrix}.$$

النظام (9) مكتوب

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = q_2 f^{(2)} - q_1 f^{(1)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_1} + [\beta^{(1)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}$$

و

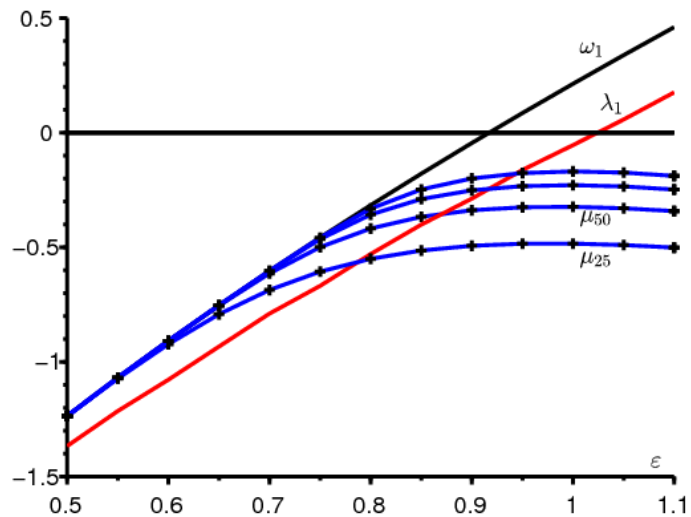
$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} = q_1 f^{(1)} - q_2 f^{(2)} + \tau(x_2 - x_1) \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_1} + [\beta^{(2)}(x_1 - 1)x_2 - \gamma(x_2 - 1)] \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_2}.$$

لقد اخترنا القيم العددية التالية المستخدمة في (Bacær، Ait Dads، 2014) للحصبة: $1/\tau = 8$ أيام، $1/\gamma = 5$ أيام. إلى عن على $\beta^{(k)}$ ، نفترض ذلك $\beta^{(1)} = 4\varepsilon$ شهريا (شهر 30 يوما) وذلك $\beta^{(2)} = 8\varepsilon$ في الشهر. في (Bacær and Ait Dads، 2014) ، تفاوت المعامل بشكل دوري بين 4 و 8 في الشهر للحصول على توافق جيد مع منحنى الوباء. المعلمة ε مخصصة للتغيير. أخيراً افترض ذلك $q_1 = q_2 = 1$ ، بحيث تنفق البيئة في المتوسط نصف الوقت في كل من الدولتين.

باستخدام طريقة تكرارية تستفيد من بنية الكتلة ثلاثية الأبعاد (Ciarlet ، 2006) ، نقدر الحد الطيفي μ_n المصفوفة الفرعية المحدودة \mathbf{Y}_n من \mathbf{Z} إذا كانت n تساوي 25 و 50 و 100 و 200. هذه المصفوفة الفرعية مربعة الحجم

$$2K + 3K + \dots + (n + 1)K = n(n + 3)K/2.$$

كما نقدر المعلمة الحرجة λ_1 مرتباً بأسس ليابونوف باستخدام 5000 قفزة من البيئة. وتظهر النتائج في الشكل 1. لاحظ أنه إذا كانت البيئة ثابتة ، فإن العملية ستكون حاسمة بالنسبة $\gamma < \beta$.



الشكل 1. المعلمة الحرجة λ_1 (بالاحمر)، ω_1 (باللون الأسود) و μ_n (باللون الأزرق مع الصليبان ل $n \in \{25, 50, 100, 200\}$ من الأعلى إلى الأسفل) كدالة ε . معدل الانقراض α_1 هو حد μ_n إذا $n \rightarrow \infty$.

الرقم يشير إلى أن لدينا $\alpha_1 = \omega_1$ إذا ε صغير ، لا سيما طالما $\beta^{(1)} < \gamma$ و $\beta^{(2)} < \gamma$ ، بعبارات أخرى $\frac{8\varepsilon}{30} < \frac{1}{5}$ ، ذلك بالقول $0,75 < \varepsilon$. لكن $\alpha_1 < \omega_1$ في منطقة حيث λ_1 لا تزال سلبية للغاية. للأسف ، لم تتمكن من التحديد α_1 بشكل أوضح. من المتوقع أن $\alpha_1 = 0$ إذا $\lambda_1 = 0$. تذكر أنه عندما يكون هناك نوع واحد فقط من الأفراد ($J = 1$) ، المصفوفات $\mathbf{M}^{(k)}$ هي في الواقع أرقام قياسية $M^{(k)}$ و (باكير ، 2017 ج) يميل إلى إظهار ذلك في هذه الحالة

$$\alpha_1 = \min_{0 \leq \theta \leq 1} s(\mathbf{Q} + \theta \text{diag}(M^{(1)}, \dots, M^{(K)})).$$

(٠) ويدل على الحد الطيفي لمصفوفة. التناظرية لهذه الصيغة عندما يكون هناك عدة أنواع من الأفراد لا يزال يتعين تحديدها. (Dyakonova ، 2013 ؛ Dyakonova ، 2008) فشلت أيضًا في القيام بذلك في نماذج الوقت المنفصلة. لا شك في فهم أفضل لسلوك الوظائف $F^{(k)}(\mathbf{x})$ بالقرب من نقطة المفرد $\mathbf{x} = \mathbf{1}$ في النظام (7) سيسمح بالتقدم.

المراجع البيولوجية

- K. B. Athreya, S. Karlin (1971) On branching processes with random environments : I. Extinction probabilities, Ann. Math. Stat. 42, 1499–1520.
- N. Bacaër (2017a) Sur les processus linéaires de naissance et de mort sous-critiques dans un environnement aléatoire, J. Math. Biol. 75, 85–108.
- N. Bacaër (2017b) Sur la probabilité d’extinction dans des modèles mathématiques d’épidémies, C. R. Biol. 340, 453–455.
- N. Bacaër (2017c) Sur la vitesse d’extinction d’une population dans un environnement aléatoire, C. R. Biol. 340, 259–263.
- N. Bacaër, A. Ed-Darraz (2014) Sur les processus linéaires de naissance et de mort dans un environnement aléatoire, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266287>
- N. Bacaër, E. H. Ait Dads (2014) Sur la probabilité d’extinction dans un environnement périodique, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01266292> .
- H. Cartan (1961) Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris.
- P. G. Ciarlet (2006) Introduction à l’analyse numérique matricielle et à l’optimisation, Dunod, Paris.
- P. Collet, S. Martinez, J. San Martin (2013) Quasi-stationary Distributions, Springer, Berlin.
- E. E. Dyakonova (2008) On subcritical multi-type branching process in random environment, Discr. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. AI, 397–404.
- E. E. Dyakonova (2013) Multitype subcritical branching processes in a random environment, Proc. Steklov Inst. Math. 282, 80–89.
- S. Méléard (2016) Modèles aléatoires en écologie et évolution, Springer/SMIAI, Berlin.
- L. Nkague Nkamba (2012) Robustesse des seuils en épidémiologie et stabilité asymptotique d’un modèle à infectivité et susceptibilité différentielle, Thèse de l’Université de Lorraine.
- B. Sericola (2013) Chaînes de Markov – théorie, algorithmes et applications, Lavoisier, Paris.
- V. Vatutin, V. Wachtel (2017) Subcritical multitype branching process in random environment, <https://arxiv.org/abs/1711.07453>