



**HAL**  
open science

## La martingale d'Azéma

Catherine Rainer

► **To cite this version:**

Catherine Rainer. La martingale d'Azéma. Séminaire de Probabilités, 2019, 2252, pp.23-29. hal-02167277v2

**HAL Id: hal-02167277**

**<https://hal.science/hal-02167277v2>**

Submitted on 5 Jul 2019 (v2), last revised 29 Nov 2023 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La martingale d’Azéma

Catherine Rainer

July 1, 2019

Azéma était mon directeur de thèse dans la première moitié des années 1990. Ayant quitté à la fois le domaine et le milieu de la théorie générale des processus, je ne me sens pas vraiment habilitée à écrire un témoignage sur l’être humain que j’ai ainsi perdu de vue depuis longtemps ni d’écrire un article mathématique autour ou à la suite de ses recherches. Mais, en laissant divaguer mes souvenirs, il m’est venu rapidement l’envie de parler de la martingale d’Azéma, qui, avec le recul, me semble emblématique de cette époque et de la personnalité de son inventeur.

La martingale d’Azéma, telle qu’elle est définie dans l’article “Etude d’une martingale remarquable” d’Azéma et Yor [5], est la projection optionnelle d’un mouvement Brownien sur la filtration engendrée par son signe.

Plus précisément, considérons un mouvement Brownien standard en dimension 1,  $(B_t)$ , tel que  $B_0 = 0$ . Pour tout  $t \geq 0$ , on pose

$$\text{sign}(B_t) = \begin{cases} 1, & \text{si } B_t \geq 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration rendue continue à droite et complétée, engendrée par le processus  $(\text{sign}(B_t))_{t \geq 0}$ .

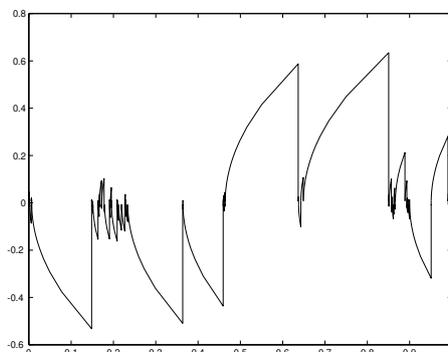
**Definition 1** On appelle **martingale d’Azéma** le processus  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  tel que, pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mu_t = E[B_t | \mathcal{F}_t]$ .

Ce processus peut être calculé explicitement :

$$\mu_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(B_t) \sqrt{t - g_t}, \tag{1}$$

où  $g_t = \sup\{s \leq t, B_s = 0\}$  est, pour tout  $t \geq 0$ , le dernier instant avant  $t$  où le mouvement brownien touche 0.

Du coup les trajectoires de  $(\mu_t)$  ont l’allure suivante <sup>1</sup> :



---

<sup>1</sup>Merci beaucoup à Nathanael Enriquez, pour le prêt de ses graphiques tirés de [14] !

On peut définir aussi une “deuxième martingale d’Azéma” :  $\nu_t := |\mu_t| - L_t^0$ , où  $(L_t^0)$  est le temps local en zéro du mouvement brownien, qui représente la projection optionnelle du processus  $(|B_t| - L_t^0)$  sur la filtration  $(\mathcal{G}_t)$  engendrée par les zéros du mouvement brownien, i.e. vérifiant  $\mathcal{G}_t = \sigma\{g_s, s \leq t\}$ . Il est à noter que c’est cette deuxième martingale qui fut inventée en premier : elle apparaît en 1984 à la 67ème page du gros article “Sur les fermés aléatoires” d’Azéma [4]. En effet, dans le chapitre 6 -qui s’appelle “Une sous-martingale remarquable”-, étant donné un fermé aléatoire  $H$  quelconque dans  $\mathbb{R}_+$  et un temps local  $(L_t)$  dont il est le support, l’auteur définit une sous-martingale  $(Y_t)$  définie à partir du noyau de Lévy et des extrémités gauches de  $H$ , telle que  $(Y_t - L_t)$  est une martingale locale s’annulant sur  $H$ . La martingale  $(\nu_t)$  en est le cas particulier lorsque  $H$  est l’ensemble des zéros du mouvement brownien.

On montre facilement que les deux martingales  $(\mu_t)$  et  $(\nu_t)$  sont purement discontinues. Un premier intérêt en est donc de livrer des exemples de martingales purement discontinues qui n’appartiennent pas à la famille des processus de Poisson. De plus la première a la propriété remarquable de posséder les mêmes zéros et le même signe qu’un mouvement brownien. L’article d’Azéma-Yor [5] développe un grand nombre de résultats et de propriétés autour de la martingale  $(\mu_t)$ . Parmi celles-ci, c’est principalement la propriété de représentation chaotique qui a motivé l’intérêt accru qu’on lui a porté.

**Definition 2** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  une martingale telle  $\langle X, X \rangle_t = t$ , et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f : \Delta_n = \{0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1\} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de carré intégrable. Alors, l’intégrale itérée

$$I_n(f) = \int_{\Delta_n} f(t_1, \dots, t_n) dX_{t_1} \dots dX_{t_n}$$

est bien définie. L’ensemble  $\chi_n$  de ces variables  $I_n(f)$  est appelé le  **$n$ -ième chaos généré par  $(X_t)$** , et on dit que  $(X_t)$  a la **propriété de représentation chaotique (PRC)** si l’espace engendré par l’union des chaos (où  $\chi_0$  est l’ensemble des variables constantes) est dense dans l’espace  $L^2$  des variables de carré intégrable, i.e. si toute variable  $X \in L^2$  peut s’écrire sous la forme

$$X = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(f_n),$$

avec  $f_n \in L^2(\Delta_n)$ .

La PRC est importante pour les probabilités quantiques, chaque martingale la possédant fournissant un exemple d’interprétation probabiliste de l’espace de Fock (voir par exemple Meyer [17]). Il est connu depuis Wiener [20] que le mouvement Brownien et les processus de Poisson compensés ont la propriété de représentation chaotique. La question (posée par Meyer dans [16]) est : y en a-t-il d’autres, et si oui, est-il possible de caractériser les martingales possédant la PRC ?

C’est dans le but d’apporter une réponse à cette question que, dans son article “On the Azéma martingales”, Michel Emery introduit les “équations de structure”.

**Definition 3** (Emery [11]) Soit  $(X_t)$  une martingale vérifiant  $\langle X, X \rangle_t = t$ . On dit que  $(X_t)$  vérifie une **équation de structure** s’il existe un processus prévisible  $(\Phi_t)$  tel que

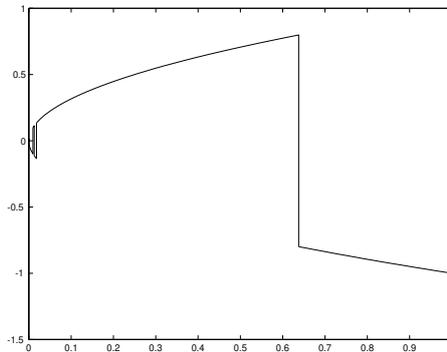
$$d[X, X]_t = dt + \Phi_t dX_t.$$

Après une première partie de résultats généraux sur les martingales vérifiant une telle équation, l'attention est portée sur une famille particulière de martingales, celles qu'Emery appelle "the Azéma martingales": on y considère les équations des structure de la forme

$$d[X, X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-})dX_t, \quad (2)$$

avec  $\alpha$  et  $\beta$  constantes. En voici les exemple les plus remarquables :

- Lorsque  $\alpha = \beta = 0$ , la solution de (2) est le mouvement brownien,
- pour  $\beta = 0$  mais  $\alpha \neq 0$ ,  $(X_t)$  est un processus de Poisson compensé.
- Une martingale très jolie est obtenue pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = -2$ . Elle vérifie  $|X_t| = \sqrt{t}$  et change de signe en des temps totalement non prévisibles, juste comme il faut pour être une martingale.<sup>2</sup>



- L'autre cas intéressant est celui où  $\alpha = 0$  et  $\beta = -1$  :

$$d[X, X]_t = dt - X_{t-}dX_t.$$

En effet la solution de cette équation n'est autre que la martingale d'Azéma  $(\mu_t)$ .

Le résultat central de l'article concernant ces martingales est

**Theorem 4** *On considère l'équation de structure*

$$d[X, X]_t = dt + \beta X_{t-}dX_t, X_0 = x_0. \quad (3)$$

1. Si  $\beta \leq 0$ , la solution de (3) est unique en loi, et c'est un processus de Markov fort.
2. Pour  $-2 \leq \beta \leq 0$ , la solution de (3) a la propriété de représentation chaotique.

**Corollary 5** *La martingale d'Azéma  $(\mu_t)$  a la propriété de représentation chaotique.*

A la recherche d'une caractérisation des martingales possédant la PRC, on peut voir facilement qu'une condition nécessaire en est la propriété de représentation prévisible : toute variable  $Z \in L^2$  s'écrit sous la forme  $Z = E[Z] + \int H_t dX_t$ , avec  $(H_t)$  processus prévisible. Une question naturelle est alors de savoir si les deux propriétés sont équivalentes.

<sup>2</sup>Même si c'est déjà un peu hors sujet, je ne peux m'empêcher d'évoquer le plaisir d'avoir retrouvée cette martingale de façon totalement inattendue en étudiant des jeux différentiels à information imparfaite [6]

C'est ainsi que le sujet de thèse proposé par Azéma peu de temps après la publication de l'article d'Emery s'intitulait "Propriétés de représentations prévisible et chaotique". Naïve et m'ennuyant un peu du calme train-train de mes études de mathématiques, c'est clairement le mot "chaotique" qui m'avait attirée (l'associant sûrement aussi à la théorie des catastrophes, très en vogue à cette époque). En réalité, sachant que la première martingale d'Azéma ( $\mu_t$ ) avait la PRC, ce sujet consistait à étudier si sa deuxième martingale ( $\nu_t$ ) l'avait aussi. La question s'est rapidement avérée beaucoup trop difficile, et la réponse restera sans doute pour toujours inconnue.

Alors que ma thèse se réorientait du coup vers d'autres extensions et variations de la théorie azémaïenne, Marc Yor a pris une place croissante dans nos discussions. J'ai eu alors le privilège d'être le témoin du couple Azéma-Yor. Leur symbiose était étonnante. En effet tout semblait les séparer : alors que Yor enrobait toute manifestation de sa virtuosité du message que, dans la vie, on n'était pas là pour rigoler mais pour travailler dur, Azéma cachait un esprit imperturbablement rigoureux derrière une nonchalance appuyée. Et pourtant je ne pense pas avoir vu d'autres personnes qu'Azéma à avoir réussi à faire aussi joyeusement rigoler Yor, et, inversement, Yor était peut-être la seule personne à rire aussi sincèrement des blagues volontiers mauvaises et politiquement incorrectes d'Azéma. Plus sérieusement je garde un beau souvenir de leur complicité mathématique. Par contre ce n'est qu'avec le recul, en me replongeant dans la vaste littérature, que j'entrevois la richesse et générosité de cette époque, peut-être déjà un peu finissante, mais dont ils faisaient pleinement partie, où, autour de Paul-André Meyer, sur la grande place publique du Séminaire de Probabilité, des grands hommes dialoguaient par petits articles interposés.

...-pendant que je bricolais donc des formules de balayage pour fermés marqués, la liste des équations de structure s'allongeait et avec elle, les martingales à représentation chaotique (voir par exemple [16], [3], les deux thèses de David Kurtz et Anthony Phan, [2]...). Emery a fini par construire un exemple contredisant la conjecture : la représentation prévisible n'entraîne pas la représentation chaotique ([12]). Alors que personne ne semble avoir trouvé de caractérisation des martingales possédant la PRC, la recherche de conditions suffisantes ou d'exemples ne s'est jamais arrêtée (voir par exemple récemment Di Tella-Engelbert [9]).

Ici se termine le vécu et fait place aux moteurs de recherche. Sur Mathscinet, parmi les 156 références pour les mots-clé "martingale" & "Azema" beaucoup se réfèrent à l'autre importante collaboration Azéma-Yor, le problème de Skorokhod. Mais on peut y découvrir aussi que, même actuellement encore, des articles portent -au moins en partie- sur la ou les martingales d'Azéma. La majeure partie se situe dans le domaine des probabilités quantiques, où les martingales d'Azéma figurent parmi les modèles probabilistes de base.

Puis il y a la finance (le jour où, dans un colloque, un monsieur m'a demandé des références sur la martingale d'Azéma, pour l'appliquer à la finance, je n'ai pas donné suite, parce que je n'ai pas cru que c'était sérieux. J'en ai toujours un peu honte). En effet, un premier article de Dritschel et Protter [10] propose simplement de remplacer dans le modèle d'un marché financier le mouvement Brownien par des martingales d'Azéma. Ensuite le fait que le dernier zéro  $\tau$  d'un processus puisse intervenir dans la modélisation dans des modèles de ruine avec information partielle (voir Cetin & al. [7]), appelle la martingale ( $\mu_t$ ) comme outil indispensable. Parallèlement apparaît aussi naturellement dans Gapeev & al. [15] la notion de "supermartingale d'Azéma"  $P[\tau > t | \mathcal{F}_t]$ , dont la référence la plus récente est d'Aksamit et Jeanblanc [1] en 2017.

Finalement il y a toujours, régulièrement des articles qui s'intéressent à la martingale d'Azéma

sans avoir besoin de justifier beaucoup le pourquoi [14], [8], [18], [19]...

Alors que l'homme s'est éteint aujourd'hui, cela fait longtemps que sa martingale s'est envolée pour vivre sa propre vie mathématique, et, désormais devenue un classique de la culture probabiliste, elle est promise à durer.

## References

- [1] Aksamit, Anna; Jeanblanc, Monique Enlargement of filtration with finance in view. SpringerBriefs in Quantitative Finance. Springer, Cham, 2017. x+150 pp
- [2] Attal, Stéphane; Belton, Alexander C. R. The chaotic-representation property for a class of normal martingales. *Probab. Theory Related Fields* 139 (2007), no. 3-4, 543–562
- [3] Attal, S.; Émery, M. Martingales d'Azéma bidimensionnelles. (French) [Two-dimensional Azéma martingales] *Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu. Astérisque* No. 236 (1996), 9–21
- [4] Azéma, J. Sur les fermés aléatoires. (French) [On random closed sets] *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 397-495, Lecture Notes in Math., 1123, Springer, Berlin, 1985.*
- [5] Azéma, J.; Yor, M. Étude d'une martingale remarquable. (French) [Study of a remarkable martingale] *Séminaire de Probabilités, XXIII, 88–130, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin, 1989.*
- [6] Cardaliaguet, Pierre; Rainer, Catherine On a continuous-time game with incomplete information. *Math. Oper. Res.* 34 (2009), no. 4, 769–794.
- [7] Çetin, Umut; Jarrow, Robert; Protter, Philip; Yildirim, Yildiray Modeling credit risk with partial information. *Ann. Appl. Probab.* 14 (2004), no. 3, 1167–1178.
- [8] Çetin, Umut, Filtered Azéma martingales. *Electron. Commun. Probab.* 17 (2012), no. 62, 13 pp.
- [9] Di Tella, Paolo; Engelbert, Hans-Jürgen The chaotic representation property of compensated-covariation stable families of martingales. *Ann. Probab.* 44 (2016), no. 6, 3965–4005.
- [10] Dritschel, M., Protter, P., Complete markets with discontinuous security price. *Finance Stoch.*, Vol. 2, 203–214, 1999.
- [11] Émery, Michel On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités, XXIII, 6687, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin, 1989.*
- [12] Émery, M. On the chaotic representation property for martingales. *Probability theory and mathematical statistics (St. Petersburg, 1993)*, 155–166, Gordon and Breach, Amsterdam, 1996.
- [13] Émery, Michel Chaotic representation property of certain Azéma martingales. *Illinois J. Math.* 50 (2006), no. 1-4, 395-411.

- [14] Enriquez, Nathanaël An invariance principle for Azéma martingales. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 43 (2007), no. 6, 717-727.
- [15] Gapeev, Pavel V.; Jeanblanc, Monique; Li, Libo; Rutkowski, Marek Constructing random times with given survival processes and applications to valuation of credit derivatives. *Contemporary quantitative finance*, 255–280, Springer, Berlin, 2010
- [16] Un cours sur les intégrales stochastiques. (French) Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie des intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975), pp. 245–400. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 511, Springer, Berlin, 1976.
- [17] Meyer, P.-A. Éléments de probabilités quantiques. I–V. (French) [Elements of quantum probabilities. I–V] Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85, 186–312, *Lecture Notes in Math.*, 1204, Springer, Berlin, 1986.
- [18] Rainer, C. Backward stochastic differential equations with Azéma’s martingale. *Stoch. Stoch. Rep.* 73 (2002), no. 1-2, 65–98.
- [19] Tudor, C. A.; Vives, J. Anticipating Stratonovich integral with respect to the Azema’s martingales. *Stochastic Anal. Appl.* 20 (2002), no. 3, 673–692
- [20] Wiener N., The homogeneous Chaos, *Amer. J. Math.* 60 (1938), 897-936.