



HAL
open science

Petits souvenirs de la martingale d'Azéma

Catherine Rainer

► **To cite this version:**

| Catherine Rainer. Petits souvenirs de la martingale d'Azéma. 2019. hal-02167277v1

HAL Id: hal-02167277

<https://hal.science/hal-02167277v1>

Preprint submitted on 27 Jun 2019 (v1), last revised 29 Nov 2023 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Petits souvenirs de la martingale d’Azéma

Catherine Rainer*

June 27, 2019

Jacques Azéma était mon directeur de thèse dans la première moitié des années 1990. Ayant quitté à la fois le domaine et le milieu de la théorie générale des processus, je ne me sens pas vraiment habilitée à écrire un témoignage sur l’être humain que j’ai ainsi perdu de vue depuis longtemps ni d’écrire un article mathématique autour ou à la suite de ses recherches. Mais, en laissant divaguer mes souvenirs, il m’est venu rapidement l’envie de parler de la martingale d’Azéma, qui, avec le recul, me semble emblématique de cette époque et de la personnalité de son inventeur.

La martingale d’Azéma, telle qu’elle est définie dans l’article “Etude d’une martingale remarquable” d’Azéma et Yor [4], est la projection optionnelle d’un mouvement Brownien sur la filtration engendrée par son signe.

Plus précisément, considérons un mouvement Brownien standard en dimension 1, (B_t) , tel que $B_0 = 0$. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$\text{sign}(B_t) = \begin{cases} 1, & \text{si } B_t \geq 0, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration rendue continue à droite et complétée, engendrée par le processus $(\text{sign}(B_t))_{t \geq 0}$.

Definition 0.1. *On appelle **martingale d’Azéma** le processus $(\mu_t)_{t \geq 0}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $\mu_t = E[B_t | \mathcal{F}_t]$.*

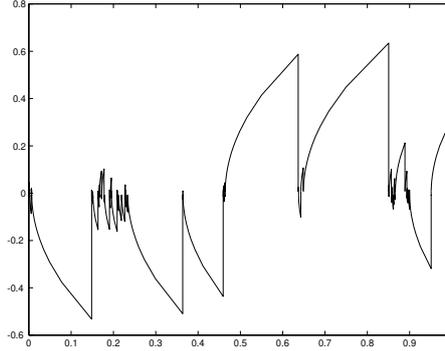
Ce processus peut être calculé explicitement :

$$\mu_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(B_t) \sqrt{t - g_t}, \tag{0.1}$$

où $g_t = \sup\{s \leq t, B_s\}$ est, pour tout $t \geq 0$, le dernier instant où le mouvement brownien touche 0.

*Université de Bretagne Occidentale, UMR 6205, LMBA. Catherine.Rainer@univ-brest.fr

Du coup les trajectoires de (μ_t) ont l'allure suivante ¹ :



On peut définir aussi une “deuxième martingale d’Azéma” : $\nu_t := |\mu_t| - L_t^0$, où (L_t^0) est le temps local en zéro du mouvement brownien et qui représente la projection optionnelle de $|B_t| - L_t^0$ sur la filtration engendrée par les zéros du mouvement brownien : $\mathcal{G}_t = \sigma\{g_s, s \leq t\}$. Il est à noter que c’est cette deuxième martingale qui fut inventée en premier : elle apparaît à la 67ème page du gros article “Sur les fermés aléatoires” d’Azéma [3]. En effet, dans le chapitre 6 -qui s’appelle “Une sous-martingale remarquable”-, étant donné un fermé aléatoire H quelconque et un temps local (L_t) dont il est le support, l’auteur définit une sous-martingale (Y_t) définie à partir du noyau de Lévy et des extrémités gauches de H , telle que $(Y_t - L_t)$ est une martingale locale s’annulant sur H . La martingale (ν_t) en est le cas particulier lorsque H est l’ensemble des zéros du mouvement brownien.

On montre facilement que les deux martingales (μ_t) et (ν_t) sont purement discontinues. Un premier intérêt en est donc de livrer des exemples de martingales purement discontinues qui n’appartiennent pas à la famille des processus de Poisson. De plus la première a la propriété remarquable de posséder les mêmes zéros (et le même signe) qu’un mouvement brownien. L’article d’Azéma-Yor [4] développe un grand nombre de résultats et de propriétés autour de la martingale (μ_t) . Parmi celles-ci, c’est la propriété de représentation chaotique qui a motivé l’intérêt accru qu’on lui a porté.

Definition 0.2. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale telle $\langle X, X \rangle_t = t$, et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \Delta_n = \{0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de carré intégrable. Alors, l’intégrale itérée

$$I_n(f) = \int_{\Delta_n} f(t_1, \dots, t_n) dX_{t_1} \dots dX_{t_n}$$

est bien définie (voir Meyer [14]). L’ensemble χ_n de ces variables $I_n(f)$ est appelé le **n -ième chaos généré par (X_t)** , et on dit que (X_t) a la **propriété de représentation chaotique (PRC)** si l’espace engendré par l’union des chaos (où χ_0 est l’ensemble des variables constantes) est dense dans l’espace L^2 des variables de carré intégrable, i.e. si toute variable $X \in L^2$ peut s’écrire sous la forme

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

avec $f_n \in L^2(\Delta_n)$.

¹Merci beaucoup à Nathanael Enriquez, pour le prêt de ses graphiques tirés de [12] !

La PRC est importante pour les probabilités quantiques, chaque martingale la possédant fournissant un exemple d'interprétation probabiliste de l'espace de Fock (voir Meyer [15]). Il est connu depuis Wiener [17] que le mouvement Brownien et les processus de Poisson compensés ont la propriété de représentation chaotique. La question (posée par Meyer dans [14]) est : y en a-t-il d'autres, et si oui, est-il possible de caractériser les martingales possédant la PRC ?

C'est dans le but d'apporter une réponse à cette question que, dans son article "On the Azéma martingales", Michel Emery introduit les "équations de structure".

Definition 0.3. (Emery [9]) Soit (X_t) une martingale vérifiant $\langle X, X \rangle_t = t$. On dit que (X_t) vérifie une **équation de structure** s'il existe un processus prévisible (Φ_t) tel que

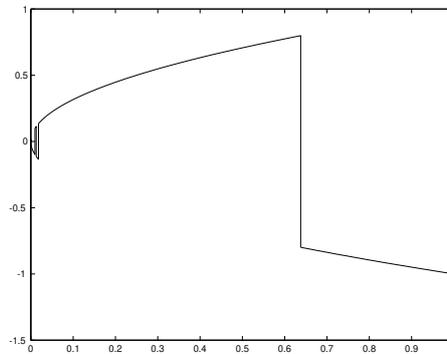
$$d[X, X]_t = dt + \Phi_t dX_t.$$

Après une première partie de résultats généraux sur les martingales vérifiant une telle équation, l'attention est portée sur une famille particulière de martingales, celles qu'Emery appelle "the Azéma martingales": on y considère les équations de structure de la forme

$$d[X, X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-})dX_t, \tag{0.2}$$

avec α et β constantes. En voici les exemple les plus remarquables :

- Lorsque $\alpha = \beta = 0$, la solution de (0.2) est le mouvement brownien,
- pour $\beta = 0$ mais $\alpha \neq 0$, (X_t) est un processus de Poisson compensé.
- Une martingale très jolie est obtenue pour $\alpha = 0$ et $\beta = -2$. Elle vérifie $|X_t| = \sqrt{t}$ et change de signe en des temps totalement non prévisibles, juste comme il faut pour être une martingale.



- L'autre cas intéressant est celui où $\alpha = 0$ et $\beta = -1$:

$$d[X, X]_t = dt - X_{t-}dX_t.$$

En effet la solution de cette équation n'est autre que la martingale d'Azéma (μ_t) .

Le résultat central de l'article concernant ces martingales est

Theorem 0.4. On considère l'équation de structure

$$d[X, X]_t = dt + \beta X_{t-}dX_t, X_0 = x_0.$$

1. Si $\beta \leq 0$, la solution est unique en loi et un processus de Markov fort.
2. Pour $-2 \leq \beta \leq 0$, la solution a la propriété de représentation chaotique.

Corollary 0.5. *La martingale d’Azéma a la propriété de représentation chaotique.*

Toujours à la recherche d’une caractérisation des martingales possédant la PRC, on peut remarquer qu’une condition nécessaire en est la propriété de représentation prévisible : toute variable $Z \in L^2$ s’écrit sous la forme $Z = E[Z] + \int H_t dX_t$, avec (H_t) processus prévisible. Une question naturelle est alors de savoir si les deux propriétés sont équivalentes.

C’est ainsi que le sujet de thèse proposé par Azéma peu de temps après la publication de l’article d’Emery s’intitulait “Propriétés de représentations prévisible et chaotique”. Jeune fille naïve s’ennuyant un peu du calme train-train de mes études de mathématiques, c’est clairement le mot “chaotique” qui m’avait attirée (l’associant sûrement aussi à la théorie des catastrophes, très en vogue à cette époque). En réalité, sachant que la première martingale (μ_t) avait la PRC, ce sujet consistait à savoir si la deuxième martingale d’Azéma l’avait aussi. La question s’est rapidement avérée beaucoup trop difficile, et la réponse restera probablement pour toujours inconnue.

Alors que ma thèse se réorientait donc vers d’autres extensions et variations de la théorie azémaïenne, Marc Yor a pris une place croissante dans nos discussions. J’ai eu alors le privilège d’être le témoin du couple Azéma-Yor. Leur symbiose était étonnante : en effet tout semblait les séparer, l’un cachant un esprit imperturbablement rigoureux derrière une nonchalance appuyée, l’autre enrobant toute manifestation de sa virtuosité du message que, dans la vie, on n’était pas là pour rigoler mais pour travailler dur. Et pourtant je ne pense pas avoir vu d’autres personnes qu’Azéma à avoir réussi à faire aussi joyeusement rigoler Yor, de même que Yor était peut-être la seule personne à rire aussi sincèrement des blagues volontiers mauvaises et politiquement incorrectes d’Azéma. Plus sérieusement je garde un beau souvenir ému de leur complicité mathématique. Par contre ce n’est qu’avec le recul, en fouillant dans la grande quantité d’articles, que j’entrevois la richesse et générosité de cette époque, le Séminaire de Probabilité semblant une grande place publique, où plein de grands hommes, autour de Paul-André Meyer, dialoguaient à petits articles interposés.

Ainsi s’allongeait la liste des équations de structure et avec, les martingales à représentation chaotique (voir [14],[2], les deux thèses de David Kurtz et Anthony Phan,...). Emery a fini par construire un contre-exemple : la représentation prévisible n’entraîne pas la représentation chaotique [10]. Alors que personne ne semble avoir trouvé de caractérisation des martingales possédant la PRC, la recherche de conditions suffisantes ou d’exemples ne s’est jamais arrêtée (voir par exemple récemment [7]).

Ici se termine le vécu et fait place aux moteurs de recherche. Sur Mathscinet, parmi les 156 références pour les mots-clé "martingale" & "Azema" beaucoup se réfèrent à l’autre importante collaboration Azéma-Yor, le problème de Skorokhod, mais on peut y découvrir aussi que, même actuellement encore, des articles portent -au moins en partie- sur la ou les martingales d’Azéma. La majeure partie se situe dans le domaine des probabilités quantiques, où les martingales d’Azéma ont trouvé sa place parmi les modèles probabilistes de base . Puis c’est pour LA martingale d’Azéma qu’on trouve des applications en finance (le jour où, dans un colloque, un monsieur m’a demandé des références sur la martingale d’Azéma, pour l’appliquer à la finance, je n’ai pas donné suite, parce que je n’ai pas cru que c’était sérieux. J’en ai toujours un peu honte). En effet, un premier article de Dritschel et Protter propose simplement de remplacer dans le modèle d’un marché financier le mouvement Brownien par des martingales d’Azéma.

Puis le fait que le dernier zéro τ d'un processus puisse intervenir dans la la modélisation dans des modèles de ruine avec information partielle (voir Cetin, Jarrow, Protter, Yildirim [5]), appelle la martingale (μ_t) comme outil indispensable. Parallèlement apparait aussi naturellement dans Gapeev, Jeanblanc, Li, Rutkowski [13] la notion de “supermartingale d’Azéma” $P[\tau > t|\mathcal{F}_t]$, dont la référence la plus récente est de Aksamit et Jeanblanc [1] en 2017. Finalement il y a toujours, régulièrement des articles qui s’intéressent à la martingale d’Azéma sans avoir besoin de justifier beaucoup le pourquoi [12], [6], [16],... Alors que l’homme s’est éteint aujourd’hui, cela fait longtemps et sûrement encore pour un certain temps que sa martingale s’est envolée vivre sa propre vie mathématique.

References

- [1] Aksamit, Anna; Jeanblanc, Monique Enlargement of filtration with finance in view. SpringerBriefs in Quantitative Finance. Springer, Cham, 2017. x+150 pp
- [2] Attal, S.; Émery, M. Martingales d’Azéma bidimensionnelles. (French) [Two-dimensional Azéma martingales] Hommage à P. A. Meyer et J. Neveu. Astérisque No. 236 (1996), 9–21
- [3] Azéma, J. Sur les fermés aléatoires. (French) [On random closed sets] Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, 397-495, Lecture Notes in Math., 1123, Springer, Berlin, 1985.
- [4] Azéma, J.; Yor, M. Étude d’une martingale remarquable. (French) [Study of a remarkable martingale] Séminaire de Probabilités, XXIII, 88–130, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin, 1989.
- [5] Çetin, Umut; Jarrow, Robert; Protter, Philip; Yildirim, Yildiray Modeling credit risk with partial information. Ann. Appl. Probab. 14 (2004), no. 3, 1167–1178.
- [6] Çetin, Umut, Filtered Azéma martingales. Electron. Commun. Probab. 17 (2012), no. 62, 13 pp.
- [7] Di Tella, Paolo; Engelbert, Hans-Jürgen The chaotic representation property of compensated-covariation stable families of martingales. Ann. Probab. 44 (2016), no. 6, 3965–4005.
- [8] Dritschel, M., Protter, P., Complete markets with discontinuous security price. Finance Stoch., Vol. 2, 203–214, 1999.
- [9] Émery, Michel On the Azéma martingales. Séminaire de Probabilités, XXIII, 6687, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin, 1989.
- [10] Émery, M. On the chaotic representation property for martingales. Probability theory and mathematical statistics (St. Petersburg, 1993), 155–166, Gordon and Breach, Amsterdam, 1996.
- [11] Émery, Michel Chaotic representation property of certain Azéma martingales. Illinois J. Math. 50 (2006), no. 1-4, 395-411.

- [12] Enriquez, Nathanaël An invariance principle for Azéma martingales. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 43 (2007), no. 6, 717-727.
- [13] Gapeev, Pavel V.; Jeanblanc, Monique; Li, Libo; Rutkowski, Marek Constructing random times with given survival processes and applications to valuation of credit derivatives. *Contemporary quantitative finance*, 255–280, Springer, Berlin, 2010
- [14] Un cours sur les intégrales stochastiques. (French) Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie des intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975), pp. 245–400. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 511, Springer, Berlin, 1976.
- [15] Meyer, P.-A. Éléments de probabilités quantiques. I–V. (French) [Elements of quantum probabilities. I–V] Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85, 186–312, *Lecture Notes in Math.*, 1204, Springer, Berlin, 1986.
- [16] Rainer, C. Backward stochastic differential equations with Azéma’s martingale. *Stoch. Stoch. Rep.* 73 (2002), no. 1-2, 65–98.
- [17] Wiener N., The homogeneous Chaos, *Amer. J. Math.* 60 (1938), 897-936.