



# **Description d'un algorithme de reconstruction de volume à partir de projections coniques par déconvolution tri-dimensionnelle**

Françoise Peyrin, R. Goutte, M. Amiel

## **► To cite this version:**

Françoise Peyrin, R. Goutte, M. Amiel. Description d'un algorithme de reconstruction de volume à partir de projections coniques par déconvolution tri-dimensionnelle. *Traitement du Signal*, 1988, 5 (4), pp.223-233. [⟨hal-02165247⟩](#)

**HAL Id: hal-02165247**

**<https://hal.science/hal-02165247v1>**

Submitted on 25 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Description d'un algorithme  
de reconstruction de volume  
à partir de projections coniques  
par déconvolution tri-dimensionnelle

Description of a three-dimensional deconvolution  
reconstruction algorithm from cone beam projections



**F. PEYRIN**

UA CNRS n° 1216, LTSU, Bât. n° 502, INSA, 69621 VILLEURBANNE CEDEX.

Thèse de 3<sup>e</sup> cycle en 1982, à l'INSA de Lyon portant sur la reconstruction et la visualisation d'images 3D en volu-  
sitéométrie par rayons X. De 81 à 87 : Assistante à l'INSA de Lyon. Depuis 87 : Chargée de Recherche (INSERM) au  
Laboratoire de Traitement du Signal et Ultrasons de l'INSA de Lyon.  
Domaines d'intérêt : Traitement du signal et des images.



**R. GOUTTE**

UA CNRS n° 1216, LTSU, Bât. n° 502, INSA, 69621 VILLEURBANNE CEDEX.

M. Robert GOUTTE est né à Lyon le 19/10/1932. Après des études à l'Université de Lyon, il soutient son doctorat  
ès Sciences en 1959. Il est nommé Maître de Conférences à l'INSA de Lyon en 1962 puis Professeur en 1969. Il  
dirige le laboratoire de traitement du signal et ultrasons de l'INSA (UA CNRS n° 1216), son domaine de recherche  
étant essentiellement le traitement numérique des signaux et des images et ses applications spatiales, médica-  
les ou industrielles.



**M. AMIEL**

UA CNRS n° 1216, LTSU, Bât. n° 502, INSA, 69621 VILLEURBANNE CEDEX.

Michel Amiel, Professeur de Médecine et Chef du Service de Radiologie à l'Hôpital Cardiologique de Lyon et co-  
directeur de l'URA CNRS. Ses activités de recherche concernent les applications des images médicales (RMN,  
rayons X) en pathologie cardiovasculaire.

## RÉSUMÉ

Cet article présente la discrétisation et la mise en œuvre d'une méthode de reconstruction 3D à partir de projections coniques. Le théorème de la rétroprojection, établi dans un travail précédent, est la base théorique de la méthode. Il permet de ramener le problème de reconstruction à un problème de déconvolution 3D. L'algorithme proposé comporte essentiellement deux étapes, consistant tout d'abord à calculer une rétroprojection corrigée des projections coniques, puis à déconvoluer le résultat obtenu. Cet algorithme a été implanté sur le CYBER 205 de Control Data après avoir été complètement vectorisé. Un exemple simple de simulation et différents critères d'écarts sont proposés pour l'évaluer. Les premières simulations montrent que les résultats obtenus sont très satisfaisants si les sources sont réparties dans l'espace tout autour de l'objet (géométrie  $4\pi$ ). De plus, même dans des conditions d'acquisition assez défavorables, l'algorithme semble donner une première approximation de l'objet qui peut être suffisante pour étudier son aspect morphologique.

## MOTS CLÉS

Reconstruction, tomographie, sources coniques de rayons X, déconvolution, image 3D.

## SUMMARY

*This paper presents the discretization and the application of a 3D reconstruction method from cone beam X-ray projections. The generalized back projection theorem, established in a previous work, is the theoretical basis for the method. It allows to reduce the reconstruction problem to a 3D deconvolution problem. The proposed algorithm essentially consists in two steps: (i) computation of the discrete corrected back projection of all the cone beam projections; (ii) deconvolution of the result. After vectorization, this algorithm has been implemented on a CDC CYBER 205 computer. A simple and comprehensive test function is proposed to evaluate the algorithm relatively to various error criteria. The first simulations show that the reconstruction results are very satisfying when the X-ray sources are located in the whole space around the object, in accordance with the theory ( $4\pi$  geometry). Furthermore, even in poor acquisition conditions the algorithm seems to give a first approximation of the object which can be sufficient to study its morphological aspect.*

## KEY WORDS

Reconstruction, truly 3D tomography, X-ray cone beam sources, deconvolution, 3D image.

## 1. Introduction

Une image 3D peut être définie comme la représentation d'une information dans tout un volume. A l'heure actuelle, les problèmes de tomographie 3D sont généralement décomposés en une séquence de problèmes 2D : en répétant l'examen tomographique sur un scanner conventionnel à différents niveaux, on acquiert une série de coupes représentatives du volume étudié. Cette façon de procéder présente un certain nombre d'inconvénients comme la répétition de l'examen tomographique autant de fois qu'il y a de coupes, les problèmes de bougé entre deux coupes, la résolution différente dans les trois directions de l'espace... Une génération de scanners plus avancée permet d'acquérir simultanément un ensemble de 8 à 10 coupes (scanners multicoupes). Toutefois pour imager tout un volume on est conduit à répéter la procédure précédente et on se trouve sensiblement confronté aux mêmes problèmes. De nouveaux systèmes permettent d'envisager l'obtention d'une image réellement 3D, en faisant l'acquisition en une fois de toutes les informations nécessaires à la reconstruction du volume. En tomographie par rayons X, le système d'acquisition permettant une telle reconstruction utilise généralement des sources coniques. Des prototypes ou projets de tels systèmes sont à l'étude par exemple, à la Mayo Clinic aux USA [Dynamic Spatial Reconstructor (DSR)] [1], au LETI en France [2], ou à Leeds en Angleterre [3].

Dans de tels systèmes, une source conique de rayons X a la possibilité de se déplacer tout autour de l'objet; pour chaque position de la source on acquiert une radiographie X de l'objet qui correspond à une projection 2D de l'image 3D à reconstruire. En déplaçant le système source-détecteur on obtient un ensemble de radiographies correspondant donc à un ensemble de projections sous différents angles de vues de l'objet, à partir duquel la reconstruction est effectuée. Du fait de la conicité du faisceau, les informations concernant des coupes parallèles de l'objet se trouvent mélangées. Ainsi le problème ne peut pas être résolu par une séquence de reconstruction 2D mais doit être considéré globalement en 3D.

Différentes approches sont possibles pour appréhender le problème de la reconstruction 3D. De la même manière que pour les problèmes de reconstruction 2D, on peut envisager des méthodes soit de type algébrique, soit de type analytique [4]. Dans le premier cas, on part d'une formulation discrète du problème qui se traduit alors par un système linéaire de grande dimensionnalité résolu par des méthodes spécifiques, le plus souvent itératives (par exemple, ART, SIRT, ILST...) [5, 6, 7]. A l'opposé les méthodes analytiques partent d'une formulation continue du problème à partir de laquelle une formule d'inversion analytique est développée [8]. L'algorithme en découlant est alors obtenu par discrétisation de cette formule.

Des solutions de type algébrique ont été proposées pour la reconstruction 3D à partir de projections

coniques [9, 10, 11]. Toutefois ce type de méthode a l'inconvénient d'être plus coûteux en ressources informatiques, aussi bien d'un point de vue temps de calcul que volume mémoire utilisé. Ces problèmes prenant d'autant plus d'importance lorsque l'on travaille en 3D, nous avons choisi dans un premier temps, de nous intéresser à la généralisation d'une formule analytique de reconstruction.

## 2. Rappels sur les formules d'inversion

En 2D, il existe différentes formules analytiques d'inversion qui, si elles sont équivalentes d'un point de vue mathématique, ne conduisent pas au même algorithme et peuvent fournir des reconstructions différentes. Les bases théoriques communes pour ces formules sont le théorème de la projection et/ou le théorème de la rétroprojection. Le premier établit que la Transformée de Fourier (TF) d'une projection (1D) d'une image (2D) est une coupe de la TF de l'image dans la direction de projection. Ce théorème conduit donc immédiatement à une méthode de reconstruction, dite par inversion directe, basée sur l'inversion de la TF 2D de l'image estimée à partir des TF 1D des projections [12]. Les autres formules de reconstruction utilisent l'opérateur de rétroprojection qui se trouve être l'adjoint de l'opérateur de projection. Le théorème de la rétroprojection établit que la rétroprojection de toutes les projections de l'image est égale à une convolution bidimensionnelle de l'image avec une fonction radiale. Ce théorème fournit donc une deuxième formule de reconstruction, basée cette fois sur un problème de déconvolution [13]. Enfin, lorsque l'on réunit ces deux théorèmes, on peut montrer que la rétroprojection des projections, filtrées par une fonction adéquate, est directement égale à l'image originale [14, 15]. Cette formule conduit à l'algorithme, bien connu, de rétroprojection filtrée qui est utilisé sur tous les scanners conventionnels pour des raisons de simplicité et de rapidité.

Il est important de remarquer que les formules d'inversion prennent explicitement en compte la géométrie du système d'acquisition. En fait, ces formules ont d'abord été démontrées pour une reconstruction 2D à partir de projections parallèles, correspondant à la géométrie de la première génération de scanners translation-rotation. Certaines d'entre elles ont ensuite pu être adaptées à une reconstruction 2D à partir de projections divergentes correspondant à la génération suivante de scanners Fan-Beam. En particulier l'algorithme de rétroprojection filtrée et le théorème de la rétroprojection ont été étendus à ce cas de géométrie [16, 17].

En ce qui concerne le problème de la reconstruction 3D, si toutes les formules analytiques d'inversion peuvent facilement se généraliser dans le cas d'une géométrie parallèle, le problème est moins trivial pour une géométrie divergente. En étudiant les conditions nécessaires et suffisantes d'acquisition pour une reconstruction 3D à partir de projections coniques, B. D. Smith obtient une formule d'inversion, qui reste toutefois difficile à mettre en œuvre [18]. Certains travaux ont proposé une formule de reconstruction

basée sur l'inversion de la transformée de Radon 2D, approchée à partir des projections coniques [19, 2]. La généralisation de l'algorithme de rétroprojection filtrée, qui a été étudié par Denton [20], n'est obtenue que par approximation. Un algorithme heuristique, basé sur un principe similaire, a été développé par Feldkamp [21].

Dans un travail précédent [22], nous avons démontré que le théorème de la rétroprojection pouvait être étendu à une reconstruction 3D à partir de projections coniques dans le cas où on utilise une acquisition  $4\pi$ , c'est-à-dire, dans le cas où la source de rayons X peut prendre toutes les positions sur la surface d'une sphère englobant l'objet. Ce théorème permet de ramener le problème de la reconstruction à un problème de déconvolution 3D. Dans cet article, après un bref rappel théorique sur la méthode, nous décrivons comment l'algorithme correspondant peut être appliqué. Ceci implique une adaptation discrète de l'opérateur de rétroprojection et du processus de déconvolution. De plus cet algorithme a été vectorisé et implanté sur un CYBER 205. Enfin, nous présentons les premiers résultats de son implémentation.

## 3. Théorème de la rétroprojection

Nous précisons tout d'abord les notations utilisées (fig. 1). Soit  $f(x, y, z)$  [que l'on notera également  $f(\mathbf{r})$  avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ] la fonction à reconstruire,  $(x, y, z)$

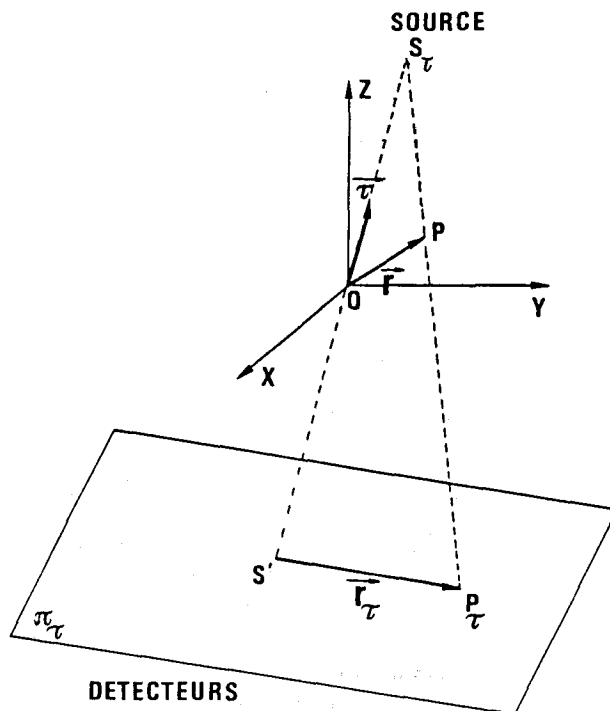


Fig. 1. — Géométrie d'acquisition.

représentant les coordonnées d'un point P dans le repère orthonormé  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ . Cette fonction est supposée positive, à support borné  $D$  et de classe  $C_2$ . A chaque position de la source  $S_p$ , est associée une

projection conique  $p_\tau$  repérée par le vecteur directeur unitaire  $\tau$  de l'axe  $OS_\tau$ . Ce vecteur  $\tau$  (\*) peut être exprimé en coordonnées sphériques, sous la forme :

$$(1) \quad \tau = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \Theta \\ \sin \varphi & \sin \Theta \\ \cos \Theta \end{pmatrix}.$$

Si l'on suppose que la position initiale de la source,  $S_0$ , se trouve sur l'axe  $Oz$ , on peut amener la source en une position  $S_\tau$  quelconque en effectuant deux rotations successives. Plus précisément on peut montrer que :

$$(2) \quad \tau = M_{\Theta\varphi} k$$

où  $M_{\Theta\varphi}$  est la matrice produit des deux matrices de rotation d'angles  $\Theta$  et  $\varphi$ , et d'axes respectifs  $Ox$  et  $Oz$ .

Un point  $P_\tau$  du plan de projection orthogonal à l'axe  $OS_\tau$ , sera repéré par ses coordonnées  $(u, v)$  dans la base  $(M_{\Theta\varphi} i, M_{\Theta\varphi} j)$ . Si :

$$(3) \quad I = S' P_\tau = M_{\Theta\varphi} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

on notera indifféremment  $p_\tau(I)$  ou  $p_{\Theta\varphi}(u, v)$  la projection conique dans la direction  $\tau$  au point  $P_\tau$ .

La projection conique en ce point est définie par l'intégrale de la fonction  $f$  le long de la droite passant par  $S_\tau$  et  $P_\tau$  et peut s'écrire :

$$(4) \quad p_{\Theta\varphi}(u, v) = p_\tau(I) = \int f \left( \frac{D_1}{D} \tau + \alpha \tau' \right) d\alpha$$

où

$$(5) \quad \tau = \frac{D\tau - I}{\|D\tau - I\|} \quad \text{et} \quad D = D_1 + D_2$$

$D_1$  étant la distance source-centre de l'objet, et  $D_2$  la distance centre de l'objet-détecteurs.

L'opérateur de rétroprojection  $b$  d'une projection conique  $p_\tau$  associée à cette projection, une image 3D dont la valeur en chaque point  $P$  est égale à la valeur de la projection au point  $P_\tau$  sur lequel le point  $P$  se projette :

$$(6) \quad bp_\tau(r) = p_\tau(r_\tau)$$

où

$$(7) \quad r_\tau = \frac{D(r - (r \cdot \tau)\tau)}{D_1 - r \cdot \tau}$$

$r_\tau$  étant la projection du vecteur  $r$  dans le plan  $\pi_\tau$ .

L'opérateur de rétroprojection  $B$  de toutes les projections coniques, associée à cet ensemble de projections, une image 3D égale à la somme des rétroprojections de chaque projection. On a ainsi :

$$(8) \quad Bp(r) = \int_{\Omega} p_\tau(r_\tau) d\omega_\tau$$

(\*) Nous rappelons que les vecteurs sont représentés par des caractères gras.

où  $\omega_\tau$  est la variable d'intégration angulaire et  $\Omega$  le domaine d'intégration angulaire.

On peut montrer [22], que lorsque la source se déplace sur la surface d'une sphère entourant l'objet, ce que nous appelons géométrie  $4\pi$ , le théorème de la projection se généralise. En effet dans ce cas, l'épandage corrigé  $B'$  de toutes les projections coniques est égal à une convolution de l'image originale sur le domaine d'intersection de tous les faisceaux coniques (contenant  $D$ ). Plus précisément :

si

$$(9) \quad B'p(r) = \int_{\Omega} p_\tau(r_\tau) \frac{D_1}{\|D_1\tau - r\|} d\omega_\tau$$

on a :

$$(10) \quad B'p(r) = f(r) * \frac{1}{\|r\|^2}$$

où  $*$  représente l'opérateur de convolution en dimension 3.

Ce résultat permet alors de traiter le problème de reconstruction comme un problème de déconvolution 3D. De plus, en utilisant la TF 3D (Transformée de Fourier tridimensionnelle) notée  $F_3$ , on peut, à un facteur multiplicatif près, réécrire l'équation (10) sous la forme :

$$(11) \quad f = F_3^{-1} (F_3 (B'p)(R) \cdot \|R\|).$$

La discrétisation de cette formule conduit à la généralisation de l'algorithme de reconstruction 2D connu sous le nom de « Rho-filtered algorithm ».

#### 4. Discrétisation

L'algorithme de reconstruction proposé comporte donc essentiellement deux étapes :

- calcul de la rétroprojection corrigée des projections coniques;
- déconvolution du résultat.

En pratique, toutes les données sont évidemment numériques et le problème consiste alors à reconstruire une matrice  $N \times N \times N$  représentant une version échantillonnée de la fonction  $f$ , soit  $f(i \Delta x, j \Delta y, k \Delta z)$  [notée en abrégé  $f(i, j, k)$ ], à partir d'un nombre fini de ses projections coniques  $p_{mn}(l \Delta u, k \Delta v)$ , elles aussi échantillonnées. La direction de chacune de ces projections  $p_{mn}$  est déterminée par la relation (1) pour un nombre limité d'angles de vue paramétrés par  $\Theta_n$  et  $\varphi_m$  avec  $1 \leq n \leq M_1$  et  $1 \leq m \leq M_2$ .

L'intégrale permettant de définir l'opérateur de rétroprojection corrigé doit être évaluée en utilisant une formule d'approximation. Dans les problèmes de reconstruction tomographique 2D, l'opérateur de rétroprojection discret est le plus souvent calculé en effectuant la simple sommation de la rétroprojection de chaque projection [4], Chap. 7. De la même façon, nous utilisons ici, la somme de la rétroprojection de

chaque projection conique :

$$(12) \quad B'p(i, j, k) = \sum_m \sum_n b p_{mn}(i, j, k) \times \frac{D_1}{\|D_1 \tau_{mn} - r_{ijk}\|} \Delta \Theta n \Delta \varphi m.$$

Afin de minimiser le nombre de calculs intervenant dans le calcul de  $B'p$ , on peut exprimer le coefficient correctif sous la forme d'un produit de deux termes :

$$(13) \quad \frac{D_1}{\|D_1 \tau - r\|} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + r^2}} \frac{D_1}{D_1 - r \cdot \tau}.$$

En utilisant cette expression, la relation (9) peut se décomposer en :

$$(14) \quad B'p(r) = \int_{\Omega} [p'_r(r)] \left[ \frac{D_1}{D_1 - r \cdot \tau} \right] d\omega_r$$

avec

$$(15) \quad p'_r(l) = p_r(l) \frac{D}{\sqrt{D^2 + l^2}}.$$

Le calcul de  $B'p$  est donc effectué en faisant une pré-correction des projections [relation (15)], puis en utilisant le facteur correctif de la relation (14). Cette forme a l'avantage de ne faire intervenir que le facteur  $D_1/(D_1 - r \cdot \tau)$  qui est nécessaire pour calculer les coordonnées de  $r$ , [relation (7)] et ne demande donc pas de calculs supplémentaires.

La rétroprojection de chaque projection conique fait intervenir une opération d'interpolation étant donné qu'un point de la grille d'échantillonnage de la matrice  $f$  ne se projette pas nécessairement sur un point d'échantillonnage de la projection. On est donc amené à utiliser une version interpolée  $\tilde{p}_r(u, v)$  de la projection échantillonnée, qui peut s'exprimer sous la forme d'une convolution de  $p_r(l \Delta u, k \Delta v)$  avec une fonction d'interpolation  $I(u, v)$  :

$$(16) \quad \tilde{p}_r(u, v) = \sum_l \sum_k p_r(l \Delta u, k \Delta v) I(u - l \Delta u, v - k \Delta v)$$

Différents types d'interpolation sont possibles : plus proche voisin, interpolation linéaire, interpolation de Lagrange d'ordre supérieur, ... Une étude récente, comparant la réponse impulsionnelle obtenue pour les choix de différentes fonctions d'interpolation en reconstruction  $2D$ , a montré que l'interpolation linéaire donne des résultats non optimaux mais généralement satisfaisants [23]. Nous avons donc choisi, par analogie, d'utiliser l'interpolation bilinéaire, qui de plus est relativement simple à mettre en œuvre et ne demande pas une surcharge trop importante de calculs. La fonction d'interpolation  $I$  correspondante est alors définie par :

$$(17) \quad I(u, v) = \left(1 - \frac{|u|}{\Delta u}\right) \left(1 - \frac{|v|}{\Delta v}\right)$$

si  $|u| < \Delta u$  et  $|v| < \Delta v$ , et 0 sinon

Dans ce cas, la somme de la relation (16) ne comporte que quatre termes, la valeur au point  $(u, v)$  étant en fait une combinaison linéaire des valeurs de la fonction en ses quatre plus proches voisins. Plus précisément :

$$(18) \quad \tilde{p}_r(u, v) = (1 - \lambda)(1 - \mu)p_r(l, k) + \lambda(1 - \mu)p_r(l + 1, k) + \mu(1 - \lambda)p_r(l, k + 1) + \lambda\mu p_r(l + 1, k + 1)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les réels compris entre 0 et 1 définis par :

$$\lambda = l + 1 - \frac{u}{\Delta u} \quad \text{et} \quad \mu = k + 1 - \frac{v}{\Delta v}$$

et où  $p_r(l, k)$  est la notation abrégée de  $p_r(l \Delta u, k \Delta v)$ .

On peut aborder le problème de la déconvolution à partir des deux relations duales (10) et (11). En effet bien que ces deux relations soient théoriquement équivalentes dans le cas de fonctions continues, il n'en est pas de même pour leurs versions discrètes qui conduiront donc à deux reconstructions différentes. De plus, les fonctions  $1/\|r\|$  et  $1/\|r\|^2$  intervenant dans ces relations ne sont pas définies à l'origine et leurs transformées de Fourier ne sont par ailleurs définies qu'au sens des distributions. Dans ce travail nous avons choisi de nous intéresser à une mise en œuvre basée sur la formule de reconstruction (11). L'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) suppose de faire l'hypothèse supplémentaire que la fonction  $f$  à reconstruire est spectralement limitée. En supposant que  $f$  ne contienne pas de fréquences spatiales supérieures à  $B_{\max}$ , la relation (11) doit alors être modifiée en :

$$(19) \quad f = F_3^{-1}(F_3(B'p)(R) \cdot H(R))$$

où  $H(R)$  est une fonction filtre telle que :

$$(20) \quad H(R) = \|R\| \quad \text{si} \quad \|R\| < B_{\max}$$

De plus, en pratique, il pourra être intéressant d'inclure dans le filtrage une fenêtre  $W(R)$  afin de limiter les effets de bords et de bruit. De ce fait on est amené à remplacer la fonction  $H(R)$  par une fonction  $K(R)$  :

$$(21) \quad K(R) = H(R) \cdot W(R).$$

Le choix de cette fenêtre, d'étendue maximale  $2B_{\max}$ , est dépendant de la fonction à reconstruire et de la nature du bruit. Plus les données seront bruitées en hautes fréquences, et plus il est intéressant d'atténuer ces hautes fréquences qui risquent d'être erronées.

Le problème de l'application de la relation (11) au voisinage de l'origine, se manifeste de la façon suivante : si  $H(R)$  vérifie (20), la reconstruction obtenue à une valeur moyenne nulle, ce qui peut paraître paradoxal, sachant que la fonction à reconstruire est généralement supposée positive. Notons que la valeur moyenne dont il s'agit ici, dépend de la taille du domaine sur lequel on travaille, et ne reflète pas nécessairement la valeur moyenne de l'objet sur son support. En fait, la convolution [relation (10)] impose de travailler sur une zone plus grande que le support de l'objet, ceci afin de limiter les problèmes de trunca-

ture et de recouvrement de spectre. Dans le cas idéal et continu, le domaine de travail s'étendrait à l'infini et la valeur moyenne sur ce domaine tendrait ainsi vers zéro. En travaillant sur une zone contenant largement l'objet, on peut se rapprocher de cette situation. Pour remédier à ce type de problème, Herman [4], chap. 7.2, propose de faire une post-correction, qu'il appelle « normalisation additive ». En effet, si la valeur moyenne est connue *a priori* ou peut être estimée, le résultat obtenu peut être adapté, par addition d'une constante, de façon à obtenir la moyenne voulue. Une autre façon d'ajuster la valeur moyenne consiste à modifier le filtre  $K(\mathbf{R})$  à l'origine. En effet, dans ce cas la reconstruction obtenue ne diffère de celle obtenue avec  $K$  qu'à une constante additive près. Un choix adapté de la valeur du filtre à l'origine, qui revient en fait simplement à fixer  $F_3 f(\mathbf{0})$ , permet donc d'obtenir la valeur moyenne souhaitée. D'autres connaissances *a priori* sur la fonction peuvent également être exploitées. Par exemple, si la fonction à reconstruire est supposée positive, les valeurs négatives obtenues après reconstruction peuvent être forcées à zéro.

De façon générale, on peut être amené à tester différentes fonctions filtres plus ou moins bien adaptées et envisager différents post-traitements, de manière à satisfaire au mieux les hypothèses *a priori* sur la fonction.

Signalons enfin qu'une implantation équivalente de la relation (20) peut être réalisée sans utiliser la TFD, mais en calculant directement une convolution discrète. En effet la formule de reconstruction (20) peut être écrite de façon équivalente, sous la forme :

$$(22) \quad f = \mathbf{B}' p * k_3$$

où  $k_3$  est la TF 3D inverse de  $K$ .

Le calcul de  $k_3$  dans le cas particulier où  $W(\mathbf{R})$  est une fenêtre rectangulaire a été développé dans [22]. Une implantation utilisant la relation (22) peut être intéressante lorsque le filtre  $k_3$  obtenu est à décroissance rapide, où que l'on dispose d'un processeur spécialisé pour réaliser cette convolution discrète. Toutefois pour cela, il est nécessaire de pouvoir calculer analytiquement la fonction  $k_3$ , ce qui peut être plus ou moins délicat selon le choix de la fenêtre  $W$ ; d'autre part une modification du type de fenêtre utilisé nécessite de reprendre tout le calcul de  $k_3$ . L'utilisation de relation (19) permet plus de souplesse dans la mesure où l'on peut facilement tester différentes fenêtres, ce qui n'impose que de modifier la définition de  $W$  dans le programme.

L'algorithme de reconstruction a été implanté sur CYBER 205, calculateur vectoriel de Control Data. L'utilisation d'une machine performante a l'avantage de permettre de tester efficacement l'algorithme ainsi que ses conditions optimales d'utilisation. Afin d'obtenir de bonnes performances sur cet ordinateur les algorithmes doivent être « vectorisés », c'est-à-dire traduits le plus possible en opérations portant sur des vecteurs. La plupart des sous-programmes de l'algorithme ont été vectorisés; un effort particulier a été porté sur les parties les plus importantes du code d'un point de vue temps de calcul.

Le calcul de la rétroprojection de toutes les projections est une partie répétitive (calcul pour chaque projection) et constitue la partie prépondérante du temps de calcul. L'évaluation de la rétroprojection d'une projection, qui a été entièrement vectorisée est organisée de la façon suivante : pour une direction donnée  $\tau_{mn}$ , on affecte à chaque point  $(i, j, k)$  la valeur de la projection interpolée [relation (18)] où  $(u, v)$  sont les coordonnées de la projection de ce point sur le plan  $\pi_{mn}$  correspondant. Pour que le calcul puisse être fait vectoriellement, il faut que les éléments auxquels on accède soient contigus en mémoire. Le calcul est donc vectorisé sur la matrice 3D, considérée comme un vecteur de taille  $N^3$ , en utilisant des ordres du Fortran vectoriel, de type Gather [24], pour réordonner les valeurs des projections en respectant la condition de contiguïté. De plus la relation (18) a été implantée de façon à minimiser le nombre d'opérations.

La partie déconvolution [relation (19)] se vectorise quant à elle très facilement, d'une part en utilisant une version vectorielle de la FFT 3D (créée à partir de versions vectorielles de FFT 1D et 2D) et d'autre part en faisant intervenir des produits de vecteurs, qui eux se vectorisent directement (tant que l'on ne dépasse pas la taille maximale des vecteurs égale à 65535).

## 5. Simulations

Dans un premier temps nous avons choisi de tester l'algorithme sur un exemple de simulation, simplement constitué par une sphère homogène de rayon  $R_0$  et de densité  $a=255$ . La fonction à reconstruire peut donc s'écrire :

$$(23) \quad f(\mathbf{r}) = \begin{cases} a & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq R_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La TF 3D de cette fonction est également une fonction radiale. La connaissance de cette fonction permet de mieux maîtriser les conditions d'échantillonnage spatial. On peut montrer que :

$$(24) \quad F_3 f(\mathbf{R}) = \frac{a R_0}{\pi R^2} \times \left( \frac{\sin(2\pi R R_0)}{2\pi R R_0} - \cos(2\pi R R_0) \right).$$

Nous avons calculé le résultat de la convolution de cette fonction avec la réponse impulsionnelle du système  $1/\|\mathbf{r}\|^2$ ; on obtient :

$$(25) \quad f(\mathbf{r}) * \frac{1}{\|\mathbf{r}\|^2} = a \frac{(R_0^2 - r^2)}{r} \times \ln \left| \frac{r + R_0}{r - R_0} \right| + 2a\pi R_0$$

où pour des raisons de simplicité  $r$  représente  $\|\mathbf{r}\|$ .

La fonction obtenue est radiale, décroissante suivant  $r$ , de valeur maximale  $4\pi a R_0$  à l'origine et tendant

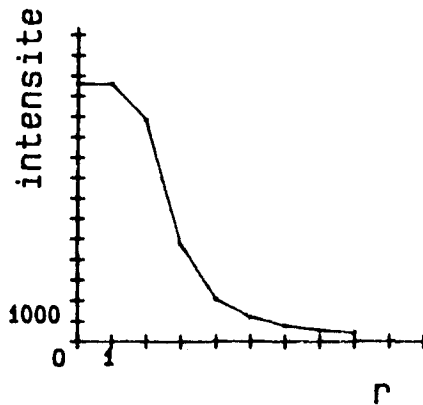


Fig. 2. — Profil des intensités de la fonction  $f * 1/r^2$  suivant un rayon.

vers 0 à l'infini. Le profil des amplitudes de cette fonction suivant un rayon est représenté sur la figure 2.

Ce résultat a l'avantage de permettre :

- (i) de comparer la rétroprojection corrigée discrète à sa valeur idéale;
- (ii) de pouvoir tester la procédure de déconvolution dans des conditions idéales.

Pour évaluer la différence entre deux reconstructions, ou plus généralement entre deux matrices 3D,  $f$  et  $f'$  (de taille  $N^3$ ), nous avons utilisé un certain nombre de critères d'écarts. En particulier :

— un écart quadratique moyen :

$$(26) \quad q(f, f') = \frac{1}{N^3} \|f - f'\|_2^2$$

— un écart quadratique moyen normalisé par la variance de l'objet original (écart  $\sigma$  proposé par Herman [7]) :

$$(27) \quad \sigma_2(f, f') = \frac{1}{N^3} \frac{\|f - f'\|_2^2}{\sigma_f^2} = \frac{q(f, f')}{\sigma_f^2}$$

— l'écart maximal entre les deux reconstructions :

$$(28) \quad \delta(f, f') = \|f - f'\|_\infty$$

— le coefficient de corrélation

$$(29) \quad c(f, f') = \frac{1}{N^3} \frac{(f - \bar{f}) \cdot (f' - \bar{f}')}{\sigma_f \sigma_{f'}}$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire,  $\|\cdot\|_2$  la norme euclidienne,  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie et où  $\bar{f}$ ,  $\bar{f}'$  et  $\sigma_f$ ,  $\sigma_{f'}$  sont respectivement les moyennes et écarts-type de  $f$  et  $f'$ .

Notons que ces différents écarts n'apportent pas tous la même information, les coefficients  $q$ ,  $\sigma_2$  et  $c$  étant des critères globaux alors que  $\delta$  apporte une information locale. Par ailleurs, remarquons que le coefficient de corrélation peut être proche de 1 même si les ordres de grandeurs des deux reconstructions sont très différents et que ce coefficient n'a plus de sens lorsque l'une des deux images est constante.

Ces coefficients ont été évalués à la fois pour la matrice 3D entière, et pour les différents plans de

coupe parallèles de la matrice 3D ce qui permet d'obtenir une information un peu plus localisée.

## 6. Premiers résultats

Il existe un grand nombre de paramètres que l'on peut faire varier pour évaluer l'algorithme et qui peuvent jouer sur la qualité des reconstructions obtenues. Par exemple, les pas d'échantillonnage des différentes fonctions (image originale  $f$ , projections  $p...$ ), la taille de la zone reconstruite  $L$ , les conditions géométriques (angle de divergence  $\beta$  du faisceau, distance source-détecteur  $D...$ ), le nombre de projections  $M_1 \times M_2$ , le choix du filtre  $K...$ . Nous avons choisi de nous placer dans des conditions géométriques fixes, et d'étudier l'influence de quelques-uns des autres paramètres.

### 6.1. CONDITIONS D'ÉCHANTILLONNAGE

Un certain nombre de paramètres géométriques ont été fixés : angle de divergence égal à  $30^\circ$ , distance source-centre de l'objet  $D_1 = 27,7$  cm, distance centre de l'objet-détecteurs  $D_2 = 13,8$  cm, rayon de la sphère  $R_0 = 4$  cm.

On peut constater sur la relation (24), que comme dans beaucoup de problèmes pratiques, la fonction à reconstruire n'est pas strictement à bande limitée. Toutefois, ce type de fonction peut être considéré comme étant « quasiment » à bande limitée, puisque sa TF 3D tend vers 0 à l'infini et devient négligeable à partir d'un certain rayon fréquentiel. On peut, par exemple, évaluer quantitativement l'erreur due à l'échantillonnage de cette fonction par le rapport  $e$  entre l'énergie de la fonction échantillonnée et celle de la fonction continue. Pour la sphère de rayon  $R_0$ , si  $a_i$  désigne le pas d'échantillonnage de la fonction, on obtient, pour une taille de zone reconstruite égale à  $4R_0$ , les résultats suivants :

si  $N = 8$  ( $a_i = 2$  cm),  $84,9\% \leq e \leq 91,3\%$ ;

si  $N = 16$  ( $a_i = 1$  cm),  $92,4\% \leq e \leq 95,6\%$ ;

si  $N = 32$  ( $a_i = 0,5$  cm),  $96,2\% \leq e \leq 97,7\%$ .

Les diverses reconstructions seront donc effectuées sur  $N = 8, 16$  ou  $32$  points, à partir de projections échantillonnées sur  $2N \times 2N$  points.

### 6.2. GÉOMÉTRIE D'ACQUISITION

Nous envisageons un nombre total de projections fixes, égal à 100, réparties de façon différente dans l'espace. Ce nombre semble être d'un point de vue théorique suffisant pour effectuer une reconstruction [25], chap. 3, compte tenu des paramètres fixés précédemment. Nous considérons les trois répartitions suivantes de sources, schématisées sur la figure 3 :

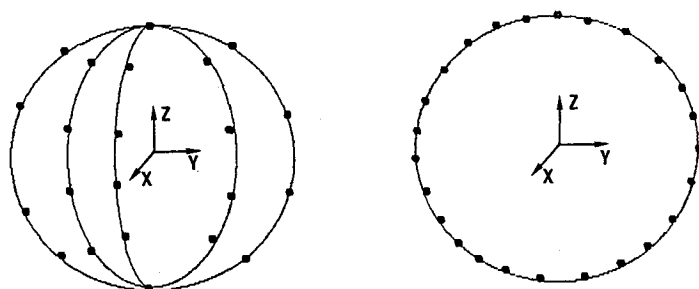
— 1<sup>er</sup> cas :  $M_1 = 10, M_2 = 10$  (géométrie  $4\pi$ );

— 2<sup>e</sup> cas :  $M_1 = 1, M_2 = 100$  (géométrie  $2\pi$ );

— 3<sup>e</sup> cas :  $M_1 = 2, M_2 = 50$  (géométrie  $2 \times 2\pi$ ).

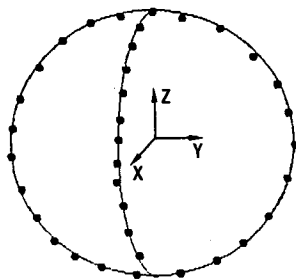
Le premier cas correspond à une répartition assez régulière des sources sur la sphère et est en accord avec les conditions requises par la théorie (géométrie  $4\pi$ ). Le deuxième cas au contraire corres-





Cas 1 :  $M_1 = 10, M_2 = 10$   
géométrie  $4\pi$

Cas 2 :  $M_1 = 1, M_2 = 100$   
géométrie  $2\pi$



Cas 3 :  $M_1 = 2, M_2 = 50$   
géométrie  $2 \times 2\pi$

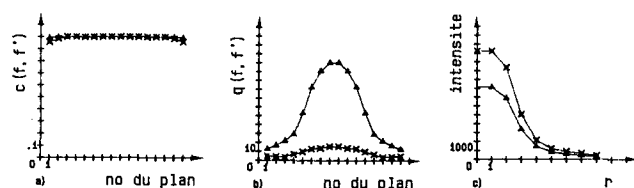
Fig. 3. — Schéma de la répartition des sources dans l'espace. Cas 1 :  $M_1 = 10, M_2 = 10$ , sources équiréparties sur la surface de la sphère (géométrie  $4\pi$ ). Cas 2 :  $M_1 = 1, M_2 = 100$ , sources réparties sur un seul cercle entourant l'objet (géométrie  $2\pi$ ). Cas 3 :  $M_1 = 2, M_2 = 50$ , sources réparties sur deux cercles orthogonaux entourant l'objet (géométrie  $2 \times 2\pi$ ).

pond à un cas extrême limite où la source ne se déplace que sur la surface d'un cercle passant par 0 (géométrie  $2\pi$ ). Le troisième cas de figure correspond aussi à un cas assez pauvre mais où l'on dispose d'informations sur deux cercles orthogonaux entourant l'objet. Notons que les deux derniers cas correspondent à des conditions d'acquisition plus réalistes.

### 6.3. COMPARAISON ENTRE LA RÉTROPROJECTION OBTENUE ET LE RÉSULTAT IDÉAL

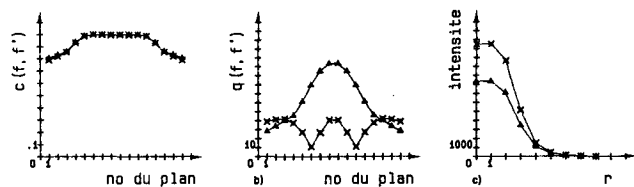
Dans un premier temps nous avons testé le calcul de la rétroprojection et vérifié l'utilité des facteurs correctifs. En particulier nous avons comparé le résultat obtenu par rétroprojection (corrigé ou non) au résultat idéal donné par la relation (25) et ceci pour les différentes répartitions de sources.

Dans le 1<sup>er</sup> cas d'acquisition (fig. 4), la matrice de rétroprojection obtenue correspond bien à une fonction radiale. Les points marqués par des croix (resp. triangles) correspondent aux résultats obtenus avec (resp. sans) facteurs correctifs. Les courbes 4(a) représentent le coefficient de corrélation entre la matrice de rétroprojection et le résultat idéal de la convolution donné par la relation (24); les écarts ont été calculés plan par plan, la position du plan étant portée en abscisse. Les courbes 4(b) représentent l'écart  $q$  entre ces matrices également plan par plan. Enfin, les courbes 4(c) correspondent directement à un profil des amplitudes de la matrice 3D le long d'un



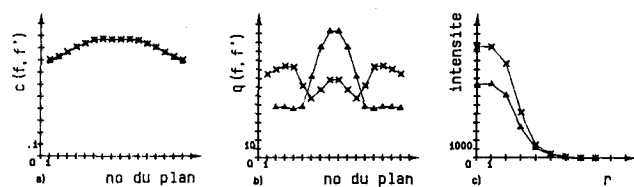
$M_1=10 \quad M_2=10$

Figure 4



$M_1=2 \quad M_2=50$

Figure 5



$M_1=1 \quad M_2=100$

Fig. 4, 5 et 6. — Comparaison entre la rétroprojection de toutes les projections coniques et le résultat idéal, dans les trois cas d'acquisition : (a) coefficients de corrélation mesurés plan par plan entre les deux images, (b) écarts quadratiques moyens mesurés plan par plan entre les deux images, (c) profil des intensités de la rétroprojection suivant un rayon. Les croix et les triangles représentent respectivement la rétroprojection avec et sans facteurs correctifs.

rayon. La nécessité d'utiliser des facteurs correctifs est nettement mise en évidence par les courbes (b) et (c). Par ailleurs, la comparaison entre la courbe (c) et la figure 2 montre que les résultats obtenus pour B'p sont très proches des résultats idéaux. On peut donc s'attendre à une bonne reconstruction dans ce cas d'acquisition. Les résultats obtenus dans les deux autres cas d'acquisition sont portés sur les figures 5 et 6 en suivant la même disposition. On peut en premier lieu constater que le résultat obtenu n'est pas tout à fait radial ce qui est normal étant donné la disposition des sources sur la sphère. Par ailleurs l'examen des courbes (a), (b), (c) révèle des différences assez importantes entre la matrice de rétroprojection même corrigée et sa valeur idéale.

### 6.4. TEST DE LA PROCÉDURE DE DÉCONVOLUTION

Dans un deuxième temps, nous avons testé la procédure de déconvolution à partir de la fonction idéale donnée par (25). La simple mise en œuvre de la relation (22) donne des résultats satisfaisants si l'on travaille sur une zone dont la taille  $L$  est au moins égale à deux fois celle de l'objet  $2R_0$ . En effet sinon l'erreur due à la troncature de la fonction convoluée est trop importante et se répercute sur le résultat de la déconvolution. Lorsque  $L = 2R_0$ , les résultats s'améliorent légèrement lorsque le pas d'échantillon-

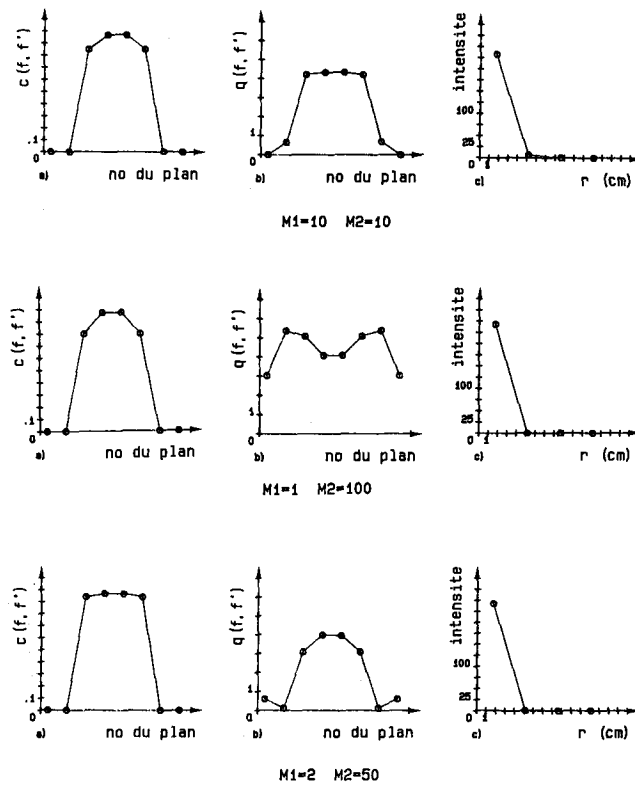


Fig. 7

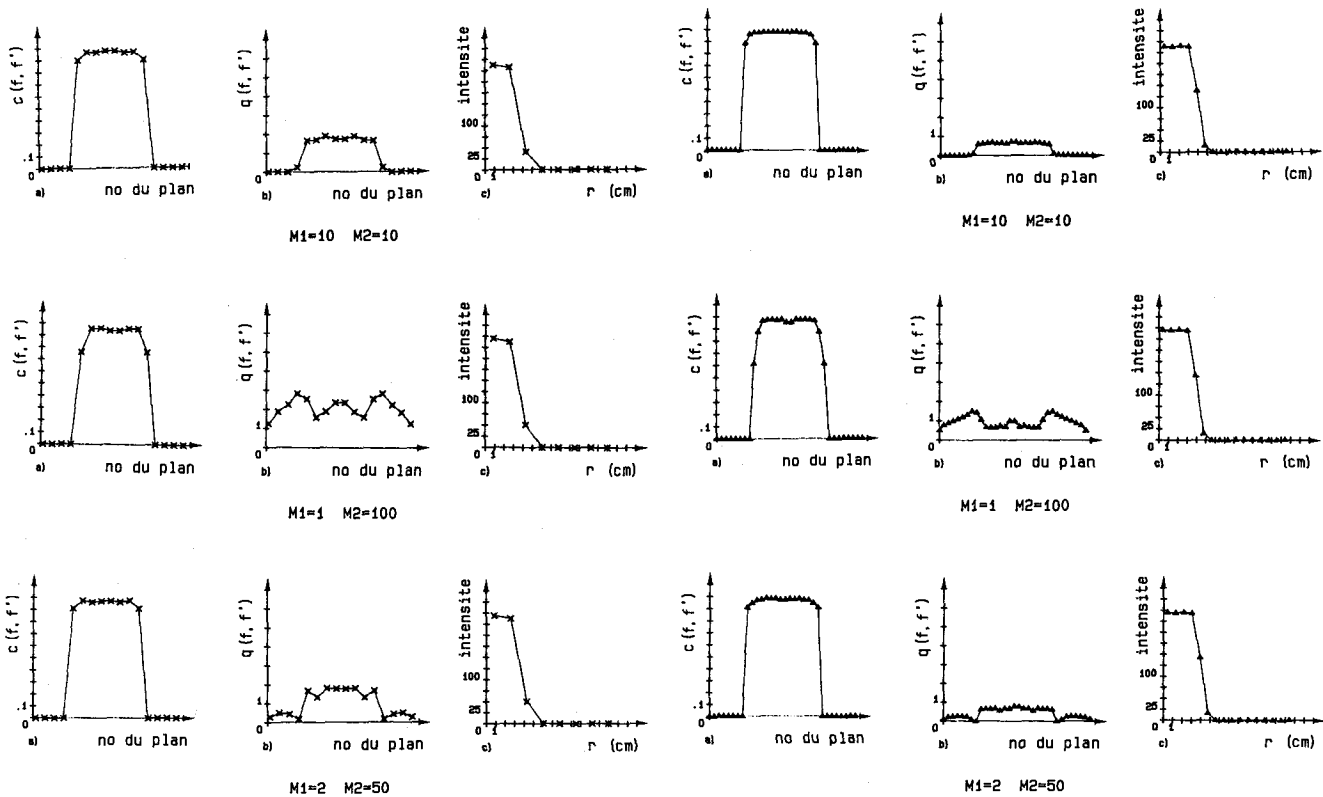


Fig. 8

Fig. 9

Fig. 7, 8 et 9. — Différents écarts mesurés plan par plan entre la reconstruction sur  $N$  points et l'image originale dans les trois cas d'acquisition : (a) coefficient de corrélation, (b) écart quadratique moyen, (c) profil des intensités suivant un rayon. Fig. 7 :  $N=8$ . Fig. 8 :  $N=16$ . Fig. 9 :  $N=32$ .

TABLEAU I

Critères d'écarts obtenus dans 4 cas différents d'acquisition,  $a=255$ ,  $R_0=4$  cm.

(a)						
$M_1=10, M_2=10$	$\sigma_f$	$\sigma_{f'}$	$q(f, f')$	$\sigma_2(f, f')$ ( $\times 100$ )	$\delta(f, f')$	$c(f, f')$
N=8 .....	61,72	46,78	1,040	1,690	92	0,94
N=16 .....	64,35	53,03	0,303	0,472	120	0,96
N=32 .....	63,49	56,50	0,079	0,125	143	0,97
(b)						
$M_1=1, M_2=100$	$\sigma_f$	$\sigma_{f'}$	$q(f, f')$	$\sigma_2(f, f')$ ( $\times 100$ )	$\delta(f, f')$	$c(f, f')$
N=8 .....	61,72	54,85	1,589	2,574	150	0,82
N=16 .....	64,35	58,45	0,530	0,824	223	0,85
N=32 .....	63,49	61,02	0,175	0,276	255	0,88
(c)						
$M_1=2, M_2=50$	$\sigma_f$	$\sigma_{f'}$	$q(f, f')$	$\sigma_2(f, f')$ ( $\times 100$ )	$\delta(f, f')$	$c(f, f')$
N=8 .....	61,72	48,78	0,924	1,498	73	0,95
N=16 .....	64,35	53,96	0,302	0,470	130	0,96
N=32 .....	63,49	57,16	0,087	0,140	186	0,97
(d)						
$M_1=20, M_2=20$	$\sigma_f$	$\sigma_{f'}$	$q(f, f')$	$\sigma_2(f, f')$ ( $\times 100$ )	$\delta(f, f')$	$c(f, f')$
N=8 .....	61,72	47,07	1,03	1,680	87	0,94
N=16 .....	64,35	53,33	0,301	0,468	116	0,96
N=32 .....	63,49	56,87	0,078	0,122	133	0,97

nage de la matrice diminue (c'est-à-dire lorsque N augmente) mais montrent de sévères distorsions qui apparaissent essentiellement au centre de la matrice. Les simulations effectuées montrent que quand L est au moins égal à deux fois la taille de l'objet ( $L=4 R_0$  ou  $L=8 R_0$ ) les résultats deviennent corrects.

6.5. RÉSULTATS OBTENUS PAR RECONSTRUCTION

Les écarts obtenus entre l'image reconstruite et l'image originale dans les trois cas d'acquisition sont portés sur les figures 7, 8 et 9 pour des tailles de reconstruction respectives de N=8, 16 et 32. Pour la reconstruction la taille L a été fixée à  $4 R_0$ . Sur chacune de ces figures, les courbes (a) représentent le coefficient de corrélation, les courbes (b), l'écart quadratique moyen et les courbes (c) une coupe de la matrice suivant un rayon. Les valeurs des critères d'écarts calculés globalement sur la matrice 3D entière sont portés dans le tableau.

Les différents critères d'écarts montrent clairement que les résultats obtenus par reconstruction dans le premier cas d'acquisition sont satisfaisants. Le nombre total de sources choisi ( $M_1 M_2=100$ ) semble être suffisant, puisqu'une augmentation de ce nombre ( $M_1 M_2=20 \times 20$ ) n'apporte qu'une légère amélioration sur les différents critères d'écarts [cf. tableau I (d)]. Dans les deux autres cas d'acquisition, les résultats tout en étant moins bons peuvent toutefois donner une première estimation de l'objet. En effet on peut remarquer que dans ces cas, les coefficients de corrélation entre matrice reconstruite

et idéale restent acceptables. Ceci traduit le fait que l'on peut tirer une information sur la morphologie de l'image reconstruite, même dans le cas le plus pauvre. Or c'est surtout cette information qui est utilisée en tomographie. Si l'on s'intéresse à un aspect plus quantitatif, les résultats sont alors à comparer en se basant plutôt sur un critère tel que l'écart quadratique moyen. Dans ce cas, on s'aperçoit alors que la reconstruction du cas 2 (géométrie  $2 \pi$ ) présente des valeurs erronées, ceci essentiellement sur les bords de l'objet. Le simple fait de faire une acquisition sur deux cercles orthogonaux entourant l'objet (géométrie  $2 \times 2 \pi$ ) semble nettement améliorer les résultats.

7. Conclusion

Dans cet article nous avons décrit la discrétisation et la mise en œuvre d'une méthode de reconstruction tomographique réellement 3D pouvant travailler à partir de projections coniques. Lorsqu'on dispose d'une acquisition  $4 \pi$  le problème se ramène en fait à un problème de déconvolution 3D, qui a ici été résolu de la façon la plus simple possible. Nous avons présenté les premiers résultats obtenus sur un simple exemple de simulation.

Les premiers résultats semblent montrer que l'algorithme, même dans sa version la plus élémentaire, donne des images reconstruites très satisfaisantes lorsque les sources sont réparties tout autour de

l'objet. Dans le cas d'acquisition le plus pauvre (géométrie  $2\pi$ ) on obtient une première approximation de l'objet qui peut être suffisante pour certaines applications. Par ailleurs, il semble que le fait d'utiliser une acquisition sur deux cercles orthogonaux entourant l'objet améliore sensiblement les résultats. Ce type de géométrie d'acquisition peut être envisagée de façon pratique dans un scanner réellement 3D.

D'autres tests sont nécessaires pour évaluer l'algorithme. On pourrait par exemple utiliser des modèles plus complexes et plus réalistes et, en particulier, étudier l'influence de facteurs tels que le bruit dans les données. D'autre part des simulations supplémentaires devraient pouvoir être utilisées pour fixer les conditions optimales de reconstruction vis-à-vis de cette méthode. En effet, étant donné que la qualité de la reconstruction est dépendante d'un nombre important de paramètres, on peut dans une première approche, étudier l'influence séparée d'un certain nombre de paramètres qui paraissent les plus importants.

Par ailleurs, la méthode de reconstruction utilisée étant obtenue à partir de la discrétisation d'une formule analytique d'inversion, elle nécessite, d'un point de vue théorique non seulement une acquisition  $4\pi$ , qui suppose une répartition des sources dans tout l'espace autour de l'objet mais, de plus, de disposer d'un nombre important de sources. Nous envisageons d'étudier une méthode permettant d'inverser le résultat obtenu par rétroprojection sans avoir à faire d'hypothèses sur la nature de l'acquisition. Pour cela on peut utiliser deux types d'approche : soit rechercher pour une disposition donnée des sources la « réponse impulsionnelle » adaptée à cette répartition, et inverser ensuite le système variant obtenu, soit résoudre directement le système par une méthode purement algébrique. La résolution de tels systèmes aurait l'avantage de pouvoir s'adapter au problème de la reconstruction à partir d'un nombre limité de projections.

Manuscrit reçu le 26 février 1988.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. L. RITMAN, J. H. KINSEY, R. A. ROBB, L. D. HARRIS et B. K. GILBERT, Physics and technical considerations in the design of the DSR: a high temporal resolution volume scanner, *AJR*, 134, 1980, p. 369-374.
- [2] P. GRANGEAT, Description of a 3D reconstruction algorithm for diverging X-ray beams, *Proc. Biostereometrics 85*, SPIE 602, 1985, p. 92-108.
- [3] S. WEBB, J. SUTCLIFFE, L. BURKINSHAW et A. HORSMAN, Tomographic reconstruction from experimentally obtained cone-beam projections, *IEEE Trans. on Med. Imag.*, MI-6, n° 1, March 1987, p. 67-73.
- [4] G. T. HERMAN éd., *Image reconstruction from projections. The fundamentals of computerized tomography*, Academic Press, 1980.
- [5] P. GILBERT, Iterative methods for reconstruction of three dimensional objects from projections, *J. Theor. Biol.*, 36, 1972, p. 105-117.
- [6] R. GORDON, R. BENDER et G. T. HERMAN, Algebraic reconstruction technique (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography, *J. Theor. Biol.*, 29, 1970, p. 471-481.
- [7] G. T. HERMAN et S. W. ROWLAND, Three methods for reconstructing objects from X rays: a comparative study, *Comput. Graph. and Imag. Process.*, 2, 1973, p. 151-178.
- [8] R. M. LEWITT, Reconstruction algorithms: transform methods, *Proc. of the IEEE*, 71, n° 3, March 1983, p. 399-408.
- [9] M. SCHLINDWEIN, Iterative three-dimensional reconstruction from twin-cone beam projections, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-25, n° 5, Oct. 1978, p. 1135-1143.
- [10] G. MINERBO, Maximum entropy reconstruction from cone beam projection data, *Comput. Biol. Med.*, 9, 1979, p. 29-37.
- [11] M. D. ALTSCHULER, G. T. HERMAN et A. LENT, Fully three dimensional reconstruction from cone beam sources, *Proc. Conf. on Pattern Recognition and Image Processing*, IEEE Comput. Soc., Long Beach, CA, 1978.
- [12] H. H. STARK, J. W. WOODS, I. PAUL et R. HINGORANI, Direct Fourier reconstruction in computer tomography, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-29, n° 2, 1980, p. 237-245.
- [13] T. F. BUDINGER et G. T. GULLBERG, Three-dimensional reconstruction in nuclear medicine emission imaging, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, NS-21, 1974, p. 2-20.
- [14] L. A. SHEPP et B. F. LOGAN, The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, NS-21, 1974, p. 21-43.
- [15] G. N. RAMACHANDRAN et A. V. LAKSHMINARAYANAN, Three dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolution instead of Fourier transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 68, 1971, p. 2236-2240.
- [16] G. T. GULLBERG, The reconstruction of fan-beam data by filtering the back-projection, *Comput. Graph. and Imag. Process.*, 10, 1979, p. 30-47.
- [17] G. T. HERMAN, A. V. LAKSHMINARAYANAN et A. NARSTEK, Convolution technique for divergent beams, *Comput. Biol. Med.*, 6, 1976, p. 259-271.
- [18] B. D. SMITH, Image reconstruction from Cone Beam projections: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods, *IEEE Trans. Med. Imag.*, MI-4, n° 1, March 1985, p. 14-25.
- [19] G. N. MINERBO, Convolutional reconstruction from cone beam projection data, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, NS-26, n° 2, April 1979, p. 2682-2684.
- [20] R. V. DENTON, B. FRIENDLER et A. J. ROCKMORE, Direct three dimensional image reconstruction from divergent rays, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, NS-26, 1979, p. 4695-4703.
- [21] L. A. FELDKAMP, L. C. DAVIS et J. W. KRESS, Practical cone beam algorithm, *Journ. Opt. Soc. Am. A*, 1, n° 6, June 1984, p. 612-619.
- [22] F. PEYRIN, The generalized back-projection theorem for cone-beam projections, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, NS-32, n° 4, August 85, p. 1512-1519.
- [23] S. J. GLICK, M. A. KING et B. C. PENNEY, Spatial aliasing effects on the transform function of the filtered back-projection algorithm, *Proc. 9th conf. IEEE/EMBS*, Nov. 87, Boston.
- [24] FORTRAN 200, Version 1, Reference Manual Control Data Corporation.
- [25] F. NATTERER, *The Mathematics of computerized tomography*, 1986, John Wiley & sons Ltd and B. G. Teubner, Stuttgart.