



HAL
open science

Distance à un convexe mobile d'un espace hilbertien

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Distance à un convexe mobile d'un espace hilbertien. 1971. hal-02162190

HAL Id: hal-02162190

<https://hal.science/hal-02162190>

Submitted on 21 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE

MONTPELLIER 1971 Exposé n° 13

DISTANCE A UN CONVEXE MOBILE D'UN ESPACE HILBERTIEN

par

J.J. MOREAU

1 - INTRODUCTION

Soit H un espace hilbertien réel. Soit $t \mapsto C(t)$ (ou simplement C_t) une multiapplication d'un intervalle de \mathbb{R} dans H , avec $C(t)$ convexe fermé non vide. Il sera commode d'interpréter t comme le temps : on dira de la sorte que $C(t)$ constitue un convexe mobile.

Soit $t \mapsto z(t) \in H$ un "point mobile" défini sur le même intervalle de temps. L'objet du présent rapport est de donner des conditions suffisantes pour que la fonction

$$t \mapsto \text{dist} (z(t), C(t))$$

soit dérivable. Ou plutôt, pour éviter l'irrégularité bien connue de la fonction distance sur la frontière de C on s'intéressera au carré de cette distance ou, plus commodément, à la moitié de ce carré.

On note donc q la fonction

$$(1.1) \quad (t, x) \mapsto q(t, x) = \frac{1}{2} [\text{dist} (x, C(t))]^2$$

et on étudie la dérivée de la fonction

$$t \mapsto q(t, z(t)).$$

La motivation de cette étude est de préparer l'application d'une technique de pénalisation à l'équation différentielle multivoque

$$-\frac{dz}{dt} = \partial\psi_t(z)$$

(ψ_t : fonction indicatrice de C_t) ou équation du "processus de rafle", elle même introduite par la théorie des systèmes mécaniques élasto-plastiques (cf. MOREAU [3]).

La condition de régularité invoquée, quant au mouvement du convexe, va se formuler par le moyen de la fonction d'appui de C_t :

$$(t, y) \mapsto \gamma(t, y) \text{ notée aussi } \gamma_t(y) .$$

On posera que, au moins au point $y = z(t) - \text{proj}(z(t), C(t))$, et pour la valeur en cause de t , cette fonction est équidérivable par rapport à t : nous voulons dire que, au sens de la topologie de $\mathbb{R} \times H$ (fort), la limite suivante existe

$$\lim_{(s,v) \rightarrow (t,y)} \frac{\gamma(s,v) - \gamma(t,v)}{s - t}$$

notée $\dot{\gamma}(t, y)$. Tel est évidemment le cas, en particulier, si la fonction $(s, v) \mapsto \gamma(s, v)$ possède une fonction dérivée partielle $(s, v) \mapsto \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, v)$ continue sur un voisinage de (t, y) . L'exemple typique est celui d'un convexe en translation, soit $C(t) = C_0 + a(t)$, où $t \mapsto a(t) \in H$ est une fonction faiblement dérivable, puisqu'alors

$$\gamma(t, y) = \gamma_0(y) + (a(t) \mid y) .$$

Moyennant cela, si la fonction $t \mapsto z(t)$ possède une dérivée faible, notée \dot{z} , on établira que

$$\frac{d}{dt} q(t, z(t)) = (\dot{z} \mid y) - \dot{\gamma}(t, y) .$$

On vient de supposer implicitement que γ était une fonction à valeurs finies : il faut et il suffit pour cela que C_t soit borné. Nous supposons dans toute la suite qu'on s'est ramené à ce cas, quitte à remplacer chaque C_t par son intersection avec une boule fermée, de rayon strictement supérieur à $\text{dist}(z, C_t)$.

2 - CONTINUITÉ DE LA PROJECTION

Dans ce paragraphe, on suppose que $z \in H$ est indépendant de t et on recherche des conditions suffisantes pour que la fonction

$$(2.1) \quad t \mapsto x(t) = \text{proj}(z, C_t)$$

soit fortement continue au point t_0 (le cas où z serait une fonction continue quelconque de t se ramènerait à celui-là, vu que l'application $z \mapsto \text{proj}(z, C_t)$ est contractante).

Un cas classique est celui où la multiapplication $t \mapsto C_t$ est continue au sens de la distance de Hausdorff des ensembles ; on sait (cf. HÖRMANDER [1]) que cela équivaut à l'équicontinuité des fonctions $t \mapsto \gamma(t, y)$ pour y décrivant la boule unité de H . La proposition suivante constitue une version un peu plus forte puisque l'équicontinuité n'est invoquée que sur un voisinage de $y = z - x$.

PROPOSITION. Pour que la fonction (2.1) soit fortement continue au point t_0 , il suffit qu'il existe un voisinage fort V du point

$$y_0 = z - x(t_0)$$

tel que la famille de fonctions

$$t \mapsto \gamma(t, v), \quad v \in V$$

soit équicontinue au point t_0 , i.e. : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe

$\eta > 0$ tel que (1)

$$(2.2) \quad |t - t_0| \leq \eta \implies (\forall v \in V : |\gamma(t, v) - \gamma(t_0, v)| \leq \epsilon)$$

En effet d'après la théorie des applications "prox"

(cf. MOREAU [1]) il sera équivalent d'établir la continuité de

$$t \mapsto y(t) = z - x(t) = \text{prox}(z, \gamma_t) .$$

$y(t)$ est le point où la fonction

$$v \mapsto \phi(t, v) = \frac{1}{2} |z - v|^2 + \gamma(t, v)$$

atteint son minimum et (2)

$$(2.3) \quad z - y_t \in \partial \gamma_t(y_t) .$$

Donc

$$\forall v \in H : (z - y_0 | v - y_0) + \gamma(t_0, y_0) \leq \gamma(t_0, v)$$

d'où on tire aisément

$$\phi(t_0, v) \geq \frac{1}{2} |z - y_0|^2 + \frac{1}{2} |v - y_0|^2 + \gamma(t_0, y_0)$$

et finalement

$$\forall v \in H : \phi(t_0, v) \geq \phi(t_0, y_0) + \frac{1}{2} |v - y_0|^2 .$$

Soit β une boule fermée de centre y_0 , de rayon $r > 0$

contenue dans le voisinage V de l'énoncé ;

(1) Noter que les raisonnements faits atteignent plus généralement la continuité de la fonction $t \mapsto \text{prox}(z, g_t)$ où $v \mapsto g_t(v)$ est une fonction convexe s.c.i., prenant éventuellement la valeur $+\infty$: dans ce cas le dernier membre de (2.2) devra être remplacé par les deux inégalités $g(t, v) \leq g(t_0, v) + \epsilon$ et $g(t_0, v) \leq g(t, v) + \epsilon$.

(2) Si l'on veut éviter d'entrer dans le détail de la théorie des prox, on obtiendra (2.3) en appliquant à ϕ une règle d'addition des sous-différentiels donnée dans MOREAU [2].

$$(2.4) \quad |v - y_0| = r \implies \phi(t_0, v) \geq \phi(t_0, y_0) + \frac{1}{2} r^2 .$$

En prenant $\epsilon = \frac{1}{8} r^2$, la propriété de l'énoncé fournit $\eta > 0$ tel que pour tout $v \in \beta$,

$$|t - t_0| \leq \eta \implies \gamma(t, v) \geq \gamma(t_0, v) - \frac{1}{8} r^2$$

Donc, vu (2.4),

$$(|t - t_0| \leq \eta, |v - y_0| = r) \implies \phi(t, v) > \phi(t_0, y_0) + \frac{3}{8} r^2 .$$

Cette même propriété de l'énoncé donne

$$|t - t_0| \leq \eta \implies \phi(t, y_0) \leq \phi(t_0, y_0) + \frac{1}{8} r^2$$

d'où finalement

$$(|t - t_0| \leq \eta, |v - y_0| = r) \implies \phi(t, v) > \phi(t, y_0) .$$

Il n'y a plus qu'à considérer la restriction de la fonction convexe $v \mapsto \phi(t, v)$ à chaque demi droite issue de y_0 pour conclure que

$$(|t - t_0| \leq \eta, |v - y_0| \geq r) \implies \phi(t, v) > \phi(t, y_0) .$$

Par conséquent, si $|t - t_0| \leq \eta$, le minimum de la fonction $v \mapsto \phi(t, v)$ n'est certainement pas atteint hors de β ; donc $y(t) \in \beta$, ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE. Si la fonction d'appui γ est équidérivable par rapport à t au point (t_0, y_0) , la fonction (2.1) est continue au point t_0 .

En effet l'équidérivabilité implique l'existence d'un voisinage V de y_0 dans H fort, d'un $\alpha > 0$ et d'un $M \geq 0$ tels que

$$(t, v) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times V \implies \left| \frac{\gamma(t, v) - \gamma(t_0, v)}{t - t_0} \right| \leq M .$$

Donc

$$(|t - t_0| \leq \alpha, v \in V) \implies |\gamma(t, v) - \gamma(t_0, v)| \leq M |t - t_0|$$

ce qui entraîne immédiatement l'équicontinuité au point t_0 pour la famille de fonctions

$$t \mapsto \gamma(t, v), v \in V .$$

3 - DERIVEE DU DEMI-CARRE DE LA DISTANCE

On se ramène par translation à l'étude de la distance de l'origine à un convexe mobile.

LEMME. Soit $y_0 = - \text{proj} (0, C(t_0))$; Si la fonction $(t, v) \mapsto \gamma(t, v)$ est équidérivable par rapport à t au point (t_0, y_0) , la fonction

$$(3.1) \quad t \mapsto \frac{1}{2} [\text{dist} (0, C(t))]^2$$

admet au point t_0 une dérivée égale à $-\dot{\gamma}(t_0, y_0)$.

Démonstration : Notons $x_0 = -y_0$ et

$$x_t = -y_t = \text{proj} (0, C(t)) .$$

Le point x_t est classiquement caractérisé par

$$x_t \in C(t)$$

$$\forall u \in C(t) : (u - x_t | x_t) \geq 0$$

d'où, vu la définition de la fonction d'appui, l'égalité

$$(3.2) \quad \gamma(t, y_t) = (x_t | y_t) ;$$

de même

$$(3.3) \quad \gamma(t_0, y_0) = (x_0 | y_0) .$$

La définition de la fonction d'appui fournit en outre les inégalités

$$(3.4) \quad \gamma(t_0, y_t) \geq (x_0 | y_t)$$

$$(3.5) \quad \gamma(t, y_0) \geq (x_t | y_0)$$

Le rapprochement de (3.3) et (3.5) donne

$$(3.6) \quad (x_t - x_0 | y_0) \leq \gamma(t, y_0) - \gamma(t_0, y_0)$$

et le rapprochement de (3.2) et (3.4)

$$(3.7) \quad (x_t - x_0 | y_t) \geq \gamma(t, y_t) - \gamma(t_0, y_t) .$$

En appelant f la fonction (3.1), le premier membre de (3.6) s'écrit

$$f(t_0) - f(t) + \frac{1}{2} |x_t - x_0|^2$$

et le premier membre de (3.7)

$$f(t_0) - f(t) - \frac{1}{2} |x_t - x_0|^2 .$$

Par suite

$$(3.8) \quad \gamma(t, y_t) - \gamma(t_0, y_t) \leq f(t_0) - f(t) \leq \gamma(t, y_0) - \gamma(t_0, y_0)$$

Le paragraphe 2 ayant montré que la fonction $t \mapsto y_t$ est continue, l'équidérivabilité de γ au point (t_0, y_0) implique

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t, y_t) - \gamma(t_0, y_t)}{t - t_0} = \dot{\gamma}(t_0, y_0) .$$

La double inégalité (3.8) entraîne donc la dérivabilité de f au point t_0 avec la valeur annoncée pour la dérivée.

Pour conclure :

PROPOSITION. On suppose que la fonction $t \mapsto z(t) \in H$ admet au point t_1 une dérivée faible, soit \dot{z}_1 . Notons

$$y_1 = z(t_1) - \text{proj} (z(t_1), C(t_1)) .$$

Si la fonction d'appui, soit $y \mapsto \gamma(t, y)$, de $C(t)$ est équidérivable par rapport à t au point (t_1, y_1) , la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2} [\text{dist} (z(t), C(t))]^2$$

admet au point t_1 une dérivée égale à

$$(\dot{z}_1 | y_1) - \dot{\gamma}(t_1, y_1) .$$

En effet, la distance de $z(t)$ à $C(t)$ est aussi bien la distance de l'origine au convexe

$$C'(t) = C(t) - z(t)$$

lequel admet pour fonction d'appui

$$y \mapsto \gamma'(t, y) = \gamma(t, y) - (z(t)|y) .$$

En outre

$$y_1 = - \text{proj} (0, C'(t_1)) .$$

On écrit alors

$$\frac{\gamma'(t, y) - \gamma'(t_1, y)}{t - t_1} = \frac{\gamma(t, y) - \gamma(t_1, y)}{t - t_1} - \left(\frac{z(t) - z(t_1)}{t - t_1} | \cdot y \right) ;$$

la fonction

$$(t, y) \mapsto \left(\frac{z(t) - z(t_1)}{t - t_1} | \cdot y \right)$$

a pour limite $(\dot{z}_1 | y_1)$ lorsque (t, y) tend vers (t_1, y_1) dans $\mathbb{R} \times H$ fort,

puisque $\frac{z(t) - z(t_1)}{t - t_1}$ a pour limite \dot{z}_1 dans H faible.

L'équidérivabilité de γ au point (t_1, y_1) entraîne donc celle de γ' , d'où la conclusion annoncée, en invoquant le lemme.

REMARQUE 1. Le point y_1 introduit ci-dessus peut aussi s'interpréter comme

$$y_1 = \text{prox} (z(t_1) ; \gamma(t_1, \cdot))$$

ou encore comme le gradient (fort) au point $z(t_1)$ de la fonction

$x \mapsto q(t, x)$ définie en (1.1).

REMARQUE 2. Pour ce qui est de la fonction

$$t \mapsto h(t) = \text{dist} (z(t), C(t))$$

il vient que, si $h(t_1) \neq 0$, c'est à dire $z(t_1) \notin C(t_1)$, cette fonction admet au point t_1 la dérivée

$$(3.9) \quad \dot{h}(t_1) = \frac{1}{h(t_1)} [(\dot{z}_1 | y_1) - \dot{\gamma}(t_1, y_1)] .$$

Posons

$$u_1 = \frac{1}{h(t_1)} y_1 \quad ;$$

C'est le vecteur de norme 1 sur la demi-droite qui passe par $z(t_1)$ et a pour origine $\text{proj}(z(t_1), C(t_1))$: on peut appeler cette demi-droite la projetante de $z(t_1)$ sur $C(t_1)$. Alors l'homogénéité de la fonction γ fait que (3.9) s'écrit

$$(3.10) \quad \dot{h}(t_1) = (\dot{z}_1 | u_1) - \dot{\gamma}(t_1, u_1) .$$

Il en résulte notamment que, si on considère divers points fixes admettant la même projetante sur $C(t_1)$, c'est à dire appartenant à une même "normale extérieure" du convexe fermé $C(t_1)$, ces divers points fournissent la même valeur pour $\dot{h}(t_1)$, à savoir $-\dot{\gamma}(t_1, u_1)$. Cette valeur s'explique très naturellement : \dot{h} est la dérivée du rayon de la boule minimale de centre z rencontrant $C(t)$. Pour des z de plus en plus éloignés sur la projetante en question, ces boules, au voisinage de leur contact avec $C(t)$, s'approchent du demi-espace minimal admettant u_1 pour vecteur normal, on sait comment le déplacement de ce demi-espace est déterminé par la fonction $t \mapsto \gamma(t, u_1)$.

R E F E R E N C E S

- HÖRMANDER (L) [1] · Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe, Arkiv för Mat. , 3 (1954) , 181 - 186.
- MOREAU (J. J.) [1] · Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965), 273-299
- [2] · Un cas d'addition des sous-différentiels, Fac. Sci. Montpellier, Séminaire d'analyse Unilatérale, 2 (1969), exposé n° 3.
- [3] · Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, C.R. Acad. Sci. Paris. Série A, 273 (1971), 118-121.