



Convexifiée d'une topologie d'E.V.T.

C. Lescarret, Jean Jacques Moreau

► To cite this version:

| C. Lescarret, Jean Jacques Moreau. Convexifiée d'une topologie d'E.V.T.. 1971. hal-02162175

HAL Id: hal-02162175

<https://hal.science/hal-02162175>

Submitted on 21 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SEMINAIRE D'ANALYSE CONVEXE
MONTPELLIER, 1971 Exposé n°2

CONVEXIFIÉE D'UNE TOPOLOGIE D'E.V.T.
par
C. LESCARRET et J.J. MOREAU

1. Motivation : Le but de ce rapport est de rassembler un certain nombre de résultats, qui semblent devoir être souvent présents à l'esprit des chercheurs utilisant en analyse fonctionnelle des espaces vectoriels en dualité.

En général les ouvrages traitant de la question ne considèrent sur ces espaces que des topologies localement convexes ; pourtant un espace vectoriel topologique quelconque X peut toujours être mis, canoniquement en dualité avec son dual topologique X' , bien que sa topologie initiale ne soit pas nécessairement localement convexe. On cherche à établir ici les liens qui existent justement entre cette topologie initiale de X et la dualité $\langle X, X' \rangle$.

2. Notations et terminologie : Soit X un espace vectoriel réel muni d'une topologie $\mathcal{C}$ d'espace vectoriel topologique (en abrégé : e.v.t.) c'est-à-dire compatible avec la structure vectorielle de X ce qui, rappelons-le, signifie que les opérations algébriques de X (addition et multiplication par les scalaires réels) sont continues pour $\mathcal{C}$.

On ne suppose pas la topologie $\mathcal{C}$ localement convexe, ni même séparée.

On notera Y le dual topologique de l'espace vectoriel topologique $(X, \mathcal{C})$ et on écrira : $Y = (X, \mathcal{C})'$.

La dualité établie entre les espaces X et Y par la forme bilinéaire canonique $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = y(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, n'est pas en général séparante dans X :

on peut avoir $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in Y$ sans que cela implique nécessairement $x = 0$.

Par exemple si X est un espace vectoriel et $\mathcal{C}$ la topologie grossière sur X (pour laquelle le seul ouvert non vide est l'espace X entier) alors il est clair que $Y = \{0\}$.

Dans le cadre général précédent on dispose de toute la gamme des topologies localement convexes sur l'espace X , compatibles avec la dualité $\langle X, Y \rangle$: elles sont comprises entre la topologie faible $\sigma(X, Y)$ et celle de Mackey $\tau(X, Y)$. Puisque la topologie faible $\sigma(X, Y)$ est la moins fine des topologies sur X pour lesquelles toutes les formes $y \in Y$ sont continues, elle est moins fine que $\mathcal{C}$; on écrit $\sigma(X, Y) \subset \mathcal{C}$.

Cette topologie faible n'est pas nécessairement séparée. D'ailleurs elle est séparée si et seulement si la dualité est séparante. (cf. [1], Ch 2, § 6,2 proposition 2).

3. "Convexifiée d'une topologie d'e.v.t." : L'ensemble des topologies d'e.v.t. localement convexes sur X est, pour la relation d'ordre "est moins fine que" un ensemble ordonné qui est un treillis complet (cf. [2], Ch V, § 4). Comme il existe sur X au moins une topologie d'e.v.t. localement convexe moins fine que $\mathcal{C}$, à savoir $\sigma(X, Y)$, il existe $\hat{\mathcal{C}}$ borne supérieure des topologies sur X d'e.v.t. localement convexes moins fines que $\mathcal{C}$: C'est la topologie d'e.v.t. sur X localement convexe la plus fine de celles qui sont moins fines que $\mathcal{C}$. On dira que $\hat{\mathcal{C}}$ est la topologie "convexifiée" de $\mathcal{C}$.

On peut la caractériser géométriquement :

PROPOSITION 1 : Si $(X, \mathcal{C})$ est un e.v.t. réel et $\hat{\mathcal{C}}$ la topologie d'e.v.t. sur X localement convexe la plus fine de celles qui sont moins fines que $\mathcal{C}$ (convexifiée de $\mathcal{C}$), un système fondamental de voisinages de 0 pour $\hat{\mathcal{C}}$ est constitué par les enveloppes convexes des voisinages d'un système fondamental pour $\mathcal{C}$.

Démonstration : Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de 0 pour la topologie $\mathcal{C}$. Si $V \in \mathcal{V}$ on notera $\hat{V}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble V . Il faut vérifier que l'ensemble de parties $\hat{\mathcal{V}} = \{\hat{V} : V \in \mathcal{V}\}$ satisfait aux axiomes des systèmes fondamentaux de voisinages de 0 (cf. par exemple [3], 5.1). La seule condition non évidente est celle que nous établissons : soit $\hat{U} \in \hat{\mathcal{V}}$, il existe $V \in \mathcal{V}$ tel que $V + V \subset V$, on a alors $\hat{V} + \hat{V} = 2\hat{V} = \widehat{2V} \subset \widehat{V+V} \subset \hat{U}$. Donc l'ensemble $\hat{\mathcal{V}}$ est un système fondamental de voisinages de 0 dans X pour une topologie d'e.v.t. localement convexe que nous notons provisoirement $c(\mathcal{C})$. Comme pour tout $V \in \mathcal{V}$ on a $V \subset \hat{U}$ il en résulte que $c(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ et puisque la topologie $c(\mathcal{C})$ est localement convexe et moins fine que $\mathcal{C}$, elle est aussi moins fine que $\hat{\mathcal{C}}$. Remarquons que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux topologies d'e.v.t. sur X non nécessairement localement convexes mais telles que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ on a aussi $c(\mathcal{C}_1) \subset c(\mathcal{C}_2)$. Alors les inclusions $c(\mathcal{C}) \subset \hat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ impliquent

$$c(c(\mathcal{C})) = c(\mathcal{C}) \subset c(\hat{\mathcal{C}}) = \hat{\mathcal{C}} \subset c(\mathcal{C})$$

c'est-à-dire $\hat{\mathcal{C}} = c(\mathcal{C})$.

PROPOSITION 2 : On a

$$(X, \mathcal{C})' = (X, \sigma(X, Y))' = (X, \hat{\mathcal{C}})' = Y$$

(cf. [1], exercices ch II, § 5, n° 23)

Démonstration : Il est classique que $(X, \sigma(X, Y))' = Y$ (cf. [3], 16-2).

Comme on a les inclusions $\sigma(X, Y) \subset \hat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$, on déduit entre espaces duaux $Y \subset Y_0 \subset Y$ où $Y_0 = (X, \hat{\mathcal{C}})'$ donc $Y_0 = Y$

Disons qu'un e.v.t. $(X, \mathcal{C})$ possède la propriété de séparation stricte des convexes fermés et des points si, pour tout ensemble convexe fermé C dans X et tout point $x \in X \setminus C$, il existe un hyperplan fermé H dans X qui sépare strictement x et C .

En fait cette propriété équivaut à la suivante (cf. [1], Ch II, § 5,3 corollaire 1).

Tout ensemble convexe fermé dans X est égal à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

On sait que tout e.v.t. localement convexe $(X, \mathcal{C})$ possède la propriété de séparation stricte des convexes fermés et des points.

Si l'e.v.t. $(X, \mathcal{C})$ est quelconque, en général les ensembles convexes fermés pour $\mathcal{C}$ dans X ne sont pas les mêmes que pour les topologies compatibles avec la dualité $\langle X, Y \rangle$.

Si C est une partie convexe $\sigma(X, Y)$ -fermée de X il est clair qu'elle est aussi fermée pour la topologie $\mathcal{C}$ (qui est plus fine que $\sigma(X, Y)$; par contre, un ensemble C convexe et $\mathcal{C}$ -fermé n'est pas nécessairement $\sigma(X, Y)$ -fermé, sinon l'e.v.t. $(X, \mathcal{C})$ posséderait justement la propriété de séparation stricte des convexes fermés et des points.

Or l'espace $L^p([a, b], \mu)$ où $[a, b]$ est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, μ la mesure de Lebesgue et $0 < p < 1$ ne possède pas la propriété de séparation stricte des convexes fermés et des points car en ce cas le dual topologique se réduit à zéro. (cf. [4] § 15,9).

PROPOSITION 3 : Si $(X, \mathcal{C})$ est un e.v.t. quelconque et Y son dual topologique, l'intérieur d'un ensemble convexe C pour $\mathcal{C}$, s'il n'est pas vide, coïncide avec l'intérieur de C pour la topologie de Mackey $\tau(X, Y)$.

Démonstration : Notons $\mathcal{C}$ -int. C l'intérieur de l'ensemble C pour $\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C}$ -int. $C \neq \emptyset$, il est identique à l'intérieur algébrique de C (ensemble des points internes de C) (cf. [3] § 13.1).

Soit alors U un ensemble ouvert pour $\mathcal{C}$, non vide, contenu dans C ; alors $\hat{U} \subset C$ et $\hat{U}$ est un $\mathcal{C}$ -voisinage d'un point x de C . Comme la topologie $\mathcal{C}$ est compatible avec la dualité $\langle X, Y \rangle$ d'après la proposition 2, elle est

moins fine que la topologie de Mackey $\tau(X, Y)$ donc $\hat{U}$ est aussi un $\tau(X, Y)$ -voisinage du point x ; il en résulte que $\tau\text{-int.} C \neq \emptyset$; donc le τ -intérieur de C coïncide aussi avec l'intérieur algébrique de C .

Corollaire : Tout corps convexe (convexe fermé d'intérieur non vide) pour τ est aussi un corps convexe pour $\tau(X, Y)$.

Démonstration : Soit K un corps convexe pour la topologie τ ; d'après la proposition 3 le $\tau(X, Y)$ -intérieur de K est non vide et, en utilisant le théorème de Hahn-Banach sous sa forme géométrique, on déduit que K est égal à l'intersection des demi-espaces fermés le contenant, donc est fermé pour la topologie $\tau(X, Y)$ donc est aussi un corps convexe pour cette topologie.

4. Etude d'un exemple classique : $X = \ell^p(\mathbb{N})$; $0 < p < 1$.

On rappelle que $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$ est l'espace des suites réelles $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de puissance $p^{\text{ème}}$ sommable : $\sum_{m=0}^{\infty} |x(m)|^p < +\infty$ (cf. [5] Ch I, suppl 5).

Comme topologie d'e.v.t. τ sur ℓ^p on prend celle qui est définie par la métrique

$$d_p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} |x(m) - y(m)|^p$$

L'espace vectoriel topologique (ℓ^p, τ) est alors complet (cf. [5]

Ch III suppl 1) et non localement convexe (cf. [5] Ch I, suppl 5).

Comme on a $\xi^p \gg \xi$ si $0 < \xi < 1$ il en résulte que $\ell^p \subset \ell^1$

PROPOSITION 4 : La topologie $\hat{\tau}$ convexifiée de la topologie non localement convexe de ℓ^p ($0 < p < 1$) est la topologie induite sur ℓ^p par celle de la norme de ℓ^1

En particulier le dual de ℓ^p est donc ℓ^∞ .

(cf. [3], exercices 6, N (d)).

Démonstration : Soit $\mathcal{C}_1$ la topologie induite sur ℓ^p par la topologie de la norme de ℓ^1 . Si U est un $\mathcal{C}_1$ -voisinage de 0 dans ℓ^p qu'on peut prendre sous la forme $U = \{x \in \ell^p : ||x||_1 = \sum_{m=0}^{\infty} |x(m)| < \rho\}$ avec $\rho < 1$ alors pour $d_p(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} |x(m)|^p < \rho$ on a $|x(m)| < 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ donc

$$|x(m)|^p \geq |x(m)| \text{ et ainsi } ||x||_1 \leq d_p(x, 0) < \rho \text{ c'est-à-dire}$$

$B_\rho = \{x \in \ell^p : d_p(x, 0) < \rho\} \subset U$ donc U est aussi un $\mathcal{C}$ -voisinage de 0 ; donc la topologie localement convexe $\mathcal{C}_1$ est moins fine que $\mathcal{C}$ donc aussi moins fine que la convexifiée $\hat{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$. Pour établir l'égalité $\mathcal{C}_1 = \hat{\mathcal{C}}$ il reste à montrer que l'enveloppe convexe équilibrée fermée dans $(\ell^p, \mathcal{C})$ de la boule $B = \{x \in \ell^p : d_p(x, 0) \leq 1\}$ contient une boule du type $\{x \in \ell^p : ||x||_1 \leq \varepsilon\}$ pour un $\varepsilon > 0$ convenable. Or soit C_n la fonction caractéristique de l'ensemble $\{n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$; si $x \in \ell^p$ et $||x||_1 \leq 1$ alors $\sum_{m=0}^n x(m) C_m$ appartient à l'enveloppe convexe équilibrée de B puisque chaque $c_n \in B$ et converge au sens de la métrique d_p vers x qui appartient donc bien à l'enveloppe convexe équilibrée et $\mathcal{C}$ -fermée de B .

Enfin comme il est immédiat que ℓ^p est dense dans ℓ^1 on a d'après la proposition 2 :

$$(\ell^p, \mathcal{C})' = (\ell^p, \hat{\mathcal{C}})' = (\ell^1)' = \ell^\infty.$$

REFERENCES

- [1] N. BOURBAKI , espaces vectoriels topologiques ch 1 et 2
(2ème édition)
- [2] P.DUBREIL , M.L. DUBREIL-JACOTIN , Leçons d'algèbre moderne (Dunod)
- [3] J.L. KELLEY , I. NAMIOKA , Linear topological spaces (Van Nostrand)
- [4] G. KÖTHE , Topological Vector Spaces I (Springer Verlag)
- [5] A.P. ROBERTSON et W.J. ROBERTSON , Topological Vector Spaces
(Cambridge University press)