



HAL
open science

Un cas d'addition des sous-différentiels

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

| Jean Jacques Moreau. Un cas d'addition des sous-différentiels. 1969. hal-02162157

HAL Id: hal-02162157

<https://hal.science/hal-02162157>

Submitted on 21 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN CAS D'ADDITION DES SOUS-DIFFERENTIELS

J.J. MOREAU

1. Soient X et Y deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{R} des réels mis en dualité par une forme bilinéaire, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On supposera que la dualité est séparante dans Y , c'est à dire que la forme linéaire $x \mapsto \langle x, y \rangle$ définie sur X est nulle seulement si y est le zéro de Y .

Soit f une fonction définie sur X , à valeurs dans $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty]$ et soit $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Rappelons que le sous-différentiel de f en ce point (relativement à la dualité entre X et Y) est, par définition, l'ensemble, noté $\partial f(x_0)$, des $y \in Y$ tels que la fonction affine

$$x \mapsto \langle x - x_0, y \rangle + f(x_0),$$

laquelle prend au point x_0 la même valeur que f , minore f partout sur X ; si $f(x_0) \notin \mathbb{R}$, on convient par ailleurs que $\partial f(x_0) = \emptyset$.

Si $\partial f(x_0)$ n'est pas vide, f est déclarée sous-différentiable au point x_0 ; tout $y \in \partial f(x_0)$ est dit constituer un sous-gradient de f au point x_0 .

Le maniement de cette notion exige des règles de calcul dont les plus simples concernent l'addition. Pour éviter quelques complications formelles, convenons pour la suite de considérer seulement des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$; si f_1 et f_2 sont deux

telles fonctions, on trouve immédiatement que la somme dans Y d'un sous-gradient de f_1 et d'un sous-gradient de f_2 , en un même point x_0 , est un sous-gradient en ce point pour la fonction $f_1 + f_2$. Cela se traduit par l'inclusion

$$(1) \quad \partial(f_1 + f_2)(x_0) \supset \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0)$$

Des conditions suffisantes pour que cette inclusion soit une égalité d'ensembles ont une grande utilité ; on en trouvera, de nature topologique, dans LESCARRET [1], MOREAU [2], [4], ROCKAFELLAR [1].

On donne ici un cas élémentaire, non topologique, qui est utile, en particulier pour les applications mécaniques de la théorie (Cf. MOREAU [5]).

2. Rappelons qu'une fonction f est dite faiblement différentiable ou Gâteaux-différentiable au point $x_0 \in X$, par rapport à la dualité entre X et Y si $f(x_0)$ est fini et s'il existe $y \in Y$ tel que, pour tout $u \in X$, la fonction $t \mapsto f(x_0 + tu)$, définie sur \mathbb{R} , admette au point $t = 0$ une dérivée égale à $\langle u, y \rangle$. On dit alors que y (unique, puisque la dualité est séparante dans Y) est gradient faible de f au point x_0 .

Si, en particulier, f est convexe, on voit facilement qu'elle est, dans ce cas, sous-différentiable au point x_0 et que $\partial f(x_0) = \{y\}$.

Par ailleurs supposons que f , non nécessairement convexe, soit à la fois faiblement différentiable, de gradient y , et sous-différentiable au point x_0 : en ce cas encore $\partial f(x_0) = \{y\}$. En effet, allégeons les calculs en supposant faites une translation dans X et une translation dans \mathbb{R} telles que $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$. La différentiabilité faible implique, pour tout $u \in X$,

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(tu)}{t} = \langle u, y \rangle ,$$

tandis que $v \in \partial f(0)$ implique

$$f(tu) \geq \langle tu, v \rangle ,$$

d'où, si $t > 0$,

$$\frac{f(tu)}{t} \geq \langle u, v \rangle ,$$

ce qui donne

$$\langle u, y \rangle \geq \langle u, v \rangle .$$

Comme on peut changer u en $-u$, on en conclut l'égalité des deux membres, d'où $v = y$ puisque la dualité est séparante dans Y .

3. Le résultat annoncé résultera de

LEMME. Si la fonction f_1 est faiblement différentiable au point x_0 et si la fonction f_2 est convexe, en notant y_1 le gradient faible de f_1 au point x_0 , on a

$$(2) \quad \partial(f_1 + f_2)(x_0) \subset y_1 + \partial f_2(x_0)$$

On peut supposer $f_2(x_0)$ fini, sans quoi cette inclusion est bien vérifiée, avec les deux membres vides.

Ici encore, allégeons l'écriture en faisant une translation dans X telle que $x_0 = 0$ et en supposant ajoutées à f_1 et f_2 des constantes finies telles que $f_1(0) = f_2(0)$.

Il faut prouver que tout $v \in \partial(f_1 + f_2)(0)$ est de la forme $y_1 + y_2$, avec $y_2 \in \partial f_2(0)$, c'est à dire prouver que $v - y_1$ est un

sous-gradient de f_2 au point 0 cela signifie qu'on a, pour tout $x \in X$, l'inégalité

$$(3) \quad f_2(x) \geq \langle x, v - y_1 \rangle .$$

Or la convexité de f_2 , avec $f_2(0) = 0$ implique classiquement que la fonction

$$t \longmapsto \frac{f_2(tx)}{t}$$

est croissante ce qui montre l'existence de

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f_2(tx)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{f_2(tx)}{t} < f_2(x)$$

L'hypothèse de différentiabilité faible de f_1 entraîne que cette fonction prend des valeurs finies au moins sur une partie absorbante de X ; donc pour t assez petit on pourra écrire

$$\begin{aligned} f_2(tx) &= (f_1 + f_2)(tx) - f_1(tx) \\ &\geq \langle tx, v \rangle - f_1(tx) \end{aligned}$$

puisque $v \in \partial(f_1 + f_2)(0)$. Par suite

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f_2(tx)}{t} \geq \langle x, v \rangle - \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_1(tx)}{t} = \langle x, v \rangle - \langle x, y_1 \rangle$$

ce qui établit l'inégalité (3).

Il suffit alors de rapprocher les inclusions (1) et (2) pour obtenir

PROPOSITION. Si la fonction f_1 est à la fois faiblement différentiable et sous-différentiable au point x_0 et si la fonction f_2 est convexe, on a

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) = \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0) .$$

Comme on l'a rappelé plus haut, l'hypothèse faite sur f_1 est vérifiée, en particulier, si f_1 est faiblement différentiable et convexe.

4. C'est pour simplifier qu'on a supposé, en commençant, que les fonctions considérées ne prendraient nulle part la valeur $-\infty$. En fait l'énoncé ci-dessus n'exige pas cette restriction. Pour ce qui est de f_1 , l'hypothèse que cette fonction est sous-différentiable au point x_0 implique l'existence d'une minorante affine, donc exclut la valeur $-\infty$. Par contre, ayant étendu au cas de fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ la notion de convexité (Cf. MOREAU [4], § 2.c) nous pouvons accepter pour f_2 la valeur $-\infty$. Mais alors ∂f_2 est partout vide, donc aussi le second membre de (2). La somme $f_1 + f_2$ sera entendue comme "somme supérieure" (Cf. MOREAU [4]) c'est à dire avec la convention $(+\infty) + (-\infty) = +\infty$: on tire aisément des propriétés des fonctions convexes admettant la valeur $-\infty$ que le premier membre de (2) est vide.

BIBLIOGRAPHIE

LESCARRET, C.

- [1] Sur la sous-différentiabilité d'une somme de fonctionnelles convexes semi-continues inférieurement.
C.R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), 443-446.

MOREAU, J.J.

- [1] Etude locale d'une fonctionnelle convexe, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaire de Mathématiques (1963), multigraphié.
- [2] Fonctionnelles sous-différentiables, C.R. Acad. Sci. Paris, 257 (1963), 4117-4119.
- [3] Sous-différentiabilité, in : Proceedings of the Colloquium on Convexity, Koebenhavns Universitets Matematiske Institut (1967), 185-201.
- [4] Fonctionnelles convexes, Séminaires sur les Equations aux Dérivées Partielles, 1966-1967, Collège de France, Paris, multigraphié.
- [5] La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique, C.R. Acad. Sci. Paris, 267 (1968), 954-957.

ROCKAFELLAR, R.T.

- [1] Extensions of Fenchel's duality theorem fo convex functions,
Duke Math. J., 33 (1966), 81-90.