



# Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques

Jean Jacques Moreau

## ► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1970. hal-02162006

**HAL Id: hal-02162006**

**<https://hal.science/hal-02162006>**

Submitted on 21 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## INF-CONVOLUTION, SOUS-ADDITIVITÉ, CONVEXITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

PAR JEAN JACQUES MOREAU.

---

### 1. INTRODUCTION.

1.a. INF-CONVOLUTION. — La notion centrale de cet article est celle d'*inf-convolution* des fonctions numériques définies sur un ensemble  $D$  muni d'une loi de composition interne notée  $\top$  : on appelle ainsi la loi notée  $\nabla$  qui, à deux de ces fonctions, soient  $f$  et  $g$ , associe la fonction numérique  $f \nabla g$  définie sur  $D$  par

$$(1.1) \quad (f \nabla g)(x) = \inf \{ f(u) + g(v) : u \in D, v \in D, u \top v = x \}$$

(on reviendra tout à l'heure sur le cas où la somme ici écrite comporte les termes  $-\infty$  et  $+\infty$ ). La *sup-convolution*, notée  $\Delta$ , sera définie de même au moyen d'un « sup ».

Diverses constructions classiques se ramènent à cela : par exemple, si  $D$  est un espace vectoriel,  $f$  une norme sur cet espace et  $\psi_A$  la *fonction indicatrice* d'une partie  $A$  de  $D$ , c'est-à-dire

$$(1.2) \quad \psi_A(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in A, \\ +\infty & \text{si } v \notin A, \end{cases}$$

alors  $(f \nabla \psi_A)(x)$  est la *distance du point  $x$  à l'ensemble  $A$* .

Cette opération semble avoir été considérée pour la première fois explicitement par W. Fenchel [1] (avec pour  $D$  l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^n$ ; du même point de vue, pour les e. v. t. de dimension infinie, voir A. Broendsted [1]) à propos de la théorie des *fonctions convexes conjuguées*. Indépendamment, la sup-convolution sur le coin positif de  $\mathbf{R}^n$  a été introduite, également en liaison avec des



considérations de dualité, par R. Bellman et W. Karush ([1] à [4]). Tous ces travaux étaient motivés par des problèmes d'*optimisation*. Noter aussi l'usage par L. Janos [1] de sup-convolutions itérées d'une fonction sous-additive définie sur une certaine partie conique convexe d'un espace vectoriel topologique, pour construire, en un certain sens, la meilleure approximation linéaire de cette fonction.

Le vocable d'*inf-convolution*, maintenant assez largement employé, tant en français qu'en anglais, a été proposé par l'auteur (Moreau [1], [2]). En anglais, on dit aussi : *infimal convolution*; en russe : *konvolyutsya* (alors que la convolution intégrale traditionnelle est plutôt appelée *svertka*).

Pour des exposés systématiques du rôle de l'*inf-convolution* dans la théorie des fonctions convexes et de leur dualité, voir Rockafellar [4] (espaces de dimension finie), Moreau [6] (espaces vectoriels topologiques quelconques) ou, pour une revue sommaire, Moreau [5]. La théorie a maintenant atteint le stade de l'*inf-convolution continue* d'une famille, indexée dans un espace pourvu d'une mesure, de fonctions convexes définies sur un espace de Banach (cf. Ioffe, Tikhomirov [1]).

1.b. ADDITIONS DANS  $\overline{\mathbf{R}}$ . — Par *fonction numérique*, nous entendons toujours une fonction à valeurs dans  $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ . La définition de l'*inf-convolution*, telle qu'elle est écrite en (1.1), se heurte donc à une difficulté si, parmi les couples  $(u, v)$  considérés, il s'en trouve pour lesquels la somme  $f(u) + g(v)$  n'a pas de signification, les termes prenant les valeurs respectives  $-\infty$  et  $+\infty$ . On pourrait convenir d'exclure ces couples lors de la construction de l'*inf*. Il est équivalent, mais considérablement plus commode pour la suite, d'étendre la définition de l'addition : l'*addition supérieure*, notée  $\dot{+}$  (resp. l'*addition inférieure*, notée  $\dot{-}$ ) prolonge l'addition classique en une loi de composition définie pour tout couple d'éléments de  $\overline{\mathbf{R}}$  selon la convention

$$\begin{aligned} (-\infty) \dot{+} (+\infty) &= (+\infty) \dot{+} (-\infty) = +\infty \\ \text{[resp. } (-\infty) \dot{-} (+\infty) &= (+\infty) \dot{-} (-\infty) = -\infty]. \end{aligned}$$

C'est alors le signe  $\dot{+}$  qu'il faut mettre en (1.1) au lieu de  $+$ .



L'article débute donc par une étude détaillée des règles de calcul relatives aux lois  $\dot{+}$  et  $\dot{+}$  et, comme la symétrie  $x \mapsto -x$  transmue chacune de ces lois dans l'autre, on restreint le plus souvent les énoncés au cas de  $\dot{+}$ . La loi  $\dot{+}$  est commutative et associative; avec la définition classique de la multiplication de tout  $r \in \overline{\mathbf{R}}$  par  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , elle munit  $\overline{\mathbf{R}}$  d'une structure de *cône convexe*.

Les relations avec l'ordre naturel de  $\overline{\mathbf{R}}$  sont essentielles : la loi  $\dot{+}$  est isotone, mais on a la propriété plus précise suivante, dite d'*isotonie forte* : l'inégalité stricte  $x \dot{+} y < z$  a lieu si et seulement si il existe  $x'$  et  $y'$  tels que  $x < x'$ ,  $y < y'$ ,  $x' \dot{+} y' = z$  (même chose, *a fortiori*, pour l'inégalité  $\leq$ ). Cette propriété constituerait le pivot pour l'extension éventuelle de résultats du présent article au cas de fonctions prenant leurs valeurs dans des cônes convexes ordonnés autres que  $\overline{\mathbf{R}}$ . On en tire, par exemple, que si  $f$  et  $g$  sont respectivement des applications de deux ensembles  $X$  et  $Y$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , on a l'égalité

$$\inf_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) = \inf_{x \in X} f(x) \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y),$$

mais seulement en général l'*inégalité*

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) \leq \sup_{x \in X} f(x) \dot{+} \sup_{y \in Y} g(y).$$

Par ailleurs, quels que soient  $x, y, z$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ ,

$$(1.3) \quad (x \dot{+} y) \dot{+} z \leq x \dot{+} (y \dot{+} z);$$

le rôle de cette remarque dans les calculs d'inégalités est illustré par la présentation d'un schéma général de *dualité des enveloppes supérieures* qui recouvre plusieurs situations familières en analyse.

1.c. SOUS-ADDITIVITÉ ET CONVEXITÉ. — La technique de l'addition  $\dot{+}$  s'impose dans la théorie des *fonctions numériques sous-additives* sur l'ensemble  $D$  muni de la loi de composition  $\top$ ; la fonction  $f$  est déclarée telle si, quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $D$ , on a

$$f(x \top y) \leq f(x) \dot{+} f(y).$$



Il serait équivalent, mais beaucoup moins commode, d'écrire le second membre avec un signe d'addition ordinaire, en posant que l'inégalité doit être vérifiée toutes les fois que ce second membre sera défini. Or c'est seulement dans le cadre de fonctions à valeurs dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , sans exclure la valeur  $-\infty$ , que les propriétés des fonctions numériques sous-additives atteignent leur pleine cohérence. Il en va de même pour la notion de *fonction numérique convexe* définie sur un *cône convexe*  $C$  (dans lequel l'addition sera notée  $+$ ) : sera déclarée telle une fonction vérifiant, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $C$ , pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  avec  $\alpha + \beta = 1$ , l'inégalité

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

(un artifice est d'ailleurs présenté au § 9. a, permettant de ramener la convexité à une sous-additivité).

Deux techniques de maniement des fonctions numériques, usuelles dans ce contexte, sont méthodiquement développées.

L'une d'elle consiste à décrire une application  $f$  de  $D$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$  en donnant, pour chaque  $r \in \mathbf{R}$  (ou, si l'on veut, pour  $r \in \bar{\mathbf{R}}$ , ce qui n'apporte pas plus d'information) la *tranche inférieure*,

$$f^{\leq}(r) = \{x \in D : f(x) \leq r\},$$

ou la *tranche inférieure stricte*, définie de la même façon avec  $<$ , ou encore les *tranches supérieures* correspondant à  $\geq$  et  $>$ . Les symboles  $f^{\leq}, f^{<}, f^{\geq}, f^{>}$  représentent de la sorte des *applications multivoques* ou « *multiapplications* » de  $\mathbf{R}$  (ou de  $\bar{\mathbf{R}}$ ) dans  $D$  (ce sont, si l'on préfère, des applications de  $\mathbf{R}$  dans l'ensemble des parties de  $D$ ). On trouve par exemple que  $f$  est sous-additive si et seulement si  $f^{\leq}$  (ou  $f^{<}$ ) vérifie quels que soient  $r$  et  $r'$  dans  $\mathbf{R}$  (ou dans  $\bar{\mathbf{R}}$ ) la propriété de « sur-additivité »

$$f^{\leq}(r + r') \supset f^{\leq}(r) \cup f^{\leq}(r').$$

La *convexité* d'une fonction numérique définie sur un cône convexe donne lieu à une caractérisation analogue.

Une seconde technique usuelle de description d'une fonction numérique définie sur  $D$  consiste à considérer, dans l'ensemble produit  $D \times \mathbf{R}$ , l'épigraphe

$$\text{épi} f = \{(x, r) \in D \times \mathbf{R} : f(x) \leq r\},$$



ou l'épigraphes strict est  $f$ , défini de même avec  $<$  (ou définira aussi des hypographes avec  $\geq$  ou  $>$ ).  $D$  étant muni de la loi  $\top$  et  $\mathbf{R}$  de l'addition ordinaire, on munit  $D \times \mathbf{R}$  de la loi produit, encore notée  $\top$  : la fonction  $f$  est sous-additive si et seulement si l'ensemble  $\text{épi} f$  (ou  $\text{est} f$ ) est stable pour cette loi de composition. De même, si  $C$  est un cône convexe,  $C \times \mathbf{R}$  est trivialement muni d'une structure de cône convexe :  $f$  est convexe si et seulement si l'ensemble  $\text{épi} f$  (ou  $\text{est} f$ ) est convexe.

1.d. PRINCIPAUX RÉSULTATS. — Dans l'ensemble  $\overline{\mathbf{R}}^D$  des applications de  $D$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , l'inf-convolution  $\nabla$  est une loi de composition commutative (resp. associative) si et seulement si la loi  $\top$  de  $D$  l'est. La loi  $\nabla$  possède des éléments neutres — à droite par exemple — si et seulement si la loi  $\top$  en possède et on donne une caractérisation de ces fonctions. La structure  $(D, \top)$  et son extension  $(\mathfrak{P}(D), \top)$  possèdent d'ailleurs des isomorphismes évidents dans  $(\overline{\mathbf{R}}^D, \nabla)$ .

Les deux techniques de description des fonctions numériques indiquées ci-dessus sont appliquées à l'inf-convolution; en ce qui concerne, par exemple, les épigraphes stricts, on a

$$\text{est}(f \nabla g) = \text{est} f \top \text{est} g.$$

$f \in \overline{\mathbf{R}}^D$  est sous-additive si et seulement si  $f \leq f \nabla f$ . Si la loi  $\top$  est commutative et associative, l'ensemble des fonctions numériques sous-additives sur  $D$  est stable pour l'inf-convolution.

Si  $C$  est un cône convexe, avec pour opération  $\top$  l'addition, l'ensemble des fonctions numériques convexes sur  $C$  est stable pour l'inf-convolution. On définit par ailleurs la *multiplication à droite* de toute  $f \in \overline{\mathbf{R}}^C$  par  $\lambda \in ]0, +\infty[$  en notant  $f\lambda$  la fonction

$$x \mapsto \lambda f\left(\frac{1}{\lambda} x\right).$$

Avec l'inf-convolution, cette loi externe munit l'ensemble des fonctions numériques convexes sur  $C$  d'une structure de cône convexe.

Supposons que, dans  $D$ , la loi  $\top$  soit associative; soit  $P$  une partie de  $D$  stable pour  $\top$ ; on définit une relation binaire transitive  $\preceq$  par

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists p \in P : y = x \top p.$$

$f \in \overline{\mathbf{R}}^D$  est décroissante pour  $\preceq$  si et seulement si  $f \leq f \nabla \psi_P$ . A titre d'illustration on en tire que si  $g \in \overline{\mathbf{R}}^D$  est décroissante



pour  $\preceq$ , son « enveloppe sous-additive » (plus grande minorante sous-additive) l'est aussi. Supposons de plus que  $P$  contienne un élément neutre à droite pour  $\top$ , de sorte que  $\preceq$  est un préordre; alors pour tout  $g \in \bar{R}^n$ , la fonction  $f = f \nabla \psi_p$  est la plus grande minorante décroissante de  $g$ ; supposons la loi  $\top$  commutative : il vient que si  $g$  est sous-additive, cette plus grande minorante décroissante l'est aussi.

Bref, on ne trouvera pas dans cet article de résultats profonds ni de démonstrations difficiles. Il s'agit seulement d'un exposé méthodique de techniques dont quelques années de pratique nous ont montré l'utilité. Une première version multigraphiée avait été diffusée en 1963 (Moreau [4]) au titre des séminaires de la Faculté des Sciences de Montpellier; cette brochure, maintenant épuisée, ayant fait l'objet d'une analyse dans *Mathematical Reviews*, continue d'être régulièrement demandée. Cela nous a paru justifier la publication du présent article qui apporte de nombreuses améliorations. L'exposé primitif se limitait à une loi  $\top$  commutative et associative. N'y figuraient pas, par exemple, la construction systématique des éléments neutres de l'inf-convolution, ni non plus l'inégalité (1.3) avec ses conséquences.

Signalons, par contre, une partie de cet ancien exposé qui n'a pas été reprise ici, aucune application ne la justifiant : une axiomatique des « espaces de convexité »; il s'agissait d'une structure moins forte que celle de cône convexe, suffisante pour qu'on y développe une notion de convexité.

Pour ne pas trop allonger cet article nous avons, comme dans le polycopié initial, laissé de côté toute considération de topologies sur les ensembles  $D$  ou  $C$ . Les applications exigent pourtant de tels développements et certains des énoncés donnés dans ce qui suit n'ont pas d'autre objet que de les préparer. Est spécialement utile, si  $D$  ou  $C$  sont topologiques, la recherche de conditions suffisantes pour la semi-continuité — inférieure ou supérieure — de la fonction numérique  $f \nabla g$  ou encore la recherche des conditions assurant que, dans la définition (1.1) de cette fonction, l'inf est un minimum. Pour des résultats dans cette voie, renvoyons à nos publications multigraphiées (Moreau [3] et [6]).



2. ADDITIONS DANS  $\bar{\mathbf{R}}$ .

2.a. PROLONGEMENTS DE L'ADDITION CLASSIQUE. — L'addition est une loi de composition classiquement définie pour tout couple d'éléments de l'intervalle  $] -\infty, +\infty ]$  (resp. de l'intervalle  $[ -\infty, +\infty [$ ). Cet intervalle est stable en outre pour la multiplication par tout  $\lambda \in ]0, +\infty [$ , ce qui le munit d'une structure de *cône convexe* : on veut dire par là que l'addition  $y$  est une loi de demi-groupe commutatif (c'est-à-dire une loi de composition commutative et associative; l'existence de l'élément neutre 0 est ici un fait annexe) et que, de plus, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans l'ensemble en question, pour tout  $\lambda$  et tout  $\mu$  dans  $]0, +\infty [$ , on a

$$\begin{aligned}\lambda(\mu x) &= (\lambda\mu)x, \\ (\lambda + \mu)x &= \lambda x + \mu x, \\ \lambda(x + y) &= \lambda x + \lambda y, \\ 1.x &= x.\end{aligned}$$

Nous allons construire deux prolongements distincts de cette structure de cône convexe à  $\bar{\mathbf{R}}$  tout entier.

DÉFINITION. — On appelle *addition supérieure* (resp. *addition inférieure*) et on note  $+$  (resp.  $\dot{+}$ ) la loi de composition partout définie dans  $\bar{\mathbf{R}} = [ -\infty, +\infty ]$  par

$$x + y = \begin{cases} x + y & \text{si cette somme au sens classique est définie,} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

(resp. :

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x + y & \text{si cette somme est définie,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2.b. STRUCTURES DE CÔNE CONVEXE.

PROPOSITION. — La loi de composition interne  $(x, y) \mapsto x + y$  [resp.  $(x, y) \mapsto x \dot{+} y$ ] et la loi externe  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  (pour  $\lambda \in ]0, +\infty [$ ) munissent l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}$  d'une structure de cône convexe.

Il suffira de faire la vérification pour  $+$ , car la symétrie  $S : x \mapsto -x$  constitue un isomorphisme de l'une des structures



sur l'autre, c'est-à-dire que

$$(2.1) \quad S(x+y) = S(x) + S(y);$$

$$(2.2) \quad S(\lambda x) = \lambda S(x).$$

L'addition supérieure  $+$  est visiblement commutative; pour prouver l'associativité

$$(2.3) \quad (x+y) + z = x + (y+z),$$

on observe que, pour tout  $r \in \bar{\mathbf{R}}$ ,

$$(2.4) \quad r + (+\infty) = +\infty.$$

Donc (2.3) est vérifiée si  $+\infty$  figure comme terme dans les deux membres; dans le cas contraire, on est ramené à l'associativité de l'addition ordinaire dans  $[-\infty, +\infty]$ .

L'addition  $+$  est donc une loi de *demi-groupe commutatif*, admettant d'ailleurs 0 pour élément neutre. Noter que tout  $a$  appartenant à  $\mathbf{R} = ]-\infty, +\infty[$  est *régulier* (ou « simplifiable ») dans ce demi-groupe, c'est-à-dire que

$$a \in \mathbf{R}, \quad a + x = a + y \Rightarrow x = y,$$

mais que les éléments  $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas réguliers.

Enfin on vérifie immédiatement que, pour tout  $\lambda$  et tout  $\mu$  dans  $]0, +\infty[$ , on a

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y.$$

NOTATION. — On notera respectivement  $(\bar{\mathbf{R}}, +)$  et  $(\bar{\mathbf{R}}, \bar{+})$  les deux structures de cône convexe dont on munit de la sorte  $\bar{\mathbf{R}}$ .

Si  $E$  est un ensemble quelconque, il en résulte naturellement, pour l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}^E$  des applications de  $E$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , deux structures de cône convexe notées respectivement  $(\bar{\mathbf{R}}^E, +)$  et  $(\bar{\mathbf{R}}^E, \bar{+})$ .

Remarque. — Le succès de certains développements ultérieurs est corrélatif du fait suivant : A chaque  $x \in \bar{\mathbf{R}}$  associons l'ensemble

$$T(x) = \{\xi \in \bar{\mathbf{R}} : \xi \geq x\}$$

(vide si  $x = +\infty$ , partie pleine de  $\mathbf{R}$  si  $x = -\infty$ ); on constate que  $T$  est un isomorphisme du cône convexe  $(\bar{\mathbf{R}}, +)$  dans l'ensemble des parties convexes de  $\bar{\mathbf{R}}$ , ensemble classiquement muni d'une structure de cône convexe. Remarque semblable si on associe à  $x \in \bar{\mathbf{R}}$  l'ensemble  $\{\xi \in \bar{\mathbf{R}} : \xi > x\}$ .



3. RELATIONS AVEC L'ORDRE DE  $\bar{\mathbf{R}}$ .

3.a. ISOTONIE DES OPÉRATIONS  $\dot{+}$  ET  $+$ . — La symétrie  $S: x \mapsto -x$  étant un isomorphisme de l'ensemble ordonné  $(\bar{\mathbf{R}}, \leq)$  sur l'ensemble ordonné  $(\bar{\mathbf{R}}, \geq)$ , l'usage de (2.1) permettra de ramener les propriétés de croissance relatives à l'opération  $\dot{+}$  à des propriétés relatives à  $+$ ; aussi limiterons-nous les raisonnements à cette dernière opération. Sur certains points il serait d'ailleurs possible d'invoquer la remarque 2.b, puisque, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on a l'équivalence

$$x \leq y \Leftrightarrow T(x) \supset T(y).$$

Notons d'abord que, pour tout  $a \in \bar{\mathbf{R}}$ , l'application  $x \mapsto x + a$  est croissante de  $\bar{\mathbf{R}}$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ ; elle est même strictement croissante si  $a \in \mathbf{R}$ .

On en tire immédiatement l'implication

$$x \leq x', \quad y \leq y' \Rightarrow x + y \leq x' + y',$$

signifiant que l'application  $(x, y) \mapsto x + y$  est croissante de l'ensemble ordonné  $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ . Mais cette croissance n'est pas partout stricte : par exemple, si  $x < x'$  et  $y = y' = +\infty$ , ce qui, pour l'ordre de  $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ , donne bien  $(x, y) < (x', y')$ , on a

$$x + y = x' + y' = +\infty.$$

Il est alors important d'obtenir la précision suivante :

PROPOSITION. — *Quels que soient  $x, x', y, y'$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on a l'implication*

$$(3.1) \quad x < x', \quad y < y' \Rightarrow x + y < x' + y'.$$

En effet, si  $y$  et  $x'$  sont finis, on note comme plus haut que

$$x + y < x' + y \quad \text{et} \quad x' + y < x' + y',$$

d'où la conclusion par la transitivité de  $<$ . Si, par contre,  $y \notin \mathbf{R}$ , c'est-à-dire  $y = -\infty$  (car l'hypothèse  $y < y'$  implique  $y < +\infty$ ), on a  $x + y = -\infty$  (car l'hypothèse  $x < x'$  implique  $x < +\infty$ ) alors que  $x' + y' > -\infty$  (vu que les hypothèses impliquent  $x' > -\infty$  et  $y' > -\infty$ ). Si enfin  $x' \notin \mathbf{R}$ , c'est-à-dire  $x' = +\infty$ , on a  $x' + y' = +\infty$ , tandis que  $x + y < +\infty$  (puisque  $x < +\infty$  et  $y < +\infty$ ).



## 3.b. ISOTONIE FORTE.

PROPOSITION. — Si  $x, y, z$  sont trois éléments de  $\bar{\mathbf{R}}$ , les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x \dot{+} y < z$ ;
- (ii) il existe  $x'$  et  $y'$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$  tels que

$$x < x', \quad y < y' \quad \text{et} \quad x' \dot{+} y' = z.$$

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) constitue la proposition 3.a.

Réciproquement, supposons (i); alors  $x < +\infty$ ,  $y < +\infty$ ,  $z > -\infty$ . Si  $z = +\infty$ , la propriété (ii) est bien vérifiée en prenant  $x' = y' = +\infty$ ; soit donc  $z \in \mathbf{R}$ . Si  $x$  et  $y$  ne sont pas tous les deux finis, soit, par exemple, si  $x = -\infty$ , on prend  $y' \in \mathbf{R}$  strictement supérieur à  $y$ , puis  $x' = z - y'$  (soustraction dans  $\mathbf{R}$ ) et (ii) est bien vérifiée. Enfin, si  $x$  et  $y$  sont tous les deux finis, on fait le calcul suivant dans  $\mathbf{R}$  : (i) entraîne  $z - x - y > 0$ ; donc (ii) est bien vérifiée en prenant

$$x' = x + \frac{1}{2}(z - x - y),$$

$$y' = y + \frac{1}{2}(z - x - y).$$

COROLLAIRE. — Si  $x, y, z$  sont trois éléments de  $\bar{\mathbf{R}}$ , les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :

- (i)  $x \dot{+} y \leq z$ ;
- (ii) il existe  $x'$  et  $y'$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$  tels que

$$x \leq x', \quad y \leq y' \quad \text{et} \quad x' \dot{+} y' = z.$$

L'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) signifie simplement l'isotonie déjà signalée de l'application  $(x, y) \mapsto x \dot{+} y$ . Inversement supposons (i); si  $x \dot{+} y < z$  on est ramené à la proposition précédente; si  $x \dot{+} y = z$  la propriété (ii) est bien vérifiée en prenant  $x' = x$  et  $y' = y$ .

Remarque. — Selon la remarque générale faite en 3.a, l'usage de la symétrie S permet, dans les énoncés ci-dessus, de remplacer simultanément  $\dot{+}$  par  $+$  et  $<$  par  $>$  (ou  $\leq$  par  $\geq$ ). Par contre, les énoncés obtenus en remplaçant seulement  $\dot{+}$  par  $+$  sont faux. Contre-exemple : si on prend  $x = +\infty$ ,  $y = -\infty$ ,  $z \in \mathbf{R}$ , on a



$x + y < z$  mais il n'existe pas de  $x'$  tel que  $x < x'$ ; en ce cas même,  $x \leq x'$  exigerait  $x' = +\infty$ , de sorte que  $x' + y'$  vaudra  $+\infty$  ou  $-\infty$  selon la valeur de  $y'$  : on ne peut donc en aucun cas avoir  $x' + y' = z$ .

### 3.c. TRAITEMENT D'INÉGALITÉS.

LEMME. — *Quels que soient  $x, y, z$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on a*

$$(3.2) \quad (x + y) + z \leq x + (y + z).$$

En effet, si  $x = +\infty$  le second membre vaut  $+\infty$ ; si  $x \in \mathbf{R}$ , l'addition  $+$  équivaut à  $+$  et (3.2) se trouve vérifiée comme égalité (associativité de  $+$ ); de même, si  $z = -\infty$  le premier membre vaut  $-\infty$ ; si  $z \in \mathbf{R}$  on se trouve ramené à l'associativité de  $+$ . Reste donc seulement à prouver que

$$(-\infty + y) + +\infty \leq -\infty + (y + +\infty).$$

De fait, si  $y \in \mathbf{R}$  le premier membre vaut  $-\infty$ ; si  $y = +\infty$  les deux membres valent  $+\infty$ ; si  $y = -\infty$ , les deux membres valent  $-\infty$ .

PROPOSITION. — *Quels que soient  $x, y, z$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on a l'équivalence*

$$(3.3) \quad x + y \geq z \iff x \geq z + -y.$$

En effet, si on invoque le lemme ci-dessus et l'isotonie de  $+$ , l'inégalité  $z \leq x + y$  implique

$$z + -y \leq (x + y) + -y \leq x + (y + -y) \leq x,$$

puisque  $y + -y \leq 0$  (égal à 0 ou  $-\infty$ ).

Réciproquement, si on invoque cette fois l'isotonie de  $+$ , l'inégalité  $x \geq z + -y$  implique

$$x + y \geq (z + -y) + y \geq z + (-y + y) \geq z,$$

puisque  $-y + y \geq 0$  (égal à 0 ou  $+\infty$ ).

*Remarques.* — On pourra retenir la règle de calcul (3.3) en se rappelant que le signe d'addition supérieure  $+$  apparaît du côté du membre le plus grand.



On aura naturellement une équivalence analogue en remplaçant *simultanément*  $\dot{+}$  par  $+$  et  $\geq$  par  $\leq$ .

Comme, d'ailleurs, on a essentiellement  $x \dot{+} y \geq x \dot{+} y$ , la proposition ci-dessus fournit *a fortiori* l'implication

$$x \dot{+} y \geq z \Rightarrow x \geq z \dot{+} -y,$$

mais l'implication réciproque n'est pas vraie (faire, par exemple,  $y = z = +\infty$  et  $x = -\infty$ ).

Enfin en faisant  $z = 0$  :

COROLLAIRE. — *Quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , on a l'équivalence*

$$(3.4) \quad x \dot{+} y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -y.$$

#### 4. INF ET SUP.

##### 4.a. INÉGALITÉS FONDAMENTALES.

PROPOSITION. — *Si  $f$  et  $g$  sont deux applications d'un même ensemble  $E$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , on a*

$$(4.1) \quad \inf_{x \in E} (f(x) \dot{+} g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) \dot{+} \inf_{x \in E} g(x);$$

$$(4.2) \quad \sup_{x \in E} (f(x) \dot{+} g(x)) \leq \sup_{x \in E} f(x) \dot{+} \sup_{x \in E} g(x)$$

*et les mêmes inégalités en remplaçant partout  $\dot{+}$  par  $+$ .*

Montrons en effet que tout  $k$  strictement supérieur au premier membre de (4.1) est supérieur au second membre (raisonnement qui inclut le cas banal où, ce premier membre valant  $+\infty$ , il n'existe pas de tel  $k$ ). Ce choix de  $k$  implique l'existence de  $x_0 \in E$  tel que

$$k > f(x_0) \dot{+} g(x_0).$$

Comme

$$f(x_0) \geq \inf_{x \in E} f(x), \quad g(x_0) \geq \inf_{x \in E} g(x),$$

la conclusion découle de l'isotonie de  $\dot{+}$  et de la transitivité de l'ordre. Le raisonnement est aussi bien valable en remplaçant  $\dot{+}$  par  $+$ ; en transmuant par la symétrie S, on obtient ensuite (4.2).

*Remarque.* — Prendre garde que l'inégalité

$$\sup f + \inf g \leq \sup(f + g)$$



(et analogues), classiquement valable pour l'addition ordinaire si elle est définie, ne s'étend pas à l'addition  $\dot{+}$ . *Contre-exemple* : prendre  $f = -g$  à valeurs finies et telles que  $\sup f = \dot{+} \infty$ .

#### 4. b. CAS D'ÉGALITÉ.

PROPOSITION. — Si  $f$  et  $g$  sont respectivement des applications de deux ensembles  $X$  et  $Y$  dans  $\mathbf{R}$ , on a

$$(4.3) \quad \inf_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) = \inf_{x \in X} f(x) \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y);$$

$$(4.4) \quad \sup_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) = \sup_{x \in X} f(x) \dot{+} \sup_{y \in Y} g(y),$$

mais les égalités obtenues en échangeant  $\dot{+}$  et  $\dot{-}$  ne sont pas vraies en général et on a seulement

$$(4.5) \quad \inf_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) \geq \inf_{x \in X} f(x) \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y);$$

$$(4.6) \quad \sup_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) \leq \sup_{x \in X} f(x) \dot{+} \sup_{y \in Y} g(y).$$

En effet, si aucun des ensembles  $X$  et  $Y$  n'est vide (sans quoi le résultat est trivial), on a

$$\begin{aligned} \inf_{x \in X} f(x) &= \inf_{(x,y) \in X \times Y} f(x), \\ \inf_{y \in Y} g(y) &= \inf_{(x,y) \in X \times Y} g(y) \end{aligned}$$

de sorte que la proposition 4. a fournit

$$\inf_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) \geq \inf_{x \in X} f(x) \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y).$$

De cette manière s'établissent aussi les inégalités (4.5) et (4.6). Pour prouver l'égalité (4.4), il reste à établir que tout  $k$  strictement supérieur au second membre est supérieur au premier; soit donc

$$\inf_{x \in X} f(x) \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y) < k.$$

La proposition 3. b montre l'existence de  $p$  et  $q$  tels que  $p \dot{+} q = k$  et que

$$\inf_{x \in X} f(x) < p, \quad \inf_{y \in Y} g(y) < q.$$

Il existe alors  $x_0 \in X$  et  $y_0 \in Y$  tels que

$$f(x_0) < p, \quad g(y_0) < q,$$



d'où, par la proposition 3.a,

$$f(x_0) \dot{+} g(y_0) < p \dot{+} q = k$$

et, par suite,

$$\inf_{(x,y) \in X \times Y} (f(x) \dot{+} g(y)) < k,$$

ce qu'on voulait établir.

(4.4) se démontre de même (ou en transmuant par symétrie). Pour constater que l'inégalité (4.5) [et, de façon analogue, (4.6)] n'est pas en général une égalité, prendre, par exemple,  $f$  à valeurs finies telle que  $\inf f = -\infty$  et  $g = +\infty$  partout sur  $Y$ .

Noter qu'en prenant  $f = a$  sur un ensemble  $X$  réduit à un seul élément, on obtient :

COROLLAIRE. — Si  $a \in \overline{\mathbf{R}}$ , on a

$$(4.7) \quad \inf_{y \in Y} (a \dot{+} g(y)) = a \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y);$$

$$(4.8) \quad \sup_{y \in Y} (a \dot{+} g(y)) = a \dot{+} \sup_{y \in Y} g(y);$$

$$(4.9) \quad \inf_{y \in Y} (a \dot{+} g(y)) \geq a \dot{+} \inf_{y \in Y} g(y);$$

$$(4.10) \quad \sup_{y \in Y} (a \dot{+} g(y)) \leq a \dot{+} \sup_{y \in Y} g(y).$$

4.c. UN SCHÉMA GÉNÉRAL DE DUALITÉ D'ENVELOPPES. — Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles quelconques; dans tout ce qui suit, on suppose donnée une *fonction de couplage* (cf. Moreau [6], section 14)

$$c: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbf{R}}.$$

Pour toute fonction  $f: X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ , on appelle *fonction polaire* de  $f$ , la fonction  $f^c$  définie sur  $Y$  par

$$f^c(y) = \sup_{x \in X} [c(x, y) \dot{+} -f(x)].$$

De même, pour toute  $g: Y \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ , on note  $g^c$ , dite fonction polaire de  $g$ , la fonction définie sur  $X$  par

$$g^c(x) = \sup_{y \in Y} [c(x, y) \dot{+} -g(y)].$$

On appelle *fonction élémentaire* sur  $X$  (resp. sur  $Y$ ) une fonction de la forme  $x \mapsto c(x, b) \dot{+} \beta$ , avec  $b \in Y$  et  $\beta \in \overline{\mathbf{R}}$  [resp. une fonction de la forme  $y \mapsto c(a, y) \dot{+} \alpha$ , avec  $a \in X$  et  $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ ].



On note  $\Gamma(X, Y)$  [resp.  $\Gamma(Y, X)$ ] l'ensemble des applications de  $X$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$  (resp. de  $Y$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ ) qui sont des *enveloppes supérieures de familles de fonctions élémentaires* (telle est, en particulier, la fonction constante  $-\infty$ , enveloppe supérieure d'une famille vide). On voit que, pour toute  $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$ , la fonction  $f^c$  appartient à  $\Gamma(Y, X)$ ; pour toute  $g \in \overline{\mathbf{R}}^Y$ , la fonction  $g^c$  appartient à  $\Gamma(X, Y)$ .

Dire que la fonction  $c(\cdot, b) \dot{+} \beta$  est une *minorante* de  $f$  signifie

$$\forall x \in X: f(x) \geq c(x, b) \dot{+} \beta,$$

ce qui, d'après la proposition 3.c (moyennant une transmutation par symétrie), équivaut à

$$\forall x \in X: -\beta \geq c(x, b) \dot{+} f(x)$$

ou encore

$$(4.11) \quad -\beta \geq f^c(b).$$

L'enveloppe supérieure des fonctions élémentaires minorant  $f$  est aussi bien le plus grand élément de  $\Gamma(X, Y)$  minorant  $f$  ou  $\Gamma$ -régularisée de  $f$ . C'est, d'après la condition (4.11), la fonction

$$x \mapsto \sup \{ c(x, b) \dot{+} \beta : b \in Y, \beta \in \overline{\mathbf{R}}, \beta \leq -f^c(b) \}.$$

Or, pour chaque  $x$ ,

$$\beta \leq -f^c(b) \Rightarrow c(x, b) \dot{+} \beta \leq c(x, b) \dot{+} -f^c(b),$$

de sorte que la fonction ci-dessus est aussi bien

$$x \mapsto \sup_{b \in Y} [c(x, b) \dot{+} -f^c(b)]$$

c'est-à-dire la fonction polaire de  $f^c$ ; bref :

*La  $\Gamma$ -régularisée de  $f$  est  $f^{cc}$ .*

En particulier,

$$f = f^{cc} \Leftrightarrow f \in \Gamma(X, Y),$$

donc, si on suppose a priori  $f \in \Gamma(X, Y)$  et  $g \in \Gamma(Y, X)$ , on a l'équivalence

$$f = g^c \Leftrightarrow f^c = g.$$

Nous disons en pareil cas que  $f$  et  $g$  sont des *fonctions duales par rapport à la fonction de couplage  $c$* .



Nous disons, d'autre part, que deux fonctions  $p \in \bar{\mathbf{R}}^X$  et  $q \in \bar{\mathbf{R}}^Y$  sont *sur-duales* si, pour tout  $x \in X$  et pour tout  $y \in Y$  on a l'inégalité

$$(4.12) \quad p(x) + q(y) \geq c(x, y).$$

On tire immédiatement de la proposition 3.c que cette propriété équivaut à  $p \geq q^c$  (ou, aussi bien  $q \geq p^c$ ) : deux fonctions sont sur-duales si et seulement si l'une (donc chacune) majore la fonction polaire de l'autre. En particulier, deux fonctions duales (ou plus généralement, une fonction quelconque et sa fonction polaire) sont, *a fortiori*, sur-duales. On trouvera dans Moreau [5] une application de ces idées à la discussion de problèmes aux limites concernant des équations, ou inéquations, aux dérivées partielles : les relations entre « problèmes forts » et « problèmes affaiblis » sont par là éclairées.

Une autre source d'intérêt réside dans la remarque suivante : *Dans l'ensemble des couples de fonctions sur-duales, ordonné par l'ordre naturel de  $\bar{\mathbf{R}}^X \times \bar{\mathbf{R}}^Y$ , un couple  $(a, b)$  constitue un élément minimal si et seulement si  $a$  et  $b$  sont des fonctions duales.*

En effet, supposons  $a$  et  $b$  duales et soient  $p$  et  $q$  sur-duales telles que  $p \leq a$  et  $q \leq b$ ; comme le passage aux fonctions polaires inverse visiblement l'ordre, on a

$$\begin{aligned} p^* &\geq a^* = b, \\ q^* &\geq b^* = a. \end{aligned}$$

Or, comme  $p$  et  $q$  sont sur-duales, on a  $p \geq q^*$  et  $q \geq p^*$ , donc finalement  $p = a$  et  $q = b$ , ce qui prouve la minimalité annoncée.

Réciproquement, supposons  $(a, b)$  minimal dans l'ensemble des couples de fonctions sur-duales. L'inégalité  $a^* \leq b$ , qui exprime que  $a$  et  $b$  sont sur-duales, signifie que  $a$  et  $a^*$  (lesquelles sont elles-mêmes des fonctions sur-duales) minorent respectivement  $a$  et  $b$  : elles leur sont donc égales en vertu de l'hypothèse de minimalité. Bref  $b = a^*$  et on trouve de même  $a = b^*$ .

La signification pratique de cette minimalité est la suivante : Usuellement  $X$  et  $Y$  seront deux espaces fonctionnels; (4.12) constitue une inégalité, plus ou moins « remarquable », qu'on aura établie pour tout couple  $x \in X$  et  $y \in Y$  (de ce type seront souvent



les *inégalités intégrales* usuelles en analyse). Si l'on vient à découvrir deux fonctions  $p'$  et  $q'$ , respectivement plus petites que  $p$  et  $q$  et assurant encore une inégalité semblable (avec le même second membre  $c$ ) on dit usuellement qu'on *améliore* l'inégalité initiale, puisqu'on formule par là une proposition l'impliquant. Dire que  $(p, q)$  est minimal dans l'ensemble des couples de fonction assurant (4.12) signifie que l'inégalité qu'ils fournissent est, en ce sens, *non améliorable*.

4.d. EXEMPLES DE DUALITÉ D'ENVELOPPES. — *Premier exemple* : Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces vectoriels sur le corps des réels, mis en dualité par une forme bilinéaire, notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On prend comme fonction de couplage  $c(x, y) = \langle x, y \rangle$  (à valeurs finies, de sorte que, à l'exception de (4.12), les relations du paragraphe précédent, peuvent dans ce cas être écrites avec des signes d'addition ordinaire). On retrouve alors la notion de *dualité des fonctions convexes* (s. c. i. pour les topologies compatibles avec la dualité), telle qu'elle est utilisée aujourd'hui par d'assez nombreux auteurs (voir des exposés de synthèse dans Moreau [6], Rockafellar [4]).

*Deuxième exemple* :  $X$  et  $Y$  étant, comme dans l'exemple précédent, deux espaces vectoriels mis en dualité par la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , on prend

$$c(x, y) = \begin{cases} \text{Log} \langle x, y \rangle & \text{si } \langle x, y \rangle > 0, \\ -\infty & \text{si } \langle x, y \rangle \leq 0. \end{cases}$$

A chacune des fonctions  $f$  ou  $g$  considérées au paragraphe précédent, on associe les fonctions  $a$  et  $b$ , à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , définies par

$$\begin{aligned} a(x) &= \exp f(x), \\ b(y) &= \exp g(y) \end{aligned}$$

avec, naturellement, les conventions

$$\exp(-\infty) = 0, \quad \exp(+\infty) = +\infty.$$

On constate alors (cf. Moreau [6], section 14) que  $f$  et  $g$  sont duales par rapport à la présente fonction de couplage si et seulement si  $a$  et  $b$  sont les fonctions *jauges* de deux ensembles  $A \subset X$  et  $B \subset X$  *mutuellement polaires* dans les espaces vectoriels en dualité; il revient au même de dire que  $a$  et  $b$  sont respectivement les



*fonctions d'appui* de B et de A. Transmuant les résultats du paragraphe précédent par la transformation exponentielle, on voit que cela signifie que le couple  $(a, b)$  est *minimal* dans l'ensemble des couples de fonctions à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , vérifiant pour tout  $x \in X$  et tout  $y \in Y$  l'inégalité

$$a(x) \dot{\times} b(x) \geq \langle x, y \rangle;$$

la multiplication  $\dot{\times}$  doit naturellement être entendue comme l'image exponentielle de l'addition  $+$ , c'est-à-dire prolongeant la multiplication classique selon la convention  $0 \dot{\times} +\infty = +\infty$ .

L'exemple le plus élémentaire de la présente situation est obtenu en prenant pour  $a$  la norme d'un espace normé  $X$  et pour  $b$  la norme du dual  $Y$ ; A et B sont alors les boules unité respectives de ces deux espaces. Cette correspondance entre les jauges  $a$  et  $b$  est, plus généralement, classique lorsque, les ensembles A et B étant supposés *absorbants*, ces fonctions sont partout finies, strictement positives hors de l'origine (*cf.* Beckenbach, Bellman [4], chap. 1); l'extension faite ici au cas d'ensembles non nécessairement absorbants est substantielle et serait techniquement délicate si l'on ne faisait pas usage des additions  $+$  et  $\dot{+}$ .

*Troisième exemple :* Prenons maintenant  $X = Y = [0, +\infty]$  avec pour fonction de couplage

$$c(x, y) = x \dot{\times} y$$

(notation définie ci-dessus). On trouve alors (*cf.* Moreau [6], § 14.d) que deux fonctions  $f$  et  $g$  duales par rapport à cette fonction de couplage prennent à l'origine des valeurs finies et opposées (à moins que ces deux fonctions ne soient les constantes  $+\infty$  et  $-\infty$ , cas que nous laissons de côté) : on se ramènera immédiatement, par addition de constante, au cas où ces valeurs à l'origine sont nulles. Alors  $f$  et  $g$  sont des fonctions à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , convexes non décroissantes : ce sont, en un sens qui généralise légèrement le sens classique, des fonctions *conjuguées de Young*.

Signalons l'énoncé suivant qui rassemble les concepts introduits par les trois exemples ci-dessus :



Soient  $X$  et  $Y$  des espaces vectoriels en dualité et soient  $a$  et  $b$  les jauges respectives de deux ensembles  $A \subset X$  et  $B \subset X$  mutuellement polaires; soient  $\varphi$  et  $\gamma$  deux fonctions conjuguées de Young, l'une et l'autre prenant des valeurs finies en un point au moins autre que l'origine. Alors les fonctions  $\varphi \circ a$  et  $\gamma \circ b$  sont des fonctions duales au sens du premier exemple (cf. Aggeri, Lescarret [1], repris dans Moreau [6], section 14).

## 5. FONCTIONS NUMÉRIQUES SOUS- OU SUR-ADDITIVES.

5.a. DÉFINITIONS. — D'une façon générale, soient  $D$  et  $E$  deux ensembles pourvus chacun d'une loi de composition interne (non nécessairement commutative ni associative) notée  $\top$ ; soit  $\leq$  un préordre sur  $E$ . On dit qu'une application  $f$  de  $D$  dans  $E$  est *sous-additive* si, quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $D$ , on a

$$f(x \top y) \leq f(x) \top f(y)$$

(resp. *sur-additive* si on a l'inégalité inverse).

Par fonction numérique sous-additive, définie sur  $D$  on entendra toujours une application sous-additive de  $D$  dans le demi-groupe  $(\mathbf{R}, +)$ , c'est-à-dire telle que

$$(5.1) \quad f(x \top y) \leq f(x) + f(y).$$

Par fonction numérique sur-additive, on entendra toujours une application sur-additive dans  $(\mathbf{R}, +)$ , c'est-à-dire telle que

$$f(x \top y) \geq f(x) + f(y).$$

Évidemment  $f$  est sur-additive si et seulement si  $S \circ f = -f$  est sous-additive; on limitera donc les formulations qui suivent au cas de la sous-additivité.

Il serait équivalent d'appeler sous-additive une fonction numérique telle que l'inégalité

$$f(x \top y) \leq f(x) + f(y)$$

ait lieu toutes les fois que l'addition numérique ordinaire qui figure au second membre est définie; en effet, lorsque cette addition n'est pas définie, le second membre de (5.1) vaut  $+\infty$ , de sorte que cette dernière inégalité est banalement vérifiée. Mais les



démonstrations ultérieures, mettant alors en jeu des expressions non toujours définies, seraient beaucoup plus compliquées que celles que nous fondons sur le formalisme des  $\dot{+}$  et  $\dot{-}$ .

*Premier exemple :* Une fonction constante, prenant partout sur D la valeur  $\alpha \in [0, +\infty]$  est sous-additive; de même la fonction constante partout égale à  $-\infty$ .

*Deuxième exemple :* On peut interpréter l'inégalité

$$x \dot{+} y \leq x \dot{+} y$$

en disant que l'application  $x \mapsto x$  est une fonction numérique sous-additive sur le demi-groupe  $(\mathbf{R}, \dot{+})$  [ou une fonction numérique sur-additive sur le demi-groupe  $(\overline{\mathbf{R}}, \dot{+})$ ].

*Troisième exemple :* Si A est une partie quelconque de D, on note  $\psi_A$  la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ +\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On voit que cette fonction est sous-additive si et seulement si A est stable pour  $\dot{+}$ .

### 5.b. SOMME DE FONCTIONS SOUS-ADDITIVES.

PROPOSITION. — Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques sous-additives sur D, il en est de même pour la fonction  $f \dot{+} g$ .

En effet, les inégalités

$$\begin{aligned} f(x \dot{+} y) &\leq f(x) \dot{+} f(y), \\ g(x \dot{+} y) &\leq g(x) \dot{+} g(y) \end{aligned}$$

entraînent, d'après 3.a,

$$f(x \dot{+} y) \dot{+} g(x \dot{+} y) \leq (f(x) \dot{+} f(y)) \dot{+} (g(x) \dot{+} g(y)),$$

d'où le résultat, en invoquant la commutativité et l'associativité de  $\dot{+}$ .

Par contre, la sous-additivité de  $f \dot{+} g$  n'est pas assurée.



## 5.c. ENVELOPPE SUPÉRIEURE DE FONCTIONS SOUS-ADDITIVES.

PROPOSITION. — Si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de fonctions numériques sous-additives sur  $D$ , l'enveloppe supérieure de cette famille est une fonction sous-additive sur  $D$ .

En effet, si pour tout  $i \in I$ ,

$$f_i(x \top y) \leq f_i(x) + f_i(y),$$

on a

$$\sup_{i \in I} f_i(x \top y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x) + f_i(y)).$$

La proposition 4.a donne ensuite

$$\sup_{i \in I} (f_i(x) + f_i(y)) \leq \sup_{i \in I} f_i(x) + \sup_{i \in I} f_i(y),$$

d'où la sous-additivité de la fonction  $\sup_{i \in I} f_i$ .

L'enveloppe inférieure d'une famille de fonctions sous-additives n'est pas en général sous-additive; on vérifiera cependant qu'il en est ainsi lorsque la famille de fonctions est *filtrante décroissante* (en particulier, si c'est une suite décroissante); utiliser la proposition 3.b.

5.d. FONCTION SOUS-ADDITIVE SUR UN ENSEMBLE PRODUIT. — Soient  $D$  et  $E$  deux ensembles munis l'un et l'autre d'une loi de composition interne notée  $\top$ . L'ensemble produit  $D \times E$  est lui-même muni de la loi de composition suivante : on définit la « somme » de deux paires  $(x, y)$  et  $(x', y')$  comme étant la paire  $(x \top x', y \top y')$ .

PROPOSITION. — Soit  $f: D \times E \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  une fonction sous-additive sur  $D \times E$ . Alors la « silhouette sur  $D$  », de  $f$ , c'est-à-dire la fonction numérique

$$x \mapsto \inf_{y \in E} f(x, y)$$

est sous-additive sur  $D$ .

En effet, notant  $\varphi$  cette fonction, on a

$$\varphi(x \top x') = \inf_{y \in E} f(x \top x', y) \leq \inf_{(u, u') \in E \times E} f(x \top x', u \top u')$$



puisque l'ensemble des  $u \top u'$  pour  $(u, u') \in E \times E$  est un sous-ensemble de  $E$ . En invoquant la sous-additivité de  $f$ , on trouve que le dernier membre est majoré par

$$\begin{aligned} \inf_{(u, u') \in E \times E} (f(x, u) + f(x', u')) &= \inf_{u \in E} f(x, u) + \inf_{u' \in E} f(x', u') \\ &= \varphi(x) + \varphi(x') \end{aligned}$$

(cf. proposition 4. b), ce qui montre la sous-additivité de  $\varphi$ .

Dans le même ordre d'idées, on pourra établir la propriété suivante (dont on trouvera un cas particulier en 6. e, à propos de l'inf-convolution) :

*On suppose que l'opération  $\top$  dans  $D$  est commutative et associative. Soit  $f$  une fonction numérique sous-additive sur le produit  $D \times D$ ; alors la fonction*

$$x \mapsto \inf \{ f(u, v) : u \in D, v \in D, u \top v = x \}$$

*est sous-additive sur  $D$ .*

## 6. INF-CONVOLUTION.

6. a. DÉFINITIONS. — Soit l'ensemble  $D$ , non vide, muni d'une loi de composition interne, notée  $\top$ . A deux fonctions quelconques  $f$  et  $g$ , définies sur  $D$ , à valeurs dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on associe deux fonctions, notées  $f \nabla g$  et  $f \Delta g$ , définies sur  $D$  de la manière suivante :

$$(6.1) \quad (f \nabla g)(x) = \inf \{ f(u) + g(v) : u \in D, v \in D, u \top v = x \};$$

$$(6.2) \quad (f \Delta g)(x) = \sup \{ f(u) + g(v) : u \in D, v \in D, u \top v = x \}$$

[si pour un  $x$  l'ensemble des couples  $(u, v)$  tels que  $u \top v = x$  est vide, l'inf vaut  $+\infty$  et le sup vaut  $-\infty$ ].

*On appelle respectivement inf-convolution et sup-convolution les lois de composition  $(f, g) \mapsto f \nabla g$  et  $(f, g) \mapsto f \Delta g$  ainsi définies dans l'ensemble  $\bar{\mathbf{R}}^D$  des fonctions numériques sur  $D$ .*

*Si, pour un  $x \in D$ , l'inf dans (6.1) [resp. le sup dans (6.2)] est un minimum (resp. un maximum) on dit que l'inf-convolution (resp. la sup-convolution) est exacte au point  $x$ .*

Évidemment, les deux opérations sont transmuées l'une de l'autre par symétrie, c'est-à-dire que

$$(6.3) \quad -(f \nabla g) = (-f) \Delta (-g).$$



On étudiera donc seulement dans la suite les propriétés de l'inf-convolution.

Comme en 5.a, on pourrait formuler une définition équivalente sans utiliser les additions  $\dot{+}$  et  $\dot{+}$  : on dirait, par exemple, que  $(f \nabla g)(x)$  est l'inf de la somme ordinaire  $f(u) + g(v)$ , cet inf étant pris sur l'ensemble des couples  $(u, v)$  tels que  $u \top v = x$  et tels que la somme en question soit définie. En effet, pour les couples  $(u, v)$  tels que  $f(u) + g(v)$  ne soit pas définie, la somme  $\dot{+}$  vaut  $+\infty$ ; donc l'omission de ces couples ne modifie pas l'inf dans (6.1). Mais les démonstrations ultérieures seraient beaucoup plus pénibles.

*Premier exemple :* Si A et B sont deux parties quelconques de D, on a pour leurs fonctions indicatrices  $\psi_A$  et  $\psi_B$  (cf. 5.a, troisième exemple)

$$(\psi_A \nabla \psi_B)(x) = \inf_{u \top v = x} [\psi_A(u) \dot{+} \psi_B(v)].$$

La quantité entre crochets est toujours  $\geq 0$ . S'il existe  $u \in A, v \in B$  tels que  $u \top v = x$ , c'est-à-dire si  $x$  appartient à l'ensemble  $A \top B$ , la valeur zéro est effectivement prise et l'inf vaut zéro. Si, au contraire,  $x \notin A \top B$ , il n'existe pas de décomposition de  $x$  en somme de  $u \in A$  et  $v \in B$ , de sorte que la quantité entre crochets ne prend pas d'autre valeur que  $+\infty$ . Donc

$$(6.4) \quad \psi_A \nabla \psi_B = \psi_{A \top B}.$$

En particulier, soit  $a \in D$  : on notera simplement  $\psi_a$  la fonction indicatrice de l'ensemble  $\{a\}$ . Si  $b$  est un autre élément de D, on a

$$(6.5) \quad \psi_a \nabla \psi_b = \psi_{a \top b}.$$

En d'autres termes, l'application  $a \mapsto \psi_a$  est un isomorphisme de l'ensemble D, muni de la loi de composition  $\top$ , dans l'ensemble  $\overline{\mathbf{R}}^D$ , muni de la loi de composition  $\nabla$ .

*Deuxième exemple :* On note  $\omega$  la fonction constante prenant la valeur  $+\infty$  partout sur D. Alors quelle que soit  $f \in \overline{\mathbf{R}}^D$ ,

$$(6.6) \quad f \nabla \omega = \omega \nabla f = \omega.$$

*Troisième exemple :* Si  $\rho$  est une constante (finie ou non), on tire de (4.7) que

$$f \nabla (g \dot{+} \rho) = (f \nabla g) \dot{+} \rho.$$



*Remarque.* — Si  $x_0$  est un élément *non décomposable* de  $D$ , on a, quelles que soient les fonctions  $f$  et  $g$  :

$$(f \nabla g)(x_0) = +\infty.$$

### 6.b. ÉLÉMENTS NEUTRES.

PROPOSITION. — Une fonction  $n \in \bar{\mathbf{R}}^D$  est élément neutre — à droite pour fixer les idées — de la loi de composition  $\nabla$  si et seulement si, désignant par  $E$  l'ensemble des éléments neutres à droite de  $\nabla$  dans  $D$ , on a

$$(6.7) \quad x \notin E \Rightarrow n(x) = +\infty;$$

$$(6.8) \quad \inf_{x \in E} n(x) = 0.$$

Cela exige que  $E$  ne soit pas vide; en particulier, si  $e \in E$ , la fonction  $\psi_e$  est élément neutre à droite pour  $\nabla$ .

En effet, supposons que  $n$  soit élément neutre à droite pour  $\nabla$ ; on a en particulier, pour tout  $a \in D$ ,

$$\psi_a \nabla n = \psi_a,$$

c'est-à-dire

$$\inf \{ \psi_a(u) \dot{+} n(v) : u \in D, v \in D, u \nabla v = x \} = \psi_a(x)$$

ou

$$\inf \{ n(v) : v \in D, a \nabla v = x \} = \psi_a(x).$$

Cela fournit l'implication

$$a \nabla v \neq a \Rightarrow n(v) = +\infty.$$

On a donc (6.7); en outre, l'existence de  $n$  implique  $E \neq \emptyset$ , car (6.6) montre que  $\omega$  ne peut être élément neutre pour  $\nabla$ .

Supposant toujours que  $n$  est élément neutre à droite pour  $\nabla$ , on écrit de plus

$$\psi_E \nabla n = \psi_E;$$

par suite,  $e \in E$  implique

$$\inf \{ \psi_E(u) \dot{+} n(v) : u \in D, v \in D, u \nabla v = e \} = 0.$$

Comme la somme  $\dot{+}$  vaut  $+\infty$  si l'on n'a pas  $u \in E$  et  $v \in E$ , cela s'écrit encore

$$e \in E \Rightarrow \inf \{ n(v) : u \in E, v \in E, u \nabla v = e \} = 0,$$



c'est-à-dire (6.8).

Inversement, considérons une fonction  $n \in \bar{\mathbf{R}}^D$  possédant les propriétés (6.7) et (6.8). On a, quelle que soit la fonction  $f$ ,

$$\begin{aligned} (f \nabla n)(x) &= \inf \{ f(u) \dot{+} n(v) : u \in D, v \in D, u \top v = x \} \\ &= \inf \{ f(u) \dot{+} n(v) : u \in D, v \in E, u \top v = x \} \\ &= \inf \{ f(x) \dot{+} n(v) : v \in E \} \end{aligned}$$

ou, en invoquant (4.7),

$$(f \nabla n)(x) = f(x) \dot{+} \inf_{v \in E} n(v) = f(x).$$

#### 6.c. COMMUTATIVITÉ, ASSOCIATIVITÉ.

PROPOSITION. — *La loi de composition  $\nabla$  est commutative (resp. associative) sur  $\bar{\mathbf{R}}^D$  si et seulement si la loi de composition  $\top$  est commutative (resp. associative) sur  $D$ .*

La commutativité (resp. l'associativité) de  $\nabla$  implique celle de  $\top$  en vertu de l'isomorphisme  $a \mapsto \psi_a$  (cf. 6.a, premier exemple).

Inversement, il est immédiat que la commutativité de  $\top$  implique celle de  $\nabla$ .

Soient enfin  $f, g, h$  trois éléments de  $\bar{\mathbf{R}}^D$ . Pour  $x \in D$ , posons la notation

$$\Pi(x) = \{ (s, t) \in D \times D : s \top t = x \},$$

de sorte que

$$(f \nabla (g \nabla h))(x) = \inf_{(s, t) \in \Pi(x)} [f(s) \dot{+} (g \nabla h)(t)]$$

Par ailleurs, en invoquant (4.7), on voit que

$$\begin{aligned} f(s) \dot{+} (g \nabla h)(t) &= f(s) \dot{+} \inf_{v \top w = t} [g(v) \dot{+} h(w)] \\ &= \inf_{v \top w = t} [f(s) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)] \\ &= \inf_{(u, v, w) \in G(s, t)} [f(u) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)], \end{aligned}$$

où l'on pose

$$G(s, t) = \{ (u, v, w) \in D \times D \times D : u = s, v \top w = t \}.$$

D'après une règle élémentaire de calcul des inf, cela donne

$$[f \nabla (g \nabla h)](x) = \inf_{(u, v, w) \in K(x)} [f(u) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)],$$



où l'on pose

$$K(x) = \bigcup_{(s, t) \in \Pi(x)} G(s, t).$$

Cette définition de  $K(x)$  s'écrit encore

$$\begin{aligned} (u, v, w) \in K(x) &\iff (\exists s, \exists t : s \top t = x, u = s, v \top w = t) \\ &\iff u \top (v \top w) = x. \end{aligned}$$

De la même manière,

$$[(f \nabla g) \nabla h](x) = \inf_{(u, v, w) \in K'(x)} [f(u) \dot{+} g(v) \dot{+} h(w)],$$

avec pour définition de  $K'(x)$  :

$$(u, v, w) \in K'(x) \iff (u \top v) \top w = x.$$

L'hypothèse d'associativité de  $\top$  impliquera  $K(x) = K'(x)$ , d'où l'associativité de  $\nabla$ .

#### 6.d. ISOTONIE.

PROPOSITION. — Si  $f_1, f_2, g$  sont des éléments de  $\bar{\mathbf{R}}^b$ , on a l'implication

$$(6.9) \quad f_1 \leq f_2 \implies f_1 \nabla g \leq f_2 \nabla g$$

(ou aussi bien  $g \nabla f_1 \leq g \nabla f_2$ ).

Plus généralement, si  $(f_i)_{i \in I}$  et  $(g_j)_{j \in J}$  sont deux familles quelconques de tels éléments,

$$(6.10) \quad \inf_{(i, j) \in I \times J} (f_i \nabla g_j) = \left( \inf_{i \in I} f_i \right) \nabla \left( \inf_{j \in J} g_j \right).$$

En effet,

$$\inf_{(i, j) \in I \times J} (f_i \nabla g_j)(x) = \inf_{(i, j) \in I \times J} \inf_{u \top v = x} [f_i(u) \dot{+} g_j(v)].$$

Par interversion des deux « inf », puis par la proposition 4.b, cette expression s'écrit encore

$$\inf_{u \top v = x} \left[ \inf_{i \in I} f_i(u) \dot{+} \inf_{j \in J} g_j(v) \right],$$

d'où (6.10).

On peut considérer (6.9) comme un cas particulier : famille  $g_j$  réduite à un seul élément et  $I = \{1, 2\}$ .



## 6.e. SOUS-ADDITIVITÉ ET INF-CONVOLUTION.

PROPOSITION. —  $f \in \mathbf{R}^0$  est sous-additive si et seulement si

$$(6.11) \quad f \leq f \nabla f.$$

En effet, quelle que soit la fonction  $f$ , on a

$$(f \nabla f)(x \top x') = \inf_{u \top v = x \top x'} [f(u) \dot{+} f(v)] \leq f(x) \dot{+} f(x').$$

La condition (6.11) impliquera donc bien la sous-additivité de  $f$ .

Réciproquement si  $f$  est sous-additive.

$$(f \nabla f)(x \top x') = \inf_{u \top v = x \top x'} [f(u) \dot{+} f(v)] \geq f(x \top x')$$

vu que  $f(u) \dot{+} f(v)$  est minoré par  $f(u \top v) = f(x \top x')$ . Cela prouve l'inégalité (6.11) puisque, d'autre part, en tout point de  $D$  non décomposable sous la forme  $x \top x'$ , la fonction  $f \nabla f$  prend la valeur  $+\infty$ .

*Remarque.* — Supposons que la loi  $\top$  admette un élément neutre, à droite par exemple, soit  $e$ . Alors en prenant  $u = x, v = e$ , on a  $u \top v = x$ , donc

$$(f \nabla f)(x) \leq f(x) \dot{+} f(e).$$

Par suite,

$$f(e) = 0 \Rightarrow f \geq f \nabla f.$$

La proposition ci-dessus montre donc que, dans le cas où la loi possède un élément neutre  $e$ , une fonction nulle au point  $e$  est sous-additive si et seulement si elle est idempotente pour l'inf-convolution.

COROLLAIRE. — Si la loi  $\top$  est commutative et associative, l'ensemble des fonctions numériques sous-additives sur  $D$  est stable pour l'inf-convolution.

En effet, les hypothèses

$$\begin{aligned} f &\leq f \nabla f, \\ g &\leq g \nabla g \end{aligned}$$

impliquent, en ce cas, vu la proposition 6.d,

$$f \nabla g \leq (f \nabla f) \nabla (g \nabla g) = (f \nabla g) \nabla (f \nabla g).$$



6.f. ENVELOPPE SOUS-ADDITIVE. — Soit  $g$  un élément quelconque de  $\overline{\mathbf{R}}^n$ . L'enveloppe supérieure de la famille des minorantes sous-additives de  $g$  (cette famille contient toujours au moins la constante  $-\infty$ ) est aussi une minorante de  $g$  et, d'après la proposition 5.c, cette enveloppe supérieure est sous-additive : elle constitue donc *la plus grande minorante sous-additive de  $g$  ou enveloppe sous-additive de cette fonction.*

La construction de cette enveloppe peut être rattachée de la manière suivante à l'opération d'inf-convolution :

Soit  $n$  entier positif; opérer l'inf-convolution de  $n$  fonctions égales à  $g$  donne un résultat qui, dans le cas général, vu la non-commutativité et la non-associativité de l'inf-convolution, dépend du processus selon lequel, à chaque pas de cette suite de  $n - 1$  compositions,  $g$  est affecté, soit comme premier, soit comme second facteur. Notons  $g_n$  l'enveloppe inférieure des fonctions obtenues pour ces divers processus.

PROPOSITION. — *L'enveloppe sous-additive de  $g$  est*

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} g_n.$$

En effet, en invoquant la proposition 6.d, on obtient

$$\gamma \nabla \gamma = \left( \inf_{n \geq 1} g_n \right) \nabla \left( \inf_{p \geq 1} g_p \right) = \inf_{n \geq 1, p \geq 1} (g_n \nabla g_p).$$

Or, visiblement,

$$g_n \nabla g_p \geq g_{n+p},$$

d'où

$$\gamma \nabla \gamma \geq \inf_{n \geq 1, p \geq 1} g_{n+p} = \inf_{q \geq 2} g_q \geq \gamma,$$

ce qui, par la proposition 6.e, prouve la sous-additivité de  $\gamma$ .

Par construction,  $\gamma$  minore  $g_1 = g$ . Soit  $f$  une autre minorante sous-additive de  $g$ ; on a  $f \leq f \nabla f$ , donc, pour chaque  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$f \leq f_n \leq g_n, \quad \text{d'où} \quad f \leq \gamma,$$

ce qui montre que  $\gamma$  est bien la plus grande minorante sous-additive de  $g$ .

Ce résultat est surtout intéressant dans le cas où, la loi  $\nabla$  étant commutative ou associative,  $g_n$  s'obtient tout simplement par inf-convolution de  $n$  fonctions égales à  $g$ .



6.g. FONCTION NUMÉRIQUE DÉCROISSANTE. — On suppose, dans ce paragraphe, que  $D$  est un *demi-groupe*, c'est-à-dire que la loi  $\top$  est *associative*. Soit  $P$  une partie de  $D$  stable pour  $\top$ ; définissons une relation binaire  $\preceq$  sur  $D$  par

$$x \preceq y \Leftrightarrow \exists p \in P : y = x \top p.$$

L'associativité de  $\top$  implique que cette relation est *transitive*. Elle rend en outre *isotone* « à gauche » la loi  $\top$ , c'est-à-dire que, si  $u$  est un élément quelconque de  $D$ , on a l'implication

$$x \preceq y \Rightarrow u \top x \preceq u \top y.$$

Si  $P$  contient un élément neutre à droite pour la loi  $\top$ , la relation  $\preceq$  est réflexive : c'est alors un *préordre* (prendre garde que, sur un demi-groupe quelconque, une relation transitive, ou même un préordre, rendant isotone à gauche la loi de ce demi-groupe n'est pas nécessairement associée comme ci-dessus à une partie stable  $P$  du demi-groupe).

PROPOSITION. — Une fonction numérique  $f \in \overline{\mathbf{R}}^n$  est décroissante (au sens non strict) pour la relation  $\preceq$  si et seulement si

$$(6.12) \quad f \leq f \nabla \psi_P.$$

En effet,

$$\begin{aligned} (f \nabla \psi_P)(x) &= \inf \{ f(u) \dot{+} \psi_P(v) : u \top v = x \} \\ &= \inf \{ f(u) : \exists v \in P, u \top v = x \} \\ &= \inf \{ f(u) : u \preceq x \}. \end{aligned}$$

Donc (6.12) équivaut bien à l'implication

$$u \preceq x \Rightarrow f(u) \geq f(x).$$

Exemple. — Si  $g$  est décroissante, son enveloppe sous-additive (cf. 6.f)

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} g_n$$

est décroissante.

En effet, d'après la proposition 6.d,

$$\gamma \nabla \psi_P = \inf_{n \geq 1} (g_n \nabla \psi_P)$$



Vu l'associativité,  $g_n$  se construit simplement par inf-convolution de  $n$  fonctions égale à  $g$ , donc, si l'on suppose  $g \nabla \psi_P \geq g$ ,

$$g_n \nabla \psi_P = g \nabla \dots \nabla g \nabla \psi_P \geq g_n.$$

On en tire que  $\gamma$  vérifie la condition (6.12).

*Remarque.* — Si  $P$  contient un élément neutre à droite, soit  $e$ , de  $D$ , (6.12) équivaut à

$$(6.13) \quad f = f \nabla \psi_P.$$

En effet,  $e \in P$  implique  $\psi_e \geq \psi_P$  et, comme  $\psi_e$  est élément neutre à droite pour l'inf-convolution, on a, pour toute fonction  $g \in \mathbf{R}^D$ ,

$$(6.14) \quad g = g \nabla \psi_e \geq g \nabla \psi_P.$$

Dans ce cas, d'ailleurs,  $P \top P = P$ , donc

$$(6.15) \quad \psi_P \nabla \psi_P = \psi_P.$$

De cette dernière égalité et de la condition (6.13) on déduit immédiatement que si, de plus, la loi  $\top$  est *commutative*, l'ensemble des fonctions décroissantes pour le préordre  $\preceq$  est stable pour l'inf-convolution.

*APPLICATION.* — Supposons que  $P$  contienne un élément neutre à droite de  $D$  (demi-groupe non nécessairement commutatif). Soit  $g$  quelconque dans  $\mathbf{R}^D$ ; on tire de (6.14) et (6.15) que la fonction

$$f = g \nabla \psi_P$$

minore  $g$  et vérifie (6.13) : elle est donc décroissante et c'est même la plus grande minorante décroissante de  $g$ , car, pour toute autre minorante décroissante  $f'$  de  $g$ , on aura

$$f' = f' \nabla \psi_P \leq g \nabla \psi_P$$

(on pourrait aussi construire  $f$  comme enveloppe supérieure des minorantes décroissantes de  $g$ ).

Supposons de plus que la loi  $\top$  soit *commutative*. Compte tenu de (6.15) on trouve que l'hypothèse  $g \leq g \nabla g$  impliquera

$$g \nabla \psi_P \leq g \nabla \psi_P \nabla g \nabla \psi_P;$$

donc, dans ce cas, si  $g$  est sous-additive, sa plus grande minorante décroissante l'est aussi.



6.h. INF-CONVOLUTION SUR UN GROUPE. — Supposons que la loi de composition  $\top$  soit, sur D, une loi de groupe, non nécessairement abélien. On notera  $a^-$  l'inverse d'un élément  $a$  de D.

Alors

$$u \top v = x \iff v = u^- \top x \iff u = x \top v^-,$$

de sorte que la définition (6.1) de l'inf-convolution équivaut, en ce cas, à

$$\begin{aligned} (f \nabla g)(x) &= \inf_{u \in D} [f(u) \dot{+} g(u^- \top x)] \\ &= \inf_{v \in D} [f(x \top v^-) \dot{+} g(v)]. \end{aligned}$$

Exemple : Soit  $\varphi \in \bar{\mathbf{R}}^D$ ; la fonction

$$(x, y) \mapsto \varphi(y \top x^-)$$

constitue une *distance invariante pour les translations à droite* dans D (c'est du moins une distance proprement dite si  $\varphi$  est à valeurs dans  $[0, +\infty[$ , sous-additive, symétrique et s'annulant seulement en l'élément neutre  $e$  de D). Soit A une partie non vide de D; alors

$$\begin{aligned} (\varphi \nabla \psi_A)(x) &= \inf_{v \in D} [\varphi(x \top v^-) \dot{+} \psi_A(v)] \\ &= \inf_{v \in A} d(v, x), \end{aligned}$$

c'est la *distance de  $x$  à l'ensemble A*.

Comme règle de calcul utile concernant ce cas où D est un groupe, remarquons que, pour toute  $f \in \mathbf{R}^D$ , et tout  $a \in D$ , on a

$$\begin{aligned} (f \nabla \psi_a)(x) &= \inf_{v \in D} [f(x \top v^-) \dot{+} \psi_a(v)] \\ &= f(x \top a^-). \end{aligned}$$

On notera  $T_a f$  la fonction  $x \mapsto f(x \top a^-)$ , *translatée à droite de la fonction  $f$* ; de la sorte,

$$f \nabla \psi_a = T_a f.$$

Alors l'associativité de  $\nabla$  montre par exemple que

$$T_a(f \nabla g) = f \nabla (T_a g).$$



## 7. ÉPIGRAPHE ET HYPOGRAPHE.

## 7.a. GÉNÉRALITÉS.

DÉFINITION. —  $f$  étant une fonction définie sur un ensemble quelconque  $X$ , à valeurs dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , on appellera respectivement épigraphe et épigraphe strict de  $f$  les parties suivantes de l'ensemble produit  $X \times \mathbf{R}$  :

$$\text{epi } f = \{ (x, r) \in X \times \mathbf{R} : f(x) \leq r \},$$

$$\text{est } f = \{ (x, r) \in X \times \mathbf{R} : f(x) < r \}.$$

De même, les parties définies respectivement dans  $X \times \mathbf{R}$  par les inégalités  $f(x) \geq r$  et  $f(x) > r$  seront appelées hypographe et hypographe strict de  $f$  (notations  $\text{hyp } f$  et  $\text{hst } f$ ).

Évidemment,  $\text{epi } f$  et  $\text{hst } f$  (resp.  $\text{est } f$  et  $\text{hyp } f$ ) sont complémentaires dans  $X \times \mathbf{R}$ ; en outre, les hypographe de  $f$  se déduisent des épigraphes de  $-f$  par la réflexion  $(x, r) \mapsto (x, -r)$  dans  $X \times \mathbf{R}$ . On se limitera donc le plus souvent dans ce qui suit à la considération d'épigraphes ou d'épigraphes stricts.

Il pourrait paraître plus naturel, la fonction  $f$  prenant ses valeurs dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , de considérer les ensembles définis par les mêmes inégalités dans  $X \times \overline{\mathbf{R}}$ . En fait,  $f$  est complètement déterminée par la donnée de  $\text{epi } f \subset X \times \mathbf{R}$  (resp. de  $\text{est } f$ ) : pour chaque  $x_0 \in X$ , l'intersection de  $\text{epi } f$  (resp. de  $\text{est } f$ ) avec la « droite »  $\{x_0\} \times \mathbf{R}$  est :

1° vide si  $f(x_0) = +\infty$ ;

2° la droite entière si  $f(x_0) = -\infty$ ;

3° la demi-droite  $\{x_0\} \times [f(x_0), +\infty[$  (resp. la demi-droite  $\{x_0\} \times ]f(x_0), +\infty[$ ), si  $f(x_0) \in \mathbf{R}$ ,

ce qui, dans tous les cas, définit  $f(x_0)$  par

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \inf \{ r \in \mathbf{R} : (x_0, r) \in \text{epi } f \} \\ &= \inf \{ r \in \mathbf{R} : (x_0, r) \in \text{est } f \} \end{aligned}$$

(inf pris dans  $\overline{\mathbf{R}}$ ).

La considération de  $E \times \mathbf{R}$  plutôt que  $E \times \overline{\mathbf{R}}$  présente, entre autres avantages techniques, l'intérêt suivant : si  $X$  est un *groupe* ou un *espace vectoriel*, il en est canoniquement de même pour  $X \times \mathbf{R}$ . Lorsque, en outre, on abordera les questions topologiques, si  $X$



est, par exemple, un espace vectoriel topologique localement convexe, il en sera canoniquement de même pour  $X \times \mathbf{R}$ .

Une partie de  $X \times \mathbf{R}$  est l'épigraphe (resp. l'épigraphe strict) d'une fonction numérique si et seulement si son intersection avec toute droite  $\{x_0\} \times \mathbf{R}$  n'offre que les éventualités 1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> ci-dessus. On pourra trouver commode de formuler cela en langage topologique : on fait de  $X$  l'espace topologique  $X_{\text{dis}}$  en le munissant de la topologie discrète et on fait de  $\mathbf{R}$  l'espace topologique  $\mathbf{R}_{\text{inf}}$  en le munissant de la topologie (non séparée) dont les ouverts sont, outre la partie vide et la partie pleine, les demi-droites  $]r, +\infty[$ ,  $r \in \mathbf{R}$ . Alors une partie de  $X \times \mathbf{R}$  est un épigraphe strict si et seulement si c'est un ouvert de l'espace topologique  $X_{\text{dis}} \times \mathbf{R}_{\text{inf}}$ ; dans cet espace topologique est  $f$  est l'intérieur de  $\text{epi } f$ . De même, on fait de  $\mathbf{R}$  l'espace topologique  $\mathbf{R}_{\text{sup}}$  en le munissant de la topologie engendrée par les demi-droites  $] -\infty, r[$ ,  $r \in \mathbf{R}$ . Une partie de  $X_{\text{dis}} \times \mathbf{R}_{\text{sup}}$  est fermée si et seulement si c'est un épigraphe; dans cet espace topologique,  $\text{epi } f$  est l'adhérence de  $f$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques définies sur  $X$ , la relation  $f \leq g$  équivaut visiblement à

$$\text{epi } f \supset \text{epi } g,$$

équivalente elle-même à

$$\text{est } f \supset \text{est } g.$$

Plus généralement, si  $(f_i)$ ,  $i \in I$ , est une famille quelconque de fonctions numériques, on a

$$\text{epi} \left( \sup_{i \in I} f_i \right) = \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i,$$

$$\text{est} \left( \inf_{i \in I} f_i \right) = \bigcup_{i \in I} \text{est } f_i.$$

**7.b. ÉPIGRAPHES ET INF-CONVOLUTION.** — Soit  $D$ , ensemble muni de la loi de composition  $\top$ ; on notera encore  $\top$  la loi de composition définie dans  $D \times \mathbf{R}$  par

$$(x, r) \top (x', r') = (x \top x', r + r').$$

**PROPOSITION.** — Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques sur  $D$ , on a

$$(7.1) \quad \text{est}(f \nabla g) = \text{est } f \top \text{est } g.$$



En outre,  $\text{epi}(f \nabla g)$  est la « fermeture épigraphe », c'est-à-dire l'adhérence dans  $D_{\text{dis}} \times \mathbf{R}_{\text{sup}}$ , de l'ensemble  $\text{epi} f \top \text{epi} g$ .

En effet, si  $x \in D$  et  $r \in \mathbf{R}$ , on a

$$\begin{aligned} (x, r) \in \text{est}(f \nabla g) &\Leftrightarrow r > \inf_{u \top v = x} [f(u) + g(v)] \\ &\Leftrightarrow \exists u, \exists v, u \top v = x, \quad r > f(u) + g(v). \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.b, cela équivaut à

$$\exists u \in D, \quad \exists v \in D, \quad \exists s \in \bar{\mathbf{R}}, \quad \exists t \in \bar{\mathbf{R}}$$

tels que

$$u \top v = x, \quad s + t = r, \quad s > f(u), \quad t > g(v).$$

Comme  $r$  appartient, par essence, à  $\mathbf{R}$ ,  $s + t = r$  implique  $s \in \mathbf{R}$  et  $t \in \mathbf{R}$ , donc équivaut à  $s + t = r$ . De la sorte  $(x, r) \in \text{est}(f \nabla g)$  équivaut à

$$\exists (u, s) \in \text{est} f, \quad \exists (v, t) \in \text{est} g,$$

tels que

$$(x, r) = (u, s) \top (v, t),$$

ce qui prouve l'égalité (7.1).

Par ailleurs, les inclusions évidentes

$$\begin{aligned} \text{epi} f &\supset \text{est} f, \\ \text{epi} g &\supset \text{est} g \end{aligned}$$

impliquent

$$(7.2) \quad \text{epi} f \top \text{epi} g \supset \text{est} f \top \text{est} g.$$

Le second membre est, d'après ce qui précède, l'ensemble  $\text{est}(f \nabla g)$  dont la fermeture épigraphe est  $\text{epi}(f \nabla g)$ . Prendre les fermetures épi-graphes des deux membres de (7.2) donne donc :

$$\text{fermeture}(\text{epi} f \top \text{epi} g) \supset \text{epi} f \nabla g.$$

Il reste à prouver l'inclusion inverse, c'est-à-dire, puisque le second membre est, par essence, fermé dans  $D_{\text{dis}} \times \mathbf{R}_{\text{sup}}$ ,

$$(7.3) \quad \text{epi} f \top \text{epi} g \subset \text{epi} f \nabla g.$$

Soit donc  $(x, r) \in \text{epi} f \top \text{epi} g$ , c'est-à-dire

$$x = u \top v, \quad r = s + t,$$



avec

$$s \geq f(u), \quad t \geq g(v).$$

Cela implique

$$r = s \dot{+} t \geq f(u) \dot{+} g(v),$$

donc

$$r \geq \inf_{u \top v = x} [f(u) \dot{+} g(v)] = (f \nabla g)(x),$$

ce qui établit l'inclusion (7.3).

### 7.c. ÉPIGRAPHES ET SOUS-ADDITIVITÉ.

PROPOSITION. — Une fonction numérique définie sur  $D$  est sous-additive si et seulement si son épigraphe (resp. son épigraphe strict) est une partie de  $D \times \mathbf{R}$  stable pour l'opération  $\top$ .

En effet, d'après la proposition 6.e, la fonction  $f$  est sous-additive si et seulement si

$$f \leq f \nabla f,$$

c'est-à-dire

$$(7.4) \quad \text{est } f \supset \text{est } (f \nabla f),$$

ou, de façon équivalente,

$$(7.5) \quad \text{epi } f \supset \text{epi } (f \nabla f).$$

Par la proposition 7.b, l'inclusion (7.4) s'écrit

$$\text{est } f \supset \text{est } f \top \text{est } f,$$

ce qui est bien la stabilité de  $\text{est } f$ .

De même, (7.5) s'écrit

$$\text{epi } f \supset \text{fermeture } (\text{epi } f \top \text{epi } f),$$

mais, comme le premier membre est essentiellement fermé dans  $D_{\text{dis}} \times \mathbf{R}_{\text{sup}}$ , cela équivaut à

$$\text{epi } f \supset \text{epi } f \top \text{epi } f.$$

## 8. DESCRIPTION D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE PAR SES TRANCHES.

### 8.a. GÉNÉRALITÉS.

NOTATIONS. — Soit  $X$  un ensemble quelconque et soit  $f \in \overline{\mathbf{R}}^X$ . On notera  $f^{\leq}$ ,  $f^{<}$ ,  $f^{\geq}$ ,  $f^{>}$  (tranche inférieure, tranche inférieure stricte,



tranche supérieure, tranche supérieure stricte) les applications de  $\bar{\mathbf{R}}$  dans l'ensemble  $\mathfrak{P}(\mathbf{X})$  des parties de  $\mathbf{X}$  qui, à chaque  $r \in \bar{\mathbf{R}}$ , font correspondre les ensembles

$$\begin{aligned} f^{\leq}(r) &= \{x \in \mathbf{X} : f(x) \leq r\}, \\ f^{<}(r) &= \{x \in \mathbf{X} : f(x) < r\}, \\ f^{\geq}(r) &= \{x \in \mathbf{X} : f(x) \geq r\}, \\ f^{>}(r) &= \{x \in \mathbf{X} : f(x) > r\}. \end{aligned}$$

Si l'on préfère, on pourra dire qu'il s'agit là d'applications *multivoques* ou « multi-applications » de  $\bar{\mathbf{R}}$  dans  $\mathbf{X}$ .

La donnée d'une quelconque de ces applications détermine  $f$ , puisque

$$\begin{aligned} f(x) &= \inf \{r \in \bar{\mathbf{R}} : x \in f^{\leq}(r)\} = \inf \{r \in \bar{\mathbf{R}} : x \in f^{<}(r)\} \\ &= \sup \{r \in \bar{\mathbf{R}} : x \in f^{\geq}(r)\} = \sup \{r \in \bar{\mathbf{R}} : x \in f^{>}(r)\}. \end{aligned}$$

Noter que  $f^{\leq}(r)$  et  $f^{>}(r)$  [resp.  $f^{<}(r)$  et  $f^{\geq}(r)$ ], sont des parties complémentaires de  $\mathbf{X}$ ; en outre,

$$\begin{aligned} f^{\leq}(-r) &= (-f)^{\geq}(r), \\ f^{<}(-r) &= (-f)^{>}(r). \end{aligned}$$

Par ces règles de « dualité » les propriétés de tranches supérieures peuvent être ramenées à celles de tranches inférieures.

On voit, d'autre part, que les applications  $f^{\leq}, f^{<}, f^{\geq}, f^{>}$  de  $\bar{\mathbf{R}}$  dans  $\mathfrak{P}(\mathbf{X})$  sont déterminées par leurs restrictions à  $\mathbf{R}$ , car

$$(8.1) \quad \begin{aligned} f^{\leq}(+\infty) &= \mathbf{X}, & f^{<}(-\infty) &= \emptyset, \\ f^{<}(+\infty) &= \bigcup_{r \in \mathbf{R}} f^{<}(r) = \bigcup_{r \in \mathbf{R}} f^{\leq}(r), \end{aligned}$$

$$(8.2) \quad f^{\geq}(-\infty) = \bigcap_{r \in \mathbf{R}} f^{>}(r) = \bigcap_{r \in \mathbf{R}} f^{\leq}(r)$$

et propriétés analogues pour  $f^{\geq}$  et  $f^{>}$ .

Il est clair que  $f^{\leq}$  et  $f^{<}$  sont des applications *croissantes* (au sens non strict) de  $\bar{\mathbf{R}}$ , muni de son ordre habituel, dans  $\mathfrak{P}(\mathbf{X})$ , ordonné par l'inclusion. Mais ce n'est pas là une propriété caractéristique : on montrera plus précisément qu'une application  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}$  (resp.  $\bar{\mathbf{R}}$ ) dans  $\mathfrak{P}(\mathbf{X})$  est de la forme  $f^{\leq}$  si et seulement si, pour chaque  $r \in \mathbf{R}$  (resp.  $r \in \bar{\mathbf{R}}$ ),

$$\Gamma(r) = \bigcap_{r < t < +\infty} \Gamma(t)$$



(rappelons, si l'on veut appliquer cette formule au cas  $r = +\infty$ , que l'intersection d'une famille vide de parties de  $X$  est  $X$ ). De même,  $\Gamma$  est de la forme  $f^<$  si et seulement si, pour chaque  $r \in \mathbf{R}$  (resp.  $r \in \overline{\mathbf{R}}$ ), on a

$$\Gamma(r) = \bigcup_{-\infty < t < r} \Gamma(t).$$

Toujours à propos des ordres de  $\overline{\mathbf{R}}$  et de  $\mathfrak{P}(X)$  notons enfin que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques sur  $X$ , l'inégalité  $f \leq g$  équivaut à  $f^{\leq} \supset g^{\leq}$  ou, aussi bien à  $f^< \supset g^<$  ou à  $f^{\geq} \subset g^{\geq}$  ou à  $f^> \subset g^>$ . Plus généralement,  $(f_i)_{i \in I}$  étant une famille quelconque de fonctions numériques, on trouve

$$\begin{aligned} (\inf_{i \in I} f_i)^< &= \bigcup_{i \in I} f_i^<, \\ (\sup_{i \in I} f_i)^{\leq} &= \bigcap_{i \in I} f_i^{\leq} \end{aligned}$$

et deux relations analogues pour les tranches supérieures.

#### 8.b. TRANCHES D'UNE FONCTION SOUS-ADDITIVE.

PROPOSITION. — Soit  $f \in \overline{\mathbf{R}}^n$ , l'ensemble  $D$  étant muni d'une loi de composition interne  $\top$ . La fonction  $f$  est sous-additive si et seulement si  $f^{\leq}$  (resp.  $f^<$ ) est une application sur-additive de  $(\overline{\mathbf{R}}, \dot{+})$  dans  $\mathfrak{P}(D)$ , c'est-à-dire si, quels que soient  $r$  et  $r'$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$ , on a

$$(8.3) \quad f^{\leq}(r \dot{+} r') \supset f^{\leq}(r) \top f^{\leq}(r')$$

(resp. même relation pour  $f^<$ ). Il suffit d'ailleurs que (8.3) ait lieu pour tout  $r$  et tout  $r'$  dans  $\mathbf{R}$ .

En effet, supposons  $f$  sous-additive :

$$\begin{aligned} x \in f^{\leq}(r) \top f^{\leq}(r') & \\ \Rightarrow \exists y, \exists y' \text{ tels que } x = y \top y', & \quad f(y) \leq r, \quad f(y') \leq r' \\ \Rightarrow \exists y, \exists y' \text{ tels que } x = y \top y', & \quad f(y) \dot{+} f(y') \leq r \dot{+} r' \\ \Rightarrow f(x) = f(y \top y') \leq r \dot{+} r' & \\ \Rightarrow x \in f^{\leq}(r \dot{+} r'). & \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que l'inclusion (8.3) soit vraie pour tout  $r$  et tout  $r'$  dans  $\mathbf{R}$ . Soient  $x$  et  $x'$  dans  $D$  : montrons que



tout  $k \in \mathbf{R}$  supérieur ou égal à  $f(x) \dot{+} f(x')$  est supérieur ou égal à  $f(x \top x')$ . A un tel  $k$  le corollaire 3.b associe  $r$  et  $r'$  tels que

$$k = r \dot{+} r', \quad f(x) \leq r, \quad f(x') \leq r'.$$

Puisque  $k \in \mathbf{R}$ , il en est de même de  $r$  et  $r'$ ; et on a  $x \in f^{\leq}(r)$ ,  $x' \in f^{\leq}(r')$ , donc, d'après l'hypothèse faite,

$$x \top x' \in f^{\leq}(r) \top f^{\leq}(r') \subset f^{\leq}(r + r') = f^{\leq}(k),$$

ce qui prouve bien que

$$f(x \top x') \leq k.$$

Raisonnements semblables pour  $f^{<}$ .

### 8.c. INF-CONVOLUTION ET TRANCHES.

PROPOSITION. — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques définies sur l'ensemble  $D$ , muni d'une loi de composition  $\top$ . Alors, pour tout  $r \in \overline{\mathbf{R}}$ ,

$$(8.4) \quad (f \nabla g)^{<}(r) = \bigcup_{s \dot{+} t = r} [f^{<}(s) \top g^{<}(t)].$$

L'opération du second membre peut s'interpréter comme *sup-convolution* de  $f^{<}$  et  $g^{<}$ , applications du demi-groupe  $(\mathbf{R}, \dot{+})$  dans le demi-groupe  $\mathfrak{P}(D)$  (ordonné par l'inclusion).

*Démonstration :*

$$\begin{aligned} (f \nabla g)(x) < r &\Leftrightarrow \inf_{u \top v = x} [f(u) \dot{+} g(v)] < r \\ &\Leftrightarrow \exists u \in D, \quad v \in D : u \top v = x, \quad f(u) \dot{+} g(v) < r. \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.b, cela équivaut à l'existence de  $u \in D$ ,  $v \in D$ ,  $s \in \mathbf{R}$ ,  $t \in \mathbf{R}$  tels que

$$u \top v = x, \quad s \dot{+} t = r, \quad f(u) < s, \quad g(v) < t,$$

donc à

$$\exists s \in \overline{\mathbf{R}}, \quad \exists t \in \overline{\mathbf{R}} : s \dot{+} t = r, \quad x \in f^{<}(s) \top g^{<}(t),$$

c'est-à-dire

$$x \in \bigcup_{s \dot{+} t = r} [f^{<}(s) \top g^{<}(t)].$$



COROLLAIRE :

$$(8.5) \quad (f \nabla g)^{<(+\infty)} = f^{<(+\infty)} \top g^{<(+\infty)}.$$

Il résulte de là que si  $E$  est une partie de  $D$  stable pour  $\top$ , l'ensemble des fonctions prenant la valeur  $+\infty$  hors de  $E$  est stable pour  $\nabla$ .

Pour certaines applications, il est utile d'interpréter cette remarque comme une propriété d'immersion : Puisque  $\top$  constitue une loi de composition interne dans  $E$ , on peut parler de l'inf-convolution de deux fonctions numériques, définies sur  $E$ . Or, à chacune de ces fonctions correspond bijectivement son prolongement à  $D$  tout entier, construit avec la valeur  $+\infty$  hors de  $E$ . On définit de la sorte un isomorphisme de  $(\bar{\mathbf{R}}^E, \nabla)$  dans  $(\bar{\mathbf{R}}^D, \nabla)$ .

8.d. TRANCHES D'UNE FONCTION DÉCROISSANTE. — On considère encore l'ensemble  $D$  muni de la loi de composition  $\top$ . Soit  $P \subset D$ , stable pour cette loi de composition; on définit, comme au paragraphe 6.g, la relation  $\preceq$  par

$$x \preceq y \iff \exists p \in P : y = x \top p$$

(on n'aura pas besoin dans ce qui suit de supposer la loi  $\top$  associative).

PROPOSITION. — Une fonction numérique  $f$  est décroissante (au sens non strict) pour la relation  $\preceq$  si et seulement si, pour tout  $r \in \mathbf{R}$ , on a

$$(8.6) \quad f^{\leq}(r) \supset f^{\leq}(r) \top P$$

(resp. la même relation pour  $f^{<}$ ); alors, d'ailleurs, cette inclusion est vraie pour tout  $r \in \bar{\mathbf{R}}$ .

En effet, supposons que (8.6) ait lieu pour tout  $r \in \mathbf{R}$ . Soit  $y = x \top p$ ,  $p \in P$ ; pour tout  $r \in \mathbf{R}$  supérieur ou égal à  $f(x)$ , on a  $x \in f^{\leq}(r)$ , donc  $y \in f^{\leq}(r) \top P$ , donc  $y \in f^{\leq}(r)$ , c'est-à-dire  $f(y) \leq r$ . Cela prouve  $f(y) \leq f(x)$ .

Réciproquement supposons que  $f$  soit décroissante. Soit  $r \in \bar{\mathbf{R}}$  et soit  $y \in f^{\leq}(r) \top P$ ; il existe  $p \in P$  et  $x \in D$  tels que  $f(x) \leq r$  et  $x \top p = y$ , c'est-à-dire  $x \preceq y$ , donc  $f(y) \leq f(x) \leq r$ . Cela prouve l'inclusion (8.6).

Mêmes raisonnements pour  $f^{<}$ .



## 9. FONCTIONS NUMÉRIQUES CONVEXES.

9.a. DÉFINITIONS. — On considère, dans tout ce qui suit, un cône convexe  $C$  (cf. § 2.a). Une fonction  $f$ , définie sur  $C$ , à valeurs dans  $\mathbf{R}$  sera dite *convexe* si, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $C$ , tout  $\alpha$  et tout  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a

$$(9.1) \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

La fonction sera dite *concave* si elle vérifie l'inégalité inverse, avec  $-$  au lieu de  $+$ , ce qui revient à dire que la fonction  $-f$  est convexe.

Dans le cas particulier de fonctions prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $]-\infty, +\infty]$  (resp.  $[-\infty, +\infty[$ ), où l'addition ordinaire est partout définie, on retrouve la notion classique de convexité des fonctions numériques. Ici, comme en 5.a à propos de la sous-additivité, il serait équivalent d'écrire le second membre de (9.1) avec une addition ordinaire, en imposant seulement à la fonction  $f$  de vérifier cette inégalité toutes les fois que ledit second membre est défini; cela serait beaucoup moins pratique pour la suite.

EXEMPLE. — Une partie  $A$  de  $C$  est un ensemble convexe si et seulement si sa fonction indicatrice  $\psi_A$  est une fonction convexe.

Première remarque. — La structure de cône convexe, dont l'ensemble  $C$  est supposé muni, est surabondamment riche pour la définition précédente, puisque  $\alpha x + \beta y$  n'est pas une combinaison à coefficients  $> 0$  arbitraires : l'hypothèse  $\alpha + \beta = 1$  fait de cette combinaison une « moyenne pondérée » ou « barycentre ». La théorie de la convexité pourrait être développée à partir d'une axiomatique plus faible, mais cela ne nous semble pas jusqu'à présent offrir d'applications notables (cf. Moreau [3], § 5).

Mieux en harmonie avec la structure de cône convexe est la notion de *sous-linéarité* : la fonction  $f$  est dite sous-linéaire si, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $C$ , pour tout  $\lambda$  et tout  $\mu$  dans  $]0, +\infty[$ , on a

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Une telle fonction est évidemment convexe; on voit aisément qu'elle est en outre *positivement homogène* (sous-entendu : *degré 1*),



c'est-à-dire que

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

*Deuxième remarque.* — Il est clair qu'une fonction numérique positivement homogène (de degré 1) est convexe (et alors sous-linéaire) si et seulement si elle est *sous-additive*. On peut, si l'on veut, ramener systématiquement la théorie de la convexité à celle de la sous-additivité par l'artifice suivant :

L'ensemble produit  $\hat{C} = C \times ]0, +\infty[$  sera muni d'une loi de composition interne qui en fait un demi-groupe commutatif : Pour tout couple d'éléments de  $\hat{C}$ , soient  $(x, \xi)$  et  $(y, \eta)$ , on pose

$$(x, \xi) \top (y, \eta) = \left( \frac{\xi x + \eta y}{\xi + \eta}, \xi + \eta \right),$$

loi de composition visiblement commutative; on vérifiera qu'elle est associative.

A toute  $f \in \bar{\mathbf{R}}^C$  on associe son *extension*  $\hat{f}$  définie sur  $\hat{C}$  par

$$\hat{f}(x, \xi) = \xi f(x)$$

et on constate que  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si  $\hat{f}$  est sous-additive sur  $\hat{C}$ .

Noter d'ailleurs que  $\hat{C}$  se trouve muni lui-même d'une structure de cône convexe si, pour tout  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , on convient de poser

$$\lambda(x, \xi) = (x, \lambda\xi).$$

Alors, quelle que soit  $f \in \bar{\mathbf{R}}^C$ , son extension  $\hat{f}$  est positivement homogène sur  $\hat{C}$  : sa sous-additivité équivaut donc à la sous-linéarité.

*Troisième remarque.* — La notion de convexité des fonctions numériques telle que nous la présentons ici dépasse le cadre classique par le fait que nous acceptons à la fois les valeurs  $-\infty$  et  $+\infty$  pour ces fonctions. Cela est indispensable pour la simplicité et la généralité des développements ultérieurs : par exemple, si l'on refusait la valeur éventuelle  $-\infty$ , il ne serait pas vrai en général que l'inf-convolution de deux fonctions convexes soit une fonction convexe, ni l'enveloppe inférieure d'une famille filtrante décroissante de fonctions convexes.

Il faut constater toutefois que les fonctions convexes prenant quelque part la valeur  $-\infty$  sont très spéciales : on déduit immé-



diatement de l'inégalité (9.1) que s'il existe  $x_0 \in C$  tel que  $f(x_0) = -\infty$ , alors sur tout segment de droite d'origine  $x_0$  il existe *au plus* un point où  $f$  prenne une valeur finie; au-delà de ce point, sur le segment,  $f$  prend la valeur  $+\infty$ . Cela implique que, si  $f$  prend quelque part la valeur  $-\infty$ , les points où elle prend des valeurs finies sont *non internes* dans l'ensemble (convexe)  $f^<(+\infty)$ .

9.b. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES. — Les fonctions numériques convexes possèdent diverses propriétés analogues à celles des fonctions sous-additives. On les établira par des raisonnements semblables à ceux de la section 5 ou bien encore en se ramenant explicitement à la sous-additivité, par l'artifice présenté en 9.a, deuxième remarque.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques convexes sur  $C$ , la fonction  $f + g$  est convexe, mais non, en général, la fonction  $f \div g$ . De même, le produit de  $f$  par une constante  $\lambda \in ]0, +\infty[$  est convexe. Cela fait de l'ensemble des fonctions numériques convexes sur  $C$  un *sous-cône convexe* de  $(\bar{\mathbf{R}}^c, +)$  (cf. § 2.b).

L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions convexes est convexe. Il n'en est pas de même, en général, pour l'enveloppe inférieure; toutefois l'enveloppe inférieure d'une famille *filtrante décroissante* (en particulier, une suite décroissante) de fonctions numériques convexes est convexe.

Comme au paragraphe 5.d, on peut considérer les fonctions définies sur un *ensemble produit*:  $C$  et  $D$  étant deux cônes convexes, l'ensemble produit  $C \times D$  est muni lui-même d'une structure de cône convexe si l'on définit la somme de deux éléments  $(x, y)$  et  $(x', y')$  de cet ensemble produit comme étant la paire  $(x + x', y + y')$  et le produit de  $(x, y)$  par  $\lambda \in ]0, +\infty[$  comme étant la paire  $(\lambda x, \lambda y)$ . On montrera alors que si  $f: C \times D \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$  est convexe, il en est de même de sa « silhouette sur  $C$  », c'est-à-dire la fonction numérique définie sur  $C$  par

$$x \mapsto \inf_{y \in D} f(x, y).$$

L'ensemble produit  $C \times \mathbf{R}$  est muni de la même manière d'une structure de cône convexe et on constate que la *fonction numérique*  $f \in \bar{\mathbf{R}}^c$  est convexe si et seulement si son épigraphe (resp. son épigraphe strict) est une partie convexe de  $C \times \mathbf{R}$ .



En ce qui concerne, enfin, les *tranches* d'une fonction convexe, on montrera par des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 8.b, que la fonction  $f \in \mathbf{R}^c$  est convexe si et seulement si quels que soient  $r$  et  $s$  dans  $\mathbf{R}$ , quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a

$$(9.2) \quad f^{\leq}(\alpha r + \beta s) \supset \alpha f^{\leq}(r) + \beta f^{\leq}(s)$$

(resp. la même propriété pour  $f^{<}$ ). Alors la propriété est vraie également pour tout  $r$  et tout  $s$  dans  $\mathbf{R}$ .

En faisant  $r = s$  dans (9.2), on trouve que, si  $f$  est convexe, l'ensemble  $f^{\leq}(r)$  [resp. l'ensemble  $f^{<}(r)$ ] est, pour tout  $r \in \mathbf{R}$ , convexe. Mais ce n'est pas là une propriété caractéristique des fonctions convexes; on voit immédiatement que la convexité de  $f^{\leq}(r)$  [resp.  $f^{<}(r)$ ] pour tout  $r \in \mathbf{R}$  (ou, simplement, pour tout  $r \in \mathbf{R}$ ) équivaut à la propriété suivante : quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $C$ , quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

On dit classiquement, en pareil cas, que la fonction  $f$  est *quasi-convexe*.

9.c. MULTIPLICATION À DROITE. — Soit  $f$  une fonction numérique définie sur le cône convexe  $C$  et soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ . On notera  $f\lambda$  la fonction définie sur  $C$  par

$$(f\lambda)(x) = \lambda f\left(\frac{1}{\lambda}x\right)$$

(notation de Rockafellar [3]; dans Moreau [1], [2], cette fonction était notée  $f^{(\lambda)}$ ). Si  $F$  est, dans  $C \times \mathbf{R}$ , l'épigraphe (resp. épigraphe strict) de  $f$ , celui de  $f\lambda$  est l'ensemble  $\lambda F$ , « homothétique » de  $F$ .

La fonction  $f$  est positivement homogène (sous-entendu : de degré 1) si et seulement si, pour tout  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , on a  $f\lambda = f$ , ce qui revient à dire que son épigraphe (resp. épigraphe strict) est une partie *conique* de  $C \times \mathbf{R}$ .

Évidemment, si  $\mu$  est un autre réel dans  $]0, +\infty[$ ,

$$(9.3) \quad (f)(\lambda\mu) = (f\lambda)\mu.$$



En considérant comme loi de composition dans  $C$ , l'addition, on définit l'inf-convolution des fonctions numériques définies sur le cône convexe. On voit alors (par exemple en considérant les épigraphes stricts des fonctions en question) que, quelles que soient  $f$  et  $g$  dans  $\overline{\mathbf{R}}^c$ , on a

$$(9.4) \quad (f\lambda) \nabla (g\lambda) = (f \nabla g)\lambda.$$

Cela montre que l'ensemble des fonctions numériques positivement homogènes sur  $C$  est stable pour l'inf-convolution.

De plus, si  $\alpha$  et  $\beta$ , dans  $]0, 1[$ , sont deux constantes avec  $\alpha + \beta = 1$ , on écrit

$$((f\alpha) \nabla (g\beta))(x) = \inf_{u+v=x} \left[ \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}u\right) + \beta g\left(\frac{1}{\beta}v\right) \right].$$

Or, en faisant  $u = \alpha x$  et  $v = \beta x$ , on obtient justement  $u + v = x$ ; cela fournit l'inégalité

$$(9.5) \quad (f\alpha) \nabla (g\beta) \leq \alpha f + \beta g.$$

#### 9.d. INF-CONVOLUTION DE FONCTIONS CONVEXES.

PROPOSITION. —  $f \in \overline{\mathbf{R}}^c$  est convexe si et seulement si, quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  tels que  $\alpha + \beta = 1$ , on a l'inégalité

$$(9.6) \quad f \leq (f\alpha) \nabla (f\beta),$$

ce qui d'ailleurs implique l'égalité

$$(9.7) \quad f = (f\alpha) \nabla (f\beta).$$

En effet, si on note  $F$  l'épigraphe strict de  $f$ , vu la proposition 7.b, la condition (9.6) s'écrit

$$F \supset \alpha F + \beta F,$$

ce qui est la convexité de l'ensemble  $F$  dans  $C \times \mathbf{R}$ .

De plus, en faisant  $f = g$  dans (9.5), on obtient, pour toute  $f \in \overline{\mathbf{R}}^c$ ,

$$(f\alpha) \nabla (f\beta) \leq f,$$

d'où l'égalité (9.7).

On peut d'ailleurs prendre

$$\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \beta = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$



avec  $\lambda$  et  $\mu$  quelconques dans  $]0, +\infty[$ , ce qui donne à l'égalité (9.7) la forme

$$(9.8) \quad (f)(\lambda + \mu) = (f\lambda) \nabla (f\mu).$$

COROLLAIRE. — *L'ensemble des fonctions numériques convexes sur  $C$  est stable pour l'inf-convolution; par cette loi de composition interne et par la loi externe « multiplication à droite » :  $(\lambda, f) \rightarrow f\lambda$ , l'ensemble en question est muni d'une structure de cône convexe qu'on notera  $(\text{Conv } C, \nabla)$ .*

En effet, comme l'addition dans  $C$ , l'inf-convolution dans  $\overline{\mathbf{R}}^C$  est commutative et associative (cf. proposition 6.c). Un calcul immédiat montre alors que, si  $f$  et  $g$  vérifient la condition (9.6) [ou la condition (9.7)], il en est de même de  $f \nabla g$ .

Que  $\nabla$  satisfasse, avec la multiplication à droite, les axiomes des cônes convexes, a été constaté en (9.3), (9.4) et (9.8) (cette dernière égalité seulement supposant la convexité de  $f$ ).

On pouvait aussi voir qu'en associant à chaque fonction convexe  $f$  son épigraphe strict, lequel est une partie convexe de  $C \times \mathbf{R}$ , on définit un isomorphisme de l'ensemble  $\text{conv } C$ , muni des lois  $\nabla$  et « multiplication à droite » par  $\lambda > 0$ , dans l'ensemble des parties convexes du cône convexe  $C \times \mathbf{R}$ , muni des lois  $+$  et « homothétie » de rapport  $\lambda > 0$  : il est connu que ce dernier ensemble est un cône convexe.

Remarque. — On peut interpréter l'inégalité (9.5) en disant que l'application identique est une application convexe du cône convexe  $(\text{Conv } C, \nabla)$  dans le cône convexe ordonné  $(\overline{\mathbf{R}}^C, +)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

AGGERI (J. C.) et LESCARRET (C.) :

- [1] *Fonctions convexes duales associées à un couple d'ensembles mutuellement polaires* (C. R. Acad. Sc., t. 260, 1965, p. 6011-6014).

BECKENBACH (E. F.) et BELLMAN (R.) :

- [1] *Inequalities*, Springer, 1961.

BELLMAN (R.) et KARUSH (W.) :

- [1] *On a new functional transform in analysis : the maximum transform* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 67, 1961, p. 501-503).



- [2] *Mathematical programming and the maximum transform* (*J. Soc. Indust. Appl. Math.*, vol. 10, 1962, p. 550-567).
- [3] *On the maximum transform and semigroups of transformations* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, 1962, p. 516-518).
- [4] *On the maximum transform* (*J. Math. Anal. Appl.*, vol. 6, 1963, p. 67-74).

BROENDSTED (A.) :

- [1] *Conjugate convex functions in topological vector spaces* (*Mat.-fys. Medd. Dansk. Vid. Selsk.*, vol. 34, 1964, n° 2).

FENCHEL (W.) :

- [1] *Convex cones, sets and functions*, Lecture notes, Princeton University (1953).

IOFFE (A. D.) et TIKHOMIROV (V. M.) :

- [1] *Dualité des fonctions convexes et problèmes extrémaux* (en russe) (*Uspekhi Mat. Nauk*, t. 23, 1968, p. 50-116).

JANOS (L.) :

- [1] *Fonctions homogènes sur les cônes localement compacts* (en russe) (*Mat. Sbornik*, t. 53, 1961, p. 265-286).

MOREAU (J. J.) :

- [1] *Inf-convolution*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié 48 pages).
- [2] *Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 5047-5049).
- [3] *Fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ ; notions algébriques*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, 37 pages).
- [4] *Remarques sur les fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  définies sur un demi-groupe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 257, 1963, p. 3107-3109).
- [5] *Convexity and duality*, in CAIANIELLO (E. R.), editor, *Functional Analysis and Optimization*, New York, Academic Press, 1966, p. 145-169.
- [6] *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées partielles, Collège de France, Paris, 1966-1967, n° 2 (108 pages).

ROCKAFELLAR (O. T.) :

- [1] *Convex functions and dual extremum problems*, Doctoral dissertation, Harvard, 1963 (multilith., 166 pages).
- [2] *A monotone convex analog of linear algebra*, Proceedings of the Colloquium on convexity, Copenhagen, 1965, p. 261-276.
- [3] *Level sets and continuity of conjugate convex functions* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 123, 1966, p. 46-63).
- [4] *Convex analysis*, Princeton University Press.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1969.)