HAL open science

Projection stéréographique et moments

Charles-Michel Marle

▶ To cite this version:

Charles-Michel Marle. Projection stéréographique et moments. 2021. hal-02157930v3

HAL Id: hal-02157930
https://hal.science/hal-02157930v3

Preprint submitted on 6 Jul 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Projection stéréographique et moments
or, in English,
Stereographic projections and moment maps

Charles-Michel Marle
Université Pierre et Marie Curie (today Sorbonne Université)
Paris, France

28 avril 2020

Résumé

Ce texte est un document de travail dans lequel j'étudie les symétries de la sphère S^2, du disque de Poincaré et du demi-plan de Poincaré. Je montre que ces surfaces peuvent être considérées comme des orbites coadjointes des groupes $\mathrm{SO}(3)$ ou $\mathrm{SU}(2)$ pour la sphère S^2, des groupes $\mathrm{SO}(2,1)$, $\mathrm{SU}(1,1)$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ pour le disque et le demi-plan de Poincaré. J'indique l'expression de leurs métriques riémanniennes et de leurs formes symplectiques, ainsi que celles des applications moment des actions hamiltoniennes de leurs groupes de symétries.

Abstract

This paper is a working document in which the symmetries of the two-dimensional sphere, of the Poincaré disk and of the Poincaré half-plane are discussed. It is proven that these surfaces can be identified with coadjoint orbits of the Lie groups $\mathrm{SO}(3)$ or $\mathrm{SU}(2)$ for the sphere S^2, $\mathrm{SO}(2,1)$, $\mathrm{SU}(1,1)$ and $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ for the Poincaré disk and the Poincaré half-plane. The expressions of their Riemannian metrics and of their symplectic forms are given, together with those of moments maps for the Hamiltonian actions of their symmetry groups.

1 Introduction

Ce texte est un document de travail que j'ai rédigé pour moi-même, afin de bien comprendre les symétries de la sphère S^2, du disque de Poincaré et du demi-plan de Poincaré, de m'assurer que l'action de leurs groupes de symétrie est hamiltonienne et d'en déterminer les moments. C'est une question posée par Frédéric Barbaresco qui m'a incité à m'intéresser à ce sjet ; il souhaitait connaître l'expression d'un moment de l'action, sur le disque ou le demi-plan de Poincaré, de son groupe de symétries. Je n'ai pas immédiatement compris sa question car le caractère hamiltonien de cette action ne m'a pas tout de suite paru évident. J'ai pensé qu'il s'intéressait peut-être à un moment du prolongement canonique de cette action au fibré cotangent, qui est évidemment une action

hamiltonienne. Je savais que la sphère S^2 pouvait être considérée comme une orbite coadjointe du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$, car il existe un isomorphisme, bien connu des mécaniciens, de l'espace $\mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, sur le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, équivariant vis-à-vis de l'action naturelle de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$ et de son action coadjointe sur le dual de son algèbre de Lie. Je n'avais pas pris conscience du fait, pourtant assez évident, qu'un isomorphisme équivariant de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure lorentzienne à deux dimensions d'espace et une de temps, sur le dual de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz correspondant, existe aussi, donc que la pseudo-sphère, c'est-à-dire la nappe, supérieure ou inférieure, d'un hyperboloïde à deux nappes plongé dans l'espace de Lorentz, centré sur l'origine et de révolution autour de l'axe des temps, peut être identifiée à une orbite coadjointe de ce groupe de Lorentz.

La suite de ce document comporte trois parties. Dans le paragraphe 2, F est un espace vectoriel réel de dimension $n+1$, identifié à $\mathbb{R}^{n+1}$ grâce au choix d'une base $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{n+1}})$, muni d'une métrique pseudo-euclidienne pour laquelle cette base est pseudo-orthonormée, et plus précisément vérifie

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \neq j \leq n+1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq n, \\ \zeta & \text{si } i = j = n+1, \end{cases}$$

où ζ est une constante pouvant avoir la valeur 1 ou la valeur -1. L'espace vectoriel F est donc proprement euclidien lorsque $\zeta = 1$ et lorentzien, comportant n directions de genre espace et 1 direction de genre temps lorsque $\zeta = -1$. Je note E le sous-espace vectoriel de dimension n de F formé par les combinaisons linéaires des n premiers éléments $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ de la base considérée de F. Je note Q la quadrique d'équation $\zeta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2 = R^2$ (R étant une constante strictement positive), N et S les points de cette quadrique de coordonnées $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_{n+1} = R$ pour le point N, $-R$ pour le point S. J'étudie les projections stéréographiques de pôle N ou S de la quadrique Q (privée d'un point, le pôle de la projection) sur le sous-espace E.

Dans les paragraphes 3 et 4, je fais $n = 2$. La dimension de F est alors égale à 3, tout comme la dimension des algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{so}(2,1)$. Je note G le groupe de Lie connexe des symétries de l'espace vectoriel F muni de sa structure euclidienne ou pseudo-euclidienne, selon que l'on ait $\zeta = 1$ ou $\zeta = -1$, et je note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Donc $G = \mathrm{SO}(3)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ lorsque $\zeta = 1$, et $G = \mathrm{SO}(2,1)$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2,1)$ lorsque $\zeta = -1$. Je montre qu'il existe un isomorphisme de F sur $\mathfrak{g}$ équivariant vis-à-vis de l'action naturelle de G sur F et de son action adjointe sur $\mathfrak{g}$. Cet isomorphisme est bien connu et largement utilisé par les mécaniciens dans le cas où $\zeta = 1$, peut-être un peu moins connu dans le cas où $\zeta = -1$. Comme il existe de plus sur F une forme quadratique non dégénérée invariante par l'action du groupe G, les espaces vectoriels F, F^*, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ sont tous deux à deux isomorphes, par des isomorphismes équivariants vis-à-vis des actions de G (naturelle sur F, contragrédiente de l'action naturelle sur le dual F^* de F, adjointe sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et coadjointe sur son dual $\mathfrak{g}^*$). Il existe donc sur F à la fois une structure d'algèbre de Lie, image de la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et une structure de Lie-Poisson, image de la structure de Lie-Poisson du dual $\mathfrak{g}^*$ de cette algèbre de Lie. Lorsque $\zeta = 1$, la quadrique Q est une sphère de dimension 2 que l'isomorphisme de F sur $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}(3)^*$ applique sur une orbite coadjointe de $G = \mathrm{SO}(3)$. Lorsque $\zeta = -1$, la quadrique Q est un hyperboloïde de révolution à deux nappes, et l'isomorphisme de F sur $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{so}(2,1)^*$ applique chacune de ces nappes sur une orbite coadjointe de $G =$

$\mathrm{SO}(2,1)$. Chaque composante connexe de Q est donc munie d'une forme symplectique pour laquelle l'action de G sur cette composante connexe est hamiltonienne et admet pour moment son injection canonique dans F, identifié à $\mathfrak{g}^*$. En transportant l'action de G sur Q au moyen des projections stéréographiques de pôle N ou de pôle S sur le plan E on obtient, dans le cas où $\zeta = 1$, une action hamiltonienne de $\mathrm{SO}(3)$ sur le plan E entier muni d'une métrique riemannienne à courbure constante positive, et dans le cas où $\zeta = -1$, une action hamiltonienne de $\mathrm{SO}(2,1)$ sur le disque ouvert de E de centre l'origine et de rayon 1, muni de la métrique riemannienne bien connue qui en fait un modèle de géométrie non euclidienne appelé *disque de Poincaré* et d'une forme symplectique qui n'est autre que la forme élément d'aire associée à cette métrique riemannienne. Toujours dans le cas où $\zeta = -1$, on obtient aussi une action hamiltonienne de $\mathrm{SO}(2,1)$ sur l'extérieur du disque de Poincaré complété par un "point à l'infini", image de l'action hamiltonienne sur le disque de Poincaré par l'inversion de pôle l'origine laissant invariant chaque point du bord du disque de Poincaré. Les moments de ces actions hamiltoniennes sont les inverses des projections stéréographique restreintes à des ouverts convenablement choisis de Q.

Enfin dans le paragraphe 4, je montrer que l'action du groupe de symétries G sur les projections stéréographiques d'ouverts de Q convenablement choisis s'identifie à l'action, sur des ouverts de $\mathbb{C}$, du groupe des transformations de Möbius construites avec des matrices éléments de $\mathrm{SU}(2)$ lorsque $\zeta = 1$, ou éléments de $\mathrm{SU}(1,1)$ lorsque $\zeta = -1$. Je montre aussi que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ et apparaît comme le groupe de symétries naturelles du demi-plan de Poincaré.

Tous ces résultats sont déjà bien connus des spécialistes. Je n'ai fait que les rassembler, en mettant l'accent sur les aspects se rattachant à la géométrie symplectique ou la géométrie de Poisson. Je me suis inspiré de l'excellent livre [1] de S. P. Novikov et I. A. Taimanov et de l'article [2] de Wikipedia, dans lesquels les aspects riemanniens des questions traitées ici sont étudiés de manière très approfondie. J'espère que mon travail rendra service à d'autres que moi-même. Les lecteurs souhaitant approfondir les questions se rattachant à la géométrie symplectique, à la géométrie de Poisson et aux actions hamiltoniennes de groupes, pourront consulter le très riche livre [3] de C. Laurent-Gengoux, A. Pichereau et P. Vanhaecke, le très remarquable livre [4] de J.-M. Souriau ou mon livre récent en français [5].

2 La projection stéréographique

2.1 L'espace de travail et son groupe de symétries

Soit F un espace vectoriel réel de dimension $n+1$, muni d'un produit scalaire pseudo-euclidien dont une base pseudo-orthonormée, notée $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_{n+1}})$, est telle que

$$\overrightarrow{e_i}\cdot\overrightarrow{e_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \neq j \leq n+1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq i = j \leq n, \\ \zeta & \text{si } i = j = n+1, \end{cases}$$

où ζ est une constante pouvant avoir la valeur 1 ou la valeur -1.

Dans la suite, $(\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_{n+1}})$ est une base pseudo-orthonormée fixée de F et E est le sous-espace vectoriel de dimension n de F formé par les combinaisons linéaires des n premiers éléments $\overrightarrow{e_1},\ldots,\overrightarrow{e_n}$ de cette base. On remarquera que la restriction à $E\times E$ du

produit scalaire est toujours un produit scalaire euclidien usuel, aussi bien lorsque $\zeta = 1$ que lorsque $\zeta = -1$.

Lorsque $\zeta = -1$, on exprime cette propriété en disant que E est un sous-espace vectoriel *de genre espace* de F. Pour le produit scalaire dont F est muni, l'orthogonal de E, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de F formé par les vecteurs orthogonaux à tous les éléments de E, est le sous-espace vectoriel de F, de dimension 1, engendré par $\overrightarrow{e_{n+1}}$. On dit que ce sous-espace vectoriel est *de genre temps* pour exprimer le fait que le produit scalaire d'un élément non nul de ce sous-espace avec lui-même est un nombre strictement négatif. Il est facile de montrer que la dimension des sous-espaces vectoriels de genre espace de F est toujours inférieure ou égale à n, tandis que celle des sous-espaces vectoriels de genre temps non réduits à $\{0\}$ est toujours 1.

Je vais m'intéresser au groupe des automorphismes linéaires de F qui conservent le produit scalaire ainsi que, dans le cas où $\zeta = 1$, l'orientation de F, et dans le cas où $\zeta = -1$, l'orientation totale de F et son orientation temporelle. Le choix d'une base pseudo-orthonormée de F permet d'identifier ce groupe à un groupe de matrices carrées $(n+1) \times (n+1)$, le groupe $\mathrm{SO}(n+1)$ si $\zeta = 1$ et le groupe $\mathrm{SO}(n,1)$ si $\zeta = -1$.

2.2 La quadrique Q et ses projections stéréographiques

Soit Q la quadrique formée par les éléments de F dont les coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ vérifient

$$\zeta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + x_{n+1}^2 = R^2 \,,$$

où R est une constante strictement positive.

Lorsque $\zeta = 1$, Q est la sphère de dimension n et de rayon R centrée sur l'origine.

Lorsque $\zeta = -1$, Q est un hyperboloïde de révolution autour de l'axe des x_{n+1}, à deux nappes, l'une contenue dans la partie de F où $x_{n+1} \geq R$ et l'autre dans la partie de F où $x_{n+1} \leq -R$. On remarquera que les vecteurs éléments de Q sont tous de genre temps et que l'espace vectoriel tangent à Q en un quelconque de ses éléments est un sous-espace affine de genre espace, de dimension n de F, dont l'espace vectoriel associé est l'orthogonal, pour le produit scalaire, de l'élément de Q considéré.

Aussi bien lorsque $\zeta = 1$ que lorsque $\zeta = -1$, les points de Q, notés respectivement N et S, dont les coordonnées sont $x_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et $x_{n+1} = R$ pour le point N et $x_{n+1} = -R$ pour le point S, seront appelés les pôles Nord et Sud de la quadrique Q.

La *projection stéréographique de pôle* N de $Q \backslash \{N\}$ sur le sous-espace vectoriel E est l'application qui, à chaque point m de Q distinct de N, fait correspondre le point, noté M, où la droite qui joint les points N et m traverse le sous-espace vectoriel E. De même, la *projection stéréographique de pôle* S de $Q \backslash \{S\}$ sur le sous-espace vectoriel E est l'application qui, à chaque point m de Q distinct de S, fait correspondre le point, noté M', où la droite qui joint les points S et m traverse le sous-espace vectoriel E. Notons $x_1, \ldots, x_{n+1}$ les coordonnées de m et μ la projection orthogonale de m sur E, c'est-à-dire le point de coordonnées $x_1, \ldots, x_n, 0$.

La figure ci-dessus, qui représente la section de F par le plan contenant l'axe des x_{n+1} et passant par le point m que l'on projette, illustre la projection stéréographique dans les cas $\zeta = 1$ et $\zeta = -1$.

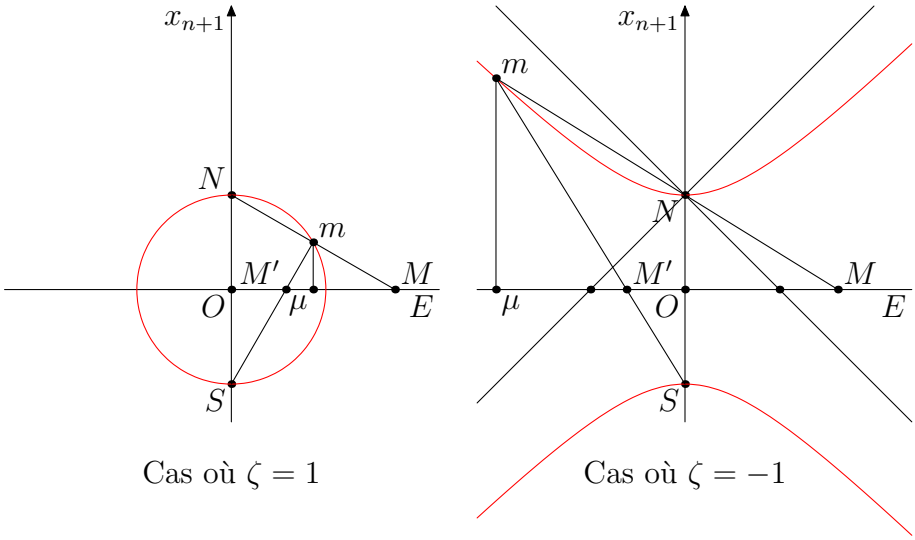

FIGURE 1 : La projection stéréographique

Un calcul facile permet d'établir les formules

$$\overrightarrow{OM} = \frac{R}{R - x_{n+1}} \overrightarrow{O\mu}\,, \quad \overrightarrow{OM'} = \frac{R}{R + x_{n+1}} \overrightarrow{O\mu}\,.$$

Les expression des n premières coordonnées notées, respectivement, $u_1, \ldots, u_n$ et $u'_1, \ldots, u'_n$, des deux projections stéréographiques de m, la projection M de pôle N et la projection M' de pôle S, en fonction des coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ du point m (la $n+1$-ième coordonnée de M et de M' étant bien sûr 0), s'en déduisent :

$$u_i = \frac{R}{R - x_{n+1}} x_i\,, \quad u'_i = \frac{R}{R + x_{n+1}} x_i\,, \quad 1 \leq i \leq n\,.$$

Inversement, en utilisant l'équation de Q, qui impose aux coordonnées de m de vérifier

$$\zeta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2 - x_{n+1}^2\,,$$

il est assez facile d'établir les formules déterminant m en fonction de sa projection stéréographique M de pôle N,

$$\overrightarrow{O\mu} = \frac{2R^2}{\zeta |OM|^2 + R^2} \overrightarrow{OM}\,, \quad x_{n+1} = R \frac{|OM|^2 - \zeta R^2}{|OM|^2 + \zeta R^2}\,,$$

ainsi que les formules déterminant m en fonction de sa projection stéréographique M' de pôle S,

$$\overrightarrow{O\mu} = \frac{2R^2}{\zeta |OM'|^2 + R^2} \overrightarrow{OM'}\,, \quad x_{n+1} = R \frac{\zeta R^2 - |OM'|^2}{\zeta R^2 + |OM'|^2}\,.$$

Les expressions des coordonnées $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de m en fonction des coordonnées $u_1, \ldots, u_n$ de sa projection stéréographique M de pôle N, s'en déduisent,

$$x_i = \frac{2R^2}{R^2 + \zeta \sum_{j=1}^{n} u_j^2} u_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n\,, \quad x_{n+1} = R \frac{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 - \zeta R^2}{\sum_{j=1}^{n} u_j^2 + \zeta R^2}\,,$$

ainsi que les expressions de ces coordonnées en fonction des coordonnées $u'_1, \dots, u'_n$ de la projection stéréographique M' de pôle S de m,

$$x_i = \frac{2R^2}{R^2 + \zeta \sum_{j=1}^n (u'_j)^2} u'_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n\,, \quad x_{n+1} = R\,\frac{\zeta R^2 - \sum_{j=1}^n (u'_j)^2}{\zeta R^2 + \sum_{j=1}^n (u'_j)^2}\,.$$

Parmi les nombreuses propriétés intéressantes de la projection stéréographique, en voici deux qu'il est facile de vérifier en utilisant les formules ci-dessus.

- Pour tout point m de Q distinct de N, dont la projection stéréographique de pôle N est M, le produit scalaire (euclidien si $\zeta = 1$, lorentzien si $\zeta = -1$) des vecteurs colinéaires à $n+1$ dimensions $\overrightarrow{Nm}$ et $\overrightarrow{NM}$ est constant, égal à $2\zeta R^2$:

  $$\overrightarrow{Nm} \cdot \overrightarrow{NM} = 2\zeta R^2\,.$$

  La projection stéréographique de pôle S a la même propriété.

- La projection stéréographique d'une géodésique de Q, c'est-à-dire d'un grand cercle de la sphère (intersection de la sphère avec un plan passant par son centre) si $\zeta = 1$, d'une grande hyperbole (intersection de l'hyperboloïde de révolution Q avec un plan passant par son centre de symétrie, l'origine O de F) si $\zeta = -1$, est toujours un cercle. Plus exactement, dans le cas où $\zeta = -1$, il faut ôter à ce cercle les deux points où il traverse la sphère de dimension n et de rayon R du sous-espace vectoriel E sur lequel on projette, car ces points correspondent aux points à l'infini de la grande hyperbole. De plus ce cercle est orthogonal à la sphère en ces points.

2.3 La métrique riemannienne de Q

Le produit scalaire dont F est muni détermine, sur cet espace considéré comme une variété différentiable de dimension $n+1$, une métrique (riemannienne si $\zeta = 1$, pseudo-riemannienne, plus précisément lorentzienne si $\zeta = -1$) dont l'expression, avec les coordonnées $x_1, \dots, x_{n+1}$, est

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2 + \zeta\,\mathrm{d}x_{n+1}^2\,. \qquad (*)$$

Cette métrique induit sur la quadrique Q, considérée comme une sous-variété de dimension n de F, une métrique toujours riemannienne, aussi bien lorsque $\zeta = 1$ que lorsque $\zeta = -1$, car dans ce cas Q est une sous-variété de genre espace de F. L'expression de cette métrique s'obtient, dans le domaine d'une carte de Q dans laquelle les points de cette sous-variété sont repérés par n coordonnées indépendantes, en portant dans le membre de droite de l'égalité $(*)$ ci-dessus, les expressions des différentielles $\mathrm{d}x_i$ en fonction des différentielles des coordonnées choisies sur Q, compte tenu de l'équation de cette sous-variété.

Choisissons par exemple les x_i, avec $1 \leq i \leq n$, comme coordonnées sur Q. Ce sont des coordonnées admissibles sur chaque composante connexe de l'ouvert de Q sur lequel $x_{n+1} \neq 0$. On obtient aisément l'expression peu sympathique

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(R^2 - \zeta \sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2) + \zeta\,(\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{d}x_i)^2}{R^2 - \zeta \sum_{i=1}^n x_i^2}\,.$$

On peut bien sûr utiliser, pour exprimer la métrique de Q, d'autres coordonnées sur des ouverts convenablement choisis de cette variété. Par exemple, les coordonnées de la projection stéréographique de pôle N sont des coordonnées locales admissibles sur chaque composante connexe de $Q\backslash\{N\}$. L'expression de la métrique de Q au moyen de ces coordonnées s'obtient en tirant des formules, dans lesquelles j'ai posé $\rho^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$, avec $\rho \geq 0$,

$$x_i = \frac{2R^2 u_i}{R^2 + \zeta\rho^2}\,,\ 1 \leq i \leq n\,, \quad x_{n+1} = \frac{R(\rho^2 - \zeta R^2)}{\rho^2 + \zeta R^2}\,,$$

l'expression des différentielles $\mathrm{d}x_i$, $1 \leq i \leq n+1$, au moyen des différentielles $\mathrm{d}u_i$, $1 \leq i \leq n$. L'expression de la métrique de Q avec les coordonnées locales u_i, $1 \leq i \leq n$, bien plus sympathique que son expression au moyen des coordonnées x_i, $1 \leq i \leq n$, est

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + \zeta\rho^2)^2} \sum_{i=1}^n \mathrm{d}u_i^2\,.$$

Cette expression cesse d'avoir un sens lorsque $R^2 + \zeta\rho^2$=0, ce qui n'a lieu que lorsque $\zeta = -1$. Cela n'a rien de surprenant car dans ce cas, la projection stéréographique de pôle N de la nappe supérieure de l'hyperboloïde Q, privée du point N, est le complémentaire dans E de la boule fermée de E de centre O et de rayon R, tandis que la projection stéréographique de même pôle de la nappe inférieure de Q est la boule ouverte de E de centre O et de rayon R.

De même, les coordonnées u'_i, $1 \leq i \leq n$, de la projection stéréographique de pôle S sont des coordonnées admissibles sur chaque composante connexe de $Q\backslash\{S\}$. L'expression de la métrique de Q au moyen de ces coordonnées se déduit de celle donnée ci-dessus au moyen des coordonnées u_i, $1 \leq i \leq n$, en remplaçant partout u_i par u'_i et ρ par ρ', avec $(\rho')^2 = \sum_{i=1}^n (u'_i)^2$, $\rho' \geq 0$.

3 Le cas où $n = 2$

La dimension du groupe de symétries de F (c'est-à-dire la dimension de $\mathrm{SO}(n+1)$ si $\zeta = 1$, ou la dimension de $\mathrm{SO}(n,1)$ si $\zeta = -1$) est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Lorsque $n > 2$, elle est donc strictement supérieure à la dimension de F, qui est $n+1$. Mais dans le cas où $n = 2$, la dimension du groupe de symétries de F est 3, égale à la dimension de F. Je supposerai dans la suite que $n = 2$ et j'écrirai x, y et z au lieu de x_1, x_2 et x_3, u et v au lieu de u_1 et u_2, u' et v' au lieu de u'_1 et u'_2. Je note G le groupe de symétries de F et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. En d'autres termes, la lettre G désigne le groupe $\mathrm{SO}(3)$ lorsque $\zeta = 1$ et le groupe $\mathrm{SO}(2,1)$ lorsque $\zeta = -1$, et la lettre $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie $\mathrm{SO}(3)$ lorsque $\zeta = 1$ et l'algèbre de Lie $\mathrm{SO}(2,1)$ lorsque $\zeta = -1$.

3.1 Un isomorphisme équivariant de l'espace F sur l'algèbre de Lie de son groupe de symétries

Dans le cas où $\zeta = 1$, l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(3)$ est l'ensemble des matrices 3×3 antisymétriques. Il existe un isomorphisme bien connu de cette algèbre de Lie sur l'espace vectoriel euclidien F de dimension 3, qui est équivariant vis-à-vis de l'action naturelle de $\mathrm{SO}(3)$ sur F (identifié à $\mathbb{R}^3$ grâce au choix d'une base orthonomée) et de son action

adjointe sur son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$. Cet isomorphisme, noté j, associe à chaque vecteur $a\overrightarrow{e_x}+b\overrightarrow{e_y}+c\overrightarrow{e_z}$ l'endomorphisme de F de matrice

$$j(a\overrightarrow{e_x}+b\overrightarrow{e_y}+c\overrightarrow{e_z})=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}.$$

Dans le cas où $\zeta=-1$, cet isomorphisme existe encore. Je n'ai pas trouvé ce résultat dans les livres de ma bibliothèque, je ne sais pas s'il est déjà bien connu, mais je l'ai vérifié très soigneusement. L'espace vectoriel F est alors muni du produit scalaire lorentzien

$$(a_1\overrightarrow{e_x}+b_1\overrightarrow{e_y}+c_1\overrightarrow{e_z})\cdot(a_2\overrightarrow{e_x}+b_2\overrightarrow{e_y}+c_2\overrightarrow{e_z})=a_1a_2+b_1b_2-c_1c_2\,,$$

et l'isomorphisme j a pour expression

$$j(a\overrightarrow{e_x}+b\overrightarrow{e_y}+c\overrightarrow{e_z})=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ b & -a & 0\end{pmatrix}.$$

J'ai vérifié que pour tout élément g du groupe $\mathrm{SO}(2,1)$ et tout $\overrightarrow{W}\in F$, cet isomorphisme satisfait l'égalité, exprimant son équivariance,

$$\mathrm{Ad}_g\big(j(\overrightarrow{W})\big)=j(g\cdot\overrightarrow{W})\,.$$

Dans le cas où F est un espace vectoriel euclidien de dimension 3, on sait qu'en transportant sur F, grâce à l'isomorphisme j, le crochet de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$, on définit sur F une structure d'algèbre de Lie dont le crochet est le produit vectoriel (appelé en anglais, je crois, "cross product"). Combiné avec le produit scalaire, ce produit vectoriel donne le "produit mixte", une forme trilinéaire sur F aux remarquables propriétés que de mon temps on apprenait au lycée en seconde ou en première (ou peut-être en math élem, je ne me souviens plus exactement).

Dans le cas où F est un espace vectoriel lorentzien de dimension 3, je pense qu'on doit pouvoir de même, en transportant sur F, au moyen de l'isomorphisme j, la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(2,1)$, définir sur F un "produit vectoriel lorentzien". En combinant ce produit vectoriel lorentzien avec le produit scalaire lorentzien, on devrait obtenir sur F un "produit mixte lorentzien", dont il pourrait être intéressant d'étudier les propriétés.

L'expression de j, valable aussi bien lorsque $\zeta=1$ que lorsque $\zeta=-1$,

$$j(a\overrightarrow{e_x}+b\overrightarrow{e_y}+c\overrightarrow{e_z})=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -\zeta b & \zeta a & 0\end{pmatrix}=aX+bY+cZ\,,$$

avec

$$X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & \zeta & 0\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -\zeta & 0 & 0\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

sera utilisée dans tout ce qui suit.

3.2 La structure d'algèbre de Lie de F

Les trois matrices X, Y et Z définies ci-dessus sont les matrices de trois endomorphismes de F qui sont les générateurs infinitésimaux des trois sous-groupes à un paramètre du groupe G

$$\exp(tX) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & -\sinh t \\ 0 & -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$\exp(tY) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$\exp(tZ) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{aussi bien lorsque } \zeta = 1 \text{ que lorsque } \zeta = -1\,.$$

Il est facile de calculer les commutateurs des matrices X, Y et Z prises deux à deux. Comme les endomorphismes de F dont ce sont les matrices forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ces commutateurs déterminent la structure de cette algèbre de Lie. Les commutateurs non nuls sont

$$[X,Y] = -[Y,X] = \zeta Z\,, \quad [Y,Z] = -[Z,Y] = X\,, \quad [Z,X] = -[X,Z] = Y\,.$$

Puisque l'image par l'isomorphisme j de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F est la base (X,Y,Z) de $\mathfrak{g}$, les expressions des crochets non nuls de $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$, pris deux à deux, s'obtiennent en remplaçant, dans les égalités ci-dessus, X par $\overrightarrow{e_x}$, Y par $\overrightarrow{e_y}$ et Z par $\overrightarrow{e_z}$. Ces crochets seront notés au moyen du symbole $\times$, car lorsque $\zeta = 1$, ce sont bien, en effet, les produits vectoriels des éléments de la base de l'espace vectoriel euclidien orienté F, pris deux à deux. On peut donc écrire

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \zeta \vec{e}_z\,, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x\,, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y\,.$$

3.3 Transport sur F de la structure de Poisson de son dual

L'isomorphisme équivariant $j : F \to \mathfrak{g}$ a permis de transporter sur F la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, de manière telle que l'action naturelle de G sur F soit mise en correspondance avec l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. Puisque F se trouve ainsi muni d'une structure d'algèbre de Lie, son dual F^* se trouve naturellement muni d'une structure de Poisson, souvent appelée structure de Lie-Poisson, ou structure de Kirillov-Kostant-Souriau associée à la structure d'algèbre de Lie de F. Rappelons que chaque élément de F peut

être considéré comme une forme linéaire sur F^*, donc comme une fonction différentiable définie sur cet espace, puisque le dual de F^* s'identifie naturellement à F. Ainsi, par exemple, les éléments $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ de la base de F, lorsqu'ils sont considérés comme des formes linéaires sur F^*, sont les fonctions linéaires qui, à chaque élément de F^*, font correspondre, respectivement, sa première, sa seconde et sa troisième coordonnée dans la base de F^* duale de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F. Pour la structure de Lie-Poisson de F^*, les crochets de Poisson de ces trois fonctions linéaires, prises deux à deux, coïncident avec leurs crochets pour la structure d'algèbre de Lie de F. On peut donc écrire

$$\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}\} = \zeta \vec{e}_z\,, \quad \{\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\} = \vec{e}_x\,, \quad \{\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_x}\} = \vec{e}_y\,.$$

Soient maintenant h et k deux fonctions différentiables sur F^*. Leur crochet de Poisson, pour la structure de Lie-Poisson de F, a pour expression

$$\{h,k\}(\xi) = \Big\langle \xi, \big[\mathrm{d}h(\xi), \mathrm{d}k(\xi)\big] \Big\rangle\,, \quad \text{avec } \xi \in F^*\,,$$

où les formes linéaires $\mathrm{d}h(\xi)$ et $\mathrm{d}k(\xi)$ sur F^* sont considérées comme des éléments de F, et où $\big[\mathrm{d}h(\xi), \mathrm{d}k(\xi)\big]$ est leur crochet, pour la structure d'algèbre de Lie dont l'espace vectoriel F est muni. En notant x^*, y^* et z^* les coordonnées d'un élément quelconque de F^* dans la base de cet espace vectoriel duale de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F, on peut écrire

$$\begin{aligned}\{h,k\}(x^*,y^*,z^*) &= \zeta z^* \left(\frac{\partial h}{\partial x^*}\frac{\partial k}{\partial y^*} - \frac{\partial h}{\partial y^*}\frac{\partial k}{\partial x^*}\right)(x^*,y^*,z^*) \\ &\quad + x^* \left(\frac{\partial h}{\partial y^*}\frac{\partial k}{\partial z^*} - \frac{\partial h}{\partial z^*}\frac{\partial k}{\partial y^*}\right)(x^*,y^*,z^*) + y^* \left(\frac{\partial h}{\partial z^*}\frac{\partial k}{\partial x^*} - \frac{\partial h}{\partial x^*}\frac{\partial k}{\partial z^*}\right)(x^*,y^*,z^*)\,.\end{aligned}$$

Le produit scalaire dont F est muni permet de définir un isomorphisme, noté scal, de cet espace vectoriel sur son dual F^*, ayant pour expression

$$\big\langle \mathrm{scal}(\overrightarrow{v}), \overrightarrow{w} \big\rangle = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}\,, \quad \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{w} \in F\,.$$

Le produit scalaire dont F est muni étant invariant par l'action de G, l'isomorphisme $\mathrm{scal} : F \to F^*$ est équivariant vis-à-vis de l'action naturelle de G sur F et son action contragrédiente sur F^*. Cet isomorphisme permet de transposer sur F la structure de Lie-Poisson de son dual F^*. Il suffit pour cela de poser, pour tout couple (h,k) de fonctions différentiables définies sur F,

$$\{h,k\} = \{h \circ \mathrm{scal}^{-1}, k \circ \mathrm{scal}^{-1}\} \circ \mathrm{scal}\,.$$

Il est facile de déterminer au moyen de cette formule les crochets non nuls des fonctions coordonnées x, y et z dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F. Ils ont pour expressions

$$\{x,y\} = -\{y,x\} = z\,, \quad \{y,z\} = -\{z,y\} = \zeta x\,, \quad \{z,x\} = -\{x,z\} = \zeta y\,.$$

Le champ de bivecteurs Λ_F qui détermine la structure de Poisson de F, identifié à $\mathfrak{g}^*$, a donc pour expression

$$\Lambda_F(x,y,z) = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + \zeta x \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + \zeta y \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x}\,.$$

Il convient d'attirer l'attention du lecteur sur un abus de notation que je fais ici pour me conformer à une pratique très répandue, quoique regrettable. Dans les formules ci-dessus les fonctions coordonnées notées x, y et z sont les applications de F dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque élément $(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z})$ de F font correspondre, respectivement, les scalaires x, y et z. Ces notations sont trompeuses parce que chacune des lettres x, y et z désigne à la fois deux choses différentes : une des coordonnées d'un point courant de F dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, et la projection de F sur $\mathbb{R}$ qui à chaque élément de F fait correspondre l'une de ses coordonnées, bien spécifiée. Les fonctions coordonnées x, y et z pourraient d'ailleurs aussi, plus logiquement, être notées, respectivement $\overrightarrow{\varepsilon_x}$, $\overrightarrow{\varepsilon_y}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_z}$, où $(\overrightarrow{\varepsilon_x}, \overrightarrow{\varepsilon_y}, \overrightarrow{\varepsilon_z})$ est la base de F^* duale de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F. C'est d'ailleurs ce que j'ai fait ci-dessus non pas pour F, mais pour son dual F^*, lorsque j'ai noté $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$ les fonctions première, seconde et troisième coordonnée des éléments de F^*, dans la base de cet espace duale de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de F.

3.4 La structure symplectique de Q

Les isomorphismes $j : F \to \mathfrak{g}$ et scal : $F \to F^*$ définis ci-dessus, ainsi que leurs inverses, permettent à volonté d'identifier F à son dual F^*, à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, donc aussi au dual $\mathfrak{g}^*$ de cette algèbre de Lie. Il y a donc sur F à la fois une structure d'algèbre de Lie et la structure de Lie-Poisson du dual de cette algèbre de Lie. L'action naturelle du groupe G sur F devient l'action adjointe de G sur son algèbre de Lie lorsque F est identifié à $\mathfrak{g}$, et l'action coadjointe de G lorsque F est identifié à $\mathfrak{g}^*$. De plus, Q est invariante par l'action de G, et cette action est transitive sur chacune de ses composantes connexes. Cette quadrique est connexe lorsque $\zeta = 1$, puisque c'est une sphère de dimension 2. Elle possède deux composantes connexes lorsque $\zeta = -1$, qui sont ses deux nappes, puisque dans ce cas c'est un hyperboloïde de révolution à deux nappes. Dans tous les cas, il est permis de dire que chaque composante connexe de Q est une orbite coadjointe du groupe G, donc possède une structure symplectique naturelle, puisque c'est une feuille symplectique de la variété de Poisson $\mathfrak{g}^*$. La quadrique Q elle-même possède bien sûr elle aussi une forme symplectique naturelle, dont l'expression, donnée ci-dessous, se déduit facilement de celle de la structure de Poisson de F déterminée au paragraphe précédent. Un théorème bien connu montre que l'action de G sur Q est hamiltonienne (donc conserve la forme symplectique de cette variété) et admet pour moment l'injection canonique de Q dans F (identifié à $\mathfrak{g}^*$).

Ces résultats sont bien connus lorsque $\zeta = 1$. Ils sont bien sûr vrais aussi lorsque $\zeta = -1$, et je ne sais pas dans quelle mesure ils sont déjà plus ou moins bien connus. Ils seront utilisés au paragraphe 4 pour montrer que le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré peuvent être identifiés à une orbite coadjointe de $\mathrm{SO}(2,1)$, donc possèdent une structure symplectique, que les action de $\mathrm{SO}(2,1)$ sur le disque de Poincaré et le demi-plan de Poincaré, munis de ces structures symplectiques, sont hamiltoniennes, et pour donner une expression explicite des moments de ces actions.

Les variables x et y peuvent être utilisées comme coordonnées locales sur Q, en dehors de la partie de Q sur laquelle $z = 0$, c'est-à-dire en dehors de l'équateur de la sphère Q lorsque $\zeta = 1$, et séparément sur chacune des nappes de l'hyperboloïde Q lorsque $\zeta = -1$. L'expression du crochet de Poisson $\{x, y\}$ sur chaque hémisphère de Q s'obtient tout simplement en remplaçant, dans l'expression du crochet de Poisson $\{x, y\}$ des deux premières fonctions coordonnées sur F, la troisième coordonnée z par son expression en

fonction de x et de y, compte tenu de l'équation de Q :

$$\{x,y\} = \begin{cases} \sqrt{R^2 - \zeta(x^2+y^2)} & \text{sur l'hémisphère de } Q \text{ où } z > 0\,, \\ -\sqrt{R^2 - \zeta(x^2+y^2)} & \text{sur l'hémisphère de } Q \text{ où } z < 0\,. \end{cases}$$

L'expression de la forme symplectique de Q, notée ω_Q, au moyen des coordonnées locales x et y s'en déduit immédiatement :

$$\omega_Q(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{R^2 - \zeta(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y & \text{sur l'hémisphère de } Q \text{ où } z > 0\,, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{R^2 - \zeta(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y & \text{sur l'hémisphère de } Q \text{ où } z < 0\,. \end{cases}$$

Il est bien sûr possible d'utiliser, sur des ouverts de Q convenablement choisis, d'autres coordonnées locales. Par exemple, les coordonnées (u,v) de la projection stéréographique de pôle N sont des coordonnées locales admissibles sur chaque composante connexe de l'ouvert $Q\backslash\{N\}$. Les formules établies dans le paragraphe 2.2 permettent d'écrire

$$u = \frac{R}{R-z}\,x\,, \quad v = \frac{R}{R-z}\,y\,.$$

Par suite

$$\mathrm{d}u = \frac{R}{R-z}\,\mathrm{d}x + \frac{Rx}{(R-z)^2}\,\mathrm{d}z\,, \quad \mathrm{d}v = \frac{R}{R-z}\,\mathrm{d}y + \frac{Ry}{(R-z)^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Le crochet de Poisson $\{u,v\}$ a donc pour expression

$$\begin{aligned} \{u,v\} &= \frac{R^2}{(R-z)^2}\,\{x,y\} + \frac{R^2 y}{(R-z)^3}\,\{x,z\} + \frac{R^2 x}{(R-z)^3}\,\{z,y\} \\ &= \frac{R^2}{(R-z)^2}\,z + \frac{R^2 y}{(R-z)^3}\,(-\zeta y) + \frac{R^2 x}{(R-z)^3}\,(-\zeta x) \\ &= \frac{R^2 z}{(R-z)^2} - \frac{\zeta R^2 (x^2+y^2)}{(R-z)^3}\,. \end{aligned}$$

Sur la quadrique Q, $\zeta(x^2+y^2) = R^2 - z^2$, donc

$$\{u,v\} = -\frac{R^3}{(R-z)^2}\,.$$

En utilisant les formules du paragraphe 2.2 pour remplacer z par son expression en fonction de u et de v, on obtient

$$\{u,v\} = -\frac{(u^2+v^2+\zeta R^2)^2}{4R^3}\,.$$

Sur chaque composante connexe de $Q\backslash\{N\}$, la forme symplectique ω_Q, exprimée au moyen des coordonnées locales u et v, a donc pour expression

$$\omega_Q(u,v) = -\frac{4R^3}{(u^2+v^2+\zeta R^2)^2}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\,.$$

Si, au lieu de u et v, on utilise sur $Q\backslash S$ les coordonnées locales u' et v' de la projection stéréographique de pôle S, on obtient, en procédant comme ci-dessus,

$$\{u',v'\} = \frac{\left((u')^2+(v')^2+\zeta R^2\right)^2}{4R^3}\,,$$

$$\omega_Q(u',v') = \frac{4R^3}{\left((u')^2+(v')^2+\zeta R^2\right)^2}\,\mathrm{d}u' \wedge \mathrm{d}v'\,.$$

3.5 Transport de l'action de G par projection stéréographique

Le groupe G agit sur la quadrique Q par une action hamiltonienne dont le moment est l'injection canonique de Q dans F, identifié au dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Chacune des deux projections stéréographiques, l'une de pôle N et l'autre de pôle S, a pour image un ouvert du plan E (qui est E entier lorsque $\zeta = 1$, ou le complémentaire dans E du cercle de centre O et de rayon R lorsque $\zeta = -1$). On peut considérer que la restriction de cette projection stéréographique à chaque composante connexe de l'ouvert de Q sur lequel elle est définie (c'est-à-dire à chaque composante connexe de $Q\backslash\{N\}$ s'il s'agit de la projection de pôle N, ou à chaque composante connexe de $Q\backslash\{S\}$ s'il s'agit de la projection de pôle S) est une carte de la variété Q. Les cartes ainsi obtenues, au nombre de 2 lorsque $\zeta = 1$, et de 4 lorsque $\zeta = -1$, forment un atlas de la variété Q, les applications de changement de carte étant les composées d'une des projections stéréographiques avec l'inverse de l'autre. Aussi bien lorsque $\zeta = 1$ que lorsque $\zeta = -1$, il suffit d'ailleurs de deux cartes pour former un atlas de Q entière, car lorsque $\zeta = -1$, on obtient quatre cartes dont les images sont deux à deux identiques. Il est donc possible de considérer la variété Q comme définie par un atlas, indépendamment de son plongement dans F, et de décrire l'action du groupe G sur cette variété au moyen de ces cartes. L'action de G est bien sûr toujours hamiltonienne et son moment s'exprime, dans chaque carte, comme l'inverse de la projection stéréographique ayant servi à obtenir la carte considérée.

Contrairement à ce qui a été fait dans le paragraphe 2.2, où les coordonnées de la projection stéréographique de pôle N étaient notées u_i et les coordonnées de la projection stéréographique de pôle S étaient notées u'_i, $1 \leq i \leq n$, je noterai dans ce qui suit u et v les coordonnées dans le plan E, aussi bien de la projection stéréographique de pôle N que de la projection stéréographique de pôle S.

Lorsque $\zeta = 1$, les expression du moment de l'action de G dans les cartes obtenues par projection stéréographique de pôle N et de pôle S sont :

$$(u\overrightarrow{e_x} + v\overrightarrow{e_y}) \mapsto \left(\frac{2R^2u}{R^2+\rho^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{2R^2v}{R^2+\rho^2}\overrightarrow{e_y} \pm \frac{R(R^2-\rho^2)}{R^2+\rho^2}\overrightarrow{e_z} \right),$$

où $\rho^2 = u^2 + v^2$, et où l'espace vectoriel F, dont $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est une base, est identifié au dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$, comme indiqué au paragraphe 3.3. Dans le membre de droite de cette égalité, le signe $\pm$ est $-$ pour la carte obtenue par projection stéréographique de pôle N et $+$ pour la carte obtenue par projection stéréographique de pôle S.

De même, lorsque $\zeta = -1$, ces expressions du moment de l'action de G dans les cartes obtenues par projection stéréographique de pôle N et de pôle S sont :

$$(u\overrightarrow{e_x} + v\overrightarrow{e_y}) \mapsto \left(\frac{2R^2u}{R^2-\rho^2}\overrightarrow{e_x} + \frac{2R^2v}{R^2-\rho^2}\overrightarrow{e_y} \pm \frac{R(R^2+\rho^2)}{R^2-\rho^2}\overrightarrow{e_z} \right),$$

où, dans le membre de droite, le signe $\pm$ est $-$ pour la carte obtenue par projection stéréographique de pôle N et $+$ pour la carte obtenue par projection stéréographique de pôle S. Il importe de remarquer que le moment n'est pas défini lorsque $R^2 - \rho^2 = 0$, c'est à dire sur le cercle du plan E de centre O et de rayon R. Les deux composantes connexes du complémentaire de ce cercle dans E, c'est-à-dire l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, doivent être considérés comme les images de deux cartes distinctes de Q.

3.6 Trois générateurs infinitésimaux

J'aurai besoin plus loin de l'expression des générateurs infinitésimaux de l'action, sur les images de la projection stéréographique de Q de pôle N, des trois sous-groupes à un paramètre de G considérés dans le paragraphe 3.2, notés $\exp(tX)$, $\exp(tY)$ et $\exp(tZ)$. Les champs de vecteurs X, Y et Z, définis non seulement sur Q, mais sur l'espace F entier dans lequel Q est plongée, ont pour expression

$$X(x,y,z) = -z\frac{\partial}{\partial y} + \zeta y\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad Y(x,y,z) = z\frac{\partial}{\partial x} - \zeta x\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad Z(x,y,z) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Afin d'obtenir les expressions de leurs projections stéréographiques de pôle N, considérons une courbe paramétrée différentiable dans $Q\backslash\{N\}$, notée $t \mapsto \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$. Sa projection stéréographique de pôle N est la courbe $t \mapsto \big(u(t), v(t)\big)$, avec

$$u(t) = \frac{R}{R-z(t)}x(t)\,, \quad v(t) = \frac{R}{R-z(t)}y(t)\,.$$

En dérivant par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{R}{R-z(t)}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{\big(R-z(t)\big)^2}x(t)\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,,\\
\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{R}{R-z(t)}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{\big(R-z(t)\big)^2}y(t)\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,.
\end{aligned}$$

Les expressions des projections stéréographiques de X, Y et Z, notées $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ et $\widehat{Z}$, s'obtiennent en faisant $t=0$ dans les égalités ci-dessus et en prenant successivement $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ et $Z(x,y,z)$ pour valeurs du triplet $\Big(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\Big)$. Il faut enfin, bien sûr, exprimer x, y et z au moyen de u et v. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(u,v) &= \frac{\zeta uv}{R}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\zeta(v^2-u^2)+R^2}{2R}\frac{\partial}{\partial v}\,,\\
\widehat{Y}(u,v) &= \frac{\zeta(v^2-u^2)-R^2}{2R}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\zeta uv}{R}\frac{\partial}{\partial v}\,,\\
\widehat{Z}(u,v) &= -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

4 Les actions des groupes $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(1,1)$ et $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe je considère l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$, dont je noterai les éléments $\overrightarrow{z}$, ou $\overrightarrow{w}$, pour désigner les éléments (z_1,z_2) ou, respectivement, (w_1,w_2) de $\mathbb{C}^2$. L'espace $\mathbb{C}^2$ sera muni de la forme sesquilinéaire

$$\eta(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}) = z_1\overline{w_1} + \zeta z_2\overline{w_2}\,,$$

où la constante ζ peut prendre la valeur 1 ou la valeur -1. Lorsque $\zeta = 1$, la forme sesquilinéaire η est hermitienne, car pour tout $\overrightarrow{z} \in \mathbb{C}^2$ non nul, $\eta(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{z}) = |z_1|^2 + |z_2|^2$ est strictement positif. Lorsque $\zeta = -1$, elle est pseudo-hermitienne et non dégénérée, car pour tout $\overrightarrow{z} \in \mathbb{C}^2$ non nul, il existe $\overrightarrow{w} \in \mathbb{C}^2$ tel que $\eta(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{w}) \neq 0$.

4.1 Les groupes $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SU}(1,1)$

Soit $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ un automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}^2$ qui vérifie, pour tous $\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{w} \in \mathbb{C}^2$,

$$\eta\big(A(\overrightarrow{z}),A(\overrightarrow{w})\big) = \eta(\overrightarrow{z},\overrightarrow{w}),$$

et qui, de plus, est de déterminant 1. Lorsque $\zeta = 1$, on dit que A est élément du groupe $\mathrm{SU}(2)$, et lorsque $\zeta = -1$, on dit que A est élément du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$. Dans la suite de ce paragraphe, $\widetilde{G}$ désignera le groupe $\mathrm{SU}(2)$ lorsque $\zeta = 1$ et le groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ lorsque $\zeta = -1$.

Afin d'exprimer l'appartenance de A à $\mathrm{SU}(2)$ ou $\mathrm{SU}(1,1)$ en termes de propriétés de sa matrice, notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{w}$ seront considérés comme des vecteurs-colonnes à deux éléments $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\eta(\overrightarrow{z},\overrightarrow{w}) &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix}, \\
\eta\big(A(\overrightarrow{z}),A(\overrightarrow{w})\big) &= \left(A\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \overline{A} \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exprimées en termes matriciels, les conditions que A doit satisfaire pour être élément de $\widetilde{G}$ sont donc

$$A^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \text{dét}\, A = 1,$$

ou, en explicitant l'expression de la matrice A,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ad - bc = 1,$$

ou encore

$$a\overline{a} + \zeta c\overline{c} = 1,\ b\overline{b} + \zeta d\overline{d} = \zeta,\ a\overline{b} + \zeta c\overline{d} = 0,\ \overline{a}b + \zeta d\overline{c} = 0 \quad \text{et} \quad ad - bc = 1.$$

Parmi les égalités ci-dessus, la troisième et la quatrième ne sont pas indépendantes, chacune d'elles étant la conjuguée de l'autre. La seconde et la troisième forment une système linéaire permettant, compte tenu de la cinquième, d'exprimer $\overline{a}$ et $\overline{c}$ au moyen de b et d :

$$-\zeta\overline{c} = b, \quad \overline{a} = d.$$

La matrice A est donc élément de $\widetilde{G}$ si et seulement si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\zeta\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |a|^2 + \zeta|b|^2 = 1.$$

En faisant successivement $\zeta = 1$ puis $\zeta = -1$, on voit qu'une matrice est élément de $\mathrm{SU}(2)$ si et seulement elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

et qu'elle est élément de $\mathrm{SU}(1,1)$ si et seulement si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

4.2 Trois sous-groupes à un paramètre de $\widetilde{G}$

Il est facile de vérifier que les trois familles de matrices $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$, dépendant du paramètre réel t, dont les expressions sont données ci-dessous, sont trois sous-groupes à un paramètre de $\widetilde{G}$:

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & i\sinh\frac{t}{2} \\ -i\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$B(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \begin{pmatrix} \cosh\frac{t}{2} & -\sinh\frac{t}{2} \\ -\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2} \end{pmatrix} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{it}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{it}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{tant lorsque } \zeta = 1 \text{ que lorsque } \zeta = -1\,.$$

Les générateurs infinitésimaux de ces sous-groupes à un paramètre s'obtiennent en dérivant $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ par rapport à t puis en faisant $t = 0$. Ce sont les trois matrices $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ dont l'expression est donnée ci-dessous. Ces trois matrices forment une base de l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ du groupe de Lie $\widetilde{G}$.

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{\zeta i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{\zeta}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{Z} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont proportionnelles aux trois matrices, qui elles aussi forment une base de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et généralisent les *matrices de Pauli* (ce sont exactement les matrices de Pauli lorsque $\zeta = 1$),

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a en effet

$$\widetilde{X} = \frac{i}{2}\sigma_1\,, \quad \widetilde{Y} = \frac{i}{2}\sigma_2\,, \quad \widetilde{Z} = \frac{i}{2}\sigma_3\,.$$

Les crochets non nuls de ces trois éléments d'une base de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ sont

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = -[\widetilde{Y},\widetilde{X}] = \zeta\widetilde{Z}\,, \quad [\widetilde{Y},\widetilde{Z}] = -[\widetilde{Z},\widetilde{Y}] = \widetilde{X}\,, \quad [\widetilde{Z},\widetilde{X}] = -[\widetilde{X},\widetilde{Z}] = \widetilde{Y}\,.$$

Ce résultat, comparé avec les expressions des crochets non nuls de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ données dans le paragraphe 3.2, montre que les algèbres de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g}$ sont isomorphe. En faisant successivement $\zeta = 1$ puis $\zeta = -1$, on voit que les groupes $\mathrm{SO}(3)$ et $\mathrm{SU}(2)$ d'une part, $\mathrm{SO}(2,1)$ et $\mathrm{SU}(1,1)$ d'autre part, ont la même algèbre de Lie.

4.3 Emploi de la transformation de Möbius

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients éléments de $\mathbb{C}$, inversible, donc de déterminant $ad - bc$ non nul. La *transformation de Möbius* associée à cette matrice est la

transformation $U_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ du compactifié d'Alexandroff $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{C}$:

$$U_A(w) = \begin{cases} \dfrac{aw+b}{cw+d} & \text{si } w \in \mathbb{C} \text{ et } cw+d \neq 0, \\ \infty & \text{si } w \in \mathbb{C} \text{ et } cw+d = 0, \\ \dfrac{a}{c} & \text{si } w = \infty \text{ et } c \neq 0, \\ \infty & \text{si } w = \infty \text{ et } c = 0. \end{cases}$$

J'ai noté w, et non z, la coordonnée complexe (ou égale à ∞) sur $\widehat{\mathbb{C}}$ afin d'éviter tout risque de confusion avec la coordonnée réelle z sur l'espace vectoriel F.

Un calcul facile permet de montrer que si A et B sont deux matrices 2×2 à coefficients éléments de $\mathbb{C}$ inversibles,

$$U_{AB} = U_A \circ U_B\,, \quad U_{A^{-1}} = (U_A)^{-1}\,, \quad U_A = U_B \text{ si et seulement si } A = \lambda B\,, \text{ avec } \lambda \neq 0\,.$$

En d'autres termes, l'application $A \mapsto U_A$ est un homomorphisme du groupe des matrices 2×2 à coefficients complexes inversibles dans le groupe des transformations de $\widehat{C}$, appliquant deux matrices sur la même transformation si et seulement si ces deux matrices sont proportionnelles.

Appliquons la transformation de Möbius aux matrices éléments du groupe $\widetilde{G}$, c'est-à-dire du groupe SU(2) lorsque $\zeta = 1$, ou du groupe $SU(1,1)$ lorsque $\zeta = -1$. Puisque le déterminant de deux matrices A et $B \in \widetilde{G}$ est égal à 1, on voit que $U_A = U_B$ si et seulement si $A = \pm B$.

Les trois sous-groupes à un paramètre de $\widetilde{G}$, notés $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ au paragraphe 4.2, produisent les trois sous-groupes à un paramètre de transformations de $\widehat{C}$:

$$U_{A(t)}(w) = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{t}{2}\,w + i\sin\frac{t}{2}}{i\sin\frac{t}{2}\,w + \cos\frac{t}{2}} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \dfrac{\cosh\frac{t}{2}\,w + i\sinh\frac{t}{2}}{-i\sinh\frac{t}{2}\,w + \cosh\frac{t}{2}} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$U_{B(t)}(w) = \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{t}{2}\,w - \sin\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\,w + \cos\frac{t}{2}} & \text{lorsque } \zeta = 1, \\ \dfrac{\cosh\frac{t}{2}\,w - \sinh\frac{t}{2}}{-\sinh\frac{t}{2}\,w + \cosh\frac{t}{2}} & \text{lorsque } \zeta = -1, \end{cases}$$

$$U_{C(t)}(w) = \frac{\exp\left(\frac{it}{2}\right)\,w + 0}{0 + \exp\left(-\frac{it}{2}\right)} = \exp(it)\,w \quad \text{tant lorsque } \zeta = 1 \text{ que lorsque } \zeta = -1\,.$$

En dérivant par rapport à t ces expressions, puis en faisant $t = 0$, nous obtenons

$$\frac{\mathrm{d}U_{A(t)}(w)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{i(1-\zeta w^2)}{2}\,, \quad \frac{\mathrm{d}U_{B(t)}(w)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{-(1+\zeta w^2)}{2}\,, \quad \frac{\mathrm{d}U_{C(t)}(w)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = iw\,.$$

Afin de permettre la comparaison avec les expressions des générateurs infinitésimaux obtenus au paragraphe 3.6, posons

$$Rw = u + iv\,, \quad \text{avec } u \text{ et } v \in \mathbb{R}\,,$$

et convenons de considérer chaque nombre complexe comme un éléments de E dont la partie réelle est la composante sur $\overrightarrow{e_x}$ et dont la partie imaginaire est la composante sur

$\overrightarrow{e_y}$. Ces identifications permettent d'exprimer les générateurs infinitésimaux de l'action, par transformations de Möbius, de $\widetilde{G}$ sur $\mathbb{R}^2$, sous la forme

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(u,v) &= \frac{\zeta uv}{R}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{R^2-\zeta(u^2-v^2)}{2R}\frac{\partial}{\partial v}\,,\\
\widehat{Y}(u,v) &= -\frac{R^2+\zeta(u^2-v^2)}{2R}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\zeta uv}{R}\frac{\partial}{\partial v}\,,\\
\widehat{Z}(u,v) &= -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

En comparant ces expressions avec celles de $\widetilde{X}(u,v)$, $\widetilde{Y}(u,v)$ et $\widetilde{Z}(u,v)$ obtenues au paragraphe 3.6, on voit que $\widetilde{X}=\widehat{X}$, $\widetilde{Y}=\widehat{Y}$, et $\widetilde{Z}=\widehat{Z}$. Les générateurs infinitésimaux de l'action de G sur la projection stéréographique de Q sont donc égaux aux générateurs infinitésimaux de l'action de $\widetilde{G}$ par transformations de Möbius sur le plan E lorsque $\zeta=1$, ou sur chaque composante connexe du complémentaire, dans le plan E, du cercle de centre O et de rayon R, lorsque $\zeta=-1$.

Ce résultat montre que le groupe des transformations de Möbius construites avec les matrices éléments de $\widetilde{G}$ est isomorphe au groupe G. Comme deux transformations de Möbius construites avec deux matrices A et B éléments de $\widetilde{G}$ sont égales si et seulement si $A=\pm B$, ce groupe est le quotient de $\widetilde{G}$ par le sous-groupe à deux éléments, noté $\{1,-1\}$ constitué par les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. La projection de $\widetilde{G}$ sur le groupe quotient $G/\{1,-1\}$ peut donc être considérée comme un homomorphisme surjectif, noté Φ, de $\widetilde{G}$ sur G. En faisant successsivement $\zeta=1$ et $\zeta=-1$, on peut donc écrire

$$\mathrm{SO}(3)\equiv\mathrm{SU}(2)/\{1,-1\}\,,\quad \mathrm{SO}(2,1)\equiv\mathrm{SU}(1,1)/\{1,-1\}\,.$$

Ce résultat montre aussi que l'action du groupe des transformations de Möbius construites avec des matrices éléments de $\widetilde{G}$ est identique à l'action de G sur l'image, dans le plan E, de la quadrique Q par projection stéréographique de pôle N, ou d'ailleurs aussi de pôle S. Examinons plus précisément les cas où $\zeta=1$ et où $\zeta=-1$.

Lorsque $\zeta=1$, le groupe $G=\mathrm{SO}(3)$ agit sur la quadrique Q, qui dans ce cas est une sphère de dimension 2 et une orbite coadjointe de $\mathrm{SO}(3)$, si l'on convient d'identifier l'espace vectoriel F à $\mathfrak{so}(3)^*$. La projection stéréographique de pôle N (respectivement, de pôle S) est un difféomorphisme de l'ouvert $Q\backslash\{N\}$ de Q (respectivement, de l'ouvert $Q\backslash\{S\}$ de Q), sur le plan E. Nous pouvons prolonger ces projections à la sphère Q entière, en convenant que la projection stéréographique de pôle N (respectivement, de pôle S) envoie le point N (respectivement, le point S) sur le point à l'infini ∞ du complété d'Alexandroff $\widehat{E}$ du plan E. Nous pouvons aussi prolonger l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui applique chaque point de E de coordonnées u et v sur le complexe $\dfrac{u+iv}{R}$, en un difféomorphisme de $\widehat{E}$ sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, qui applique le point à l'infini ∞ de $\widehat{E}$ sur le point à l'infini (noté lui aussi ∞) de $\widehat{\mathbb{C}}$. La composée de la projection stéréographique (de pôle N aussi bien que de pôle S) ainsi prolongée et du difféomorphisme de $\widehat{E}$ sur $\widehat{C}$ est un difféomorphisme de la sphère Q sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, équivariant vis-à-vis de l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur Q et de l'action sur $\widehat{\mathbb{C}}$ du groupe, isomorphe à $\mathrm{SO}(3)$, formé par les transformations de Möbius associées aux éléments de $\mathrm{SU}(2)$.

Lorsque $\zeta=-1$, la quadrique Q est un hyperboloïde à deux nappes, qui sont ses deux composantes connexes, et qui sont deux orbites coadjointes distinctes de $\mathrm{SO}(2,1)$. La

projection stéréographique de pôle N applique la nappe inférieure de Q, celle qui contient S, sur le disque ouvert du plan E centré sur l'origine et de rayon R. Sa composée avec l'application de E dans $\mathbb{C}$ associant, à chaque point de E de coordonnées u et v, le complexe $\dfrac{u+iv}{R}$, est un difféomorphisme de cette nappe sur le disque ouvert D de $\mathbb{C}$ de centre l'origine et de rayon 1, équivariant vis-à-vis de l'action de $\mathrm{SO}(2,1)$ sur la nappe inférieure de Q et de l'action sur le disque D du groupe, isomorphe à $\mathrm{SO}(2,1)$, formé par les transformations de Möbius associées aux éléments de $\mathrm{SU}(1,1)$. La projection stéréographique de pôle S de la nappe supérieure de Q a bien sûr les mêmes propriétés. En faisant intervenir les points à l'infini de $\widehat{E}$ et de $\widehat{\mathbb{C}}$, on peut aussi prolonger à la nappe supérieure de Q entière la projection stéréographique de pôle N, ou à la nappe inférieure de Q entière la projection stéréographique de pôle S et, par composition avec le difféomorphisme de $\widehat{E}$ sur $\widehat{\mathbb{C}}$ déjà construit, obtenir un difféomorphisme équivariant de ces nappes sur l'ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$ complémentaire de l'adhérence $\overline{D}$ du disque D.

4.4 Expression de l'homomorphisme $\Phi : \widetilde{G} \to G$ et de son inverse

La méthode la plus simple permettant d'obtenir l'expression explicite de l'homomorphisme surjectif $\Phi : \widetilde{G} \to G$, me semble être la suivante. Un élément A de $\widetilde{G}$ est une matrice 2×2, à coefficients complexes, de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\zeta\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a \text{ et } b \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } |a|^2 + \zeta|b|^2 = 1\,.$$

L'inverse de A a pour expression

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \zeta\overline{b} & a \end{pmatrix}.$$

L'action adjointe de A sur l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ du groupe $\widetilde{G}$ est facile à déterminer : il suffit en effet de calculer cette action sur les éléments $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$ de la base de cette algèbre de Lie déterminée dans le paragraphe 3.6, c'est-à-dire de calculer les matrices $A\widetilde{X}A^{-1}$, $A\widetilde{Y}A^{-1}$ et $A\widetilde{Z}A^{-1}$ et de les exprimer comme des combinaisons linéaires, à coefficients réels, de $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$. Mais comme on l'a vu ci-dessus, l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}$ s'identifie à l'espace vectoriel F, et l'action adjointe de A sur cette algèbre s'identifie à l'acion naturelle, sur F, de l'image de A par l'homomorphisme de $\widetilde{G}$ sur G. Les coefficients de $A\widetilde{X}A^{-1}$, $A\widetilde{Y}A^{-1}$ et $A\widetilde{Z}A^{-1}$ exprimés comme des combinaisons linéaires à coefficients réels de $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ et $\widetilde{Z}$, sont donc les colonnes de la matrice 3×3, à coefficients réels, élément de G, image de A par l'homomorphisme de G sur $\widetilde{G}$. Ces calculs, pas excessivement compliqués, conduisent aux résultats suivants.

$$\begin{aligned}
A\widetilde{X}A^{-1} &= \frac{a^2+\overline{a}^2-\zeta(b^2+\overline{b}^2)}{2}\widetilde{X} + \frac{a^2-\overline{a}^2-\zeta(b^2-\overline{b}^2)}{2i}\widetilde{Y} + \zeta(a\overline{b}+\overline{a}b)\widetilde{Z}\,,\\
A\widetilde{Y}A^{-1} &= -\frac{a^2-\overline{a}^2+\zeta(b^2-\overline{b}^2)}{2i}\widetilde{X} + \frac{a^2+\overline{a}^2+\zeta(b^2+\overline{b}^2)}{2}\widetilde{Y} + \frac{\zeta(\overline{a}b-a\overline{b})}{i}\widetilde{Z}\,,\\
A\widetilde{Z}A^{-1} &= -(ab+\overline{ab})\widetilde{X} - \frac{ab-\overline{ab}}{i}\widetilde{Y} + (a\overline{a}-\zeta b\overline{b})\widetilde{Z}\,.
\end{aligned}$$

L'image $\Phi(A)$ de la matrice A par l'homomorphisme $\Phi : \widetilde{G} \to G$ est donc la matrice 3×3 à coefficients réels

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{a^2+\overline{a}^2-\zeta(b^2+\overline{b}^2)}{2} & -\dfrac{a^2-\overline{a}^2+\zeta(b^2-\overline{b}^2)}{2i} & -(ab+\overline{ab}) \\ \dfrac{a^2-\overline{a}^2-\zeta(b^2-\overline{b}^2)}{2i} & \dfrac{a^2+\overline{a}^2+\zeta(b^2+\overline{b}^2)}{2} & -\dfrac{ab-\overline{ab}}{i} \\ \zeta(a\overline{b}+\overline{a}b) & \dfrac{\zeta(\overline{a}b-a\overline{b})}{i} & (a\overline{a}-\zeta b\overline{b}) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Afin de vérifier l'exactitude de mes calculs, j'ai regardé ce que devenait cette matrice lorsque l'élément A de $\widetilde{G}$ est l'un des sous-groupes à un paramètre $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ de $\widetilde{G}$ considérés au paragraphe 4.2. Comme il se doit on retrouve bien, dans ces trois cas, les sous-groupes à un paramètre $\exp(tX)$, $\exp(tY)$ et $\exp(tZ)$du paragraphe 3.2.

Inversement, soit

$$M = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

une matrice 3×3, à coefficients réels, élément du groupe G. Notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\zeta\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ \zeta\overline{b} & -\overline{a} \end{pmatrix},$$

les deux matrices 2×2 à coefficients complexes, opposées l'une de l'autre, toutes deux éléments de $\widetilde{G}$, telles que $\Phi(A) = \Phi(-A) = M$. Les égalités

$$a\overline{a} - \zeta b\overline{b} = u_{33}\,, \quad a\overline{a} + \zeta b\overline{b} = 1\,,$$

permettent d'exprimer $|a|^2 = a\overline{a}$ et $|b|^2 = b\overline{b}$ au moyen de u_{33} :

$$|a|^2 = a\overline{a} = \frac{1+u_{33}}{2}\,, \quad |b|^2 = b\overline{b} = \frac{\zeta(1-u_{33})}{2}\,.$$

Notons a_{r} et b_{r} les parties réelles, a_{im} et b_{im} les parties imaginaires, respectivement, de a et de b. Rappelons que, par définition,

$$a = a_{\mathrm{r}} + ia_{\mathrm{im}}\,, \quad b = b_{\mathrm{r}} + ib_{\mathrm{im}}\,, \quad \text{avec } a_{\mathrm{r}}\,,\ a_{\mathrm{im}}\,,\ b_{\mathrm{r}} \text{ et } b_{\mathrm{im}} \in \mathbb{R}\,.$$

En égalant les expressions $(*)$ de $\Phi(A)$ et $(**)$ de M indiquées ci-dessus et en faisant des combinaisons linéaires simples des coefficients de M, on obtient

$$\begin{aligned} a_{\mathrm{r}}^2 &= \frac{1+u_{11}+u_{22}+u_{33}}{4}\,, & a_{\mathrm{r}}a_{\mathrm{im}} &= \frac{u_{21}-u_{12}}{4}\,, \\ a_{\mathrm{im}}^2 &= \frac{1-u_{11}-u_{22}+u_{33}}{4}\,, & b_{\mathrm{r}}b_{\mathrm{im}} &= -\frac{\zeta(u_{21}+u_{12})}{4}\,, \\ b_{\mathrm{r}}^2 &= \frac{\zeta(1-u_{11}+u_{22}-u_{33})}{4}\,, & a_{\mathrm{r}}b_{\mathrm{im}} &= \frac{\zeta u_{31}-u_{13}}{2}\,, \\ b_{\mathrm{im}}^2 &= \frac{\zeta(1+u_{11}-u_{22}-u_{33})}{4}\,, & a_{\mathrm{im}}b_{\mathrm{r}} &= \frac{\zeta u_{31}+u_{13}}{2}\,. \end{aligned}$$

Ces égalités permettent, dans tous les cas, de déterminer la matrice A et son opposée $-A$, et confirment l'unicité du couple (non ordonné) $(A, -A)$ tel que $\Phi(A) = \Phi(-A) = M$.

4.5 Le disque de Poincaré

Dans ce paragraphe $\zeta = -1$. La quadrique Q est un hyperboloïde de révolution à deux nappes. L'image de la nappe inférieure (celle contenant le point S) par la projection stéréographique de pôle N sur le plan E est le disque ouvert D_R, de centre l'origine O et de rayon R. Ce disque est d'ailleurs aussi l'image de la nappe supérieure (celle contenant le point N) par la projection stéréographique de pôle S sur E. Appelé *disque de Poincaré*, c'est un modèle de géométrie non euclidienne.

La métrique riemannienne de D_R s'obtient en faisant $n = 2$ et $\zeta = -1$ dans l'expression de la métrique déterminée au paragraphe 2.3. Au moyen des coordonnées u et v, elle s'écrit

$$\mathrm{d}s^2(u,v) = \frac{4R^4}{(R^2-\rho^2)^2}\,(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)\,, \quad \text{avec } \rho^2 = u^2+v^2\,.$$

Les images, par la projection stéréographique de pôle N, de la forme symplectique de la nappe inférieure de l'hyperboloïde Q, et par la projection stéréographique de pôle S, de la forme symplectique de la nappe supérieure de cet hyperboloïde, sont deux formes symplectiques opposées sur D_R. Leurs expressions, ainsi que celles du crochet de Poisson des fonctions coordonnées, s'obtiennent en adaptant les formules établies au paragraphe 3.4 :

$$\begin{aligned} \omega_{D_R} &= \pm\frac{4R^3}{(R^2-\rho^2)^2}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\,, \\ \{u,v\} &= \pm\frac{(R^2-\rho^2)^2}{4R^3}\,, \end{aligned} \qquad \text{avec } \rho^2 = u^2+v^2\,,$$

où le signe $\pm$ figurant dans les membres de droite de ces inégalités est $-$ si on choisit pour forme symplectique l'image de celle de la nappe inférieure de Q par la projection stéréographique de pôle N, et $+$ si on choisit pour forme symplectique l'image de celle de la nappe supérieure de Q par la projection stéréographique de pôle S.

Le groupe $\mathrm{SO}(2,1)$ agit sur (D_R, ω_{D_R}) par une action hamiltonienne. L'expression du moment Ad^*-équivariant J_{D_R} de cette action, qui n'est autre que l'inverse de la projection stéréographique, s'obtient en adaptant les formules établies au paragraphe 3.5. En identifiant le dual $\mathfrak{so}(2,1)^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ avec l'espace vectoriel F, elle s'écrit

$$J_{D_R}(u,v) = \frac{R}{R^2-\rho^2}\left(2Ru\overrightarrow{e_x} + 2Rv\overrightarrow{e_y} \pm (R^2+\rho^2)\overrightarrow{e_z}\right), \quad \text{toujours avec } \rho^2 = u^2+v^2\,.$$

Le signe $\pm$ au membre de droite est $+$ si l'action de $\mathrm{SO}(2,1)$ sur D_R est l'image, par la projection stéréographique de pôle S, de son action sur la nappe supérieure de l'hyperboloïde Q, et le signe $-$ si c'est l'image, par la projection stéréographique de pôle N, de son action sur la nappe inférieure de cet hyperboloïde.

La restriction à D_R de l'application de E dans $\mathbb{C}$ qui, à chaque point de E de coordonnées (u,v), fait correspondre $\dfrac{u+iv}{R}$, est un difféomorphisme de D_R sur le disque ouvert D de $\mathbb{C}$, centré sur l'origine et de rayon 1. En transportant sur D, grâce à ce difféomorphisme, la métrique riemannienne de D_R, on obtient une métrique sur D dont l'expression est

$$\mathrm{d}s^2(w) = \frac{4R^2}{(1-w\overline{w})^2}\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\overline{w}\,, \quad w \in D\,.$$

Tout comme D_R, le disque D, muni de cette métrique riemannienne, est souvent appelé *dique de Poincaré*.

En transportant sur D, grâce à ce difféomorphisme, les deux formes symplectiques opposées dont est muni D_R, on obtient sur D les deux formes symplectiques opposées

$$\omega_D(w) = \pm\frac{2iR}{(1-w\overline{w})^2}\,\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}\overline{w} = \pm\frac{4R}{(1-|w|^2)^2}\,\mathrm{d}w_{\mathrm{r}}\wedge\mathrm{d}w_{\mathrm{im}}\,,$$

où le signe $\pm$ du membre central et du membre de droite est $-$ si on choisit pour forme symplectique l'image de celle de la nappe inférieure de Q par la projection stéréographique de pôle N, et $+$ si on choisit pour forme symplectique l'image de celle de la nappe supérieure de Q par la projection stéréographique de pôle S.

L'action sur D du groupe, isomorphe à $\mathrm{SO}(2,1)$, formé par les transformations de Möbius associées aux éléments de $\mathrm{SU}(1,1)$, est hamiltonienne. L'expression d'un moment de cette action s'obtient aisément en composant J_{D_R} avec le difféomorphisme de D sur D_R qui associe, à chaque complexe $w = w_{\mathrm{r}} + iw_{\mathrm{im}} \in D$, le point de coordonnées $(Rw_{\mathrm{r}}, Rw_{\mathrm{im}})$,

$$J_D(w) = \frac{R}{1-|w|^2}\left(2w_{\mathrm{r}}\overrightarrow{e_x} + 2w_{\mathrm{im}}\overrightarrow{e_y} \pm (1+|w|^2)\overrightarrow{e_z}\right).$$

Le signe $\pm$ au membre de droite de cette égalité a la même signification que dans l'expression de J_{D_R} indiquée ci-dessus.

4.6 Le demi-plan de Poincaré et l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, comme dans le précédent, $\zeta = -1$. La matrice 2×2 à coefficients complexes $M = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant non nul, égal à $-2i$. Il est donc possible de considérer la transformation de Möbius U_M qui lui est associée. Sa restriction au disque ouvert $D = \{w \in \mathbb{C} \,|\, |w| < 1\}$ formé par les complexes de module < 1 a pour expression

$$w \mapsto \xi = U_M(w) = i\,\frac{-w+1}{w+1}\,, \quad w \in D\,.$$

En remarquant qu'elle est composée de la translation parallèlement à l'axe des réels, $w \mapsto \eta = w+1$, de l'inversion de pôle O suivie d'une symétrie par rapport à l'axe des réels, $\eta \mapsto \theta = \dfrac{2}{\eta}$, de la rotation de $\pi/2$ autour de O, $\theta \mapsto \varphi = i\theta$, et de la translation parallèlement à l'axe des imaginaires purs, $\varphi \mapsto \xi = \varphi - i$, il est facile de voir que cette application est un difféomorphisme analytique du disque ouvert D sur le demi-plan ouvert $P = \{\xi \in \mathbb{C} \,|\, i(\overline{\xi} - \xi) > 0\}$ formé par les complexes de partie imaginaire > 0.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients complexes élément de $\mathrm{SU}(1,1)$. Les complexes a et $b \in \mathbb{C}$ vérifient donc $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Nous savons (paragraphe 4.3) que la restriction à D de l'application de Möbius U_A qui lui est associée est un difféomorphisme analytique de D sur lui-même. La restriction à P de l'application $\xi \mapsto U_M \circ U_A \circ (U_M)^{-1}(\xi)$ est donc un difféomorphisme analytique de P sur lui-même, qui est la restriction à P de la transformation de Möbius associée à la matrice

$$\begin{aligned} MAM^{-1} &= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+\overline{a}-b-\overline{b} & -i(a-\overline{a}+b-\overline{b}) \\ i(a-\overline{a}-b+\overline{b}) & a+\overline{a}+b+\overline{b} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En tenant compte de $a+\overline{a}=2a_{\mathrm{r}}$, $b+\overline{b}=2b_{\mathrm{r}}$, $a-\overline{a}=2ia_{\mathrm{im}}$, $b-\overline{b}=2ib_{\mathrm{im}}$, où nous avons posé $a=a_{\mathrm{r}}+ia_{\mathrm{im}}$ et $b=b_{\mathrm{r}}+ib_{\mathrm{im}}$, avec a_{r}, b_{r}, a_{im} et $b_{\mathrm{im}}\in\mathbb{R}$, nous pouvons écrire

$$MAM^{-1}=2\begin{pmatrix} a_{\mathrm{r}}-b_{\mathrm{r}} & a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} \\ -a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} & a_{\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}.$$

Puisque les transformations de Möbius associées à deux matrices proportionnelles sont égales, la transformation de Möbius associée à MAM^{-1} est aussi associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{\mathrm{r}}-b_{\mathrm{r}} & a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} \\ -a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} & a_{\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}} \end{pmatrix},$$

qui est une matrice à coefficients réels, de déterminant

$$\alpha\delta-\gamma\beta=a_{\mathrm{r}}^2-b_{\mathrm{r}}^2+a_{\mathrm{im}}^2-b_{\mathrm{im}}^2=|a|^2-|b|^2=1\,.$$

Cette matrice est donc un élément du groupe de Lie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. La restriction au demi-plan P de la transformation de Möbius qui lui est associée a pour expression

$$\xi\mapsto\frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}=\frac{(a_{\mathrm{r}}-b_{\mathrm{r}})\xi+a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}}}{(-a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}})\xi+a_{\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}}}\,.$$

Soit $\Xi:\mathrm{SU}(1,1)\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ l'application qui, à chaque matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ élément de $\mathrm{SU}(1,1)$ (donc telle que $|a|^2-|b|^2=1$), fait correspondre la matrice

$$\Xi(A)=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{\mathrm{r}}-b_{\mathrm{r}} & a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} \\ -a_{\mathrm{im}}+b_{\mathrm{im}} & a_{\mathrm{r}}+b_{\mathrm{r}} \end{pmatrix}.$$

Nous venons de voir que cette application est différentiable et à valeurs dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Afin de prouver que Ξ est un difféomorphisme, considérons une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ élément de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Ses coefficients sont donc des réels vérifiant $\alpha\delta-\gamma\beta=1$. Posons

$$a=\frac{\alpha+\delta+i(\beta-\gamma)}{2},\quad b=\frac{\delta-\alpha+i(\beta+\gamma)}{2}.$$

Un calcul facile montre que $|a|^2-|b|^2=1$. La matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$ est donc élément de $\mathrm{SU}(1,1)$, et c'est l'unique élément de ce groupe vérifiant $\Xi(A)=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. L'application $\Xi:\mathrm{SU}(1,1)\to\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ est donc bien un difféomorphisme. Un calcul facile montre que pour tous A et $B\in\mathrm{SU}(1,1)$

$$\Xi(AB)=\Xi(A)\Xi(B)\,,\quad \Xi(A^{-1})=\big(\Xi(A)\big)^{-1},$$

ce qui prouve que Ξ est un isomorphisme du groupe de Lie $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le groupe de Lie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Ce qui précède montre que, pour tous $Z\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $\xi\in P$,

$$U_M\circ U_{\Xi^{-1}(Z)}\circ(U_M)^{-1}(\xi)=U_Z(\xi)\,.$$

Puisque l'application de $\mathrm{SU}(1,1) \times D$ dans D

$$(A, w) \mapsto U_A(w)$$

est une action du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ sur D, que $w \mapsto \xi = U_M(w)$ est un difféomorphisme de D sur P et que $A \mapsto Z = \Xi(A)$ est un isomorphisme du groupe $\mathrm{SU}(1,1)$ sur le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, l'application

$$(Z, \xi) \mapsto U_Z(\xi)$$

est une action du groupe de Lie $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur P. L'image réciproque $\omega_P = (U_M^{-1})^* \omega_D$ de la forme ω_D par le difféomorphisme $U_M^{-1} : P \to D$ est une forme symplectique sur P, ayant pour expression

$$\omega_P = \pm \frac{R}{\xi_{\mathrm{im}}^2} \mathrm{d}\xi_{\mathrm{r}} \wedge \mathrm{d}\xi_{\mathrm{im}} \,,$$

où le signe $\pm$ au membre de droite a la même signification que dans l'expression de ω_D indiquée au paragraphe 4.5.

Puisque l'action de $\mathrm{SU}(1,1)$ sur (D, ω_D) est hamiltonienne, l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ sur (P, ω_P) est hamiltonienne. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ pouvant être identifiée à $\mathfrak{su}(1,1)$, et aussi à $\mathfrak{so}(2,1)$, son espace vectoriel dual peut être identifié à F. L'application $J_P = J_D \circ (U_M)^{-1}$, composée du difféomorphisme $(U_M)^{-1} : P \to D$ et du moment $J_D : D \to F$ dont l'expression est indiquée à la fin du paragraphe 4.5, est un moment de cette action, qui a pour expression

$$J_P(\xi) = \frac{R}{2\xi_{\mathrm{im}}} \left((1 - |\xi|^2) \overrightarrow{e_x} + 2\xi_r \overrightarrow{e_y} \pm (1 + |\xi|^2) \overrightarrow{e_z} \right) ,$$

où le signe $\pm$ dans le membre de droite a la même signification que dans l'expression de J_{D_R} indiquée au paragraphe 4.5.

Références

[1] S. P. Novikov and I. A. Taimanov, *Modern Geometric Structures and Fields*, Graduate Studies in Mathematics Volume 71, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2006. Voir en particulier au chapitre 4 les paragraphes 4.2, "Geometry of the sphere", et 4.3, "Geometry of the pseudo-sphere", pages 94 à 107.

[2] Article de Wikipedia *3D rotation group*, `https://en.wikipedia.org/wiki/3D_rotation_group`.

[3] Laurent-Gengoux, C., Pichereau, A. et Vanhaecke, P. *Poisson Structures*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **347**, Springer-Verlag, Berlin, 2013.

[4] Souriau, J.-M. *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1969.

[5] C.-M. Marle, *Géométrie symplectique et géométrie de Poisson*, Calvage et Mounet, Paris, 2018.