



HAL
open science

Ajout d'une perturbation récurrente et dégressive dans la trace polynomiale de Thue-Morse Hamiltonien

Willy Dantin-Carrère

► **To cite this version:**

Willy Dantin-Carrère. Ajout d'une perturbation récurrente et dégressive dans la trace polynomiale de Thue-Morse Hamiltonien. 2019. <hal-02156754>

HAL Id: hal-02156754

<https://hal.science/hal-02156754v1>

Submitted on 21 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

RECHERCHES

Ceci est un complément à un article de départ :

[On the Hausdorff dimension of the spectrum of Thue-Morse Hamiltonian](#)
(Qinghui Liu and Yanhui Qu) publié sur [arxiv.org](#)

(arXiv : 1410.1856v1 / 17 septembre 2014)

Ajout d'une perturbation récurrente et dégressive dans la trace
polynomiale de Thue-Morse Hamiltonien.

Article de recherche écrit par
[M. Dantin-Carrère Willy](#)

Déposé à l'I.N.P.I. sous enveloppe Soleau

Si vous trouvez une erreur ou pour publier l'article contacter l'auteur : wdc.94@laposte.net

⊗ AJOUT D'UNE PERTURBATION RÉCURRENTÉ ET DÉGRESSIVE DANS LA TRACE POLYNOMIALE DE THUE-MORSE HAMILTONIEN

ARTICLE DE DÉPART : ON THE HAUSDORFF DIMENSION OF THE SPECTRUM OF THUE-MORSE HAMILTONIAN

auteurs : QINGHUI LIU AND YANHUI QU

On transforme légèrement l'équation (2) de l'article de départ en (2')

h_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) * (h_m(x) - 2) + 2 (2) \forall m \ge 2

\hat{h}_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) * (h_m(x) - [2 + (1/k)^m]) + 2 + (1/k)^{m+1} (2') \forall m \ge 2

⊗ Rappelons que G est la substitution de THUE-MORSE

G(a) = a b et G(b) = b a

Le groupe libre généré par a, b est FG(a, b)

on prend \lambda et x \in \mathbb{R}, définissons un homomorphisme \tilde{G}

\tilde{G}: FG(a, b) \to SL(2, \mathbb{R}) comme

\tilde{G}(a) = [[x-\lambda, -1], [1, 0]] et \tilde{G}(b) = [[x+\lambda, -1], [1, 0]]

où \tilde{G}(a_1 \dots a_m) = \tilde{G}(a_m) \dots \tilde{G}(a_1)

Définissons h_m(x) := tr(\tilde{G}(G^m(a))) où tr(A) : trace de la matrice A

h_1(x) = x^2 - \lambda^2 - 2, h_2(x) = (x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 + 2 (1)

et pour m \ge 2 (1) + (2) } ARTICLE DE DÉPART

h_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) * (h_m(x) - 2) + 2 (2)

{h_m : m \ge 1} est appelé la famille de la trace polynomiale de THUE-MORSE HAMILTONIEN

On définit l'ensemble Zéro de la trace polynomiale comme

\Sigma = { x \in \mathbb{R} : \exists m \ge 1 tel que h_m(x) = 0 }

⊗ ON PART DE

$$\hat{h}_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) \cdot \left(h_m(x) - \left[2 + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^m \right] \right) + 2 + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{m+1}$$

$$\hat{h}_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) \cdot (h_m(x) - 2) + 2 - h_{m-1}^2(x) \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \right)^m + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{m+1}$$

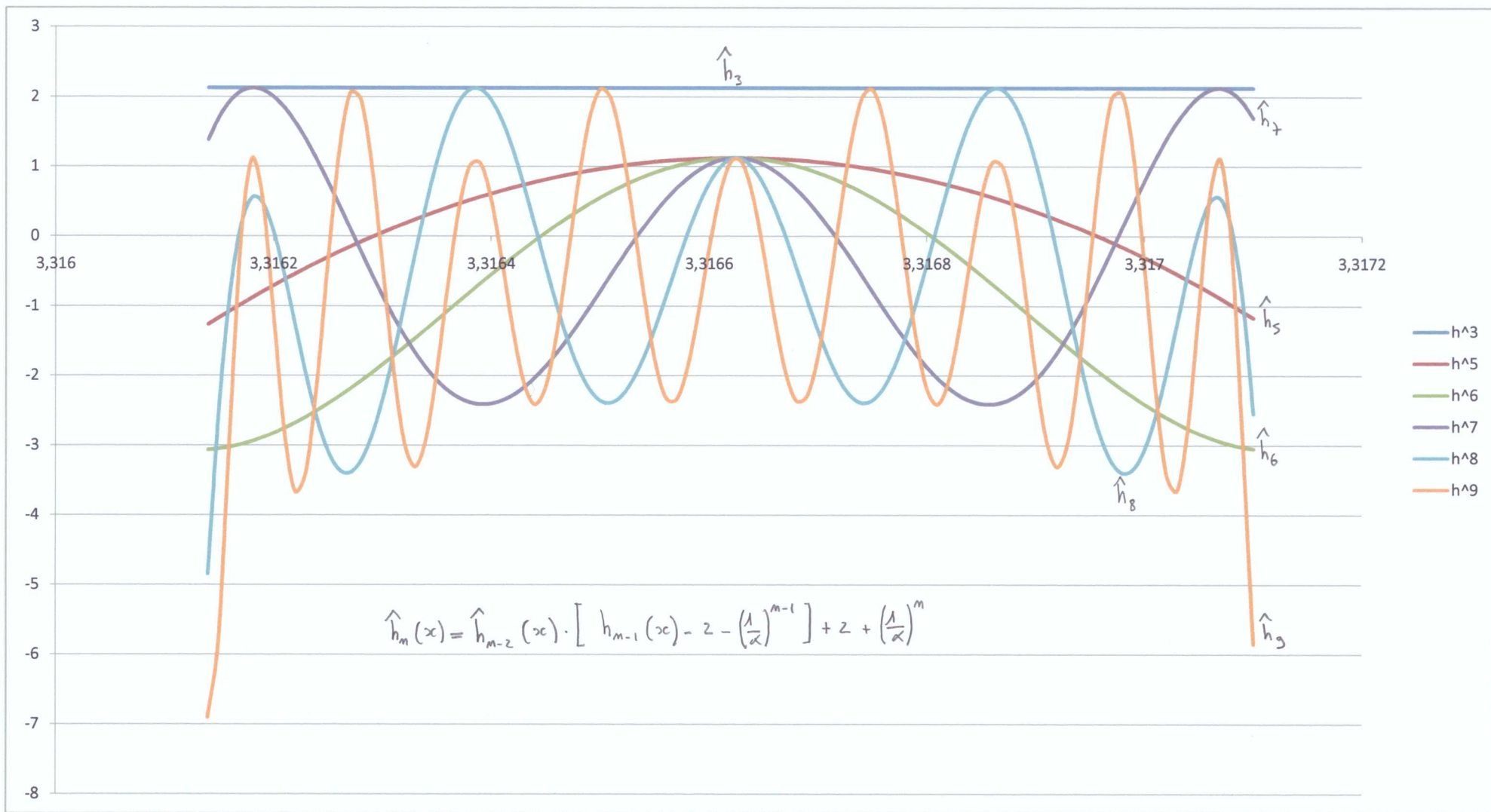
⊗ comme on a $h_m(x) := \text{tr}(\tilde{\mathcal{G}}(\sigma^m(a)))$ $\text{tr}(A)$: trace de la matrice A

on a donc

$$\hat{h}_{m+1}(x) = h_m(x) - h_{m-1}^2(x) \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \right)^m + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{m+1}$$

$$\hat{h}_{m+1}(x) := \text{tr}(\tilde{\mathcal{G}}(\sigma^m(a))) - \left[\text{tr}(\tilde{\mathcal{G}}(\sigma^{m-1}(a))) \right]^2 \left(\frac{1}{\kappa} \right)^m + \left(\frac{1}{\kappa} \right)^{m+1}$$

GRAPHIQUE $\hat{h}_m(x)$ avec $\alpha = 2$ et $\lambda = 3$



Dans notre exemple nous prendrons une variante de $h_m(x)$:

$$h_1(x) = x^2 - \lambda^2 - 2 \quad h_2(x) = (x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 + 2 \quad (\hat{1})$$

et pour $m \geq 2$

$$(\hat{2}) \quad \hat{h}_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) \cdot \left(h_m(x) - \left[2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^m \right] \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{m+1}$$

$\{\hat{h}_m : m \geq 1\}$ est appelé une famille de trace polynomiales (avec ajout d'une suite) reliée à l'hamiltonien THUE-MORSE.

On a $\hat{h}_{m+1}(x) \rightarrow h_{m+1}(x)$ si $\alpha \rightarrow +\infty$ (PAS POSSIBLE voir plus tard)

$\hat{h}_{m+1}(x) \rightarrow h_{m+1}(x)$ si $m \rightarrow +\infty$

On prend $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^m$ et $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m+1}$ convergente vers 0 (si $\alpha > 1$)

On garde au départ :

$$h_1(x) = x^2 - \lambda^2 - 2$$

$$h_2(x) = (x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 + 2$$

* Définissons l'ensemble géom de la trace polynomiales comme

$$\hat{\Sigma} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists m \geq 1, \text{ tel que } \hat{h}_m(x) = 0 \right\} \quad (\hat{3})$$

Pour n'importe quel $x \in \hat{\Sigma}$ si $h_m(x) = 0$ alors pour tout $k \geq m+4$

$$\hat{h}_k(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \quad \text{ou} \quad \hat{h}_k(x) = 2 + (1 - 4\alpha) \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

ou plus généralement: $\forall x \in \hat{\Sigma}$ si $h_m(x) = 0$ alors pour tout $k \geq m+3$

$$\hat{h}_k(x) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \cdot \left[h_{k-2}(x) \right]^2 + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

Par ailleurs $\forall x \in \Sigma$ si $h_m(x) = 0$ alors pour tout $k = m+2$

$$\text{on a : } \hat{h}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

* La limite de \hat{h}_k si $h_m(x) = 0$ pour tout $k \geq m+4$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \hat{h}_k(x) \rightarrow 2 \quad \text{si } k \rightarrow +\infty$$

$$\dots < \hat{h}_k(x) < \hat{h}_{k+1}(x) < \hat{h}_{k+2}(x) < \dots < 2$$

⊛ Pour $k \geq 3$ $\hat{h}_k(x) = 0$

$$\hat{h}_k(x) = h_{k-2}^2(x) \left(h_{k-1}(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k = 0$$

On trouve

$$\text{pour } \hat{h}_k(x) = 0 \Leftrightarrow h_{k-3}^2(x) = \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \cdot h_{k-2}^2(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k}{h_{k-2}^3(x) - 2 \cdot h_{k-2}^2(x)}$$

Sur le graphique B, on trouve $(h_m(x))$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{h}_5(x) \leq 0 \\ x \approx 3,31621 \end{array} \right\} \Leftrightarrow h_4(x) \approx 1,56279 \quad h_3(x) \approx 2 \quad h_2(x) \approx -38$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{h}_5(x) \leq 0 \\ x \approx 3,31704 \end{array} \right\} \Leftrightarrow h_4(x) \approx 1,56180357 \quad h_3(x) \approx 2 \quad h_2(x) \approx -38$$

Sur le graphique A, on trouve $(h_m(x))$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{h}_5(x) \leq 0 \\ x \approx 3,31618 \end{array} \right\} \Leftrightarrow h_4(x) \approx 1,49727319 \quad h_3(x) \approx 2 \quad h_2(x) \approx -38$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{h}_5(x) \leq 0 \\ x \approx 3,31707 \end{array} \right\} \Leftrightarrow h_4(x) \approx 1,49618976 \quad h_3(x) \approx 2 \quad h_2(x) \approx -38$$

* ON TROUVE : pour $\hat{h}_5(x)$ et $h_5(x)$

$$\hat{h}_5(x) = h_3^2(x) \cdot \left(h_4(x) - \left[2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4 \right] \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5$$

$$\hat{h}_5(x) = h_5(x) + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4 \cdot h_3^2(x)$$

on va montrer que $h_5(x) \geq \hat{h}_5(x) \Rightarrow \hat{h}_5(x) - h_5(x) \leq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4 \cdot h_3^2(x) \leq 0$$

$$\text{avec } h_3(x) = (x^2 - \lambda^2 - 2)^2 \cdot \left((x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 \right) + 2$$

on prend comme exemple $\lambda = 3$

$$\text{on pose } H_3(x) = (x^2 - 11)^2 \cdot \left((x^2 - 9)^2 - 4x^2 \right)$$

on trouve $H_3(x) \geq -400$ $h_3(x) = H_3(x) + 2$

$$\textcircled{*} \text{ si } H_3(x) \geq 400 \Rightarrow H_3(x) + 2 \geq 402 \quad [H_3(x) + 2]^2 \geq 402^2$$

donc $h_5(x) \geq \hat{h}_5(x)$

$$\textcircled{*} \text{ si } 0 \leq H_3(x) \leq 400 \Rightarrow 4 \leq [H_3(x) + 2]^2 \leq [402]^2$$

$$\textcircled{*} \text{ si } 0 \geq H_3(x) \geq -400 \Rightarrow 4 \leq [H_3(x) + 2]^2 \leq [398]^2$$

$$\text{ON A DONC } h_3^2(x) = [H_3(x) + 2]^2 \geq 4 \Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4 \cdot h_3^2(x) \leq 0$$

avec $\alpha > 1$ et $\lambda = 3$

$$\forall x \quad h_5(x) \geq \hat{h}_5(x)$$

Par généralisation :

$$\hat{h}_{m+1}(x) = h_{m+1}(x) + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{m+1} - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^m \cdot h_{m-1}^2(x)$$

$$h_{m-1}^2(x) = [H_{m-1}(x) + 2]^2$$

$\forall x, \forall \lambda, \forall \alpha, \forall H_{m-1}(x), \forall h_{m-1}(x)$

$$h_{m-1}^2(x) = [H_{m-1}(x) + 2]^2 \geq 4$$

Donc pour $k \geq 4, \forall x$

$$\boxed{\hat{h}_k(x) \leq h_k(x)} \quad \text{pour } k \geq 4$$

⊗ EXEMPLE POUR $h_3(x)$ ET POUR $\hat{h}_3(x)$

$$h_3(x) = (x^2 - 11)^2 \left((x^2 - 9)^2 - 4x^2 + 2 \right)$$

on a $\lambda = 3$ donc $\left\{ \begin{array}{l} h_1(x) = x^2 - 11 = \hat{h}_1(x) \\ h_2(x) = (x^2 - 9)^2 - 4x^2 + 2 = \hat{h}_2(x) \end{array} \right.$

$$\hat{h}_3(x) = (x^2 - 11)^2 \left((x^2 - 9)^2 - 4x^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$$

On sait que si $h_3(x) = 0 \Rightarrow$ On cherche γ tel que $\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_3(x + \gamma) = 0 \\ h_3(x) = 0 \end{array} \right.$

* On prend $\lambda = 3$ et $\alpha = 2$

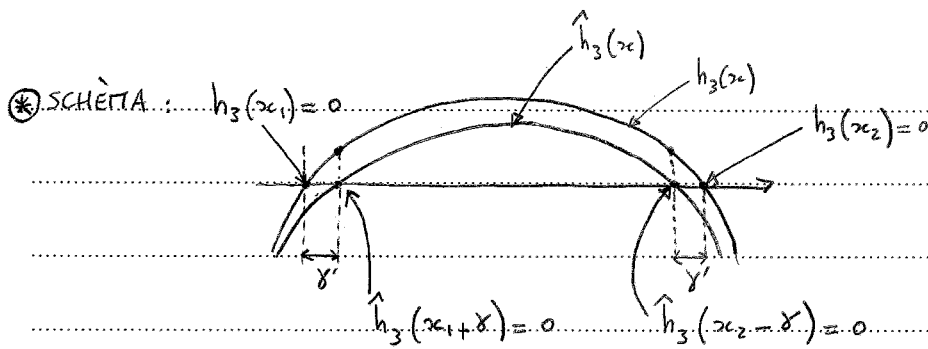
$$\hat{h}_3(x + \gamma) = \left((x + \gamma)^2 - 11 \right)^2 \left(\left((x + \gamma)^2 - 9 \right)^2 - 4(x + \gamma)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\hat{h}_3(x + \gamma) = \left[(x^2 - 11)^2 + (\gamma^2 + 2x\gamma)^2 + 2(x^2 - 11)(\gamma^2 + 2x\gamma) \right] \times \left[(x^2 - 9)^2 + (\gamma^2 + 2x\gamma)^2 + 2(x^2 - 9)(\gamma^2 + 2x\gamma) - 4x^2 - 4\gamma^2 + 8x\gamma - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\hat{h}_3(x + \gamma) = (x^2 - 11)^2 \left((x^2 - 9)^2 - 4x^2 \right) + 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left[(\gamma^2 + 2x\gamma)^2 + 2(x^2 - 11)(\gamma^2 + 2x\gamma) \right] \cdot \left[(x^2 - 9)^2 + (\gamma^2 + 2x\gamma)^2 + 2(x^2 - 9)(\gamma^2 + 2x\gamma) - 4x^2 - 4\gamma^2 + 8x\gamma - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] + (x^2 - 11)^2 \left[(\gamma^2 + 2x\gamma)^2 + 2(x^2 - 9)(\gamma^2 + 2x\gamma) - 4\gamma^2 + 8x\gamma - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]$$

⊗ PROBLÈME : on a x tel que $h_3(x) = 0$ puis on cherche γ tel que $\hat{h}_3(x + \gamma) = 0$

$$\text{ON TROUVE } \hat{h}_3(x + \gamma) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (x^2 - 11)^2 + (\gamma^2 + 2x\gamma)^4 + (\gamma^2 + 2x\gamma)^3 [4(x^2 - 11)] + (\gamma^2 + 2x\gamma)^2 \left[(x^2 - 9)^2 - 4x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5(x^2 - 11)^2 \right] + (\gamma^2 + 2x\gamma) \left[2(x^2 - 11) \cdot \left((x^2 - 9)^2 - 4x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) + 2(x^2 - 11)^3 \right]$$



* on pose $t = x^2 + 2x\delta$ et $\alpha = 2$

$$\hat{h}_3(t) = t^4 + t^3 (0,894987434459139) + t^2 (-39,9496240595601) + t (-17,9668166697722) + 0,112484335815$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_1 &= 6,116374239330345 \text{ en utilisant } t_i = x_i^2 + 2x\delta_i \quad i=1, \dots, 4 \\ t_2 &= 0,006175874908567339 \text{ on a } x = 3,35018609313196 \Rightarrow h_3(x) = 0 \\ t_3 &= -0,45366959213853597 \\ t_4 &= -6,56386795655916 \end{aligned} \right.$$

↑ On obtient 4 t différents et réels

* $h_3(x) = (x^2 - 11)^2 - ((x^2 - 9) - 4x^2) + 2$

on pose $X = x^2$

ce qui donne $h_3(x) = X^2 - 44X^3 + 686X^2 - 4444X + 9803$

$X_1 = 17,320596280673207 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{1/2} &= \pm 4,16180204727149 \end{aligned} \right.$

$X_2 = 4,79403719326791 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{3/4} &= \pm 2,163192945468 \end{aligned} \right.$

$X_3 = 11,223746858614811 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{5/6} &= \pm 3,35018609313196 \end{aligned} \right.$

$X_4 = 10,776253141385189 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{7/8} &= \pm 3,28272038732895 \end{aligned} \right.$

* On reprend $\hat{h}_3(x + \delta)$ avec $x = 3,35018609313196$

on obtient 4 équations $\delta^2 + 2x t_i = 0 \quad i=1, \dots, 4$

ce qui donne 8 valeurs

$$\textcircled{*} x^2 + 6,700.372.186.26.392.x - 6,1163742.39.33.0345 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0,81396.10.10.17.084 \\ x_2 = -7,51.4333.196.43.48 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{*} x^2 + 6,700.372.186.26.392.x - 0,0061758749.089.67.339 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_3 = 0,00092159.44.13.123.12 \\ x_4 = -6,70129.37.80.677 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{*} x^2 + 6,700.372.186.26.392.x + 0,45366.959.21.38.53.597 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_5 = -0,068406.504.78.72.08 \\ x_6 = -6,63.196.56.81.47.67 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{*} x^2 + 6,700.372.186.26.392.x + 6,5638679.565.599.16 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_7 = -1,191.51.082.75.918 \\ x_8 = -5,50.886.135.86.721 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + x_1 = 4,164.147.103.3028 \\ x + x_2 = -4,164.147.10.33.02.84 \\ x + x_3 = 3,35.110.768.754.50.82.12 \\ x + x_4 = -3,35.110.768.754.504 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x'_{i/i+1} = x + x_{i/i+1} - x_{i/i+1} \\ i = 1, \dots, 7 \end{array}}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + x_5 = 3,34.334.544.265.32.92 \\ x + x_6 = -3,281.77.95.88.344.74 \\ x + x_7 = 2,15.86.752.655.40.16 \\ x + x_8 = -2,15.86.752.655.40 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x'_{1/2} = \pm 0,00234.505.60.31.31 \\ x'_{3/4} = \pm 0,00092159.44.1304 \\ x'_{5/6} = \text{soit } (\pm 0,006840650478.668 ; \\ \pm 0,06840650.478) \\ x'_{7/8} = \pm 0,004517679.928.79 \end{array}$$

⊗ GERME RÉGULIER ⊗

On a la paire polynomiale $(\hat{P}_-, \hat{P}_0) = (P_-, P_0)$. Nous faisons l'hypothèse que $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $\rho > 0$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{P}_-(x) = P_-(x) = 2 - \frac{\rho^2}{4} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \\ \hat{P}_0(x) = P_0(x) = 2 - \rho^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \end{array} \right.$$

Ensuite nous disons que (\hat{P}_-, \hat{P}_0) a un ρ -germe en x_0 .

Dans l'article de départ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } k = -1, 0 \quad Q_k(x) = P_k \left(\frac{x}{2^k \rho} + x_0 \right) \Rightarrow Q_k(x) = 2 - x^2 + O(x^3) \\ \Rightarrow Q_k(x) = 2 \cos x + O(x^3) \Rightarrow \Delta_k(x) = Q_k(x) - 2 \cos x \\ \Delta_k(x) = \sum_{m \geq 3} \Delta_{k,m} x^m \end{array} \right.$$

Dans mon article :

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1 \quad \hat{Q}_k(x) &= \hat{P}_k \left(\frac{x}{\sqrt{k} \rho} + x_0 \right) = 2 - x^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + O(x^3) \\ \hat{Q}_k(x) &= Q_k(x) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \\ \hat{Q}_k(x) &= 2 \cos x + O(x^3) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

Alors

$$\hat{\Delta}_k(x) = \hat{Q}_k(x) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - 2 \cos x$$

$$\hat{\Delta}_k(x) = Q_k(x) - 2 \cos x = \Delta_k(x)$$

$$\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x) = \sum_{m \geq 3} \Delta_{k,m} x^m$$

Quelques rappels : $(\hat{P}_-, \hat{P}_0) = (P_-, P_0)$. Si il existe $\delta > 0$ et $\beta \geq 1$ tel que

$$|\hat{\Delta}_-|^*, |\hat{\Delta}_0|^* \prec \delta \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{\beta^m}$$

Alors on dit que (\hat{P}_-, \hat{P}_0) est (δ, β) -régulier ρ -germe en x_0 .

Si $\delta \leq \delta'$ et $\beta \geq \beta'$ et (\hat{P}_-, \hat{P}_0) est (δ, β) -régulier en x_0 .

il est aussi (δ', β') -régulier en x_0 .

* Rappelons que $\{h_m(x) : m \geq 1\}$ est une famille de trace polynomiale de l'Hamiltonien. Thus. Nous satisfaisant (1) et (2). Laissons $a_p = \sqrt{2 + \lambda^{2p}}$ (4) alors $\hat{h}_1(a_p) = 0$. Sachant que $\hat{h}_1 = h_1$.

Le lemme suivant est notre point de départ de notre article.

* Lemme (2-2), on prouve un lemme plus fort lemme (3-3) page (6).

* Lemme (2-2): Faisons l'hypothèse $(\hat{P}_{-1}, \hat{P}_0)$ a un ρ -germe en x_0 .

Pour $k \geq 1$ on définit:

$$\hat{P}_k(x) = P_{k-2}^2(x) \cdot \left[P_{k-1}(x) - \left(2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right) \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \quad (5)$$

Alors

- 1) $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ a un $\chi_k \rho$ -germe en x_0 $\forall k \geq 2$
- 2) Si $(\hat{P}_{-1}, \hat{P}_0)$ est $(1-1)$ -régulier en x_0 , alors $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(3200 \cdot 2^{-k/2}, 4)$ -régulier en x_0 $\forall k \geq 4$

* PREUVE DU LEMME (2-1) et lemme (2-2) *

Nous pouvons produire un germe quand une famille de polynômes satisfait la relation récurrente: (2).

On se donne une pair de polynômes $(\hat{f}_0 = f_0, \hat{f}_1 = f_1)$

on définit:

$$\hat{f}_{m+1} = f_{m-1}^2 \cdot \left(f_m - \left[2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m \right] \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m+1} \text{ pour } m \geq 1$$

* Lemme (3-1): nous assumons $\hat{f}_0(x_0) = f_0(x_0) = 0$. Si $\hat{f}_1(x_0) = f_1(x_0) < 2$ et $\hat{f}'_0(x_0) = f'_0(x_0), \hat{f}'_1(x_0) = f'_1(x_0) \neq 0$ alors $(\hat{f}_{k-1}, \hat{f}_k)$ a un germe pour $k \geq 6$.

PREUVE :

$$f_0(x) = f'_0(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2) \quad \text{et} \quad f_1(x) = f_1(x_0) + O((x - x_0))$$

Par récurrence nous avons

$$\begin{aligned} \hat{f}_2(x) &= 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(2 + \frac{1}{\alpha} f_1(x_0)\right) + \left(f'_0(x_0)\right)^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \\ \hat{f}_3(x) &= 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \left(2 + \frac{1}{\alpha} f_1(x_0)\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 f_1^2(x_0) - \left(2 + f_1(x_0)\right) \left(f'_0(x_0) f_1(x_0)\right)^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \\ \hat{f}_4(x) &= 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \left(2 + \frac{1}{\alpha} f_1(x_0)\right) + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \frac{1}{f_1(x_0)^2} - 1 \cdot \rho^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \end{aligned}$$

car $f_k(x)$ pour $k \geq 3$ $f_k(x) = 2 - 4 \frac{\rho^2}{\alpha^{k-3}} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$

$$\hat{f}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + \left(4 \frac{\rho^2}{\alpha^{k-4}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - 4 \frac{\rho^2}{\alpha^{k-3}}\right) (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

$(k \geq 5)$

Si $f_1(x_0) < 2$ et $f'_0(x_0) \cdot f_1(x_0) \neq 0$ Alors $\rho := \sqrt{2 - f_1(x_0) - |f'_0(x_0) \cdot f_1(x_0)|} > 0$
 et pour $k \geq 5$

$$\hat{f}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \left[2^{k-3} \rho \right] \right\}^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3) \quad (\hat{7})$$

Puis par définition

$$\left(\hat{f}_{k-1}, \hat{f}_k \right) \text{ est un } \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \cdot 2^{k-3} \rho \text{-germe en } x_0 \text{ pour tout } k \geq 6$$

* LEMME (2-1) : (\hat{h}_0, \hat{h}_2) est $(1,1)$ -régulier en a_ρ

Du fait (1) $h_1(x) = \hat{h}_1 = x^2 - \lambda^2 - 2$ $h_2(x) = \hat{h}_2(x) = (x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 + 2$

(2) pour $m \geq 2$ $h_{m+1}(x) = h_{m-1}^2(x) \cdot (h_m(x) - 2) + 2$

pour $m \geq 2$ $\hat{h}_{m+1}(x) = \hat{h}_{m-1}^2(x) \cdot \left(h_m(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m+1}$

(4) $a_\rho = \sqrt{2 + \lambda^2}$

Ce qui implique $\begin{cases} h_1(a_\beta) = \hat{h}_1(a_\beta) = 0 \\ h_2(a_\beta) = \hat{h}_2(a_\beta) = -2 - 4\lambda^2 < 2 \end{cases}$

$\begin{cases} h_1'(a_\beta) = \hat{h}_1'(a_\beta) = 2 \cdot a_\beta \neq 0 \\ h_2(a_\beta) = \hat{h}_2(a_\beta) \neq 0 \end{cases} \quad (\hat{B})$

On écrit $\bar{\sigma} := \sqrt{2 - h_2(a_\beta)} \cdot |h_1'(a_\beta) \cdot h_2(a_\beta)| = 2^3 \sqrt{1 + \lambda^2} \cdot |\sqrt{2 + \lambda^2} \cdot (1 + 2\lambda^2)|$

sachant que $\rho = \sqrt{2 - f_1(x_0)} \cdot |f_0'(x_0) \cdot f_1(x_0)|$

Pour $k \geq 5$ $\hat{f}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} [2^{k-3} \rho]} \right\}^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$

Pour $m \geq 1$ on a $\hat{f}_{m+1}(x) = \hat{f}_{m-1}(x) \cdot \left[f_m(x) - \left(2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m\right) \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m+1}$ pour $m \geq 1$

On fait de même

Pour $m \geq 2$ on a $\hat{h}_{m+1}(x) = \hat{h}_{m-1}(x) \cdot \left[h_m(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m+1}$ pour $m \geq 2$

D'après (\hat{B}) : $h_1(x) = h_1'(a_\beta) \cdot (x - a_\beta) + O((x - a_\beta)^2)$

$\Rightarrow \hat{h}_1(x) = h_1'(a_\beta) \cdot (x - a_\beta)$

$h_2(x) = h_2(a_\beta) = \hat{h}_2(x)$

$h_3(x) = h_1'(a_\beta)^2 \cdot (x - a_\beta)^2 \cdot (h_2(a_\beta) - 2) + 2$

$h_4(x) = 2 - (2 - h_2(a_\beta)) \cdot h_2(a_\beta) \cdot h_1'(a_\beta)^2 \cdot (x - a_\beta)^2$

$h_4(x) = 2 - \bar{\sigma}^2 \cdot (x - a_\beta)^2$

$h_5(x) = 2 - 4 \cdot \bar{\sigma}^2 \cdot (x - a_\beta)^2$

$h_6(x) = 2 - 16 \cdot \bar{\sigma}^2 \cdot (x - a_\beta)^2$

$\hat{h}_6(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 - (4^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5) \cdot \bar{\sigma}^2 \cdot (x - a_\beta)^2 + O((x - a_\beta)^3)$

Donc pour $k \geq 6$

$\hat{h}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - \left[\sqrt{4^{k-4} - 4^{k-5} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \cdot \bar{\sigma} \right]^2 \cdot (x - a_\beta)^2 + O((x - a_\beta)^3)$

* compléments pour $\hat{h}_k(x)$ pour $k = 1, 2, \dots, 4$

$$\hat{h}_1(x) = h_1(x)$$

$$\hat{h}_2(x) = h_2(x)$$

$$\hat{h}_3(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - 4 \cdot (2 + \lambda^2) \left[4 \cdot (1 + \lambda^2) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \right] \cdot (x - a_p)^2$$

$$\hat{h}_4(x) = (2 + 4\lambda^2)^2 \left[4 \cdot (2 + \lambda^2) \cdot (x - a_p)^2 \cdot (-4 - 4\lambda^2) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4$$

$$\hat{h}_4(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - (2 + 4\lambda^2)^2 \left[4 \cdot (2 + \lambda^2) \cdot (4 + 4\lambda^2) \cdot (x - a_p)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \right]$$

Pour $k \geq 6$ avec $a_p = \sqrt{2 + \lambda^2}$

$$\hat{h}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} - \left[\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \cdot 2^{k-3} \cdot \bar{b} \right]^2 (x - a_p)^2 + O((x - a_p)^3)$$

Par le lemme 3.1 (\hat{h}_6, \hat{h}_7) est un $\sqrt{4 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} \cdot 2 \cdot \bar{b}$ germe en a_p .

$$\hat{h}_6(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 - \left[\sqrt{4 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} \cdot 2 \cdot \bar{b} \right]^2 (x - a_p)^2$$

Dans la suite on montre que ce germe est $(1,1)$ régulier.

On écrit $t := 2 \cdot a_p$ puis que $t \geq 2 \cdot \sqrt{2}$.

On définit $g_m(x) = h_m(x + a_p)$ et $\hat{g}_m(x) = \hat{h}_m(x + a_p)$.

On trouve donc

$$\hat{g}_1(x) = g_1(x) = t \cdot x + x^2 = h_1(x + a_p) = \hat{h}_1(x + a_p)$$

et $\hat{g}_2(x) = g_2(x) = (6 - t^2) + t^2 x^2 + 2t x^3 + x^4 = h_2(x + a_p) = \hat{h}_2(x + a_p)$

Pour $m \geq 6$.

$$\hat{g}_m(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1} - \left[4^{m-4} \cdot 4^{m-5} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1} \right] t^2 (t^2 - 6)^2 (t^2 - 4) \cdot x^2 + O(x^3)$$

Avec $\hat{g}_3(x) = (6 - t^2) \cdot t^2 \cdot x^2 - \left[2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \right] t^2 \cdot x^2 + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$

$$\hat{g}_4(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + (6 - t^2)^3 \cdot t^2 \cdot x^2 - (6 - t^2)^2 \cdot 2t^2 \cdot x^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (6 - t^2)^2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \cdot 2 \cdot (6 - t^2) \cdot t^2 \cdot x^2$$

$$\hat{g}_5(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - \left[4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \cdot \frac{1}{(t^2 - 6)^2} \right] t^2 (t^2 - 6)^2 (t^2 - 4) \cdot x^2$$

On a $\bar{b} = t \cdot (t^2 - 6) \sqrt{t^2 - 4}$ On définit $\hat{f}_m(x) = \hat{g}_m\left(\frac{x}{\bar{b}}\right)$

Puis pour $m \geq 6$ on a :

$$\hat{f}_m(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1} - \left[4^{m-4} \cdot 4^{m-5} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1} \right] \cdot x^2 + O(x^3)$$

On a aussi :

$$\hat{f}_1(x) = \hat{g}_1\left(\frac{x}{b}\right) = f_1(x) = t \cdot b^{-1} x + b^{-2} x^2$$

$$\hat{f}_2(x) = \hat{g}_2\left(\frac{x}{b}\right) = g_2(x) = (b - t^2) + \left(\frac{t}{b}\right)^2 x^2 + \left(\frac{2t}{b^3}\right) x^3 + \frac{x^4}{b^4}$$

$$\hat{f}_3(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + 0(x^2) = \hat{g}_3\left(\frac{x}{b}\right)$$

Du fait que $t \geq 2\sqrt{2}$ et que $b = t \cdot (t^2 - 6) \sqrt{t^2 - 4}$ il est facile de vérifier que

$$\text{comme } \hat{f}_1(x) = f_1(x) = g_1\left(\frac{x}{b}\right) \Rightarrow |\hat{f}_1(x)|^* = |f_1(x)|^* \lesssim \frac{t}{b} x \exp\left(\frac{x}{32}\right)$$

$$\hat{f}_2(x) = f_2(x) = g_2\left(\frac{x}{b}\right) \Rightarrow |\hat{f}_2(x)|^* = |f_2(x)|^* \lesssim (t^2 - 6) \exp\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\text{Par ailleurs } |f_2(x) - [2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2]|^* \lesssim [t^2 - 4 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2] \exp\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\text{Du fait que } \hat{f}_m(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m + f_{m-2}(x) \cdot \left[f_{m-1}(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{m-1}\right]$$

Nous avons

$$|\hat{f}_3(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + (|f_1(x)|^*)^2 \cdot |f_2(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2|^*$$

$$|\hat{f}_3(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \left[\frac{1}{(t^2 - 6)^2} + \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}{(t^2 - 6)^2 \cdot (t^2 - 4)} \right] x^2 \exp\left(\frac{5x}{16}\right)$$

$$\text{Nous avons aussi : } |f_3(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3|^* \lesssim (t^2 - 6)^{-2} x^2 \exp\left(\frac{5x}{16}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3$$

Par conséquent

$$|\hat{f}_4(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + (|\hat{f}_2(x)|^*)^2 \cdot |f_3(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3|^*$$

$$|\hat{f}_4(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + x^2 \exp\left(\frac{13x}{16}\right) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 (t^2 - 6)^2 \exp\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$|\hat{f}_5(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + (|\hat{f}_3(x)|^*)^2 \cdot |f_4(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4|^*$$

$$|\hat{f}_5(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \frac{4}{(t^2 - 6)^2} e^{5x/16} + 4 e^{13x/16} \right] x^2$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 \frac{1}{(t^2 - 6)^4} e^{10x/16} + \frac{4}{(t^2 - 6)^2} e^{18x/16} \right] x^4$$

$$+ \frac{1}{(t^2 - 6)^4} e^{23x/16} x^6 \quad (\hat{8})$$

$$|\hat{f}_6(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + \left(|\hat{f}_4(x)|^*\right)^2 \left|f_5(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5\right|^* \quad (\hat{9})$$

sachant que : $|f_4(x)|^* \lesssim 2 + x^2 e^{13x/16}$

$$\left|f_4(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4\right|^* \lesssim x^2 e^{13x/16} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^4$$

On obtient :

$$\begin{aligned} |\hat{f}_6(x)|^* &\lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \left[16 \cdot e^{13x/16} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 \cdot e^{13x/16}\right] x^2 \\ &+ \left[16 \cdot e^{26x/16} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 \cdot e^{26x/16} + \frac{16 \cdot e^{18x/16}}{(t^2-6)^2}\right] x^4 \\ &+ \left[4 \cdot e^{39x/16} + \frac{16 \cdot e^{31x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{4 \cdot e^{23x/16}}{(t^2-6)^4}\right] x^6 \\ &+ \left[\frac{4 \cdot e^{44x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{4 \cdot e^{36x/16}}{(t^2-6)^4}\right] \\ &+ \frac{e^{43x/16}}{(t^2-6)^4} \dots x^{10} \end{aligned}$$

comme $t \gg 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\alpha} < 1$

$$\begin{aligned} |\hat{f}_6(x)|^* &\lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \left[16 \cdot e^{13x/16} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 \cdot e^{13x/16}\right] x^2 \\ &+ 32 \sum_{m \geq 10} (5)^m \frac{x^{m+10}}{m!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_6(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \left[16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5\right] x^2 \right|^* & \\ \lesssim 8 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + 2 \left[16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5\right] x^2 + \left[16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5\right] \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{(m-2)!} & \\ + 32 \sum_{m \geq 10} \frac{5^m x^{m+10}}{m!} & \end{aligned}$$

* Comme $|2 \cos(x) - 2 + x^2|^* \lesssim \sum_{m \geq 4} \frac{x^m}{m!}$

on a alors $\left|2 \cos\left(\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} x\right) - 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \left[\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} x\right]^2\right|^*$
 $\lesssim \sum_{m \geq 4} \frac{\left[\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} x\right]^m}{m!} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5$

Donc fait que $\hat{f}_6(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \left[16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5\right] x^2 + o(x^3)$

et de (9). Nous avons (10) et (11).

Nous concluons :

$$\begin{aligned} \left| \hat{f}_6(x) - 2 \cos\left[\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} x\right] \right|^* &\lesssim 13 + 2 \left[16 x^2\right] + 16 x^3 + \sum_{m=4}^3 \frac{16 x^m}{(m-2)!} \\ &+ \sum_{m=4}^3 \frac{(4x)^m}{m!} + \sum_{m \geq 10} \frac{32 \cdot 5^{m-10} x^m}{(m-10)!} + \sum_{m \geq 10} \frac{(4x)^m}{m!} + \sum_{m \geq 10} \frac{16 x^m}{(m-2)!} \end{aligned}$$

* FINALEMENT: $\left| \hat{f}_6(x) - 2 \cos \left[\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} \cdot x \right] \right|^* \lesssim \sum_{m \geq 3} x^m$ pour $x > 1$ (10.)

* De façon similaire $f_6(x) = 2 - 4^2 \cdot x^2 + O(x^3)$ (ARTICLE DE DÉPART).

et comme $|f_5(x)|^* \lesssim 2 + 4x^2 \frac{e^{13x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{4x^4 e^{18x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{x^6 e^{23x/16}}{(t^2-6)^4}$ page 12

et $|f_6(x) - 2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6|^* \lesssim \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6}{(t^2-6)^4} + \frac{16x^2 e^{13x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{16x^4 e^{26x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{4x^6 e^{39x/16}}{(t^2-6)^2} + \frac{16x^4 e^{18x/16}}{(t^2-6)^4} + \frac{16x^6 e^{31x/16}}{(t^2-6)^4} + \frac{4x^8 e^{44x/16}}{(t^2-6)^4} + \frac{4x^6 e^{23x/16}}{(t^2-6)^4} + \frac{4x^8 e^{36x/16}}{(t^2-6)^4} + \frac{x^{10} e^{49x/16}}{(t^2-6)^4}$

Par ailleurs:

$|\hat{f}_2(x)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^7 + \left(|f_5(x)|^*\right)^2 \cdot \left|f_6(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6\right|^*$

Au final on trouve:

$|\hat{f}_2\left(\frac{x}{2}\right)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^7 + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + [44x^4 + 14x^8 + 7x^{22}] \cdot e^{4x}$

Par simplification $|\hat{f}_2\left(\frac{x}{2}\right)|^* \lesssim 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^7 + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 + [65x^{22}] \cdot e^{4x}$

Par des arguments similaires que (10.) et (11.), on trouve que:

$\left| \hat{f}_2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \cos \left[\sqrt{16 - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} \cdot x \right] \right|^* \lesssim \sum_{m \geq 3} x^m$ pour $x > 1$ (11.)

(12.) et (13.) impliquent que (h_6, h_7) est $(1,1)$ -régulier en a_p avec un facteur d'échelle $2\bar{b}$.

* Itération de polynôme régulier pair

Nous faisons l'hypothèse que (\hat{P}_+, \hat{P}_0) a un p -germe en x_0 . Pour $k \geq 1$

on définit P_k par la relation de récurrence (5). Il est direct de vérifier

que:

$\hat{P}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} 4^{k-1} - 4^k \right] \rho^2 (x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$ (12.)
($\forall k \geq 2$)

Pour $k \geq 1$ on définit: $\hat{Q}_k(x) = \hat{P}_k\left(\frac{x}{\sqrt{4^k - 4^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \cdot \rho} + x_0\right)$ (13.)

Pour $k = -1, 0$ $\hat{P}_0(x) = P_0(x)$ $\hat{P}_{-1}(x) = P_{-1}(x)$

Il est facile de montrer que $\hat{Q}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2 + O(x^3)$

Du fait que $2 \cos(x) = 2 - x^2 + O(x^3)$

Nous concluons que $\hat{Q}_k(x) = 2 \cos(x) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2 + O(x^3)$

Nous en déduisons que $\hat{\Delta}_k(x) = \hat{Q}_k(x) - 2 \cos(x) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2$

$$\hat{\Delta}_k(x) = \sum_{k \geq 3} \hat{\Delta}_{k,m} x^m$$

Nous avons aussi : $\hat{Q}_k(x) = Q_k(x) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2$ (A)

$$\hat{Q}_k(x) = \hat{P}_k\left(\frac{x}{\gamma_k \cdot \rho} + x_0\right) \text{ avec } \gamma_k = \sqrt{4^k - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1}} \quad \forall k \geq 1$$

⊗ Lemme (2.2) : Nous faisons l'hypothèse (\hat{P}_1, \hat{P}_0) a un ρ -germe en x_0 .

Pour $k \geq 1$, on définit

$$\hat{P}_k(x) = P_{k-2}^2(x) \left[P_{k-1}(x) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \quad (\hat{S})$$

Nous savons aussi que $\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x)$

Comme $\hat{Q}_k(x) = Q_k(x) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2$

D'après l'article de départ page 13 :

$$Q_k(x) = Q_{k-2}^2\left(\frac{x}{4}\right) \left(Q_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \right) + 2$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{aligned} \hat{Q}_k(x) &= Q_{k-2}^2\left(\frac{x}{4}\right) \left(Q_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}x^2 \end{aligned} \right.$$

Nous utiliserons cette formule pour la suite

⊗ une autre formule est possible :

$$\text{Sachant que } \left\{ \begin{aligned} P_{k-1}\left(\frac{x}{\gamma_k \cdot \rho} + x_0\right) &= Q_{k-1}\left(\frac{2^{k-1}x}{\gamma_k}\right) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_{k-2}\left(\frac{x}{\gamma_k \cdot \rho} + x_0\right) &= Q_{k-2}\left(\frac{2^{k-2}x}{\gamma_k}\right) \end{aligned} \right.$$

D'après (S) on a :

$$\hat{Q}_k(x) = Q_{k-2}^2\left(\frac{2^k}{\gamma_k}\left(\frac{x}{4}\right)\right) \left[Q_{k-1}\left(\frac{2^k}{\gamma_k}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right] + 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k$$

D'après article de départ page 13, juste avant formule (15).

$$Q_k(x) = 2 \cos x + \left(2 + 2 \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \Delta_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \Delta_{k-2}\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \left(4 \cos \frac{x}{4} + \Delta_{k-2}\left(\frac{x}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \cos \frac{x}{2} - 2 + \Delta_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\hat{\Delta}_k(x) = \hat{Q}_k(x) - 2 \cos(x) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} = \sum_{k \geq 3} \Delta_{k,m} x^m \quad (14)$$

$$\hat{\Delta}_k(x) = Q_k(x) - 2 \cos(x) = \sum_{k \geq 3} \Delta_{k,m} x^m \quad \leftarrow \textcircled{A} \text{ (page 14)}$$

$$\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x) = \left(2 + 2 \cos \frac{x}{2}\right) \cdot \Delta_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \Delta_{k-2}\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \left(4 \cos \frac{x}{4} + \Delta_{k-2}\left(\frac{x}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \cos \frac{x}{2} - 2 + \Delta_{k-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad (15)$$

On reprend l'article de départ et on retrouve quelques parties identiques.

On voit comment évoluent les coefficients.

⊗ Proposition (3.2): Nous faisons l'hypothèse que $\hat{\Phi}_0, \hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ sont des fonctions analytiques réelles dont l'expression de Taylor est: $\hat{\Phi}_k(x) = \sum_{m \geq 3} \hat{\Phi}_{k,m} x^m$ $k=0,1,2$ et satisfait la relation suivante.

$$\hat{\Phi}_2(x) = \left(2 + 2 \cos \frac{x}{2}\right) \hat{\Phi}_1\left(\frac{x}{2}\right) + \hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \left(4 \cos \frac{x}{4} + \hat{\Phi}_0\left(\frac{x}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \cos \frac{x}{2} - 2 + \hat{\Phi}_1\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad \text{ou a. } \hat{\Phi}_2(x) = \hat{\Phi}_2(x)$$

Si il existe $0 < \delta \leq 1$ et $\beta \geq 1$ tel que

$$|\hat{\Phi}_{0,m}|, |\hat{\Phi}_{1,m}| \leq \delta \cdot \beta^{-m}, \quad \forall m \geq 3$$

Alors quand $\beta = 1$

$$|\hat{\Phi}_2(x)|^* \prec \delta \cdot \left(4 \frac{x^3}{2^3} + 4 \frac{x^4}{2^4} + 9 \sum_{m \geq 5} \frac{x^m}{2^m}\right) \quad (16)$$

Quand $\beta = 2$

$$|\hat{\Phi}_2(x)|^* \prec \delta \cdot \left(4 \frac{x^3}{4^3} + 4 \frac{x^4}{4^4} + 24 \frac{x^5}{4^5} + 43 \sum_{m \geq 6} \frac{x^m}{4^m}\right)$$

On obtient:

$$|\hat{\Phi}_2(x)|^* \prec \left. \begin{aligned} &4 \delta \sum_{m=3}^4 \frac{x^m}{(2\beta)^m} + \left[(e^\beta - \beta) \cdot \left(2 + \frac{\beta^2}{2}\right) + 2 \right] \cdot \delta \frac{x^5}{(2\beta)^5} \\ &+ \left[(e^\beta - \beta)^2 + \frac{33}{16} (e^\beta - \beta) + 2 \right] \delta \sum_{m \geq 6} \frac{x^m}{(2\beta)^m} \end{aligned} \right\} \text{ou a. (16) si } \beta=1 \quad (17) \text{ si } \beta=2$$

On a le même lemme (3-3) que l'article de départ (page 16) car $\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x)$

* Lemme (3-3): Faisons l'hypothèse sur $(P_+, P_0) = (\hat{P}_-, \hat{P}_0)$ a un ρ -germe en x_0 .

$$\hat{P}_- (x) = P_- (x) = 2 - \frac{\rho^2}{4} (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

$$\hat{P}_0 (x) = P_0 (x) = 2 - \rho^2 (x - x_0)^2 + O((x - x_0)^3)$$

Par contre $(\hat{P}_k)_{k \geq 1}$ satisfait la relation de récurrence (\hat{S}) .

1) $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ a un $\delta_k \rho$ -germe en $x_0 \forall k \geq 2$

2) Si (\hat{P}_-, \hat{P}_0) est $(\delta, 1)$ -régulier en x_0 alors $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(2 \cdot 2^{-k/2} \delta, 1)$ -

régulier en $x_0 \forall k \geq 2$, est $(36 \cdot 2^{-k/2} \delta, 2)$ -régulier en $x_0 \forall k \geq 2$

et est $(3200 \cdot 2^{-k/2} \delta, 4)$ -régulier en $x_0 \forall k \geq 4$.

3) Si (\hat{P}_-, \hat{P}_0) est $(\delta, 2)$ -régulier en x_0 , alors $\forall k \geq 2$, $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta, 2)$ -

régulier.

Article de départ on a le même lemme (4-1) à la page 17:

* Lemme (4-1): On fait l'hypothèse que Ψ est un polynôme satisfaisant

$$|\Psi(x) - 2 \cos x| \leq \delta_0 \quad \forall x \in [0; 1, 3] \text{ (resp. } [-1, 2; 0])$$

De plus on x_+ (resp. x_-) est le minimum $x \in [0; \pi]$ (resp. le maximum

$x \in [-\pi; 0]$) tel que $\Psi(x) = 0$

$$\text{Alors } |x_+ - \frac{\pi}{2}| \leq \delta_0 \text{ (resp. } |x_- - (-\frac{\pi}{2})| \leq \delta_0)$$

Proposition (4-2) article de départ = Proposition (4-2) Non article

Article de départ on a le même (4-2) à la page 17:

* Proposition (4-2): On fait l'hypothèse d'une paire polynomiale $(\hat{P}_-, \hat{P}_0) = (P_-, P_0)$

est $(\delta, 2)$ -régulier en x_0 . Alors il existe $y_- < y_0^- < x_0 < y_0^+ < y_+$

tel que, pour $k = -1, 0$,

$$P_k(y_k^-) = P_k(y_k^+) = 0; \quad P_k(x) > 0 \quad (x \in I_k^- \cup I_k^+)$$

où $I_k^- = (y_k^-, x_0)$, $I_k^+ = [x_0, y_k^+)$ De plus $\frac{|I_0^+|}{|I_{-1}^+|}; \frac{|I_0^-|}{|I_{-1}^-|} > 2, 1^{-1}$

⊗ Proposition (4-3): Nous avons $(\hat{P}_k)_{k \geq -1}$ satisfaisant la relation (\hat{S}) .
 Nous faisons l'hypothèse que (\hat{P}_1, \hat{P}_0) est $(\delta_2, 4)$ -régulière en x_0 avec un
 facteur d'échelle a . Nous avons y_0^+ (resp. y_0^-) être le minimal $t > x_0$
 (resp. maximal $t < x_0$) tel que $P_0(t) = 0$. Nous avons x_5^+ (resp. x_5^-)
 être le maximum $t < y_0^+$ (resp. minimum $t > y_0^-$) tel que $\hat{P}_5(t) = 0$.
 Nous avons $I_0^+ = [x_0, y_0^+]$, $I_0^- = [y_0^-, x_0]$, $I_5^+ = [x_5^+, y_0^+]$ et $I_5^- = [y_0^-, x_5^-]$.

Alors

$$\frac{|I_5^+|}{|I_0^+|} \gg \frac{1}{8} \frac{8a}{\rho} \frac{1}{\epsilon_5} \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (0,01 - (\frac{1}{\kappa})^5 + 4 \cdot (\frac{1}{\kappa})^4)]}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot 0,01}$$

De plus (\hat{P}_5, \hat{P}_0) est $(\delta_1, 2)$ -régulière en y_0^+ et aussi en y_0^- .

On a une nouvelle condition $1,11767 \leq \kappa \leq 2$ avec $k = 5$.

du fait $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (0,01 - (\frac{1}{\kappa})^5 + 4(\frac{1}{\kappa})^4) \gg 0$

$$\text{si } \kappa = 1,11767 \Rightarrow \frac{|I_5^+|}{|I_0^+|} \gg 18,18243^{-5}$$

$$\text{si } \kappa = 1,4 \Rightarrow \frac{|I_5^+|}{|I_0^+|} \gg 2,2272^{-5}$$

$$\text{si } \kappa = 1,5 \Rightarrow \frac{|I_5^+|}{|I_0^+|} \gg 2,16^{-5}$$

$$\text{si } \kappa = 2 \Rightarrow \frac{|I_5^+|}{|I_0^+|} \gg 2,04^{-5}$$

et de plus (\hat{P}_5, \hat{P}_0) est $(\delta_1, 2)$ -régulière en $y_0^+ = y_0^-$.

⊗ Lemme (2-4)

Faisons l'hypothèse $(\hat{P}_k)_{k \geq 1}$ satisfait la relation de récurrence (\hat{S}) . (Avec $k \geq 5$.)

On a aussi $(\hat{P}_1, \hat{P}_0) = (P_{-1}, P_0)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulière en x_0 . Pour $k = 0, k$

on a y_k^+ (resp. y_k^-) être le minimum $t > x_0$ (resp. maximum $t < x_0$)

tel que $\hat{P}_k(t) = 0$. Laissons x_k^+ (resp. x_k^-) être le maximum $t < y_0^+$

(minimum $t > y_0^-$) tel que $\hat{P}_k(t) = 0$. Alors

$$\frac{|y_k^+ - x_0|}{|y_0^+ - x_0|} \geq \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (-\delta_0 + (\frac{1}{2})^k - 4 \cdot (\frac{1}{2})^{k-1}) + \frac{\pi}{2}}{\gamma_k \cdot [\frac{\pi}{4} \cdot \delta_0 + \frac{\pi}{2}]}, \quad \frac{|y_0^+ - x_k^+|}{|y_0^+ - x_0|} \geq \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (-\delta_0 + (\frac{1}{2})^k - 4 \cdot (\frac{1}{2})^{k-1}) + \frac{\pi}{2}}{\gamma_k \cdot [\frac{\pi}{4} \cdot \delta_0 + \frac{\pi}{2}]}$$

et $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulière en x_0 et y_0^\pm respectivement

⊗ preuve du lemme (2-4) Nous considérons que le cas de l'intervalle $[x_0, y_0^+]$

Pour $k = 0, \dots, k$, faisons l'hypothèse que y_k soit le minimum $t > x_0$ tel que

$P_k(t) = 0$. Alors $y_0 = y_0^+$ et $y_k = y_k^+$. Pour $k = 5, \dots, k$, laissons x_k être

le maximum $t < y_0^+$ tel que $P_k(t) = 0$. Alors $x_k = x_k^+$

$(\hat{P}_{-1}, \hat{P}_0) = (P_{-1}, P_0)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulière en x_0 , alors il est $(\delta_1, 2)$ -régulière

et $(1, 1)$ -régulière en x_0 par la définition de régularité.

Par le lemme (3-3), $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulière en x_0 .

Par le lemme (3-3) 3) $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_1, 2)$ -régulière en x_0 $\forall 0 \leq k \leq K$

$(\hat{P}_{-1}, \hat{P}_0)$ est $(\delta_1, 2)$ -régulière en x_0 avec un facteur d'échelle a .

$$\Rightarrow |\hat{\Delta}_{-1}(x)|^*, |\hat{\Delta}_0(x)|^* \leq \delta_1 \sum_{m \geq 3} \frac{|x|^m}{2^m} = \frac{|x|^3}{8-4|x|} \delta_1 \text{ sachant que } |x| \leq 1,9$$

$$|\hat{\Delta}_{-1}(x)|^*, |\hat{\Delta}_0(x)|^* \leq \frac{1,9^3 \delta_1}{8-4 \cdot 1,9} < 20 \delta_1 < \delta_0$$

⊗ PRÉCISIONS:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_0 &= 10^{-2}, \delta_1 = 10^{-4}, \delta_2 = 10^{-16} \text{ et } k = 140 \text{ Alors} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 20 \delta_1 &\leq \delta_0, \quad 400^4 \times 4 \times 3 \delta_2 \leq \delta_1, \quad 3200 \cdot 2^{-(k-4)/2} < \delta_2 \quad (\hat{6}) \end{aligned} \right.$$

$$|\hat{\Delta}_{-1}(x)| = |Q_{-1}(x) - 2 \cos(x)|, \quad |\hat{\Delta}_0(x)| = |Q_0(x) - 2 \cos(x)| < \delta_0$$

$$Q_{-1}(y_{-1}^+) = 0 \Rightarrow P_{-1}\left(\frac{2 \cdot y_{-1}^+}{a} + x_0\right) = P_{-1}(y_{-1}^+) = 0 \Rightarrow y_{-1}^+ = \frac{a}{2}(y_{-1}^+ - x_0)$$

$$Q_0(y_0^+) = 0 \Rightarrow P_0\left(\frac{y_0^+}{a} + x_0\right) = P_0(y_0^+) = 0 \Rightarrow y_0^+ = a(y_0^+ - x_0)$$

Par le lemme (4-1):

$$\left| a(y_0^+ - x_0) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0, \quad \left| \frac{a}{2}(y_{-1}^+ - x_0) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0$$

Par le lemme (3-3) 3) $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_1, 2)$ régulier en $x_0 \forall k = 0, \dots, K$

$$|\hat{\Delta}_{k-1}(x)|^*, |\hat{\Delta}_k(x)|^* \rightarrow \delta_1 \sum_{m \geq 3} \frac{|x|^m}{2^m} < \delta_0 \quad \forall 0 \leq k \leq K$$

Par contre pour $\forall 2 \leq k \leq K$

$$\left| \hat{Q}_{k-1}(y_{k-1}^+) - 2 \cos(y_{k-1}^+) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-2} \right| = |\hat{\Delta}_{k-1}(y_{k-1}^+)| < \delta_0 \quad \textcircled{A}$$

$$\left| \hat{Q}_k(y_k^+) - 2 \cos(y_k^+) - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right| = |\hat{\Delta}_k(y_k^+)| < \delta_0 \quad \textcircled{B}$$

⊗ Pour $k-1$

$$\hat{Q}_{k-1}(y_{k-1}^+) = \hat{P}_{k-1}\left(\frac{y_{k-1}^+}{\gamma_{k-1} \cdot c} + x_0\right) = \hat{P}_{k-1}(y_{k-1}^+) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_{k-1}^+ = \gamma_{k-1} \cdot \rho(y_{k-1}^+ - x_0) \\ \text{avec } \gamma_k = \sqrt{4^k - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1}} \end{array} \right\}$$

$$\text{on trouve aussi } |2 \cos(y_{k-1}^+)| \leq \delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} \left| y_{k-1}^+ - \frac{\pi}{2} \right| \leq \delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} \left| \gamma_{k-1} \cdot \rho(y_{k-1}^+ - x_0) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-2}$$

⊗ De même pour k

$$\hat{Q}_k(y_k^+) = \hat{P}_k\left(\frac{y_k^+}{\gamma_k \cdot c} + x_0\right) = \hat{P}_k(y_k^+) = 0 \Rightarrow y_k^+ = \gamma_k \cdot \rho(y_k^+ - x_0)$$

et ⓑ

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi} \left| \gamma_k \cdot \rho(y_k^+ - x_0) - \frac{\pi}{2} \right| \leq \delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$$

On a donc pour $\forall 2 \leq k \leq K$

$$\frac{|y_k^+ - x_0|}{|y_{k-1}^+ - x_0|} = \frac{|y_k - x_0|}{|y_{k-1} - x_0|} \geq \frac{\gamma_{k-1} \cdot \left[\frac{\pi}{4} \left(-\delta_0 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \right) + \frac{\pi}{2} \right]}{\gamma_k \cdot \left[\frac{\pi}{4} \left(\delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-2} \right) + \frac{\pi}{2} \right]}$$

et de plus $\frac{|y_k^+ - x_0|}{|y_0^+ - x_0|} = \frac{|y_k - x_0|}{|y_0 - x_0|} \geq \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} (-\delta_0 + (\frac{1}{\alpha})^k - 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{k-1})}{\gamma_k \cdot [\frac{\pi}{4} \cdot \delta_0 + \frac{\pi}{2}]}$

⊗ voir preuve de la proposition (4-3) page (25)

$$\frac{4}{\pi} |\xi_k \cdot \rho \cdot (x_k^+ - y_0^+) - \frac{\pi}{2}| < \delta_0 \cdot (\frac{1}{\alpha})^k + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{k-1}$$

⊗ par la proposition (4-3) : (\hat{P}_5, \hat{P}_6) est $(\delta_1, 2)$ -régulière en $y_0^+ = y_0$ et

$$\frac{|I_5^+| \cdot |x_5^+ - y_0^+|}{|I_0^+| \cdot |x_0 - y_0|} \geq \frac{1}{8} \quad \text{sa} \quad \frac{1}{\epsilon} \quad \frac{1}{\xi_5} \quad \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (\delta_0 - (\frac{1}{\alpha})^5 + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^4)]}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot \delta_0} \quad (25)$$

⊗ Même argument qu'au dessus montre que $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulière en y_0 et $(\hat{P}_{k-1}, \hat{P}_k)$ est $(\delta_1, 2)$ -régulière en $y_0 \quad \forall \quad 5 \leq k \leq K$. Par la proposition (4-2)

$\forall \quad 5 \leq k \leq K$

$$\frac{|x_k^+ - y_0^+|}{|x_{k-1}^+ - y_0^+|} \geq \frac{\gamma_{k-1}}{\gamma_k} \cdot \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (\delta_0 - (\frac{1}{\alpha})^k + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{k-1})]}{[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot (\delta_0 - (\frac{1}{\alpha})^{k-1} + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{k-2})]}$$

En combinant avec (25)

$$\frac{|x_k^+ - y_0^+|}{|x_0^+ - y_0^+|} = \frac{|x_k - y_0|}{|x_0 - y_0|} \geq \frac{1}{\delta_K} \cdot \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (\delta_0 - (\frac{1}{\alpha})^K + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{K-1})]}{[\frac{\pi}{4} \cdot \delta_0 + \frac{\pi}{2}]}$$

$$\frac{|x_k^+ - y_0^+|}{|x_0^+ - y_0^+|} \geq \left\{ \left[\frac{\gamma_k \cdot [\frac{\pi}{4} \cdot \delta_0 + \frac{\pi}{2}]}{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot (\delta_0 - (\frac{1}{\alpha})^K + 4 \cdot (\frac{1}{\alpha})^{K-1})]} \right]^{\frac{1}{K}} \right\} \quad \square$$

⊛ Comme article de départ on a la même proposition (4-4)

On fait l'hypothèse $\hat{\Psi}_0, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2$ sont des fonctions analytiques réelles avec

l'expansion de Taylor $\hat{\Psi}_k(x) = \sum_{m \geq 0} \hat{\Psi}_{k,m} x^m, k = 0, 1, 2$ et satisfait

la relation suivante : Pour un quelconque $\bar{z} \in \mathbb{R}$

$\forall k \geq 0 \hat{\Psi}_k = \Psi_k$ (Ψ_k provient de l'article de départ.)

$$\hat{\Psi}_2(x) = \left(2 + 2 \cos\left(\frac{x+\bar{z}}{2}\right)\right) \cdot \hat{\Psi}_1\left(\frac{x}{2}\right) \quad (26)$$

$$+ \hat{\Psi}_0\left(\frac{x}{4}\right) \cdot \left(4 \cos\left(\frac{x+\bar{z}}{4}\right) + \hat{\Psi}_0\left(\frac{x}{4}\right)\right) \cdot \left(2 \cos\left(\frac{x+\bar{z}}{2}\right) - 2 + \hat{\Psi}_1\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Si il existe $0 < \delta \leq 1$ et $2 \leq \beta \leq 3$ tel que

$$|\Psi_{0,m}|, |\Psi_{1,m}| \leq \delta \cdot \beta^{-m}, \forall m \geq 0$$

alors

$$|\hat{\Psi}_2(x)|^* \leq 400 \delta \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m}$$

⊛ PREUVE DE LA PROPOSITION (4-3)

$$\hat{Q}_k(x) = \hat{P}_k\left(\frac{x}{\delta_k \cdot \rho} + x_0\right) := 2 \cos(x) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + \hat{\Delta}_k(x) \quad (29)$$

sachant que : $\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x) \quad \forall k \geq 1$

Pour $k = -1, 0$

$$\hat{Q}_k(x) = Q_k(x) \quad \hat{P}_k(x) = P_k(x) \quad \hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x)$$

$$Q_k(x) = P_k\left(\frac{x}{2^k \cdot a} + x_0\right) := 2 \cos(x) + \Delta_k(x) \quad \text{Article de départ (23) page 21}$$

Comme $(\hat{P}_1, \hat{P}_0) = (P_1, P_0)$ est $(\delta_2, 4)$ régulières, nous avons

$$|\hat{\Delta}_{-1}(x)|^* = |\Delta_{-1}(x)|^* \leq \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{4^m}, \quad |\hat{\Delta}_0(x)|^* = |\Delta_0(x)|^* \leq \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{4^m}$$

Par conséquent pour $x \in (0, 4)$, nous voyons que pour $k \geq 0$

$$\begin{aligned} |\hat{\Delta}_0^{(k)}(x)| &\leq \delta_2 \left(\sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{4^m}\right)^{(k)} = \frac{\delta_2}{16} \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{(k)} \\ |\Delta_{-1}^{(k)}(x)| &\leq \delta_2 \left(\sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{4^m}\right)^{(k)} = \frac{\delta_2}{16} \left(\frac{x^3}{4-x}\right)^{(k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k=0 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_2}{16} \frac{x^3}{4-x} \\ \frac{\delta_2(x+2)}{8} + \frac{4\delta_2}{(4-x)^2} \quad (\hat{30}) \\ \frac{\delta_2}{8} + \frac{8\delta_2}{(4-x)^3} \\ \frac{4k! \delta_2}{(4-x)^{k+1}} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$(\hat{P}_-, \hat{P}_0) = (P_-, P_0)$ est $(\delta_2, 4)$ -régulier implique qu'il est aussi $(\delta_2, 2)$ -régulier. Prenons $t \in (0, 2)$ tel que $Q_0(t) = a$. Alors avec la proposition $(\hat{4-2})$ et le lemme $(\hat{4-1})$.

$$Q_0(t_0) = P_0\left(\frac{t_0}{a} + x_0\right) = a, \quad \left|t_0 - \frac{\pi}{2}\right| \leq 20\delta_2 \quad (\hat{31}) \quad Q_0(t_0) = \hat{Q}_0(t_0)$$

Par conséquent nous avons $y_0^+ = \frac{t_0}{a} + x_0$ et aussi :

$$\hat{P}_-(y_0^+) = P_-(y_0^+) = Q_{-1}\left(\frac{t_0}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{t_0}{2}\right) + \Delta_{-1}\left(\frac{t_0}{2}\right)$$

Avec $(\hat{30})$ et $(\hat{31})$ nous avons $|P_-(y_0^+) - \sqrt{2}| \leq 20\delta_2$

$$P_-(y_0^+) = P_{-1}^2(y_0^+) (P_0(y_0^+) - 2) + 2$$

Nous concluons que

$$|P_-(y_0^+) + 2| \leq 120\delta_2 \quad (\hat{32})$$

Par $(\hat{29})$, $P_0'(y_0^+) = a Q_0'(t_0) = a (-2 \sin t_0 + \Delta_0'(t_0))$ Par $(\hat{30})$ et $(\hat{31})$

$$\left| \frac{P_0'(y_0^+)}{a} + 2 \right| \leq 2\delta_2 \quad (\hat{33})$$

Par $(\hat{7})$ et $(\hat{32})$, $(\hat{33})$ Pour $k=5, 6$ Nous avons

$$\hat{P}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}} \left[2^{k-3} \rho \right] \right\}^2 (x - y_0^+)^2 + O((x - y_0^+)^3)$$

$$\hat{P}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} \left[\frac{\gamma_k}{8} \rho \right]^2 (x - y_0^+)^2 + O((x - y_0^+)^3)$$

avec $\gamma_k = \sqrt{4^k - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1}}$ $\epsilon_k = \frac{\gamma_k}{8}$

avec $\rho = \sqrt{2 - P_1(y_0^+) | P_0'(y_0^+) P_1(y_0^+) |}$

De plus on a $\frac{\rho}{a} = \sqrt{4 + \varepsilon_1} (2 + \varepsilon_2) (2 + \varepsilon_1)$ avec $\left. \begin{array}{l} |\varepsilon_1| < 120 \delta_2 \\ |\varepsilon_2| < 2 \delta_2 \end{array} \right\}$

Par conséquent nous avons $|\frac{\rho}{8a} - 1| < 100 \delta_2$, $|\frac{8a}{\rho} - 1| < 100 \delta_2$

Pour $k \geq 5$, on a $\hat{Q}_k(x) = \hat{P}_k\left(\frac{x}{\delta_k \rho} + x_0\right)$

Si on définit $\tilde{Q}_k(x) = \hat{P}_k\left(\frac{x}{\varepsilon_k \rho} + y_0^+\right)$ Alors (34)

$$\tilde{Q}_k(x) = 2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} x^2 + O(x^3) = 2 \cos x + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + \tilde{\Delta}_k(x)$$

Or nous avons $\hat{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x) \Rightarrow \tilde{\hat{\Delta}}_k(x) = \tilde{\Delta}_k(x)$

Nous avons besoin de montrer que (\hat{P}_5, \hat{P}_6) est $(\delta_1, 2)$ -régulier, i.e.,

$$|\tilde{\hat{\Delta}}_5(x)|^*, |\tilde{\hat{\Delta}}_6(x)|^* \geq \delta_1 \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{2^m}$$

Pour avoir ce résultat, nous étudions auparavant:

$$\bar{\Delta}(x) := \Delta_k(x + \gamma_k t_0)$$

Nous avons $\hat{P}_k\left(\frac{x}{a} + y_0^+\right) = \hat{Q}_k(\gamma_k(x + t_0)) = \hat{P}_k\left(\frac{x + t_0}{a} + x_0\right)$

$$\hat{P}_k\left(\frac{x}{a} + y_0^+\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 2 \cos(\gamma_k(x + t_0)) + \hat{\Delta}_k(\gamma_k(x + t_0)) \quad (35)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 2 \cos(\gamma_k(x + t_0)) + \bar{\Delta}_k(\gamma_k x)$$

* DANS MON ARTICLE $\bar{\Delta}_k(x) \neq \bar{\Delta}(x)$

$$\bar{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x + 2^k t_0) \quad \text{et} \quad \bar{\hat{\Delta}}(x) := \Delta_k(x + \gamma_k t_0)$$

* ARTICLE DE DÉPART: Par récurrence de P_k , il est facile de vérifier

$$\Psi_0 := \bar{\Delta}_{k-2}, \quad \Psi_1 := \bar{\Delta}_{k-1}, \quad \Psi_2 := \bar{\Delta}_k$$

satisfait (26) avec $\bar{\varepsilon} = 2^k t_0$, $\forall k \geq 1$

D'autre part nous avons

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Delta}_0(x) = \Delta_0(x + t_0) = \sum_{m \geq 0} \frac{\Delta_0^{(m)}(t_0)}{m!} x^m \\ \bar{\Delta}_{-1}(x) = \Delta_{-1}\left(x + \frac{t_0}{2}\right) = \sum_{m \geq 0} \frac{\Delta_{-1}^{(m)}(t_0/2)}{m!} x^m \end{array} \right\}$$

Avec $\beta = 4 - \frac{\pi}{2}$, $\alpha, \alpha_1 = 2, 4, 19$. Avec (30) et (31). Nous avons

$$|\bar{\Delta}_0(x)|^*, |\bar{\Delta}_{-1}(x)|^* \prec 4 \delta_2 \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m}$$

⊗ DANS MON ARTICLE NOUS AVONS :

$$2^k \geq \gamma_k = \sqrt{4^k \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1}} \quad \forall k = -1, 0, \dots$$

De plus page (20) de mon article (PREUVE DE LA PROPOSITION (4.3)).

$$|\Delta_{-1}(x)|^*, |\Delta_0(x)|^* \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{4^m} \quad \text{comme } \bar{\Delta}_k(x) = \Delta_k(x + 2^k t_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{on a donc } \left\{ \begin{aligned} |\bar{\Delta}_0(x)|^* &\prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x+t_0)^m}{4^m} \\ |\bar{\Delta}_{-1}(x)|^* &\prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x+t_0/2)^m}{4^m} \end{aligned} \right. \quad \forall k \geq 1 \end{aligned} \right\}$$

Ainsi on obtient pour l'article

$$|\bar{\Delta}_0(x)|^* \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \gamma_0 t_0)^m}{4^m} \quad |\bar{\Delta}_{-1}(x)|^* \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \gamma_{-1} t_0)^m}{4^m}$$

Du fait que $2^0 \geq \gamma_0$ et $2^{-1} \geq \gamma_{-1}$

$$\begin{aligned} |\bar{\Delta}_{-1}(x)|^* &\prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \gamma_{-1} t_0)^m}{4^m} \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + t_0/2)^m}{4^m} \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + t_0)^m}{4^m} \prec \dots \\ &\prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \frac{\pi}{2} + 0,01)^m}{4^m} \prec \dots \\ &\prec 4 \delta_2 \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} |\bar{\Delta}_0(x)|^* &\prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \gamma_0 t_0)^m}{4^m} \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + t_0)^m}{4^m} \prec \delta_2 \sum_{m \geq 3} \frac{(x + \frac{\pi}{2} + 0,01)^m}{4^m} \prec \dots \\ &\prec 4 \delta_2 \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m} \end{aligned}$$

avec $\beta = 4 - \frac{\pi}{2}$, α, α_1 (30) et (31). $|t_0 - \frac{\pi}{2}| \leq 20 \delta_2 \Rightarrow t_0 \leq \frac{\pi}{2} + 20 \delta_2 \Rightarrow t_0 \leq \frac{\pi}{2} + 0,01$

Nous avons donc comme dans l'article de départ :

$$|\bar{\Delta}_0(x)|^*, |\bar{\Delta}_{-1}(x)|^* \prec 4 \delta_2 \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m}$$

⊗ En page 7 DE L'ARTICLE DE DÉPART :

$$\text{on a } |f(x)|^* := \sum_{m \geq 0} |a_m| x^m$$

$$\left. \begin{aligned} \text{comme nous avons } \left\{ \begin{aligned} \bar{\Delta}_k(x) &:= \Delta_k(x + 2^k t_0) \\ \bar{\Delta}_{-k}(x) &:= \Delta_{-k}(x + \gamma_k t_0) \end{aligned} \right. \quad \left. \begin{aligned} 2^k &\geq \gamma_k \\ \forall k &= -1, 0, \dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

Donc $|\widehat{\Delta}_k(x)|^* = \sum_{m \geq 0} |a_m| (x + \gamma_k t_0)^m \rightsquigarrow |\overline{\Delta}_k(x)|^* = \sum_{m \geq 0} |a_m| (x + 2^k t_0)^m$

on a $\forall k = -1, 0, \dots$

$|\widehat{\Delta}_k(x)|^* \rightsquigarrow |\overline{\Delta}_k(x)|^*$

page 23 de l'ARTICLE DE DÉPART $|\overline{\Delta}_k(x)|^* \rightsquigarrow \frac{\delta_1}{3} \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m}$ (36)

on obtient

$\forall k \quad |\widehat{\Delta}_k(x)|^* \rightsquigarrow \frac{\delta_1}{3} \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{\beta^m}$ (36')

⊛ Par contre nous avons une condition nécessaire et indispensable sur γ_k

$\gamma_k = \sqrt{4^k \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1}} \quad \forall k \geq 1, \quad 4^k \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{k-1} \geq 0$

pour $k = 1 \dots \alpha \leq 2$

pour $k = 0 \dots \alpha \leq 4$ CONDITION SUR α

pour $k = 1 \dots \alpha$ quelconque $1 < \alpha \leq 2$

pour $k \geq 2 \dots \alpha > 1$

⊛ Avec (34) et (35), pour $k = 5, 6$ nous avons

$\widehat{\Delta}_k(x) = \widehat{Q}(x) - 2 \cos x \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$
 $= \widehat{P}_k\left(\frac{x}{\xi_k \rho} + y_0^+\right) - 2 \cos x \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}$

Sachant que

$\widehat{P}_k\left(\frac{x}{\xi_k \rho} + y_0^+\right) = \widehat{P}_k\left(\frac{\frac{x \cdot a}{\xi_k \rho} + y_0^+}{a}\right) = \widehat{P}_k\left(\frac{\frac{x \cdot a}{\xi_k \rho} + t_0}{a} + x_0\right)$
 $= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 2 \cos\left(\gamma_k \left(\frac{x \cdot a}{\xi_k \rho} + t_0\right)\right) + \widehat{\Delta}_k\left(\gamma_k \left(\frac{x \cdot a}{\xi_k \rho} + t_0\right)\right)$
 $= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k - 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1} + 2 \cos\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho} + \gamma_k t_0\right) + \widehat{\Delta}_k\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho}\right)$

$\widehat{\Delta}_k(x) = \widehat{\Delta}_k\left(\frac{8 \cdot a \cdot x}{\rho}\right) + 2 \cos\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho}\right) \cos(\gamma_k t_0) - 2 \sin\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho}\right) \sin(\gamma_k t_0) - 2 \cos(x)$

$\widehat{\Delta}_k(x) = 2 \cos\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho} + \gamma_k t_0\right) + \widehat{\Delta}_k\left(\frac{8 \cdot x \cdot a}{\rho}\right) - 2 \cos(x)$

Sachant que $\left|\frac{8 \cdot a}{\rho}\right| < 100 \delta_2 = 10^{-14}$, Avec (36'), Pour $k = 5, 6$ Nous avons

(37) $|\widehat{\Delta}_k\left(\frac{8 \cdot a \cdot x}{\rho}\right)|^* \rightsquigarrow |\overline{\Delta}_k\left(\frac{8 \cdot a \cdot x}{\rho}\right)|^* \rightsquigarrow \frac{\delta_1}{3} \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{2^m}$

De plus, $|t_0 - \frac{\pi}{2}| < 20 \cdot \delta_2$ implique pour $k=5,6$

$$|\sin \gamma_k t_0| < 1280 \cdot \delta_2, \quad |1 - \cos \gamma_k t_0| < 1280 \cdot \delta_2$$

par conséquent on a :

$$|(2 \sin \gamma_k t_0) \left(\sin \frac{8a}{\rho} x\right)|^* \prec 2560 \delta_2 \sum_{m \geq 1} \frac{\left(\frac{8a}{\rho} x\right)^{2m-1}}{(2m-1)!} \prec \frac{\delta_1}{3} \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{2^m} \quad (\hat{38})$$

Finalement nous avons

$$|(2 \cos \gamma_k t_0) \cos\left(\frac{8a}{\rho} x\right) - 2 \cos x|^* \prec 2 \sum_{m \geq 0} \frac{|(\cos \gamma_k t_0) \cdot \left(\frac{8a}{\rho}\right)^{2m} - 1| \cdot x^{2m}}{(2m)!}$$

$$\prec \frac{\delta_1}{3} \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{2^m} \quad (\hat{39})$$

Où nous avons utilisé le fait que pour $m \leq 14$

$$\left|(\cos \gamma_k t_0) \cdot \left(\frac{8a}{\rho}\right)^{2m} - 1\right| \leq |\cos \gamma_k t_0 - 1| + \left|\left(\frac{8a}{\rho}\right)^{2m} - 1\right| < \frac{\delta_1}{16}$$

Pour $m > 14$

$$2 \frac{|(\cos \gamma_k t_0) \cdot \left(\frac{8a}{\rho}\right)^{2m} - 1|}{(2m)!} < \frac{2 + 2 \cdot (1 + 100 \delta_2)^{2m}}{(2m)!} < \frac{\delta_1}{3 \cdot 2^{2m}}$$

Combinant $(\hat{37})$, $(\hat{38})$ et $(\hat{39})$, nous concluons que pour $k=5,6$

$$|\hat{\Delta}_k(x)|^* = |\hat{Q}_k(x) - 2 \cos x - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k-1}|^* \prec \delta_1 \sum_{m \geq 3} \frac{x^m}{2^m} < \delta_0$$

Ce qui prouve que (\hat{P}_5, \hat{P}_6) est $(\delta_1, 2)$ -régulier en y_0^+ avec un facteur

d'échelle $\sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} [2^3 \rho]$

Par ailleurs nous avons pour (\hat{P}_5, \hat{P}_6) est $(\delta_1, 2)$ -régulier en y_0^+

de façon analogue à la preuve de la proposition $(\hat{4-2})$ nous avons :

$$\frac{4}{\pi} \left| \xi_k \rho \left(x_k^+ - y_0^+ \right) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \right)^k + 4 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{k-1} \quad \text{Pour } k=5,6$$

$$\frac{4}{\pi} \left| \xi_5 \rho \left(x_5^+ - y_0^+ \right) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5 + 4 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4$$

Ce qui implique :

$$\frac{4}{\pi} \left| \xi_5 \rho \left| I_5^+ \right| - \frac{\pi}{2} \right| < 0,01 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \right)^5 + 4 \left(\frac{1}{\alpha} \right)^4$$

D'autre part $(\hat{P}_{-1}, \hat{P}_0) = (P_{-1}, P_0)$ est $(\delta_1, 2)$ régulière en x_0 avec un facteur d'échelle a , nous avons

$$\frac{4}{\pi} \left| a (y_0^+ - x_0) - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0$$

Ce qui implique que :

$$\frac{4}{\pi} \left| a \cdot |I_0^+| - \frac{\pi}{2} \right| < \delta_0$$

Alors on a

$$\frac{|I_s^+|}{|I_0^+|} \gg \frac{1}{8} \frac{8a}{\rho} \frac{1}{\xi_s} \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (\delta_0 - (\frac{1}{\kappa})^5 + 4 (\frac{1}{\kappa})^4)]}{(\frac{\pi}{2} + \delta_0 \cdot \frac{\pi}{4})}$$

$\frac{ I_s^+ }{ I_0^+ } \gg \frac{1}{8} \frac{8a}{\rho} \frac{1}{\xi_s} \frac{[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (0,01 - (\frac{1}{\kappa})^5 + 4 (\frac{1}{\kappa})^4)]}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot 0,01}$	□
---	---

⊗ Pour avoir

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} (0,01 - (\frac{1}{\kappa})^5 + 4 (\frac{1}{\kappa})^4) \gg 0 \Rightarrow 1,11767 \leq \kappa \leq 2$$

Si $\kappa = 1,11767$ $\frac{|I_s^+|}{|I_0^+|} \gg 18,18243^{-5}$

Si $\kappa = 1,4$ $\frac{|I_s^+|}{|I_0^+|} \gg 2,2272^{-5}$

Si $\kappa = 1,5$ $\frac{|I_s^+|}{|I_0^+|} \gg 2,16^{-5}$

Si $\kappa = 2$ $\frac{|I_s^+|}{|I_0^+|} \gg 2,04^{-5}$ □

⊗ DIMENSION DE HAUSDORFF DU SPECTRE DE L'HAMILTONIEN ⊗

DE THUE-MORSE

Cette partie est à démontrer et K est à définir. (Dans l'article de départ

$$K = 140)$$

⊗ Théorème (1-1) : Pour le potentiel de THUE-MORSE w et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\dim_{\mathbb{H}} G(\hat{H}_{\lambda, w}) \geq \dim_{\mathbb{H}} \hat{C} \geq \ln 2 / K^2 \cdot \ln \left[\frac{\delta_K \cdot \left[\frac{\pi}{4} \delta_0 + \frac{\pi}{2} \right]}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \cdot \left(\delta_0 - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^K + 4 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{K-1} \right)} \right]$$

(à démontrer)

Il faut aussi définir $\hat{H}_{\lambda, w}$ à partir de la trace polynomiale

⊗ ON PEUT FAIRE LES MÊMES CALCULS avec la trace polynomiale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_1(x) = x^2 - \lambda^2 \cdot 2 \qquad \hat{h}_2(x) = (x^2 - \lambda^2)^2 - 4x^2 + 2 \\ \text{et pour } m \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\hat{h}_{m+1}(x) = \hat{h}_{m-1}^2(x) \cdot \left(\hat{h}_m(x) - \left[2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^m \right] \right) + 2 + \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{m+1}$$