



**HAL**  
open science

## Estimation robuste de matrices de dispersion structurées pour des modèles bien/mal spécifiés

Bruno Meriaux, Chengfang Ren, Mohammed Nabil El Korso, Arnaud Breloy,  
Philippe Forster

► **To cite this version:**

Bruno Meriaux, Chengfang Ren, Mohammed Nabil El Korso, Arnaud Breloy, Philippe Forster. Estimation robuste de matrices de dispersion structurées pour des modèles bien/mal spécifiés. 28eme Colloque francophone de traitement du signal et des images (GRETSI 2019), Aug 2019, Lille, France. hal-02155887

**HAL Id: hal-02155887**

**<https://hal.science/hal-02155887>**

Submitted on 14 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation robuste de matrices de dispersion structurées pour des modèles bien/mal spécifiés

Bruno MÉRIAUX<sup>1</sup>, Chengfang REN<sup>1</sup>, Mohammed Nabil EL KORSO<sup>2</sup>, Arnaud BRELOY<sup>2</sup>, Philippe FORSTER<sup>3</sup>

<sup>1</sup>SONDRA, CentraleSupélec, 3 rue Joliot Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup>LEME EA-4416, Université Paris-Nanterre, 50 rue de Sèvres, 92410, Ville d’Avray, France

<sup>3</sup>SATIE, Université Paris-Nanterre, 61 Avenue du Président Wilson, 94230, Cachan, France

bruno.meriaux@centralesupelec.fr, chengfang.ren@centralesupelec.fr, m.elkors@parisnanterre.fr, abreloy@parisnanterre.fr, philippe.forster@parisnanterre.fr

**Résumé** – Dans la plupart des méthodes récentes en traitement du signal, les données sont modélisées par des distributions non gaussiennes, dont la matrice de covariance possède une structure particulière. Prendre ces propriétés en compte dans le processus d’estimation améliore nettement la qualité des estimées. Dans ce papier, nous considérons l’estimation de matrices de dispersion structurées, où le modèle *supposé* peut différer du *vrai* modèle des données. Plus précisément, nous proposons une nouvelle classe d’estimateurs dénommée *StructurEd ScAtter Matrix Estimator* (SESAME) dans un contexte de modèles mal spécifiés. Nous menons aussi une analyse théorique de leurs performances asymptotiques.

**Abstract** – In most modern signal processing applications, observations are generally modeled by non-Gaussian distributions with covariance matrices exhibiting a particular structure. Taking these properties into account in the estimation scheme improves drastically the estimation accuracy. In this paper, we consider the estimation of structured scatter matrix, where the *assumed* model can differ from the *true* model of the data. Specifically, we propose a novel class of estimators, named *StructurEd ScAtter Matrix Estimator* (SESAME) in the mismatched framework. We also conduct a theoretical analysis of its asymptotic performance.

## 1 Introduction

La Matrice de Covariance (MC) joue un rôle crucial dans la plupart des algorithmes en traitement du signal adaptatif [1,2]. Dans de nombreuses applications, elle possède une structure spécifique, e.g., Toeplitz hermitienne, en plus d’être semi-définie positive [3]. Prendre en compte cette structure dans le processus d’estimation apporte généralement un gain en terme de précision. Dans un contexte d’estimation robuste, la classe des distributions Complexes Elliptiquement Symétriques (CES) [4] se révèle intéressante pour modéliser des observations issues d’environnement impulsif [5]. On peut alors citer les travaux de [6–8] sur l’estimation robuste de matrices de dispersion structurées. Dans la plupart des problèmes, l’hypothèse principale concerne la “bonne” connaissance du modèle des données. Cependant, des erreurs de modèles sont souvent inévitables en pratique, dues à la connaissance imparfaite du *vrai* modèle sous-jacent. Dans la littérature, le problème de modèles mal spécifiés a été étudié, par exemple, avec l’extension de la Borne de Cramér Rao *Mismatch* (BCRM) [9–11].

Dans ce papier, nous introduisons une classe d’estimateurs de matrices de dispersion structurées, dénommée *StructurEd ScAtter Matrix Estimator* (SESAME), dans

le contexte de modèles potentiellement mal spécifiés. Une analyse théorique des performances asymptotiques de l’estimateur proposé est aussi menée. De plus, la méthode SESAME est reliée à deux méthodes existantes dans des cas particuliers : la méthode COMET [12] pour un modèle *supposé* gaussien et le principe d’invariance étendu (EXIP) [13] appliqué aux distributions CES dans le cas d’un modèle bien spécifié (voir [8] pour la *t*-distribution).

## 2 Formalisation du problème

Un vecteur aléatoire (v.a.)  $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^m$  suit une loi CES centrée si et seulement s’il admet la représentation stochastique suivante [4] :

$$\mathbf{y} \stackrel{d}{=} \sqrt{Q}\mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (1)$$

où la variable aléatoire non négative  $Q$  est indépendante du v.a.  $\mathbf{u}$  uniformément réparti sur la sphère unité  $\mathbf{C}\mathbf{S}^k \triangleq \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^k \mid \|\mathbf{z}\| = 1\}$  avec  $k \leq m$ . La matrice  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times k}$  est de rang  $k$ . Par ailleurs, sous réserve d’existence, la MC de  $\mathbf{y}$  est proportionnelle à la matrice de dispersion  $\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H$ . Dans la suite, on suppose  $k = m$ , ainsi  $\text{rang}(\mathbf{R}) = m$  et la densité de probabilité (ddp) d’un tel v.a. existe et

s'écrit comme [4] :

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}; \mathbf{R}, g) \propto |\mathbf{R}|^{-1} g(\mathbf{y}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}), \quad (2)$$

dans laquelle la fonction  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , appelée générateur de densité, satisfait  $\delta_{m,g} \triangleq \int_0^{+\infty} t^{m-1} g(t) dt < \infty$ . On note alors  $\mathbf{y} \sim \mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{R}, g)$ .

Soit  $N$  données i.i.d. suivant une distribution CES centrée,  $\mathbf{y}_n \sim \mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{R}_e, g)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , avec  $N > m$ . Un  $M$ -estimateur de la matrice de dispersion,  $\mathbf{R}_e$ , est défini comme solution de l'équation au point-fixe suivante :

$$\widehat{\mathbf{M}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u(\mathbf{y}_n^H \widehat{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{y}_n) \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \triangleq \mathcal{H}(\widehat{\mathbf{M}}). \quad (3)$$

Dans le cas de l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance (EMV), la fonction  $u(\cdot)$  est donnée par  $u(s) = -\frac{g'(s)}{g(s)}$ , où  $g'(\cdot)$  désigne la dérivée de  $g(\cdot)$ . Dans un contexte d'estimation robuste, elle doit simplement satisfaire certaines conditions pour garantir l'existence et l'unicité de la solution [4, 14]. De plus, l'équation

$$\mathbf{M} = \mathbb{E} [u(\mathbf{y}_1^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}_1) \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1^H], \quad (4)$$

admet une unique solution  $\mathbf{M}$  telle que  $\mathbf{M} = \sigma^{-1} \mathbf{R}_e$  avec  $\sigma$  la solution de  $\mathbb{E} [\psi(\sigma|\mathbf{t}|^2)] = m$  où  $\mathbf{t} \sim \mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}, g)$  et  $\psi(s) = su(s)$ . Par ailleurs, l'algorithme itératif  $\mathbf{M}_{k+1} = \mathcal{H}(\mathbf{M}_k)$  converge vers  $\widehat{\mathbf{M}}$ , quelle que soit l'initialisation et on a  $\widehat{\mathbf{M}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{M}$ . Enfin, la distribution asymptotique de  $\widehat{\mathbf{M}}$  est donnée dans [15].

La fonction  $g(\cdot)$  caractérisant la *vraie* distribution est *inconnue* en pratique. On note  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_n; \mathbf{R}_e)$  la *vraie* ddp de  $\mathbf{y}_n$ . On suppose seulement que les observations suivent une loi CES centrée de ddp  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_n; \mathbf{R})$ , i.e., les données  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  sont supposées être échantillonnées d'une loi  $\mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{R}, g_{\text{mod}})$ , avec  $g_{\text{mod}}(t)$  potentiellement différent de  $g(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ . L'erreur de modèle considérée porte uniquement sur le générateur de densité. Par ailleurs, on suppose que la matrice de dispersion appartient à un sous-ensemble convexe des matrices hermitiennes, pour lesquelles il existe une paramétrisation bijective différentiable  $\boldsymbol{\mu} \mapsto \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})$  de  $\mathbb{R}^P$  vers  $\mathcal{S}$ . On cherche donc à estimer le vecteur  $\boldsymbol{\mu}$  de vraie valeur  $\boldsymbol{\mu}_e$ , et  $\mathbf{R}_e = \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}_e)$  correspond à la vraie matrice de dispersion structurée.

### 3 Méthode SESAME

Dans cette section, nous proposons un algorithme en 2 étapes pour l'estimation de  $\boldsymbol{\mu}$ , pour lequel une analyse théorique des performances asymptotiques est conduite.

#### 3.1 Algorithme

A partir de la distribution *supposée* sur les données,  $\mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}), g_{\text{mod}})$ , on calcule d'abord l'EMV non structuré de la matrice de dispersion,  $\widehat{\mathbf{R}}_m$ , qui est la solution

---

#### Algorithme 1 SESAME

---

**Entrées :**  $\mathbf{y}_n \sim \mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{R}_e, g)$ ,  $n = 1 \dots N$  i.i.d. avec  $N > m$

- 1: Calculer  $\widehat{\mathbf{R}}_m$  à partir de  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  avec (3)
  - 2: Calculer  $\widehat{\mathbf{R}}$  à partir de  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N$  (tout estimateur consistant de  $\mathbf{R}_e$  à un facteur d'échelle près)
  - 3: **Sortie :**  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{SESAME}}$  en minimisant  $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu})$  (voir (5) ou (6).)
- 

de (3) avec  $u(s) = -\frac{g'_{\text{mod}}(s)}{g_{\text{mod}}(s)} \triangleq u_{\text{mod}}(s)$ . D'après [4], on

a  $\widehat{\mathbf{R}}_m \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma^{-1} \mathbf{R}_e$  et sa distribution asymptotique est aussi connue.

Pour la deuxième étape, on estime  $\boldsymbol{\mu}$  en minimisant le critère suivant  $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu})$  :

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\mu}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu}) \quad \text{avec} \\ \mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu}) &= \kappa_1 \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{R}}_m - \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}) \right) \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{R}}_m - \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}) \right) \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left[ \text{Tr} \left( \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \left( \widehat{\mathbf{R}}_m - \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}) \right) \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (5)$$

où  $\widehat{\mathbf{R}}$  désigne n'importe quel estimateur consistant de  $\mathbf{R}_e$  à un facteur d'échelle près, tel que par exemple  $\widehat{\mathbf{R}}_m$ . Les coefficients intervenant dans le critère  $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu})$  sont tels

que  $\kappa_1 = \frac{\mathbb{E}_{f_{\mathbf{Y}}} [\psi_{\text{mod}}^2(|\mathbf{t}_{\text{mod}}|^2)]}{m(m+1)} \neq 0$  et  $\kappa_2 = \kappa_1 - 1$ , où

$\mathbf{t}_{\text{mod}} \sim \mathcal{CES}_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}, g_{\text{mod}})$  et  $\psi_{\text{mod}}(s) = su_{\text{mod}}(s)$ . On rappelle que  $f_{\mathbf{Y}}$  est la ddp *supposée* de  $\mathbf{y}_n$ . En utilisant les relations entre les opérateurs trace et de vectorisation, on peut réécrire (5) comme

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\mu}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} (\widehat{\mathbf{r}}_m - \mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}))^H \widehat{\mathbf{Y}} (\widehat{\mathbf{r}}_m - \mathbf{r}(\boldsymbol{\mu})) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \left\| \widehat{\mathbf{Y}}^{1/2} (\widehat{\mathbf{r}}_m - \mathbf{r}(\boldsymbol{\mu})) \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $\widehat{\mathbf{Y}} = \kappa_1 \widehat{\mathbf{W}}^{-1} + \kappa_2 \text{vec} \left( \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \right) \text{vec} \left( \widehat{\mathbf{R}}^{-1} \right)^H$ ,  $\widehat{\mathbf{W}} = \widehat{\mathbf{R}}^T \otimes \widehat{\mathbf{R}}$ ,

$\widehat{\mathbf{r}}_m = \text{vec} \left( \widehat{\mathbf{R}}_m \right)$  et  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}) = \text{vec} \left( \mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}) \right)$ . Ainsi  $\mathcal{R}(\widehat{\boldsymbol{\mu}})$  fournit une estimée structurée de  $\mathbf{R}_e$ . L'algorithme SESAME est résumé dans l'encadré Algorithme 1. En pratique, on choisit  $\widehat{\mathbf{R}} = \widehat{\mathbf{R}}_m$  et on minimise la fonctionnelle  $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}_m}(\boldsymbol{\mu})$ .

Étant donné  $\widehat{\mathbf{R}}_m$  et  $\widehat{\mathbf{R}}$ , la fonction  $\mathcal{J}_{\widehat{\mathbf{R}}_m, \widehat{\mathbf{R}}}(\boldsymbol{\mu})$  est convexe par rapport à  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})$ . Ainsi, pour  $\mathbf{R} \in \mathcal{S}$  sous-ensemble convexe, la minimisation de (6) par rapport à  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu})$  est un problème convexe qui admet une unique solution. Par conséquent, la bijectivité de la paramétrisation garantit l'unicité de  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ .

#### 3.2 Analyse asymptotique

Cette section fournit une analyse statistique des performances asymptotiques de l'estimateur proposé,  $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ , dans un

cadre de modèle mal spécifié, i.e. la fonction  $g_{\text{mod}}$  pouvant être différente de la *vraie* fonction  $g$ .

Dans ce contexte, on introduit classiquement le *pseudo*-paramètre  $\boldsymbol{\mu}_0$  [9–11] pour mener une analyse asymptotique. Ce dernier est défini comme le minimiseur de la divergence de Kullback-Leibler (DKL) entre la *vraie* distribution et celle *supposée*, i.e.,

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{D}(p_{\mathbf{Y}} \| f_{\boldsymbol{\mu}}) = \arg \max_{\boldsymbol{\mu}} \mathbb{E}_{p_{\mathbf{Y}}} [\log f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_n; \boldsymbol{\mu})], \quad (7)$$

où  $\mathcal{D}(p_{\mathbf{Y}} \| f_{\boldsymbol{\mu}}) \triangleq \mathbb{E}_{p_{\mathbf{Y}}} \left[ \log \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_n; \boldsymbol{\mu}_e)}{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}_n; \boldsymbol{\mu})} \right]$ . Dans la suite, on suppose toujours l'existence et l'unicité de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (voir [10] pour des conditions nécessaires et suffisantes).

**Théorème 1.** L'estimée,  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ , obtenue par (5), est consistante vers  $\boldsymbol{\mu}_0$  défini par (7) (respectivement  $\mathcal{R}(\hat{\boldsymbol{\mu}})$  vers  $\sigma^{-1}\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}_e)$ ).

*Preuve succincte.* Grâce à la consistance de  $\hat{\mathbf{R}}_m \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma^{-1}\mathbf{R}_e$ , on peut montrer celle de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  vers un vecteur  $\boldsymbol{\mu}_c$  défini par  $\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}_c) = \sigma^{-1}\mathcal{R}(\boldsymbol{\mu}_e)$ . Ensuite, en explicitant le minimum de la DKL de (7) et en utilisant l'unicité de la solution de (4), on montre que  $\boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{\mu}_c$ . ■

**Théorème 2.** Soit  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  l'estimateur SESAME de  $\boldsymbol{\mu}_e$  obtenu avec l'Algorithme 1. Alors, on a

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{BCRM}), \quad (8)$$

avec  $\mathbf{BCRM}$  est la BCRM dérivée à partir de [11].

*Preuve succincte.* La première étape consiste à montrer que la distribution asymptotique de  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  est de la forme

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\mu}}). \quad (9)$$

Ceci s'obtient à partir de la distribution asymptotique de  $\hat{\mathbf{R}}_m$  [15] et de la méthode delta [16, Chapitre 3] sur une paramétrisation bijective et différentiable. La deuxième étape consiste à montrer l'égalité entre  $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{\mu}}$  obtenue précédemment et  $\mathbf{BCRM}$  donnée dans [11] en utilisant notamment la formule de Sherman-Morrison [17]. ■

Par manque de place, nous ne présentons que les étapes principales des preuves des Théorèmes 1 et 2. Le détail des calculs sera disponible dans un prochain papier de revue.

### 3.3 Cas particuliers

Dans des cas particuliers, on peut relier l'estimateur SESAME à des méthodes déjà existantes dans la littérature.

Le premier cas concerne l'hypothèse d'un modèle gaussien pour les données. Ce choix assez courant mène généralement à une dérivation plus simple des algorithmes, notamment utile pour une implémentation en temps réel. Cependant, leurs performances peuvent être fortement dégradées en présence de données aberrantes ou d'hétérogénéité dans les données. La méthode COMET introduite

dans [12] s'avère être un cas particulier de SESAME. En effet, elle est obtenue en minimisant le critère  $\mathcal{J}_{\hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}}, \hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}}}(\boldsymbol{\mu})$  dans lequel  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 0$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}}$  est la matrice de covariance empirique,  $\hat{\mathbf{R}}_{\text{SCM}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H$ .

Le deuxième cas est celui d'une connaissance correcte du modèle, ainsi celui *supposé* pour l'algorithme correspond au *vrai* modèle des données. Dans ce cas-là, la méthode SESAME équivaut alors au principe EXIP [13] dérivé pour les distributions CES (voir [8] pour la  $t$ -distribution). On retrouve donc les performances asymptotiques garanties par l'utilisation de ce principe, en particulier  $\boldsymbol{\mu}_0 = \boldsymbol{\mu}_e$  et :

$$\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_e) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{F}^{-1}), \quad (10)$$

où  $\mathbf{F}$  est la matrice d'information de Fisher, dont l'expression est donnée dans [18].

## 4 Résultats numériques

Dans cette partie, on illustre les résultats de l'analyse théorique précédente pour la structure Toeplitz avec  $m = 5$  et 10000 Monte-Carlo. Les données suivent une loi de Weibull multivariée de paramètres  $b = 2$  et  $s = 0,8$  [4]. On considère 2 scénarios de malspécifications :

- \* Cas 1 : le modèle *supposé* est gaussien. On utilise donc l'algorithme COMET de [12], donnant l'estimateur noté  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(1)}$  et le *pseudo*-paramètre  $\boldsymbol{\mu}_0^{(1)}$ .
- \* Cas 2 : le modèle *supposé* est une  $t$ -distribution à  $d_{\text{mod}} = 2$  degrés de liberté, donnant l'estimateur noté  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(2)}$  et le *pseudo*-paramètre  $\boldsymbol{\mu}_0^{(2)}$ .

On calcule aussi l'estimateur pour le modèle bien spécifié noté  $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(E)}$ , i.e., celui obtenu avec le principe EXIP. On compare enfin les performances des différents estimateurs SESAME avec les BCR(M) associées aux modèles respectifs à travers la Pseudo Erreur Quadratique Moyenne (PEQM) définie par rapport au *pseudo*-paramètre  $\boldsymbol{\mu}_0$  :

$$\text{PEQM}_{\boldsymbol{\mu}_0}(\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbb{E} \left[ (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\hat{\boldsymbol{\mu}} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \right]$$

Sur la Fig. 1, on peut voir que les différents estimateurs SESAME atteignent asymptotiquement leur BCR(M) respectives. La consistance des estimateurs peut aussi être observée sur la Fig. 1.

## 5 Conclusion

Dans ce papier, nous avons introduit une classe d'algorithmes d'estimation de matrices de dispersion structurées dans un cadre de modèles bien/mal spécifiés. De plus, nous avons conduit une analyse théorique des performances asymptotiques de la méthode proposée. Enfin, des méthodes déjà existantes dans la littérature s'avèrent être des cas particuliers de notre approche.

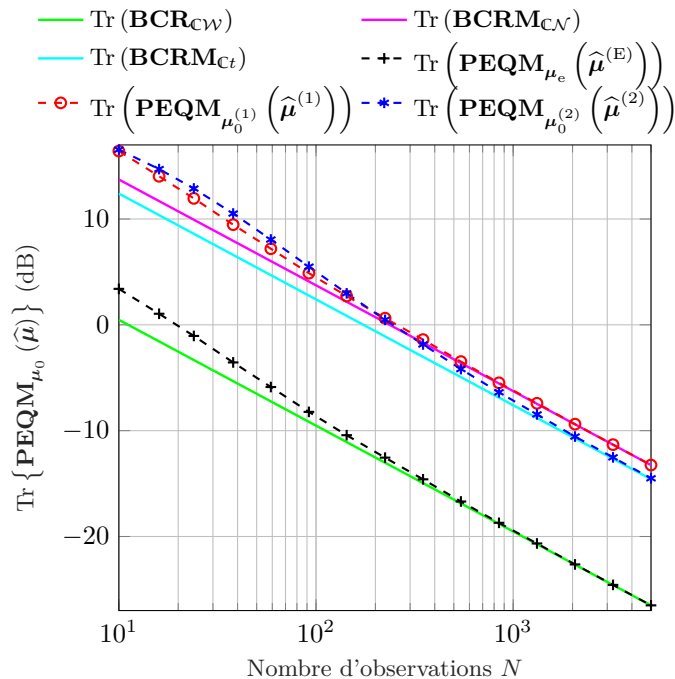


Fig. 1 – PEQM des estimateurs SESAME

## Remerciements

B. Mériaux remercie la D.G.A. ainsi que le projet ANR ASTRID, n° ANR-17-ASTR-0015, pour leur support financier.

## Références

- [1] J. Fan, Y. Fan, and J. Lv, “High dimensional covariance matrix estimation using a factor model,” *Journal of Econometrics*, vol. 147, no. 1, pp. 186–197, Sep. 2008.
- [2] B. Mériaux, X. Zhang, M. N. El Korso, and M. Pesavento, “Iterative marginal maximum likelihood DOD and DOA estimation for MIMO radar in the presence of SIRP clutter,” *Elsevier Signal Processing*, vol. 155, pp. 384–390, Feb. 2019.
- [3] M. Haardt, M. Pesavento, F. Röemer, and M. N. El Korso, “Subspace methods and exploitation of special array structures,” in *Array and Statistical Signal Processing*, ser. Academic Press Library in Signal Processing. Elsevier, Jan. 2014, vol. 3, ch. 15, pp. 651–717.
- [4] E. Ollila, D. E. Tyler, V. Koivunen, and H. V. Poor, “Complex elliptically symmetric distributions : Survey, new results and applications,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 60, no. 11, pp. 5597–5625, 2012.
- [5] K. D. Ward, C. J. Baker, and S. Watts, “Maritime surveillance radar. part 1 : Radar scattering from the ocean surface,” *IEE Proceedings F (Communications,*

*Radar and Signal Processing)*, vol. 137, no. 2, pp. 51–62, Apr. 1990.

- [6] Y. Sun, P. Babu, and D. P. Palomar, “Robust estimation of structured covariance matrix for heavy-tailed elliptical distributions,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 14, no. 64, pp. 3576–3590, Jul. 2016.
- [7] I. Soloveychik and A. Wiesel, “Tyler’s covariance matrix estimator in elliptical models with convex structure,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 62, no. 20, pp. 5251–5259, Oct. 2014.
- [8] B. Mériaux, C. Ren, M. N. El Korso, A. Breloy, and P. Forster, “Efficient estimation of scatter matrix with convex structure under t-distribution,” in *Proc. of IEEE ICASSP*, Apr. 2018, pp. 4474–4478.
- [9] H. White, “Maximum likelihood estimation of misspecified models,” *Econometrica*, vol. 50, no. 1, pp. 1–25, 1980.
- [10] S. Fortunati, F. Gini, and M. S. Greco, “The misspecified Cramér-Rao bound and its application to scatter matrix estimation in complex elliptically symmetric distributions,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 64, no. 9, pp. 2387–2399, May 2016.
- [11] A. Mennad, S. Fortunati, M. N. El Korso, A. Younsi, A. M. Zoubir, and A. Renaux, “Slepian-Bangs-type formulas and the related misspecified Cramér-Rao bounds for complex elliptically symmetric distributions,” *Elsevier Signal Processing*, vol. 142, pp. 320–329, Jul. 2017.
- [12] B. Ottersten, P. Stoica, and R. Roy, “Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications,” *Elsevier Digital Signal Processing*, vol. 8, no. 3, pp. 185–210, 1998.
- [13] P. Stoica and T. Söderström, “On reparametrization of loss functions used in estimation and the invariance principle,” *Elsevier Signal Processing*, vol. 17, no. 4, pp. 383–387, 1989.
- [14] R. A. Maronna, “Robust M-estimators of multivariate location and scatter,” *The Annals of Statistics*, vol. 4, no. 1, pp. 51–67, Jan. 1976.
- [15] M. Mahot, F. Pascal, P. Forster, and J.-P. Ovarlez, “Asymptotic properties of robust complex covariance matrix estimates,” *IEEE Trans. on Signal Process.*, vol. 61, no. 13, pp. 3348–3356, Jul. 2013.
- [16] A. W. Van der Vaart, *Asymptotic Statistics (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics)*. Cambridge University Press, 2000, vol. 3.
- [17] K. S. Miller, “On the inverse of the sum of matrices,” *Mathematics Magazine*, vol. 54, no. 2, pp. 67–72, 1981.
- [18] O. Besson and Y. I. Abramovich, “On the fisher information matrix for multivariate elliptically contoured distributions,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 11, pp. 1130–1133, Nov. 2013.