

Triangle Width

de l'ordonnancement à la théorie des graphes

Luc Libralesso^{*1}, Vincent Jost¹, Khadija Hadj-Salem²,
Frédéric Maffray¹, Florian Fontan¹

21 Février 2019

¹ Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G-SCOP, 38000 Grenoble, France

² Université de Tours, LIFAT EA 6300, CNRS, ROOT ERL CNRS 7002, 64 avenue Jean Portalis, 37200 Tours

* luc.libralesso@grenoble-inp.fr

Description du problème

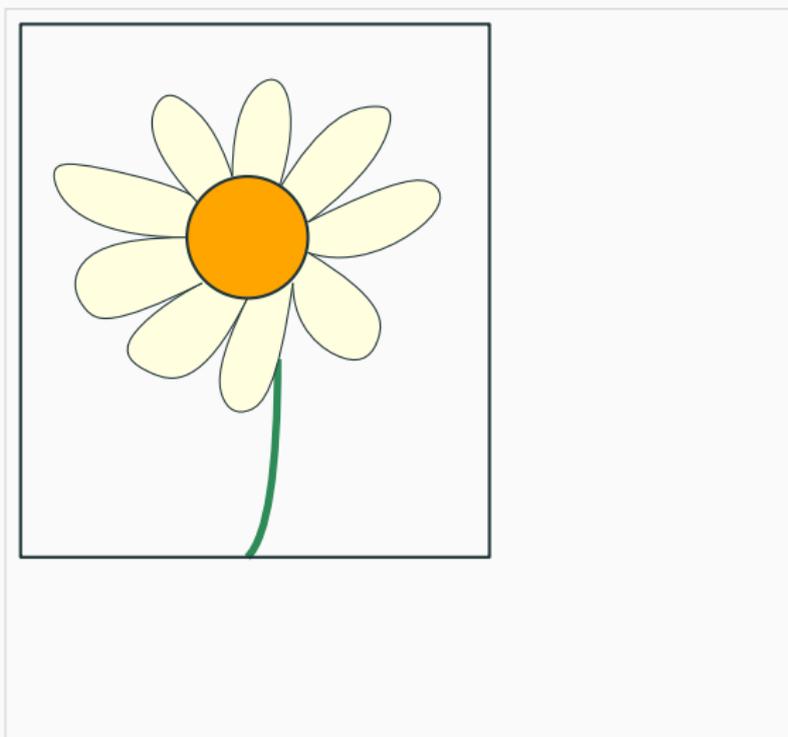


FIG. 1: Illustration du processus

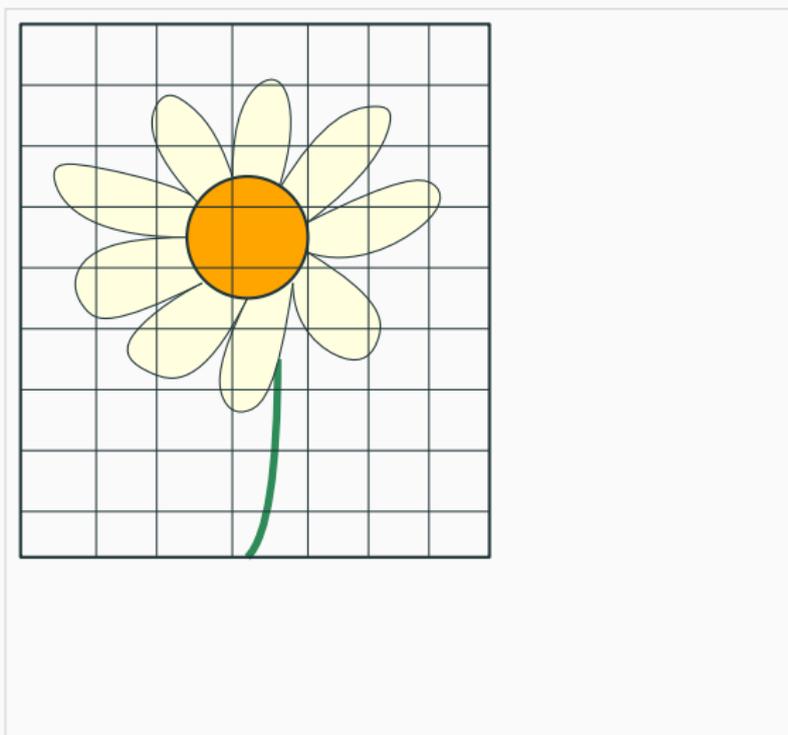


FIG. 2: Illustration du processus - division en parties

Optimisation de système de vision embarquée

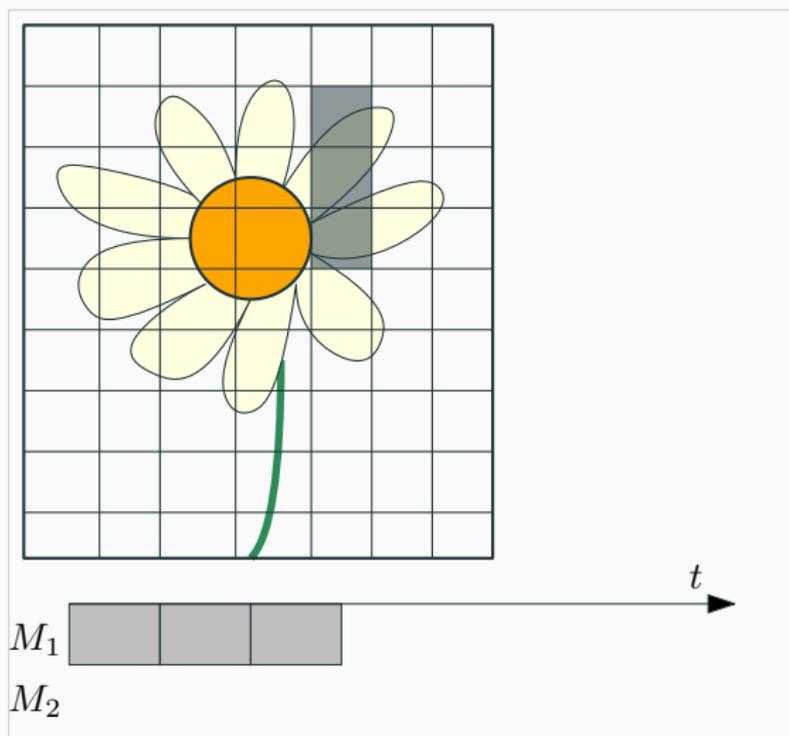


FIG. 3: Illustration du processus - chargement des prérequis pour la tâche 1

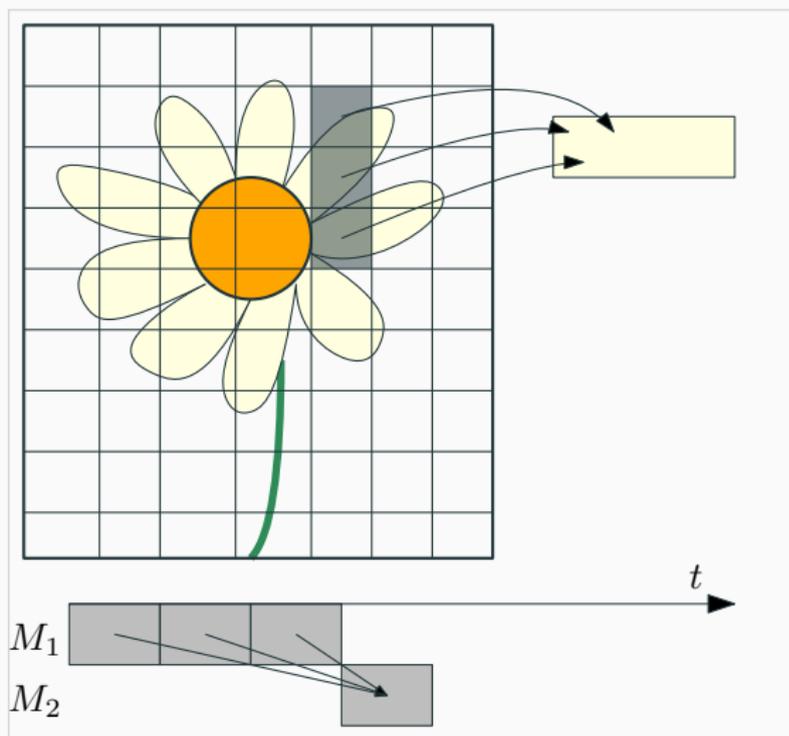


FIG. 4: Illustration du processus - exécution de la tâche 1

Optimisation de système de vision embarquée

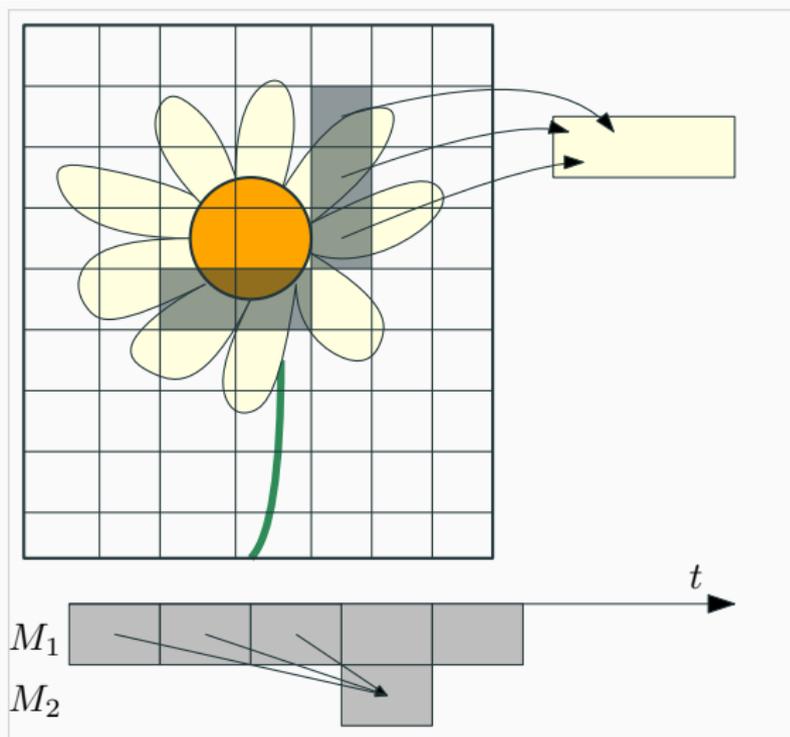


FIG. 5: Illustration du processus - chargement des prérequis pour la tâche 2

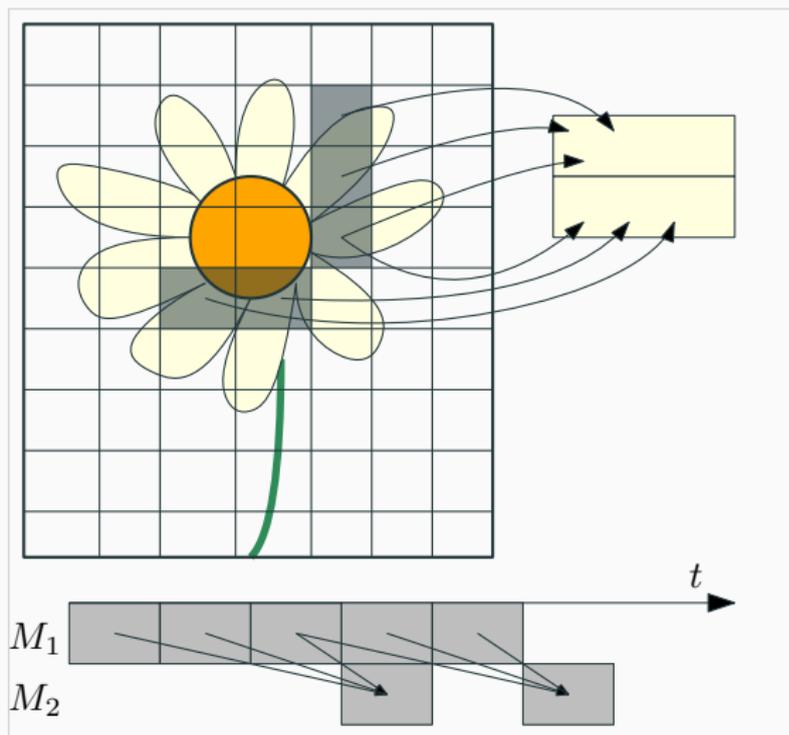


FIG. 6: Illustration du processus - exécution de la tâche 2

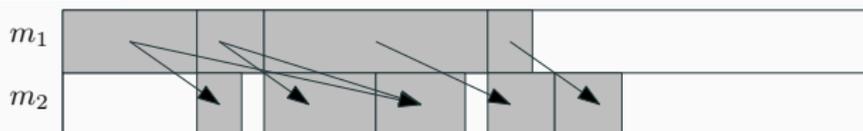


FIG. 7: triangle width - version scheduling

Entrées:

- \mathcal{X} : ensemble de parties d'image
- \mathcal{Y} : ensemble de tâches à effectuer
- relation de précédence

Optimisation de système de vision embarquée



FIG. 7: triangle width - version scheduling

Entrées:

- \mathcal{X} : ensemble de parties d'image
- \mathcal{Y} : ensemble de tâches à effectuer
- relation de précédence

Sorties:

- Ordres $\sigma_{\mathcal{X}}, \sigma_{\mathcal{Y}}$ sur les parties/tâches.
- Sous contrainte de précédence
- minimise la durée totale (Makespan)

- Toutes les durées sont quelconques ($\in \mathcal{R}^+$)
- Nous nous intéressons au cas:
 - $duree(x \in \mathcal{X}) = \alpha$
 - $duree(y \in \mathcal{Y}) = \beta$
- et au cas où toutes les durées sont unitaires
- tous ces cas sont \mathcal{NP} -Hard

Représentation sous forme de matrice

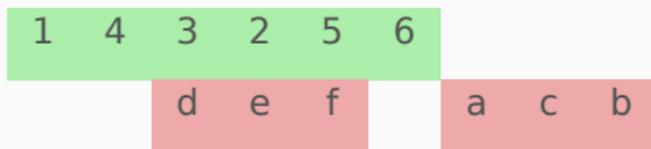


FIG. 8: Exemple d'ordonnement

toutes les durées sont unitaires

Représentation sous forme de matrice

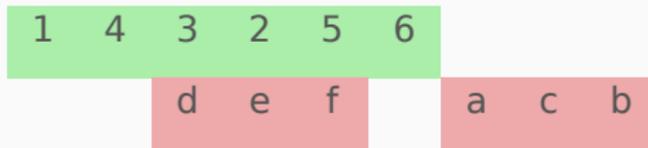


FIG. 8: Exemple d'ordonnement

toutes les durées sont unitaires

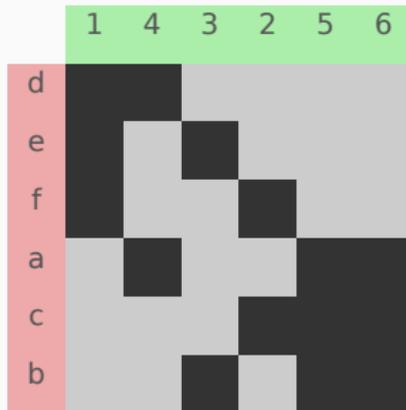


FIG. 9: Exemple de matrice pour triangle width

THÉORÈME:

min. makespan \iff max. triangle supérieur droit

Play time!

<http://librallu.gitlab.io/hypergraph-viz>

THÉORÈME:

Une permutation suffit à encoder le problème

THÉORÈME:

Une permutation suffit à encoder le problème

INTÉRÊT: On définit un problème de visite de graphe équivalent à triangle width.

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

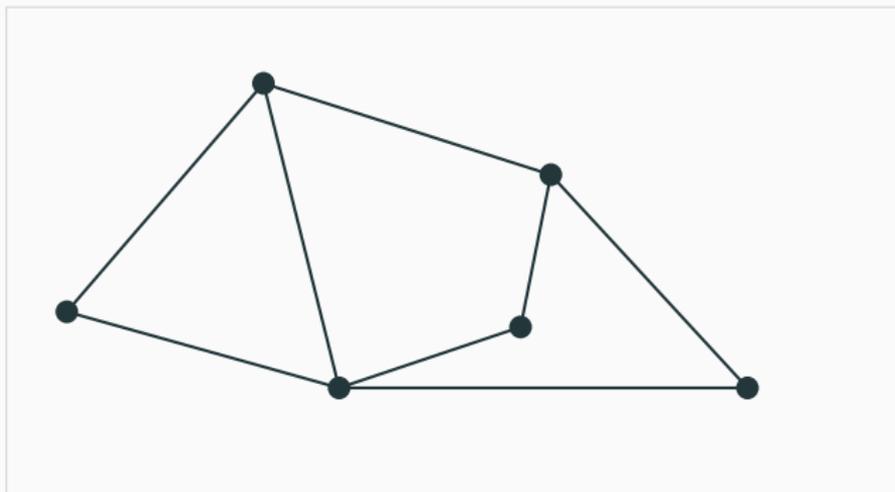


FIG. 10: $i = 0$, fuel: 10

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

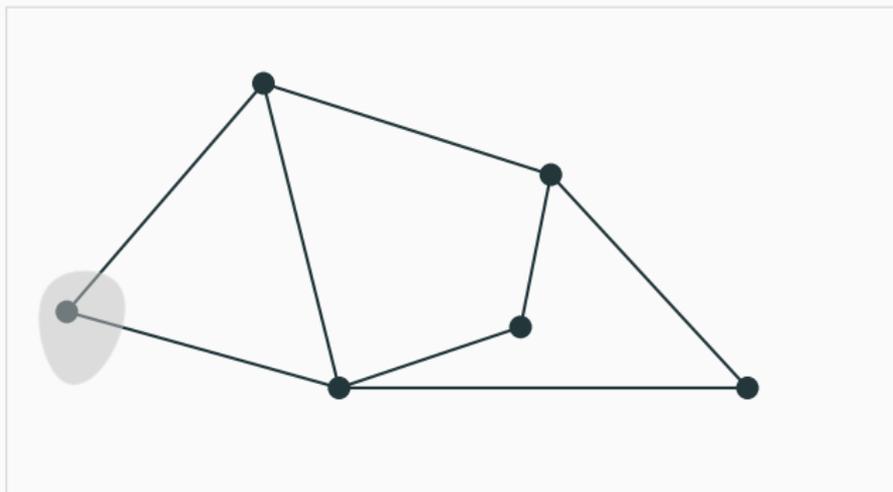


FIG. 11: $i = 1$, fuel: $10 - 3 = 7$

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

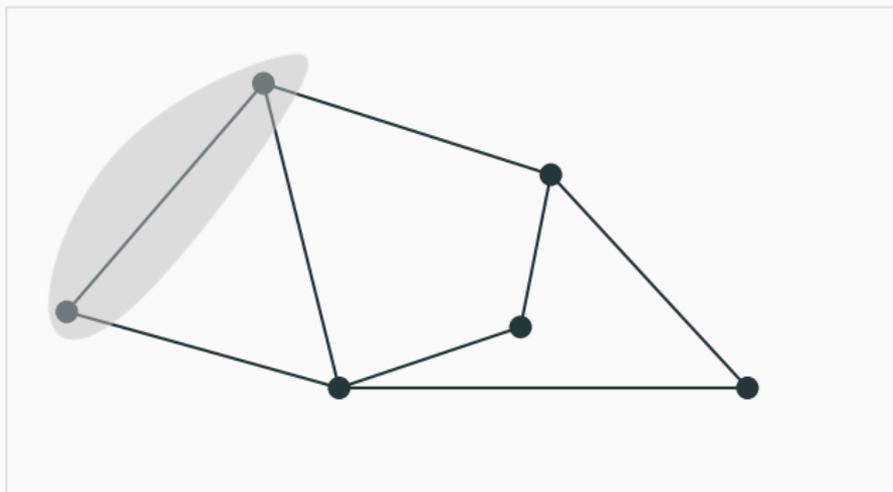


FIG. 12: $i = 2$, fuel: $7 - 3 + 1 = 5$

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

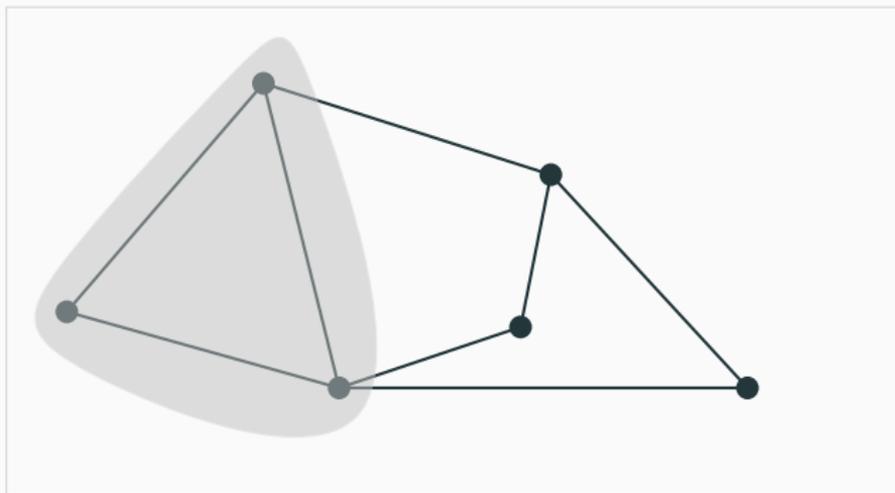


FIG. 13: $i = 3$, fuel: $5 - 3 + 2 = 4$

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

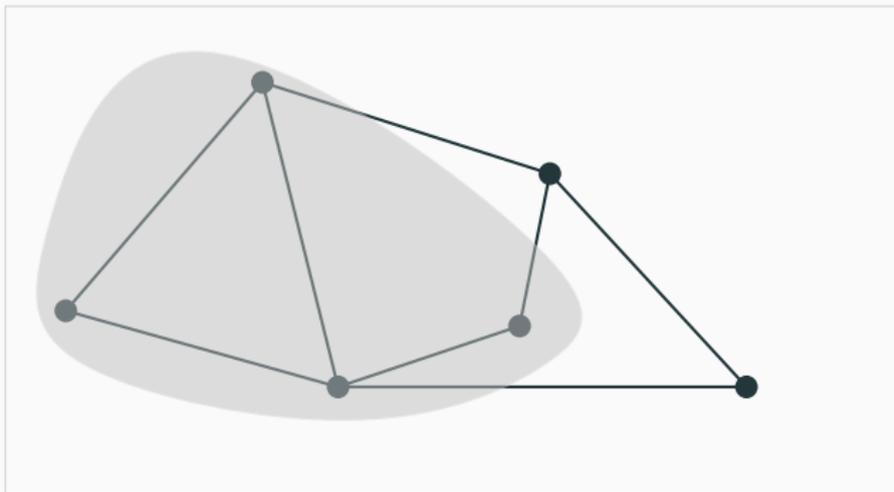


FIG. 14: $i = 4$, fuel: $4 - 3 + 1 = 2$

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

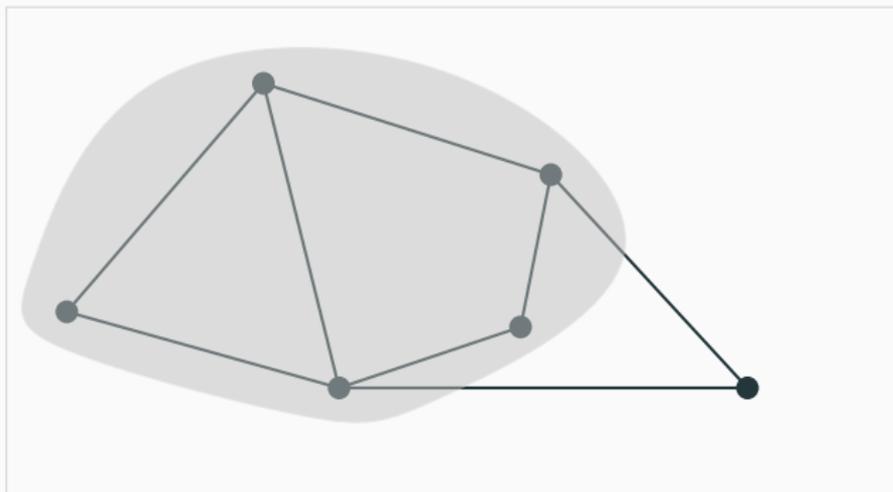


FIG. 15: $i = 5$, fuel: $2 - 3 + 2 = 1$

Reformulation en parcours de (Hyper-)graphe

- Les sommets coûtent 3
- Les arêtes rapportent 1

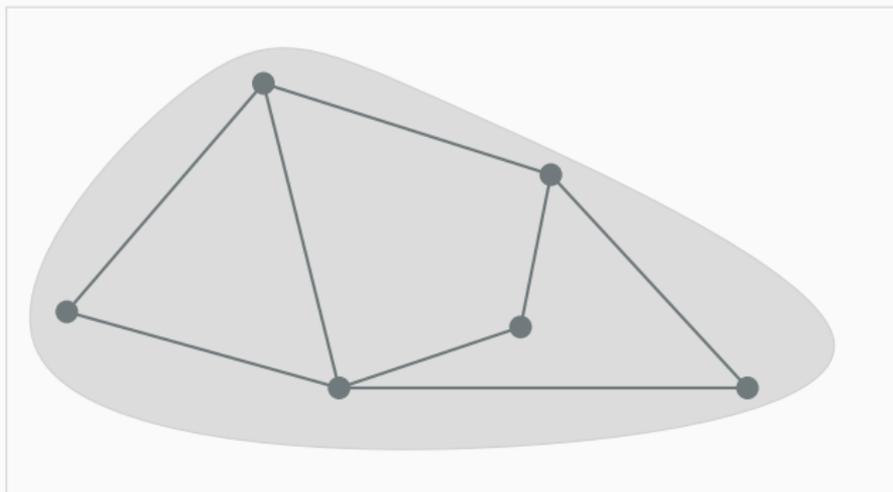


FIG. 16: $i = 6$, fuel: $1 - 3 + 2 = 0$

Quelques résultats

Le problème est \mathcal{NP} -Difficile

Réduction depuis CLIQUE:

clique de taille k dans $G \iff$ visite avec coût de k

$$fuel = \frac{k(k+3)}{2}$$

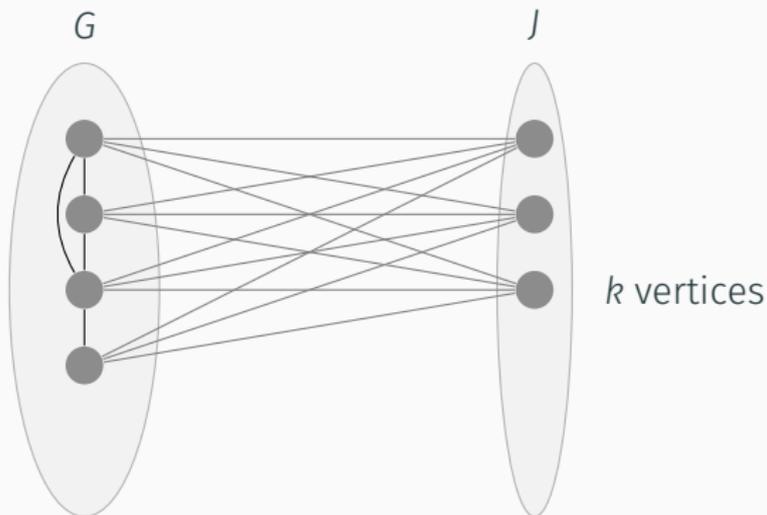


FIG. 17: graphe Gadget

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)
- Fertin, Rusu, Vialette ([FRV15]) réfutent la preuve en 2015

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)
- Fertin, Rusu, Vialette ([FRV15]) réfutent la preuve en 2015
- donnent une nouvelle preuve

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)
- Fertin, Rusu, Vialette ([FRV15]) réfutent la preuve en 2015
- donnent une nouvelle preuve
- elle aussi longue...

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)
- Fertin, Rusu, Vialette ([FRV15]) réfutent la preuve en 2015
- donnent une nouvelle preuve
- elle aussi longue...

Permutation de matrice 0/1 pour la rendre triangulaire

- Question posée par Wilf([Wil93]) en 1993
- Répondue par DasGupta [DJK⁺98]) en 1998 (\mathcal{NP} -Hard)
- Fertin, Rusu, Vialette ([FRV15]) réfutent la preuve en 2015
- donnent une nouvelle preuve
- elle aussi longue...

En utilisant Triangle Width, nouvelle preuve plus courte

Is a matrix permutation-wise diagonal est \mathcal{NP} -Difficile

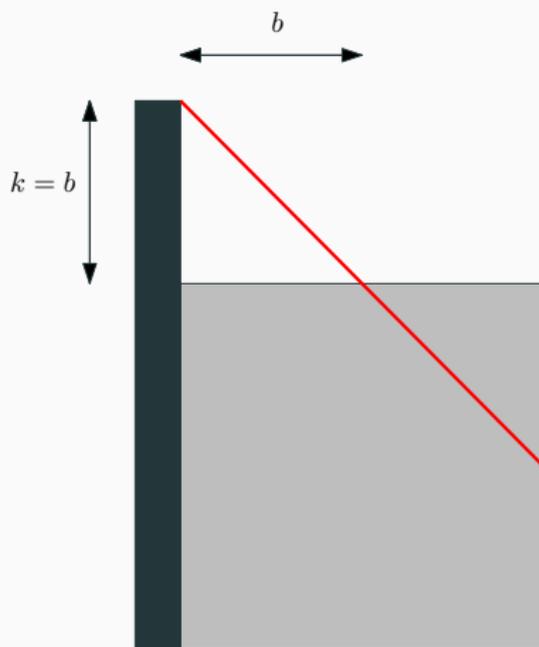


FIG. 18: Matrice Gadget

Quelques mots sur la résolution

Méthodes exactes:

- 3 modèles MIP
- modèle CP
- 2 branch and bound

Méthodes exactes:

- 3 modèles MIP
- modèle CP
- 2 branch and bound

Heuristiques/Meta-Heuristiques:

- 2 heuristiques constructives
- 2 modèles LocalSolver
- Simulated Annealing

- Les modèles MIP ne fonctionnent pas bien
- Le modèle CP marche très bien
- Les heuristiques donnent de bons résultats en peu de calcul

- Triangle width peut s'exprimer sous 3 formes
- Une appli web pour la version matrice
- Un bon outil pour faire des preuves de \mathcal{NP} -Hardness.

- Triangle width peut s'exprimer sous 3 formes
- Une appli web pour la version matrice
- Un bon outil pour faire des preuves de \mathcal{NP} -Hardness.

Problèmes ouverts:

- existe t-il un MIP efficace?

Questions?



Bhaskar DasGupta, Tao Jiang, Sampath Kannan, Ming Li, and Elizabeth Sweedyk.

On the complexity and approximation of syntenic distance.

Discrete Applied Mathematics, 88(1-3):59–82, 1998.



Guillaume Fertin, Irena Rusu, and Stéphane Vialette.

Obtaining a triangular matrix by independent row-column permutations.

In *International Symposium on Algorithms and Computation*, pages 165–175. Springer, 2015.



Herbert S Wilf.

On crossing numbers, and some unsolved problems.

Combinatorics, geometry and probability (Cambridge, 1993), pages 557–562, 1993.