



**HAL**  
open science

# Echantillonnage par Transport Maps avec réduction de modèle PGD pour l'assimilation rapide de données par inférence Bayésienne

Paul-Baptiste Rubio, François Louf, Ludovic Chamoin

► **To cite this version:**

Paul-Baptiste Rubio, François Louf, Ludovic Chamoin. Echantillonnage par Transport Maps avec réduction de modèle PGD pour l'assimilation rapide de données par inférence Bayésienne. 14e Colloque National en Calcul des Structures, May 2019, Giens, France. hal-02155062

**HAL Id: hal-02155062**

**<https://hal.science/hal-02155062v1>**

Submitted on 12 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Échantillonnage par Transport Maps avec réduction de modèle PGD pour l'assimilation rapide de données par inférence bayésienne

P-B. Rubio<sup>1</sup>, F. Louf<sup>1</sup>, L. Chamoin<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMT, ENS Paris-Saclay, {prubio,louf,chamoin}@ens-paris-saclay.fr

**Résumé** — Le but de ce travail est de traiter les problèmes de recalage séquentiel de modèles par une approche basée sur une formulation complète de l'inférence bayésienne. La méthode de Transport Maps permet de déterminer un couplage entre une densité de référence et la densité *a posteriori*. L'apport de la méthode Proper Generalized Decomposition (PGD) permet de réduire les coûts d'évaluation du modèle numérique multi-paramétrique et d'accélérer le calcul de minimisation dans la méthode des Transport Maps en calculant les dérivées du modèle par rapport aux paramètres. Le couplage de ces méthodes permet d'envisager des calculs d'assimilation temps-réel.

**Mots clés** — Inférence bayésienne, Assimilation de données, PGD, Transport Maps, Quantification d'incertitudes.

## 1 Introduction

Grâce aux avancées permanentes dans le développement des modèles numériques, ceux-ci sont de plus en plus utilisés pour étudier des systèmes physiques. Cette interaction est d'autant plus forte dans le contexte du DDDAS (Dynamic Data Driven Application System (DDDAS))[1] où le modèle numérique est utilisé pour contrôler un système physique. Pour cela le modèle numérique doit être parfaitement calibré tout au long du processus. C'est pourquoi l'assimilation de mesures *in-situ* est utilisée pour recalibrer les paramètres du modèle en temps réel.

Cependant, la détermination des paramètres d'un modèle à partir de mesures bruitées entraîne le plus souvent la résolution d'un problème inverse mal posé [2]. Pour résoudre ce problème l'inférence bayésienne permet une régularisation naturelle en affectant un poids de probabilité à l'ensemble de variation des paramètres en fonction des incertitudes considérées (bruit de mesure, erreur de modèle, paramètres stochastiques) [4]. Dans ce cadre les paramètres à recalibrer sont considérés comme des variables aléatoires et le résultat de l'inférence est la densité de probabilité jointe *a posteriori*. La densité *a posteriori* est définie par la formule de Bayes comme le produit d'une densité *a priori* ne prenant pas en compte la connaissance des mesures et d'une fonction de vraisemblance donnant la probabilité que la sortie du modèle coïncide avec la mesure pour une valeur de paramètre donnée. Cette densité donne une information globale sur l'espace paramétrique et des méthodes d'exploration sont nécessaires pour estimer des quantités d'intérêt (moyenne, variance, marginales de premier ordre,...). Ces estimateurs requièrent le calcul d'intégrales en grande dimension. Pour cela l'intégration de Monte-Carlo est utilisée en générant des échantillons par des méthodes d'échantillonnages indirectes comme la méthode de Markov Chain Monte-Carlo (MCMC)[3]. Cette méthode implique l'évaluation de la densité *a posteriori* un très grand nombre de fois rendant son utilisation impossible en temps réel[13]. Ainsi, une solution permettant de lever cette difficulté est de supposer que le modèle est linéaire et que les densités sont gaussiennes. Ces simplifications sont à l'origine des filtres de Kalman [7].

Ici, l'idée est de considérer la formulation bayésienne sans hypothèse simplificatrice et de coupler cette formulation avec les méthodes de Transport Maps [8] et réduction de modèle PGD [6].

D'abord, la méthode de Transport Maps permet de construire une application déterministe entre une mesure de probabilité (ex : loi normale centrée) et la mesure *a posteriori* solution de l'inférence bayésienne [9] [10]. Cette application permet entre autre d'échantillonner la densité *a posteriori* à partir de l'échantillonnage connu de la densité référence. Ensuite la méthode de réduction de modèle PGD est utilisée à trois niveaux. La PGD est d'abord utilisée dans la formulation bayésienne en représentant la

solution du modèle numérique multi-paramétrique de manière analytique, à variables séparées, calculée dans une phase "offline". Ainsi, la formulation de la densité *a posteriori* devient explicite par rapport aux paramètres et permet d'être évaluée à moindre coût. La PGD est également utilisée à un second niveau dans les calculs des Transport Maps qui nécessitent la résolution d'un problème de minimisation. En effet, grâce à la formulation explicite du modèle les informations de gradient et de hessien peuvent être utilisées dans l'algorithme de minimisation. Enfin la PGD permet le post-traitement de la solution d'inférence par propagation d'incertitudes sur des quantités d'intérêts.

L'efficacité de cette approche est mise en évidence sur un exemple numérique dans un contexte d'étude d'un procédé de soudage.

## 2 Échantillonnage par Transport Maps pour les problèmes d'inférence bayésienne

### 2.1 Formulation bayésienne des problèmes inverses

Dans ce travail le but est de caractériser des paramètres d'intérêt  $\mathbf{p}$  à partir de mesures indirectes  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$ . Dans ce cas la formulation bayésienne du problème inverse s'écrit [3] :

$$\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}^{\text{obs}}) = \frac{1}{C} \pi(\mathbf{d}^{\text{obs}}|\mathbf{p}) \cdot \pi(\mathbf{p})$$

avec  $C$  la constante de normalisation définie comme :

$$C = \int \pi(\mathbf{d}^{\text{obs}}|\mathbf{p}) \cdot \pi(\mathbf{p}) d\mathbf{p}$$

Le résultat de l'inférence est donné par la densité *a posteriori*  $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}^{\text{obs}})$  donnant la probabilité de la variable aléatoire des paramètres  $\mathbf{p}$  sachant la mesure  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$ . Cette densité est proportionnelle au produit de la densité *a priori*  $\pi(\mathbf{p})$  avec la fonction de vraisemblance  $\pi(\mathbf{d}^{\text{obs}}|\mathbf{p})$ . La densité *a priori* prend en compte toutes les informations que l'on est susceptible d'avoir avant l'assimilation de la donnée  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$ . La fonction de vraisemblance donne la probabilité d'avoir la mesure  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  pour une valeur donnée  $\mathbf{p}$ . Dans le cas classique où un bruit de mesure additif de densité  $\pi_{\text{meas}}$  est considéré la fonction de vraisemblance est la distance entre la sortie du modèle pour une valeur de  $\mathbf{p}$  et l'observation, pondérée par le bruit de mesure :

$$\pi(\mathbf{d}^{\text{obs}}|\mathbf{p}) = \pi_{\text{meas}}(\mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Dans le cas d'assimilation de mesures  $\{\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}}\}$  de manière séquentielle aux instants  $t_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N_t\}$  la formulation bayésienne est obtenue en prenant la densité *a priori* de l'instant  $t_i$  comme la densité *a posteriori* de l'instant  $t_{i-1}$  :

$$\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}}) \propto \prod_{j=1}^i \pi_{t_j}(\mathbf{d}_j^{\text{obs}}|\mathbf{p}) \cdot \pi(\mathbf{p}) \quad (1)$$

Comme précédemment, la fonction de vraisemblance à l'instant  $t_j$  s'exprime en fonction du modèle (cette fois dépendant du temps) comme :

$$\pi_{t_j}(\mathbf{d}_j^{\text{obs}}|\mathbf{p}) = \pi_{\text{meas}}(\mathbf{d}_j^{\text{obs}} - \mathcal{M}(\mathbf{p}, t_j))$$

Cette formulation ne fait pas d'hypothèses sur la forme des densités (densité *a priori*, densité du bruit de mesure) ou du modèle.

### 2.2 Échantillonnage par Transport Maps

Le principe de la méthode des Transport Maps est de construire un couplage déterministe  $M$  entre une mesure de référence  $\nu_p$  (ici normale centrée réduite) et la mesure d'intérêt (ici suivant la loi *a posteriori* d'un processus d'inférence bayésienne). Ainsi, le but est de trouver le changement de variable  $M$  tel que :

$$\int g d\nu_\pi = \int g \circ M d\nu_p$$

En particulier des échantillons tirés suivant la loi de référence pourront être transformés en échantillons suivant la loi d'intérêt par le biais de l'application  $M$  (Figure 1). Ces travaux sont issus de la théorie du transport optimal [14] et formulés récemment pour l'inférence bayésienne [10].

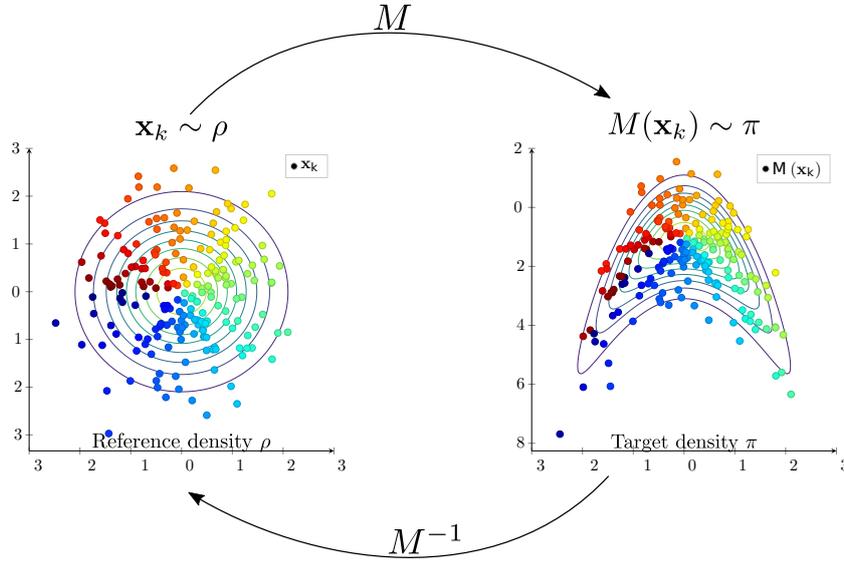


FIGURE 1 – Principe de la méthode des Transport Maps

### 2.2.1 Paramétrisation et calcul des Transport Maps

A partir de la loi normale centrée réduite  $\rho$ , le but est de construire l'application inversible  $M : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que :

$$\nu_\pi \approx M_\# \nu_\rho = \rho \circ M^{-1} |\det \nabla M^{-1}|$$

Pour quantifier la dissimilarité des deux distributions  $\nu_\pi$  et  $M_\# \nu_\rho$ , la divergence de Kullback-Leibler  $\mathcal{D}_{KL}$  est introduite telle que :

$$\mathcal{D}_{KL}(M_\# \nu_\rho || \nu_\pi) = \mathcal{D}_{KL}(\nu_\rho || M_\#^{-1} \nu_\pi) \quad (2)$$

$$= \mathbb{E}_\rho \left[ \ln \frac{\nu_\rho}{M_\#^{-1} \nu_\pi} \right] \quad (3)$$

$$= \int [\ln(\rho(\mathbf{p})) - \ln([\pi \circ M](\mathbf{p})) - \ln(|\det \nabla M(\mathbf{p})|)] \rho(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (4)$$

L'application  $M$  est ensuite paramétrisée de telle sorte qu'elle vérifie l'arrangement optimal de Knothe-Rosenblatt :

$$M(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} M^1(p_1) \\ M^2(p_1, p_2) \\ \vdots \\ M^d(p_1, p_2, \dots, p_d) \end{bmatrix}$$

avec :

$$M^k(\mathbf{a}_c^k, \mathbf{a}_e^k, \mathbf{p}) = \Phi_c(\mathbf{p}) \mathbf{a}_c^k + \int_0^{p_k} (\Phi_e(p_1, \dots, p_{k-1}, \theta) \mathbf{a}_e^k)^2 d\theta$$

Des polynômes d'Hermite sont choisis pour les fonctions  $\Phi_c$  et  $\Phi_e$  avec les coefficients  $\mathbf{a}_c$  et  $\mathbf{a}_e$ .

Ainsi la détermination de l'application  $M$  réside dans la détermination des coefficients  $\mathbf{a}_e^k$  et  $\mathbf{a}_c^k$  par minimisation de la fonctionnelle (4). L'intégrale présente dans l'expression de la fonctionnelle est calculée par une règle de quadrature  $(\omega_i, \mathbf{p}_i)_{i=1}^N$  pour  $\rho$  (Monte-Carlo, Gauss). S'agissant d'un problème de minimisation la densité  $\pi$  peut être remplacée par sa version non normalisée  $\tilde{\pi}$ . Finalement le problème à résoudre s'écrit :

$$\min_{\mathbf{a}_c^{1,\dots,d}, \mathbf{a}_e^{1,\dots,d}} \sum_{i=1}^N \omega_i \left[ -\log(\tilde{\pi} \circ M(\mathbf{a}_c^{1,\dots,d}, \mathbf{a}_e^{1,\dots,d}, \mathbf{p}_i)) - \log(|\det \nabla M(\mathbf{a}_c^{1,\dots,d}, \mathbf{a}_e^{1,\dots,d}, \mathbf{p}_i)|) \right] \quad (5)$$

### 2.2.2 Assimilation de données séquentielle par Transport Maps

Dans le cas de l'assimilation séquentielle des données, la méthode des Transport Maps permet d'exploiter la structure markovienne de la densité *a posteriori* (1). Ainsi, au lieu de déterminer le couplage

entre la référence  $\rho$  et la densité  $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}})$  à chaque pas d'assimilation  $t_i$ , le couplage est déterminé par récurrence entre les densités *a posteriori* successives  $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_{i-1}^{\text{obs}})$  et  $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}})$ . Ainsi, l'application de transport de la densité  $\rho$  vers la densité *a posteriori* du pas d'assimilation  $t_i$  s'obtient par composition :

$$(M_1 \circ \dots \circ M_i)_\# \rho(\mathbf{p}) = (\mathbb{M}_i)_\# \rho(\mathbf{p}) \approx \pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}})$$

L'application  $M_1$  représente le couplage entre la densité  $\rho(\mathbf{p})$  et la première densité  $\pi(\mathbf{p}|\mathbf{d}_1^{\text{obs}}) \propto \pi_{t_1}(\mathbf{d}_1^{\text{obs}}|\mathbf{p}) \cdot \pi(\mathbf{p})$ . Ensuite, chaque application  $M_i$ ,  $i \in \{2, \dots, N_t\}$  est calculée entre la référence  $\rho$  et la densité  $\pi_i^*$  définie par :

$$\pi_i^*(\mathbf{p}) = \pi_{t_i}(\mathbf{d}_i^{\text{obs}}|\mathbb{M}_{i-1}(\mathbf{p})) \cdot \rho(\mathbf{p})$$

### 2.2.3 Critère de convergence

Une fois l'application de couplage  $M$  calculée, se pose la question de la qualité de l'approximation  $M_\# \nu_\rho$  de la mesure  $\nu_\pi$ . Pour cela le diagnostic de variance  $\varepsilon_\sigma$  [8] [10] est défini par :

$$\varepsilon_\sigma = \frac{1}{2} \text{Var}_\rho \left[ \ln \frac{\nu_\rho}{M_\#^{-1} \nu_\pi} \right]$$

Le calcul de ce critère est peu coûteux car l'intégration est faite selon la mesure de référence  $\rho$ . Grâce à ce critère une méthodologie en temps réel peut être mise en place avec adaptation de la complexité de la transformation  $M$  (ordre des polynômes de Hermite, précision de l'algorithme de minimisation) pour obtenir l'approximation de la précision souhaitée.

## 3 Apports de la méthode de réduction de modèle PGD

Avec la formulation bayésienne des problèmes d'assimilation telle que formulée en (1), la densité *a posteriori* peut être exprimée de manière explicite en fonction des paramètres  $\mathbf{p}$  si le modèle s'exprime aussi de manière explicite. Cependant dans les cas d'étude d'ingénierie le modèle est issu de la résolution numérique d'une Équation aux Dérivées Partielles (EDP) qui dépend des paramètres  $\mathbf{p}$  du temps  $t$  et de l'espace  $\mathbf{x}$ . Par exemple, une résolution directe multi-paramétrique n'est pas envisageable pour des applications temps-réel. De ce fait l'utilisation de la méthode de réduction de modèle PGD permet d'obtenir une solution explicite de l'EDP dans une forme quasi-analytique [12].

Dans sa version classique la PGD est construite directement à partir de la formulation faible de l'équation aux dérivées partielles résolue de manière globale en temps, espace, paramètres sous une forme à variables séparées [5] [6] :

$$u_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m \Lambda_k(\mathbf{x}) \lambda_k(t) \prod_{i=1}^d \alpha_{ik}(p_i)$$

Cette résolution est réalisée dans une phase *offline* et la forme réduite du modèle permet d'avoir une bonne approximation de la solution de l'EDP par produits et sommes de fonctions Éléments Finis (modes) dans la phase *online* d'assimilation.

### 3.1 Échantillonnage par Transport Maps avec modèles PGD

Une fois l'approximation PGD  $u_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})$  obtenue, la formulation de la densité *a posteriori* peut en être directement déduite avec l'opérateur d'observation  $O$  :

$$\mathbf{d}_m(\mathbf{p}, t) = O(u_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}))$$

Si les observations sont  $N_o$  observations locales du champ  $u_m$  aux points  $\mathbf{x}_k$ ,  $k \in \{1, \dots, N_o\}$ , la sortie du modèle s'écrit :

$$\mathbf{d}_m(\mathbf{p}, t) = (u_m(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}, t), \dots, u_m(\mathbf{x}_{N_o}, \mathbf{p}, t))$$

Finalement, l'expression de la densité *a posteriori* s'écrit dans ce cas :

$$\bar{\pi}(\mathbf{p} | \mathbf{d}_1^{\text{obs}}, \dots, \mathbf{d}_i^{\text{obs}}) = \prod_{j=1}^i \pi_{\text{meas}}(\mathbf{d}_j^{\text{obs}} - \mathbf{d}_m(\mathbf{p}, t_j)) \cdot \pi(\mathbf{p})$$

La densité résultat du processus d'inférence peut donc être évaluée à moindre coût par une technique d'échantillonnage (par exemple MCMC [11]). Cette formulation est cependant encore plus intéressante pour le calcul des Transport Maps. En effet, la méthode des Transport Maps est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle qui dépend de la densité *a posteriori* (5). Grâce à la formulation PGD, le problème de minimisation peut être résolu par un algorithme de descente qui exploite gradient et hessien de la fonction objectif. En effet, les dérivées du champ d'intérêt  $u_m$  (dont dépend la fonction objectif), par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}$  se calculent simplement comme :

$$\frac{\partial^n u_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{p})}{\partial p_j^n} = \sum_{k=1}^m \Lambda_k(\mathbf{x}) \lambda_k(t) \frac{\partial^n \alpha_{jk}}{\partial p_j^n}(p_j) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d \alpha_{ik}(p_i)$$

Comme les modes paramétriques sont des fonctions Éléments Finis, les dérivées se calculent sur les fonctions de forme unidimensionnelles :

$$\frac{\partial^n \alpha_{jk}}{\partial p_j^n}(p_j) = \frac{\partial^n}{\partial p_j^n} [N(p_j)] \{ \alpha_{jk} \}$$

avec  $[N(p_j)]$  la matrice des fonctions de formes pour l'espace du paramètre  $p_j$  et  $\{ \alpha_{jk} \}$  le vecteur des valeurs nodales du mode  $k$  associées. Ainsi, gradients et hessiennes sont calculés par combinaison des dérivées des modes paramétriques calculées dans la phase *offline*.

### 3.2 Propagation d'incertitudes avec modèles PGD

Comme le champ PGD est calculé de manière globale en espace, une partie de ce champ inaccessible aux mesures peut être considéré comme quantité d'intérêt. Dans ce cas, la quantité  $q_m$  est définie par l'opérateur  $Q$  sur le modèle PGD :

$$q(\mathbf{p}, t) = Q(u_m(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}))$$

Cette quantité d'intérêt est donc définie de manière globale sur l'espace paramétrique et dans le temps. Ainsi, dès qu'un ensemble de mesures est assimilé par inférence bayésienne, des échantillons  $\mathbf{p}_k$ ,  $k \in \{1, \dots, N_{MC}\}$  tirés suivant la loi *a posteriori* sont disponibles pour la propagation d'incertitudes sur la quantité d'intérêt. En effet, des échantillons  $q_k$ ,  $k \in \{1, \dots, N_{MC}\}$  suivant la loi de probabilité de la quantité d'intérêt sont calculés simplement par évaluation du modèle PGD aux points  $\mathbf{p}_k$  :

$$q_k = q(\mathbf{p}_k, t), k \in \{1, \dots, N_{MC}\}$$

Ensuite la densité de probabilité de la quantité d'intérêt peut être approximée par histogrammes ou lissages à noyaux. Comme l'expression de la quantité d'intérêt est connue pour tout l'intervalle de temps, dans un contexte temps-réel la propagation d'incertitude peut se faire dans une optique de prédiction.

## 4 Exemple numérique

L'exemple traité est un problème simplifié du contrôle de qualité de soudage formulé dans [15]. Dans cet exemple on considère deux plaques infinies chauffées par une source volumique de chaleur. Pour la résolution du problème le système de coordonnées est supposé bouger à la même vitesse que la source de chaleur. De ce fait un terme de convection est ajouté à l'équation de la chaleur. L'inconnue du problème est la température adimensionnée  $T$  qui est nulle pour une température égale à la température ambiante et unitaire quand elle est égale à la température de fusion du matériau. Les conditions aux limites sont une température nulle sur  $\Gamma_D$  et des bords libres de flux partout ailleurs (Figure 2).

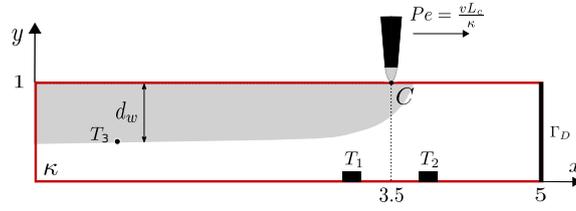


FIGURE 2 – Problème du contrôle de qualité de soudage

#### 4.1 Formulation du problème d'inférence

Les paramètres inconnus du modèle sont supposés être  $\sigma$  et  $Pe$ , paramètres respectivement liés à la répartition spatiale et la vitesse de la source volumique de chaleur. La résolution PGD multi-paramétrique du problème est détaillée dans [12] et s'écrit :

$$T_k(x_k, y_k, t, \sigma, Pe) = \sum_{n=1}^m \Lambda_n(x_k, y_k) \lambda_n(t) \alpha_n^1(\sigma) \alpha_n^2(Pe), \quad i=1,2,3$$

$T_1$  et  $T_2$  représentent les températures aux points de mesures et  $T_3$  est la quantité d'intérêt inaccessible par mesure directe (voir Figure 2). A partir des mesures le but est d'estimer si la profondeur de soudage est suffisante (i.e :  $T_3 \geq 1$ ).

Les paramètres  $\sigma$  et  $Pe$  sont supposés être constants au cours du temps. A chaque pas de temps les mesures de températures  $T_1^{\text{obs}}$  et  $T_2^{\text{obs}}$  sont assimilées pour raffiner la connaissance sur les paramètres. Dans cet exemple, on considère  $\tau_j, j \in \{1, \dots, N_\tau\}$  les pas de temps (physiques) de la résolution numérique du problème. Les pas de temps associés à l'assimilation des données sont les  $t_i, i \in \{1, \dots, N_t\}$ . Dans l'exemple considéré les deux discrétisations temporelles sont choisies coïncidentes.

La densité *a priori* sur les paramètres est supposé être celle de variables aléatoires indépendantes de moyennes ( $\mu_\sigma = 0.4, \mu_{Pe} = -60$ ) et variances ( $\sigma_\sigma^2 = 0.003, \sigma_{Pe}^2 = 7$ ).

Ainsi, au pas de temps d'assimilation  $t_i, i \in \{1, \dots, N_t\}$  la densité *a posteriori* s'écrit :

$$\pi(\sigma, Pe | T_1^{\text{obs}, 1:i}, T_2^{\text{obs}, 1:i}) = \prod_{j=1}^i \pi_{\tau_j}(T_1^{\text{obs}, j}, T_2^{\text{obs}, j} | \sigma, Pe) \cdot \pi(\sigma, Pe)$$

#### 4.2 Résolution

La stratégie PGD-Transport Maps est appliquée à cet exemple. Sur la Figure 3 est représenté le temps de calcul nécessaire pour calculer à chaque étape d'assimilation les applications  $M_1, \dots, M_{N_t}$ . Le temps de calcul représenté prend aussi en compte le transport de 20000 échantillons suivant la loi de référence pour obtenir autant d'échantillons suivant la loi *a posteriori* dans un but de post-traitement. La première étape d'assimilation est la plus coûteuse du fait de la plus grande complexité de la transformation entre la référence et la première densité *a posteriori*. Les autres transformations sont bien moins coûteuses (temps inférieur à 1 seconde) car facilement représentables par une transformation linéaire.

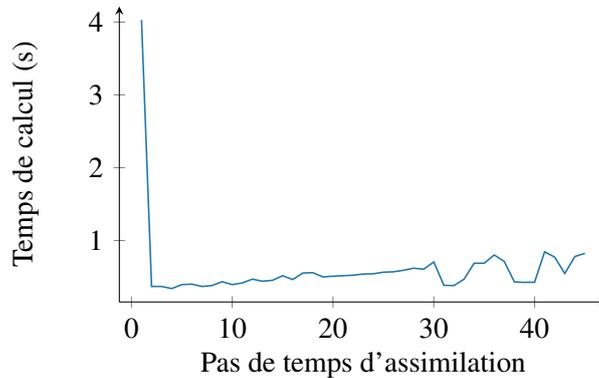


FIGURE 3 – Coût de calcul des Transport Maps pour chaque étape d'assimilation

Sur la Figure 4 sont représentées les évolutions des densités marginales au cours des pas d'assimilation. Plus les mesures sont assimilées, plus la connaissance sur les paramètres se raffine. Après

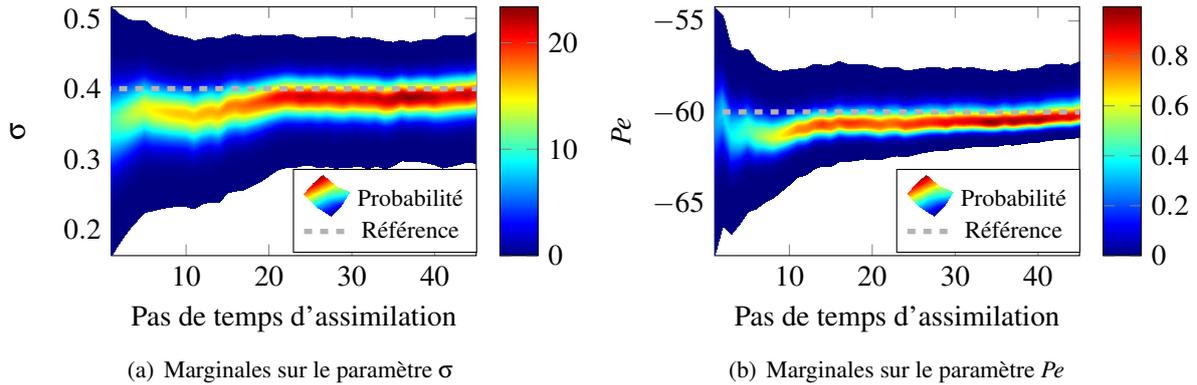


FIGURE 4 – Densités marginales sur chaque paramètre après chaque pas d'assimilation

45 pas d'assimilation, le maximum *a posteriori* et la moyenne des paramètres sont respectivement  $[0.394, -60.193]$  et  $[0.392, -59.949]$ . Ces valeurs sont très proches des valeurs de référence  $[0.40, -60]$  utilisées pour simuler les mesures.

### 4.3 Post-traitement : propagation d'incertitudes

En plus du calcul d'estimateurs scalaires, les incertitudes sur les paramètres peuvent être propagées sur la prédiction de la quantité d'intérêt  $T_3$ . Ainsi à chaque pas d'assimilation  $t_i$  les échantillons suivant la loi *a posteriori* calculés grâce à la méthode des Transport Maps sont propagés sur la température  $T_3$  pour tous les pas de temps physiques  $\tau_j, j > i$ . La Figure 5 présente le résultat de ce calcul pour les quatre pas d'assimilation  $t_1$  (Figure 5(a)),  $t_{15}$  (Figure 5(b)),  $t_{30}$  (Figure 5(c)) et  $t_{45}$  (Figure 5(d)).

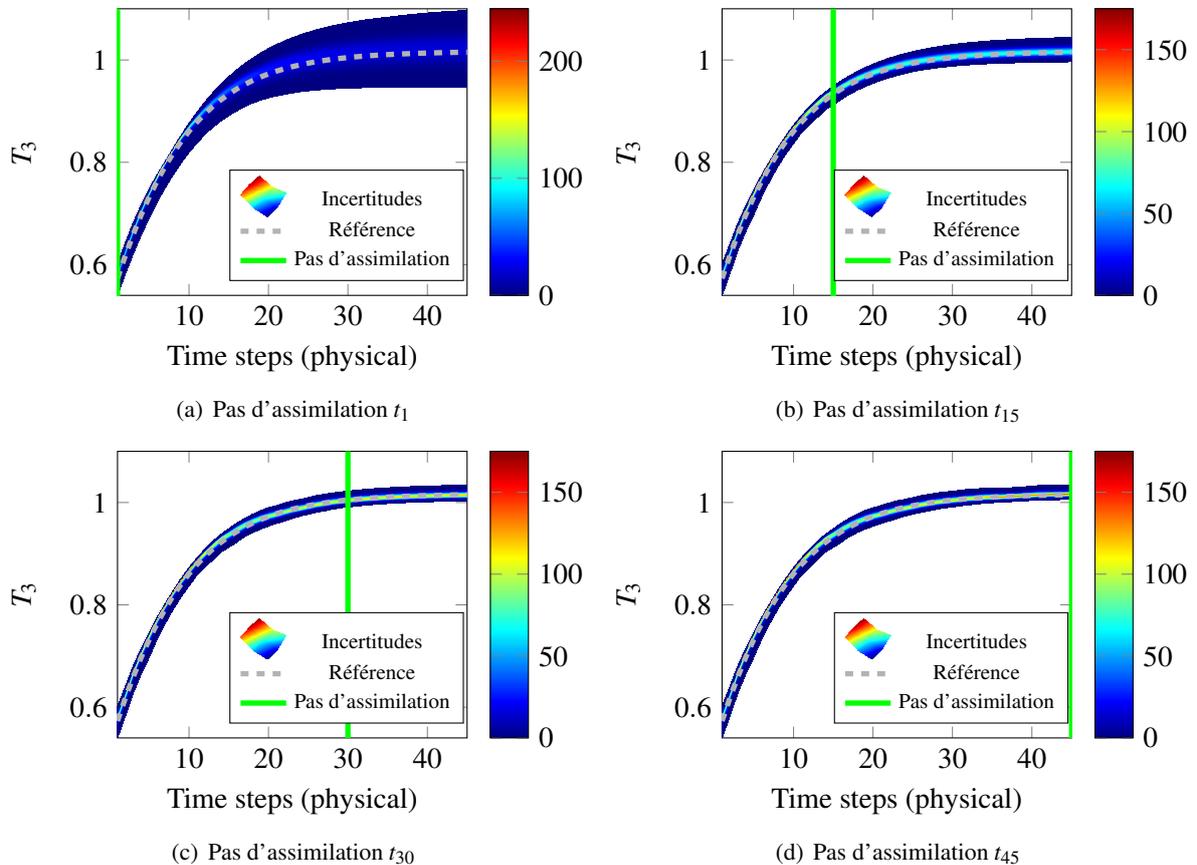


FIGURE 5 – Prédiction de la température  $T_3$  pour les pas de temps suivant le pas d'assimilation

Le raffinement de la connaissance des incertitudes par l'assimilation de données permet d'affiner la connaissance sur la quantité d'intérêt et sa prédiction.

## 5 Conclusion

La méthode présentée permet de traiter des problèmes dans le cadre général d'inférence Bayésienne. La méthode de réduction de modèle PGD permet de réduire les coûts d'appel au modèle et de faciliter le calcul de Transport Maps. Dans ce cadre la méthode des Transport Maps fournit un échantillonnage de la densité *a posteriori* de manière très rapide. Cet échantillonnage permet la propagation d'incertitudes sur des quantités d'intérêt du système considéré. L'exemple numérique met en évidence cette méthode et permet d'envisager des applications en temps réel.

## Références

- [1] DAREMA F. Dynamic Data Driven Applications Systems : A New Paradigm for Application Simulations and Measurements. In : Bubak M, Albada vGD, Sloot PMA, Dongarra J., eds. *Computational Science - ICCS 2004* Springer Berlin Heidelberg ; 2004 ; Berlin, Heidelberg: 662–669.
  - [2] Tarantola A. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics . 2005
  - [3] Kaipio J, Somersalo E, Antman ESS, et al. Statistical and Computational Inverse Problems. 2004; 160: 346.
  - [4] Stuart AM. Inverse problems : A Bayesian perspective. *Acta Numerica* 2010; 19: 451–559. doi: 10.1017/S0962492910000061
  - [5] Nouy A. A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010. doi: 10.1016/j.cma.2010.01.009
  - [6] Chinesta F, Keunings R, Leygue A. The proper generalized decomposition for advanced numerical simulations : A primer. In : No. 9783319028644. 2014 (pp. iv–v)
  - [7] Kalman RE. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering* 1960; 82(1): 35. doi: 10.1115/1.3662552
  - [8] El Moselhy TA, Marzouk YM. Bayesian inference with optimal maps. *Journal of Computational Physics* 2012; 231(23): 7815–7850. doi: 10.1016/J.JCP.2012.07.022
  - [9] Marzouk Y, Moselhy T, Parno M, Spantini A. An introduction to sampling via measure transport. 2016.
  - [10] Spantini A, Bigoni D, Marzouk Y. Inference via low-dimensional couplings. 2017.
  - [11] Berger J, Orlande HRB, Mendes N. Proper Generalized Decomposition model reduction in the Bayesian framework for solving inverse heat transfer problems. *Inverse Problems in Science and Engineering* 2017; 25(2): 260–278. doi: 10.1080/17415977.2016.1160395
  - [12] Rubio PB, Louf F, Chamoin L. Fast model updating coupling Bayesian inference and PGD model reduction. *Computational Mechanics* 2018: 1–25. doi: 10.1007/s00466-018-1575-8
  - [13] Robert CP, Casella G. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistics New York, NY : Springer New York . 2004
  - [14] Villani C. Optimal Transport : Old and New. *Media* 2007. doi: 10.1007/978-3-540-71050-9
  - [15] Grepl MA. *Reduced-Basis Approximation and A Posteriori Error Estimation for Parabolic Partial Differential Equations*. PhD thesis. Massachusetts Institute of Technology, 2005.
-