



**HAL**  
open science

# Calcul numérique des modes de galerie d'une sphère élastique enfouie

Matthieu Gallezot, Odile Abraham, Fabien Treysede

► **To cite this version:**

Matthieu Gallezot, Odile Abraham, Fabien Treysede. Calcul numérique des modes de galerie d'une sphère élastique enfouie. JJCAP2019, Journées des Jeunes Chercheurs en Acoustique Physique, Jun 2019, PARIS, France. JJCAP2019, Journées des Jeunes Chercheurs en Acoustique Physique, 1p, 2019. hal-02153722

**HAL Id: hal-02153722**

**<https://hal.science/hal-02153722v1>**

Submitted on 13 Jun 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Objectifs

- Développer un modèle semi-analytique pour le calcul des résonances vibratoires d'une sphère élastique enfouie
- Obtenir la réponse forcée de la sphère
- Déterminer l'atténuation et les conditions d'excitation d'une onde focalisée le long d'une circonférence

## Résonances de sphère [1]

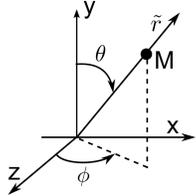
Ondes circonférentielles stationnaires, de deux types :

- modes toroïdaux ou de torsion ( $u_r = 0$ )
- modes sphéroïdaux (polarisés dans toutes les directions) et de **fréquence propre**  $\omega_l^{(n)}$ .

On définit les nombres d'ondes :

- $n \in \mathbb{N}$  : radial
- $l \geq 0, l \in \mathbb{N}$  : polaire (dir.  $\theta$ )
- $|m| \leq l, m \in \mathbb{N}$  : azimuthal

Pour chaque  $m$ , il y a  $2l + 1$  modes indépendants avec un  $\omega_l^{(n)}$  identique (dégénérescence suivant  $\phi$ ).



**Modes de galerie** : modes sphéroïdaux d'ordres  $n, l, m$  élevés, avec  $l \approx m \rightarrow$  **intérêt d'un modèle 1D**. Démarche :

1. Borner la direction radiale (milieu environnant initialement infini)
2. Séparer les variables angulaires (description analytique) et radiale
3. Discrétiser la direction radiale (éléments finis)

## Forme faible des équations harmoniques de l'élastodynamique

Nous commençons nos développements à partir de l'équation suivante :

$$\int_{\tilde{V}} \delta \tilde{\epsilon}^T \tilde{\sigma} d\tilde{V} - \omega^2 \int_{\tilde{V}} \tilde{\rho} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{u}} d\tilde{V} = \int_{\tilde{V}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{f}} d\tilde{V} + \int_{\partial \tilde{V}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{t}} d\tilde{V}, \quad (1)$$

avec :

- $\tilde{\mathbf{u}}(r, \theta, \phi) = [\tilde{u}_r(\tilde{r}, \theta, \phi), \tilde{u}_\theta(\tilde{r}, \theta, \phi), u_\phi(\tilde{r}, \theta, \phi)]^T$
- $\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{u}}$  où l'opérateur est  $\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_r \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \mathbf{L}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{L}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{\tilde{r}} \mathbf{L}_1 + \frac{\cot \theta}{\tilde{r}} \mathbf{L}_2$
- $\tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\epsilon}$ , limité aux **matériaux isotropes transverses** avec seulement variation radiale des propriétés

### Troncature de la direction radiale avec une PML [2]

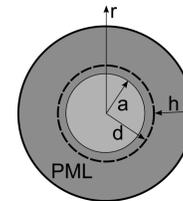
Le milieu environnant doit être borné pour pouvoir appliquer une méthode numérique.

PML  $\equiv$  **extension analytique**

$$\tilde{r}(r) = \int_0^r \gamma(\xi) d\xi, \quad (2)$$

par une **fonction d'atténuation**

- $\gamma(r) = 1$  si  $r < d$ ,
- $\mathbf{Im} \gamma(r) > \mathbf{0}$  si  $d < r < d + h$ .



Retour dans l'espace du rayon réel  $r$  via **changement de variable**

- $\tilde{\mathbf{r}} \mapsto \mathbf{r}$  dans (1) :
- $\forall$  fonction  $g, \tilde{g}(\tilde{r}) = g(r)$ ,
- $\partial \tilde{g} / \partial \tilde{r} = \partial g / (\gamma(r) \partial r)$ ,
- $d\tilde{r} = \gamma(r) dr$ .

## Harmoniques sphériques vectorielles

Apparaissent naturellement lors de la résolution des équations de l'élastodynamique en coordonnées sphériques. Peuvent être regroupées pour construire la matrice des harmoniques sphériques [3, 4] :

$$\mathbf{S}_l^m(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} Y_l^m(\theta, \phi) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} & -\frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\sin \theta \partial \phi} \\ 0 & \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\sin \theta \partial \phi} & \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

avec les harmoniques sphériques normalisées [5] :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (4)$$

où  $P_l^m(\cos \theta)$  est un Polynôme Associé de Legendre.

Orthogonalité :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{S}_k^p \mathbf{S}_l^m d\phi \sin \theta d\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \delta_{kl} \delta_{mp}, \quad (5)$$

où  $\bar{l} = l(l+1)$  et \* désigne le conjugué transposé.

## Forme des solutions recherchées

Solution de (1) recherchée par **séparation de variables**

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} \mathbf{S}_l^m(\theta, \phi) \hat{\mathbf{u}}_l^m(r), \quad (6)$$

où les coefficients sont obtenus par la transformée

$$\hat{\mathbf{g}}_l^m(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{S}_l^{m*}(\theta, \phi) \mathbf{g}(r, \theta, \phi) d\phi \sin \theta d\theta. \quad (7)$$

Le champ test dans (1) est choisi tel que

$$\delta \mathbf{u}^T(r, \theta, \phi) = \delta \hat{\mathbf{u}}^T(r) \mathbf{S}_k^{p*}(\theta, \phi), \quad \delta \epsilon^T = [\mathbf{L} \mathbf{S}_k^{p*T} \delta \hat{\mathbf{u}}]^T, \quad (8)$$

afin de bénéficier de (5).

## Formulation aux éléments finis

**Interpolation radiale** :

$$\hat{\mathbf{u}}_l^{m,e}(r) = \mathbf{N}^e(r) \hat{\mathbf{U}}_l^{m,e}. \quad (9)$$

Après de longs calculs, mobilisant également les relations d'orthogonalité des **harmoniques sphériques tensorielles** [6], nous obtenons le système élément fini :

$$(\mathbf{K}(l) - \omega^2 \mathbf{M}(l)) \hat{\mathbf{U}}_l^m = \hat{\mathbf{F}}_l^m, \quad (10)$$

avec

$$\mathbf{K}(l) = \mathbf{K}_1(l) + \mathbf{K}_2(l) + \mathbf{K}_3^T(l) + \mathbf{K}_3(l). \quad (11)$$

Matrices élémentaires :

$$\mathbf{K}_1^e(l) = \int \frac{d\mathbf{N}^{eT}}{dr} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l}C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}C_{55} \end{bmatrix} \frac{d\mathbf{N}^e}{dr} \tilde{r}^2 dr, \quad \mathbf{K}_2^e(l) = \int \frac{d\mathbf{N}^{eT}}{dr} \begin{bmatrix} 2C_{12} & -\bar{l}C_{12} & 0 \\ \bar{l}C_{55} & -\bar{l}C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{l}C_{55} \end{bmatrix} \mathbf{N}^e \tilde{r} dr, \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_3^e(l) = \int \mathbf{N}^{eT} \begin{bmatrix} \bar{l}C_{55} + 4(C_{23} + C_{44}) & -\bar{l}(C_{55} + 2(C_{23} + C_{44})) & 0 \\ -\bar{l}(C_{55} + 2(C_{23} + C_{44})) & \bar{l}^2 C_{23} + \bar{l}C_{55} + 2\bar{l}(\bar{l} - 1)C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l}C_{55} + \bar{l}(\bar{l} - 2)C_{44} \end{bmatrix} \mathbf{N}^e \gamma dr. \quad (13)$$

$$\mathbf{M}^e(l) = \int \rho \mathbf{N}^{eT} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{l} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{l} \end{bmatrix} \mathbf{N}^e \tilde{r}^2 \gamma dr. \quad (14)$$

## Calcul des modes

Le système élément fini (11) sans terme source se décompose facilement en deux sous-systèmes :

$$(\mathbf{K}_S - \omega^2 \mathbf{M}_S) \hat{\mathbf{U}}_S = \mathbf{0}, \quad (15)$$

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M}_T) \hat{\mathbf{U}}_T = \mathbf{0}, \quad (16)$$

permettant, pour chaque  $l$ , le calcul de  $N$  fréquences propres  $\omega_l^{(n)}$  et vecteurs propres  $\hat{\mathbf{U}}_l^{(n)}$  (déformées modales radiales), avec  $n = 1 \dots N$ . L'atténuation de chaque mode est donnée par  $\text{Im} \omega_l^{(n)}$ .

## Réponse forcée

Par superposition modale et en utilisant les relations usuelles d'orthogonalité des systèmes aux valeurs propres linéaires, nous montrons que la réponse forcée s'écrit :

$$\mathbf{U}(\theta, \phi, \omega) = \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} \sum_{n=1}^N \mathbf{S}_l^m(\theta, \phi) \frac{\hat{\mathbf{U}}_l^{(n)T} \hat{\mathbf{F}}_l^m(\omega) \hat{\mathbf{U}}_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)2} - \omega^2}. \quad (17)$$

## Perspectives

- Validation de la méthode pour une sphère dans le vide
- Analyse physique des résultats pour une sphère enfouie

Travaux réalisés dans le cadre du projet SMOG financé par la Région Pays de la Loire.



## Références

- [1] A. C. ERINGEN et E. S. ŞUHUBI, *Elastodynamics*, t. II, Academic Press, 1975.
- [2] W. C. CHEW et W. H. WEEDON, A 3D perfectly matched medium from modified Maxwells equations with stretched coordinates, *Microwave and Optical Technology Letters* 7 (1994), p. 599-604.
- [3] J. PARK, Wave motion in finite and infinite media using the thin-layer method, thèse de doct., Massachusetts Institute of Technology, 2002.
- [4] E. KAUSEL, *Fundamental solutions in elastodynamics : a compendium*, Cambridge University Press, 2006.
- [5] G. B. ARFKEN et H. J. WEBER, *Mathematical methods for physicists*, AAPT, 1999.
- [6] Z. MARTINEC, Spectral-finite element approach to three-dimensional viscoelastic relaxation in a spherical earth, *Geophysical Journal International* 142 (2000), p. 117-141.