



HAL
open science

Couplage adaptatif des méthodes d'analyses de fiabilité par apprentissage actif basées sur les métamodèles de Krigeage et de la modélisation en base réduite

M Menz, Christian Gogu, S Dubreuil, N Bartoli, J Morio

► To cite this version:

M Menz, Christian Gogu, S Dubreuil, N Bartoli, J Morio. Couplage adaptatif des méthodes d'analyses de fiabilité par apprentissage actif basées sur les métamodèles de Krigeage et de la modélisation en base réduite. 24ème Congrès Français de Mécanique,, Aug 2019, Brest, France. hal-02147432

HAL Id: hal-02147432

<https://hal.science/hal-02147432>

Submitted on 4 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Couplage adaptatif des méthodes d'analyses de fiabilité par apprentissage actif basées sur les métamodèles de Krigeage et de la modélisation en base réduite

M. MENZ^{a,b}, C. GOGU^a, S. DUBREUIL^b, N. BARTOLI^b, J. MORIO^b

a. Université de Toulouse, UPS, CNRS, INSA, Mines Albi, ISAE, Institut Clément Ader (ICA), 3 rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse, France

b. ONERA/DTIS, Université de Toulouse, F-31055 Toulouse, France

Résumé :

Les analyses de fiabilité sur des problèmes d'ingénieries complexes peuvent avoir des temps de calcul très élevés. Les approches d'apprentissage actif sont un moyen de fortement réduire les temps de calcul en diminuant le nombre d'appels au code de calcul. La réduction de modèles est une autre approche prometteuse pour diminuer les temps de calcul. Afin de réduire encore davantage le coût numérique de ces analyses, nous proposons un couplage entre ces deux approches. Plus précisément, nous avons mis en place une méthodologie adaptative permettant de choisir, par le biais d'un critère de couplage, si une solution réduite peut être utilisée à la place du modèle numérique complexe pour évaluer la fonction de performance. Une application de la méthode pour l'évaluation de la probabilité de défaillance d'un stratifié soumis à un chargement est présentée dans cet article. L'utilisation du couplage sur différentes applications montre un fort potentiel de réduction des temps de calcul tout en assurant des approximations correctes des probabilités de défaillance.

Abstract :

Running a reliability analysis on engineering problems involving complex numerical models can be computationally very expensive. Hence advanced methods are required to reduce the number of calls to the expensive computer codes. Adaptive sampling based reliability analysis methods are one promising way to reduce the number of numerical model evaluations. Reduced order modelling is another one. In order to further reduce the numerical costs of Kriging based adaptive sampling approaches, the idea developed in this paper consists in coupling both approaches by adaptively deciding whether to use reduced-basis solutions in place of full numerical solutions whenever the performance function needs to be assessed. Thus, a method combining such adaptive sampling based reliability analysis methods and reduced basis modeling is proposed using an efficient coupling criterion. An application of the proposed method is presented on the calculation of the probability of failure of a mechanical problem on a composite laminate. The proposed method enabled significant computational cost reductions while ensuring reasonably good estimations of failure probabilities.

Mots clefs : Analyse de fiabilité, krigeage, apprentissage actif, éléments finis, réduction de modèles, base réduite

1 Introduction

Les nombreux développements dans le domaine de l'ingénierie impliquent des modèles numériques toujours plus complexes, de grandes dimensions physiques ou stochastiques ou représentant des comportements mécaniques complexes. Les risques liés aux diverses incertitudes concernant ces systèmes sont évalués à l'aide du calcul de probabilités de défaillance. Or les problèmes d'analyse de fiabilité sur des systèmes ou structures complexes sont souvent numériquement coûteux à résoudre.

Les approches d'analyse de fiabilité par des méthodes d'apprentissage actif, connues également sous le nom de méthodes par échantillonnage adaptatif, permettent de construire et d'enrichir itérativement un modèle de substitution. A chaque itération, le meilleur candidat pour la prochaine simulation est déterminé en utilisant uniquement le modèle de substitution, puis il est ensuite évalué par le modèle numérique. Bien que réduisant significativement le nombre de simulations, ces algorithmes utilisent toutefois une évaluation du modèle numérique complet à chaque itération. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire d'évaluer l'ensemble des échantillons à l'aide du modèle numérique. En effet, de nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits de manière très précise à l'aide de modes dominants pouvant être estimés à l'aide d'échantillons adjacents préalablement évalués. C'est l'idée de base des méthodes de réduction de modèles. Ici on s'intéressera plus précisément à la modélisation en base réduite qui est une approche de réduction de modèles par projection. Afin de réduire encore les coûts de calcul des analyses de fiabilité par apprentissage actif, l'idée développée est de construire de manière adaptative un modèle réduit qui pourra être utilisé en certains points à la place du modèle numérique complet. Le couplage des deux approches se base sur la définition d'un critère de couplage. Un critère simple et un critère plus avancé utilisant chacun des estimateurs d'erreurs basés sur des résidus sont proposés.

La suite de l'article est organisée comme suit. Dans une première partie, nous exposerons la problématique. Dans un deuxième temps, les méthodes d'apprentissage actif, plus précisément l'algorithme AK-MCS, ainsi que la méthode de modélisation en base réduite seront présentées. La nouvelle méthodologie proposée sera ensuite détaillée. Enfin nous illustrerons l'approche par une application de la méthode au calcul de la probabilité de défaillance d'une plaque composite soumise à un chargement complexe.

2 Problématique

On s'intéresse aux méthodes d'analyses de fiabilité et plus précisément à leur application à des problèmes numériquement coûteux, pouvant être décrits par des systèmes linéaires de grande taille (par exemple suite à une modélisation éléments finis).

Soit x le vecteur des m paramètres d'entrée incertains x_1, \dots, x_m du modèle numérique considéré. Ces paramètres sont modélisés par un vecteur aléatoire absolument continu X de variables aléatoires X_i , $i = 1, \dots, m$ distribué selon la densité de probabilité f_X . La discrétisation de l'équation d'équilibre par la méthode des éléments finis et l'application des conditions limites conduisent au système linéaire à \mathcal{N} degrés de liberté suivant :

$$K(x)u(x) = F(x) \quad (1)$$

La défaillance d'une structure est caractérisée par la fonction de performance $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Une valeur négative de cette fonction signifie que le système mécanique n'est plus fonctionnel. La probabilité de défaillance du système P_f est donnée par la formule suivante :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{G(x) \leq 0} f_X(x) dx \quad (2)$$

Cette intégrale peut être approximée en utilisant de nombreuses méthodes. L'approche la plus simple et la plus générale est la méthode de Monte-Carlo. Étant donné un tirage indépendant et identiquement distribué (i.i.d) d'échantillons $x^i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n_{MC}$, l'approximation de P_f est donnée par :

$$\hat{P}_{f_{MC}} = \frac{1}{n_{MC}} \sum_{i=1}^{n_{MC}} \mathbb{1}_{G \leq 0}(x^i) \quad (3)$$

avec n_{MC} la taille de la population de Monte-Carlo.

Cependant pour des problèmes complexes le coût d'estimation de P_f par des méthodes d'échantillonnage est rédhibitoire. Ainsi des méthodes plus avancées sont nécessaires pour analyser la fiabilité de tels problèmes.

Les méthodes d'apprentissage actif permettent de construire de manière adaptative un métamodèle de la fonction de performance, noté \hat{G} . Ainsi en combinant les simulations de Monte-Carlo et des approches d'apprentissage actif, ici plus spécifiquement basées sur des métamodèles de Krigeage (ou régression par processus gaussien) [1], on peut obtenir l'estimation suivante de la probabilité de défaillance :

$$\hat{P}_f = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{\hat{G}(x) \leq 0} f_X(x) dx \approx \frac{1}{n_{MC}} \sum_{i=1}^{n_{MC}} \mathbb{1}_{\hat{G} \leq 0}(x^i) \quad (4)$$

3 Approches d'apprentissage actif et réduction de modèles

3.1 Apprentissage actif basé sur le Krigeage

De nombreuses méthodes d'apprentissage basées sur le Krigeage ont été proposées dans la littérature comme par exemple les méthodes Efficient Global Reliability Method (EGRA) [2], Krigeage et importance sampling combinés [3] ou Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation (AK-MCS) [4]. Dans cet article, nous considérerons la méthode AK-MCS.

La méthode AK-MCS [4] est une méthode adaptative de calcul de probabilité de défaillance couplant l'interpolation de la fonction de performance par un modèle de Krigeage et la méthode de Monte-Carlo. L'objectif de l'algorithme est de classer une population d'échantillons de Monte-Carlo sans utiliser une simulation numérique pour chaque point. Les différentes étapes de l'algorithme sont décrites ci-dessous :

1. Génération d'une population de Monte-Carlo S de n_{MC} échantillons.
2. Définition d'un plan d'expériences initial D constitué de n échantillons (en utilisant la méthode d'échantillonnage Latin Hypercube Sampling (LHS)[5, 6]). Évaluation de la fonction de performance G en chacun des n échantillons.
3. Construction du métamodèle de Krigeage \hat{G} de la fonction de performance G en utilisant les observations du plan d'expériences D .

4. Estimation de la probabilité de défaillance P_f sur la population de Monte-Carlo S en se basant sur la formule suivante :

$$\hat{P}_{f AK-MCS} \approx \frac{n_{\hat{G} \leq 0}}{n_{MC}} \quad (5)$$

5. La fonction d'apprentissage U donnée par l'Eq. (6) est évaluée sur toute la population S pour sélectionner le meilleur point à évaluer pour enrichir le Krigeage.

$$U(x) = \frac{|\mu_{\hat{G}}(x)|}{\sigma_{\hat{G}}(x)} \quad (6)$$

où $\mu_{\hat{G}}(x)$ et $\sigma_{\hat{G}}(x)$ sont respectivement la moyenne et l'écart type du métamodèle de Krigeage \hat{G} au point x de la population S .

6. Si le critère de fin d'apprentissage donné par l'Eq. (7) est atteint le métamodèle est considéré comme suffisamment précis pour la population S et l'apprentissage est arrêté puis l'algorithme passe à l'étape 8. Sinon il passe à l'étape 7.

$$\min_{x \in S} U(x) \geq 2 \quad (7)$$

7. La fonction de performance G est évaluée au point minimisant la fonction U et le nouveau point x^* est ajouté au plan d'expériences D . Puis l'algorithme retourne à l'étape 3.

8. La valeur estimée du coefficient de variation (COV) de la probabilité de défaillance $COV_{P_f AK-MCS}$ est vérifiée pour s'assurer de la cohérence de la population de Monte-Carlo par rapport à l'ordre de grandeur de la probabilité de défaillance estimée. Si le COV est trop élevé, de nouveaux échantillons sont ajoutés à la population de Monte-Carlo utilisée et l'algorithme retourne à l'étape 7. Sinon, si le COV est suffisamment faible par rapport à un seuil fixé par l'utilisateur, la dernière estimation de la probabilité de défaillance obtenue est retenue comme estimation finale.

L'évaluation de chaque point à l'étape 2 puis notamment à l'étape 7 de l'algorithme nécessite de résoudre le modèle numérique. Afin de réduire les temps de calcul représentés par les appels successifs au modèle numérique complet nous proposons dans les sections suivantes l'utilisation de solutions en base réduite dès lors que l'estimation effectuée est suffisamment précise.

3.2 Modélisation en base réduite

Les techniques de réduction de modèles permettent de réduire les coûts de calcul liés à la résolution du système donné par l'Eq. (1). Plus précisément la méthode utilisée dans ce travail est la modélisation en base réduite ou réduction de modèles par projection [7, 8]. Les modèles par projection visent à résoudre le système Eq. (1) en projection sur une base réduite $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_{n_{RB}})$, où $\Phi_i, i = 1, \dots, n_{RB} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}}$. Ainsi le problème initial projeté sur cette base peut s'écrire :

$$\Phi^T K(x) \Phi \alpha(x) = \Phi^T F(x) \quad (8)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{n_{RB}}$ est le vecteur des coefficients du vecteur u dans la base réduite Φ .

Le nouveau problème à résoudre est donc un système linéaire de $n_{RB} \ll \mathcal{N}$ équations, donc de taille bien inférieure à celle du système de départ. Cette nouvelle formulation du problème permet de calculer le vecteur α et ainsi d'obtenir une solution réduite $\tilde{u} = \Phi \alpha$. On peut quantifier la qualité de cette

approximation par un estimateur d'erreur basé sur des résidus [9] :

$$\epsilon_{RB} = \frac{\|K\Phi\alpha - F\|_2}{\|F\|_2} \quad (9)$$

4 Nouvelle méthodologie

4.1 Principe de la méthodologie adaptative

Nous proposons d'utiliser une nouvelle méthodologie d'analyse de fiabilité en couplant une approche par échantillonnage adaptatif à la modélisation en base réduite permettant ainsi de réduire significativement les coûts de calcul. En effet, en un certain nombre de points du plan d'expériences une solution réduite serait suffisante pour préciser le comportement du système.

La méthodologie proposée débute par la définition d'un plan d'expériences initial servant à initialiser à la fois le métamodèle de Krigeage et la base réduite. Le premier point du plan d'expériences est évalué à l'aide du modèle numérique complet et est assigné comme premier élément de la base réduite. Les points suivants (i.e. plan d'expériences initial et points ajoutés lors de la phase d'apprentissage) sont évalués en respectant les étapes suivantes :

1. Calcul de la solution réduite \tilde{u}_i au point x^i par projection sur la base réduite courante.
2. Calcul du résidu ϵ_{RB} correspondant à la solution réduite précédente selon l'Eq. (9).
3. Evaluation de la précision de la solution \tilde{u}_i . Si la valeur de ϵ_{RB} est inférieure à un seuil fixé ϵ , la solution réduite est considérée comme suffisamment précise et est ajoutée au plan d'expériences. Sinon, voir étape suivante.
4. Si en se basant sur le seuil ϵ la solution réduite n'est pas valide, le problème complet est résolu numériquement. Le résultat obtenu u_i est ajouté au plan d'expériences et est utilisé pour enrichir la base réduite après avoir été orthonormalisé en suivant les équations Eq. (10) et (11).

$$\Phi_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, \Phi_k \rangle \Phi_k \quad (10)$$

$$\Phi_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|_2} \quad (11)$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans L^2 .

4.2 Amélioration du critère de couplage par l'utilisation de pré-conditionneurs

Le résidu défini par l'Eq. (9), dépendant notamment du conditionnement de la matrice de rigidité, peut donner une estimation inexacte de l'erreur de la solution en base réduite dans certains cas. Ainsi si l'information est inexploitable, il est difficile de faire le choix d'un seuil ϵ pertinent pour le critère de précision ϵ_{RB} .

L'utilisation d'un résidu préconditionné, homogène à la variable d'état u , peut améliorer l'estimateur d'erreur basé sur des résidus [10]. On propose donc d'utiliser un résidu préconditionné donné par la formule suivante pour améliorer les performances du couplage proposé :

$$\epsilon_{RB}^P = \frac{\|P^{-1}K\Phi\alpha - P^{-1}F\|_2}{\|P^{-1}F\|_2} \quad (12)$$

avec P un préconditionneur.

5 Application à la rupture d'une plaque composite

Pour illustrer la nouvelle méthodologie proposée, nous l'avons appliquée au cas d'une plaque composite stratifiée trouée en flexion dont la défaillance est identifiée par le calcul du critère de Tsai-Hill :

$$\left(\frac{\sigma_L(\theta, h)}{X_{ult}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T(\theta, h)}{Y_{ult}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{LT}(\theta, h)}{\tau_{ult}}\right)^2 - \frac{\sigma_L(\theta, h)\sigma_T(\theta, h)}{X_{ult}^2} > 1 \quad (13)$$

avec X_{ult} , Y_{ult} and τ_{ult} les contraintes ultimes et σ_L , σ_T et τ_{LT} respectivement les contraintes longitudinales, transversales et de cisaillement.

Cette application a pour objectif d'étudier l'estimation de la probabilité de défaillance de la plaque. Plus précisément, le cas considéré pour notre application est celui d'une plaque stratifié de 12 plis trouée, encadrée sur un côté et soumise à une pression uniformément répartie sur la partie supérieure et du cisaillement sur le côté opposé au côté encadré. (voir Fig. 1).

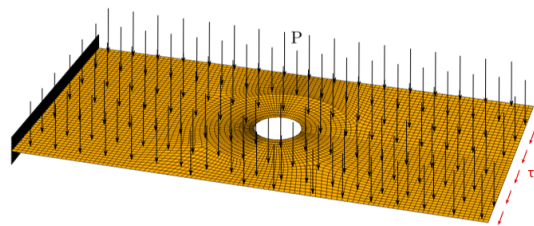


FIGURE 1 – Conditions aux limites et chargement.

Les paramètres θ et h , représentant respectivement les angles d'orientation des fibres et les épaisseurs de chaque pli, sont les variables incertaines du problèmes modélisées par des variables aléatoires distribuées selon les lois suivantes :

- les épaisseurs des plis h_i suivent des lois Gamma $\Gamma(\mu, \sigma, \gamma)$ dont les paramètres sont donnés dans la Table 1,
- les angles d'orientation des plis θ_i suivent des lois uniformes $\mathcal{U}(a, b)$ dont les paramètres sont donnés dans la Table 2.

$$\begin{array}{r} \mu \quad 2 \cdot 10^{-4} \\ \sigma \quad 2 \cdot 10^{-5} \\ \gamma \quad 0 \end{array}$$

TABLE 1 – Paramètres des lois Gamma modélisant les épaisseurs des plis.

En premier lieu, les différentes formulations de résidu ont été comparées en calculant le coefficient de corrélation de Pearson entre le résidu et l'erreur réelle (l'erreur réelle est définie comme la différence entre la vraie réponse du système et la solution réduite). Cette estimation a été effectuée en utilisant les points utilisés au cours de l'algorithme AK-MCS couplé à la modélisation en base réduite.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
<i>a</i>	-2.5	42.5	-47.5	-47.5	42.5	-2.5
<i>b</i>	2.5	47.5	-42.5	-42.5	47.5	2.5

TABLE 2 – Paramètres des lois uniformes modélisant les angles d’orientation des fibres dans les plis.

La Fig. 2 présente les résultats obtenus pour le résidu non préconditionné. On peut voir que dans ce cas le coefficient de corrélation obtenu est très bas et que de nombreux résidus ont des valeurs supérieures à 1. Ces résultats ne permettent pas de faire le choix d’un seuil ϵ performant pour le couplage.

Par ailleurs, la corrélation entre le résidu préconditionné et l’erreur réelle a également été estimée. Le préconditionneur utilisé pour cette estimation est $P = K_0$ tel que K_0 est la matrice de rigidité K calculée avec le modèle numérique au point situé au centre du domaine physique. L’estimation du coefficient de corrélation est égale à 0.93, ce qui montre une forte amélioration de la corrélation par rapport au résidu non préconditionné ($cor_{noprec} = 0.61$). Ainsi pour la suite de l’étude de ce problème, le critère de couplage est basé sur le résidu préconditionné.

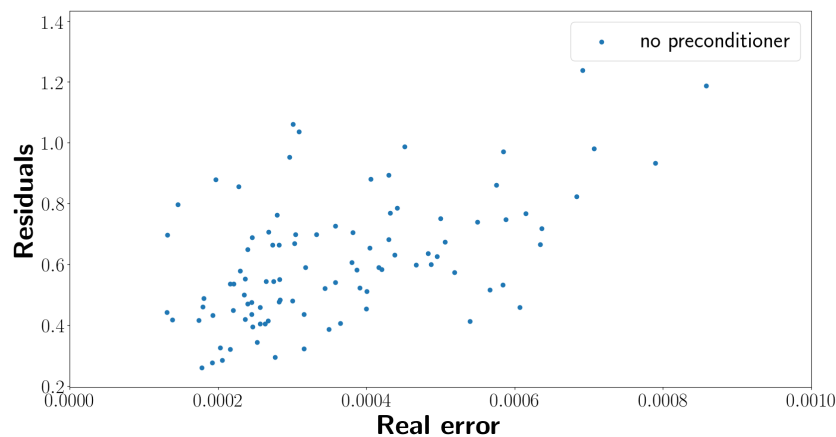


FIGURE 2 – Corrélation entre le résidu non préconditionné et l’erreur réelle de la solution en base réduite.

La performance de la méthode proposée en fonction de différents seuils imposés a ensuite été étudiée. La procédure suivie pour cette étude est de réutiliser le plan d’expériences généré lors d’une exécution de l’algorithme AK-MCS en utilisant la stratégie de couplage pour différents seuils ϵ . Les valeurs moyennes de l’accélération (rapport entre le nombre d’appels au modèle numérique au cours de l’algorithme AK-MCS et au cours du couplage) et de la précision (définie par la formule $1 - \frac{|\widehat{P}_{f_{AK-MCS}} - \widehat{P}_{f_{AK-MCS+RB}}|}{\widehat{P}_{f_{AK-MCS}}}$) en fonction de ϵ calculées sur 10 exécutions sont présentées sur la Fig. 3.

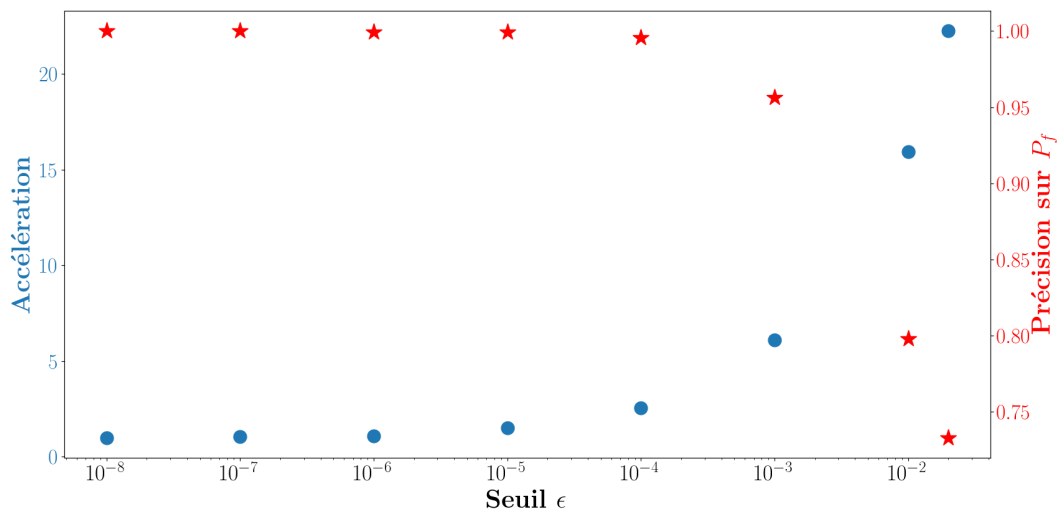


FIGURE 3 – Précision (étoiles rouges) de la probabilité de défaillance P_f et accélérations (points bleus) en fonction du seuil ϵ .

En se basant sur les résultats de la Fig. 3, le meilleur compromis entre la précision sur la valeur de P_f et l'accélération de la méthode semble être obtenu pour un seuil $\epsilon = 10^{-3}$.

Finalement l'algorithme AK-MCS et le couplage ont été exécutés 40 fois pour différents plans d'expériences initiaux et populations de Monte Carlo en fixant $\epsilon = 10^{-3}$. La moyenne sur cet échantillon $\overline{P_f}$ et l'écart type corrigé $\overline{\sigma_{P_f}}$ sont donnés dans la Table 3. La moyenne de la probabilité de défaillance estimée par la méthode proposée est dans l'intervalle de confiance à 95% de AK-MCS [8.20×10^{-4} , 8.80×10^{-4}] et, de plus, les écarts types corrigés estimés sont du même ordre de grandeur.

En moyenne l'accélération obtenue en utilisant le couplage sur ce problème est de l'ordre d'un facteur 6.7. Une exécution du couplage fait appel au modèle numérique coûteux en moyenne seulement pour 17.6% des évaluations.

	$\overline{P_f}$	$\overline{\sigma_{P_f}}$
AK-MCS	8.50×10^{-4}	6.36×10^{-5}
AK-MCS + RB	8.23×10^{-4}	6.47×10^{-5}

TABLE 3 – Résultats moyens des algorithmes AK-MCS and AK-MCS + BR avec résidu préconditionné.

6 Conclusion et perspectives

Une nouvelle méthode d'analyse de fiabilité visant à réduire les temps de calcul pour certains types de modèles numériques a été présentée. La méthode combine les méthodes d'échantillonnage adaptatif et la réduction de modèles. Comparé à l'utilisation de l'algorithme AK-MCS pour lequel le problème complet est résolu à chaque itération, la nouvelle méthode montre un fort potentiel de réduction du coût numérique. Sur l'application présentée elle a permis d'obtenir une accélération jusqu'à un facteur 6.7 en réduisant le nombre d'appels au modèle numérique complet. Comme perspective notons qu'il serait intéressant d'appliquer cette méthode lors d'une optimisation sous contrainte de fiabilité étant donné les fortes réductions de coûts de calculs obtenues pour une seule analyse de fiabilité.

Références

Références

- [1] C. E. Rasmussen, C. K. I. Williams, Gaussian processes for machine learning, Adaptive computation and machine learning, MIT Press, Cambridge, Mass, 2006, oCLC : ocm61285753.
- [2] B. J. Bichon, J. M. McFarland, S. Mahadevan, Efficient surrogate models for reliability analysis of systems with multiple failure modes, *Reliability Engineering & System Safety* 96 (10) (2011) 1386–1395. doi :10.1016/j.ress.2011.05.008.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0951832011001062>
- [3] M. Balesdent, J. Morio, J. Marzat, Kriging-based adaptive Importance Sampling algorithms for rare event estimation, *Structural Safety* 44 (Supplement C) (2013) 1–10. doi :10.1016/j.strusafe.2013.04.001.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167473013000350>
- [4] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, AK-MCS : An active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, *Structural Safety* 33 (2) (2011) 145–154. doi :10.1016/j.strusafe.2011.01.002.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167473011000038>
- [5] M. D. McKay, R. J. Beckman, W. Conover, A Comparison of Three Methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics* 21 (1979) 239 – 245.
- [6] M. D. MacKay, Latin hypercube sampling as a tool in uncertainty analysis of computer models, in : WSC '92 Proceedings of the 24th conference on Winter simulation, ACM, New York, 1992, pp. 557–564.
- [7] P. Benner, S. Gugercin, K. Willcox, A Survey of Projection-Based Model Reduction Methods for Parametric Dynamical Systems, *SIAM Review* 57 (4) (2015) 483–531. doi :10.1137/130932715.
URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/130932715>
- [8] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. F. Vakakis, L. A. Bergman, The Method of Proper Orthogonal Decomposition for Dynamical Characterization and Order Reduction of Mechanical Systems : An Overview, *Nonlinear Dynamics* 41 (1-3) (2005) 147–169. doi :10.1007/s11071-005-2803-2.
URL <https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-005-2803-2>
- [9] C. Gogu, A. Chaudhuri, C. Bes, How Adaptively Constructed Reduced Order Models Can Benefit Sampling-Based Methods for Reliability Analyses, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 23 (05) (2016) 1650019.
- [10] O. Zahm, A. Nouy, Interpolation of inverse operators for preconditioning parameter-dependent equations, *SIAM Journal on Scientific Computing* 38 (2) (2016) A1044–A1074.