HAL
open science

Couplage Optimisation et Réduction de Modèles par Projection Application à la conception avion avant-projet

G Berthelin, S. Dubreuil, Michel Salaün, Christian Gogu, Nathalie Bartoli

To cite this version:

G Berthelin, S. Dubreuil, Michel Salaün, Christian Gogu, Nathalie Bartoli. Couplage Optimisation et Réduction de Modèles par Projection Application à la conception avion avant-projet. 14ème Colloque National en Calcul des Structures,, May 2019, Giens, France. hal-02147411

HAL Id: hal-02147411

https://hal.science/hal-02147411

Submitted on 4 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2019
14ème Colloque National en Calcul des Structures
13-17 Mai 2019, Presqu'île de Giens (Var)

Couplage Optimisation et Réduction de Modèles par Projection Application à la conception avion avant-projet.

G. Berthelin[1], S. Dubreuil[1], M.Salaün[2],
C. Gogu[3], N. Bartoli[1]

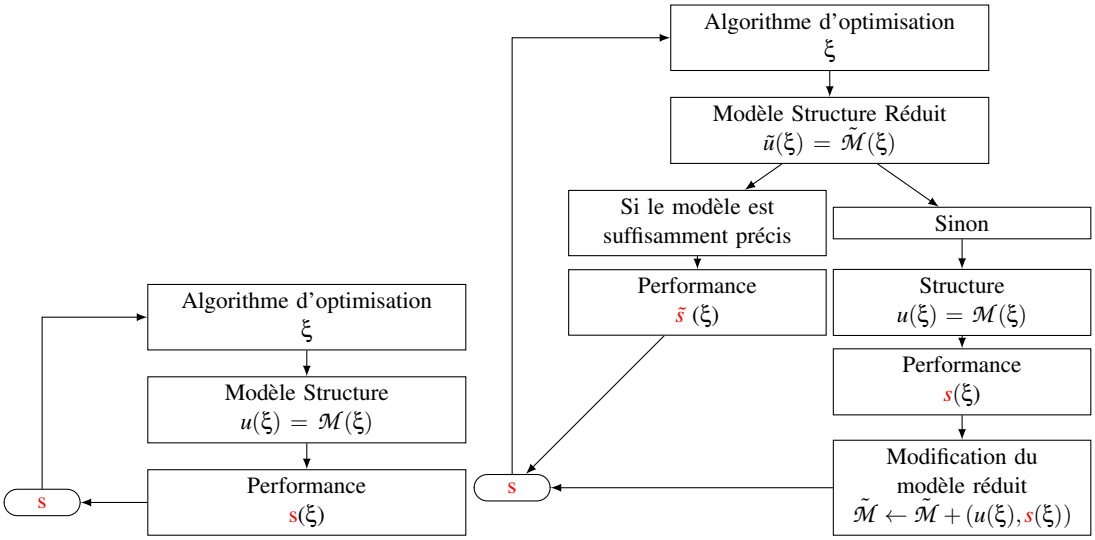
[1] *ONERA/DTIS, Université de Toulouse, F-31055 Toulouse - France {gaspard.berthelin,sylvain.dubreuil,nathalie.bartoli}@onera.fr*
[2] *Université de Toulouse, CNRS, ISAE-SUPAERO, UPS, INSA, Mines Albi, Institut Clément Ader (ICA), 3 rue Caroline Aigle, Toulouse F-31400, France, michel.sal*
[3] *Université de Toulouse, CNRS, UPS, INSA, ISAE-SUPAERO, Mines Albi, Institut Clément Ader (ICA), 3 rue Caroline Aigle, Toulouse F-31400, France, christian.gogu@univ-tlse3.fr*

Résumé — Cette étude s'intéresse à l'utilisation de modèles réduits dans des problématiques d'optimisation de valeurs d'intérêt dépendant linéairement de la solution d'une équation aux dérivées partielles obtenue par éléments finis. Il est proposé une méthode permettant de coupler un calcul approché en base réduite de la solution avec un algorithme d'optimisation à base de métamodèle enrichi de manière adaptative, afin de limiter le nombre d'appels au code de calcul. Par la suite, cette méthode est appliquée à un problème de conception avion avant-projet.
Mots clés — réduction de modèles, optimisation.

1 Introduction

Lors de la phase de conception avant-projet, le dimensionnement d'une aile d'avion requiert un calcul d'optimisation sur un espace de conception étendu conduisant à des appels répétés à la fonction objectif (calculée via un code de calcul éléments finis). Or, la complexité croissante des modèles numériques conduit à des calculs dont le coût peut rendre l'optimisation prohibitive. Afin de pallier cette difficulté, il est proposé d'utiliser des méthodes de réduction de modèles par projection. Ceci permet de limiter le nombre d'appels au code de calcul en construisant une approximation de la fonction objectif. L'objectif de l'étude est de proposer un modèle réduit adaptatif afin que ce modèle soit de plus en plus précis dans les zones de conception optimales. Comme l'objectif n'est pas de substituer le modèle complet par le modèle réduit, celui-ci doit s'adapter aux solutions trouvées par l'algorithme d'optimisation afin d'être le plus précis possible dans les zones d'intérêt pour l'optimisation. Prenons comme exemple l'optimisation d'une structure : via un modèle de structure $\mathcal{M}$, en tout point de l'espace de conception ξ, on obtient le champ des déplacements $u(\xi) = \mathcal{M}(\xi)$, permettant le calcul de la fonction de performance $s(\xi)$. Un algorithme d'optimisation classique fait appel au code de calcul en plusieurs points de conception et adapte sa recherche en fonction de la performance obtenue au point demandé. Cet algorithme est présenté dans la Figure 1a. Une alternative à cet algorithme a été proposée par [1] dans le but de mettre à profit la possibilité de calculs de modèles réduits. Ainsi on initialise un modèle réduit $\tilde{\mathcal{M}}$ permettant d'approcher la solution du modèle $u(\xi)$ par la solution d'un modèle réduit $\tilde{u}(\xi) = \tilde{\mathcal{M}}(\xi)$. Si le modèle est suffisamment précis, la fonction de performance $s(\xi)$ est approchée par $\tilde{s}(\xi)$. Dans le cas contraire, la solution exacte du modèle structure est calculée, permettant d'obtenir la fonction de performance, et le modèle réduit est mis à jour, incluant l'information obtenue par le modèle complet. Cet algorithme est présenté dans la Figure 1b.

Le but de ces travaux est de proposer un nouvel algorithme d'optimisation utilisant la réduction de modèles par projection, dans la continuité des approches proposées dans [1]. L'originalité de ces travaux réside dans le développement d'un estimateur de la précision de l'approximation en base réduite, estimateur qui sera ensuite intégré directement dans l'algorithme d'optimisation afin guider le choix entre utilisation du modèle réduite ou pas.



(a) Algorithme d'optimisation sans réduction de modèles

(b) Algorithme d'optimisation avec réduction de modèles

FIGURE 1 – Algorithme d'optimisation

2 Réduction de modèles

2.1 Introduction

Le cadre de l'étude se limite à un problème de mécanique linéaire permettant d'obtenir le déplacement d'une structure en fonction de la matrice de rigidité et du chargement appliqué sur la structure. Le problème est paramétré par les variables de conception liée à la structure $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^p$. La quantité d'intérêt $s(\xi) \in \mathbb{R}$ du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A(\xi)u(\xi) & = & b(\xi) \\ s(\xi) & = & L(\xi)u(\xi) \end{array} \right. \tag{1}$$

est obtenue à partir de la matrice de rigidité $A(\xi) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, du chargement $b(\xi) \in \mathbb{R}^N$ et de l'opérateur linéaire, reliant les déplacements à une valeur de performance, noté $L(\xi)$. Comme $A(\xi)$ est la matrice de rigidité d'un problème de mécanique linéaire, elle est symétrique définie positive. Pour obtenir la quantité d'intérêt $s(\xi)$, il faut inverser le système linéaire $A(\xi)u(\xi) = b(\xi)$ d'inconnue $u(\xi) \in \mathbb{R}^N$.

2.2 Projection de Galerkin

Parmi les différentes méthodes de réduction de modèles, le choix se porte sur une méthode de projection : la décomposition orthogonale en modes propres (ou encore POD pour Proper Orthogonal Decomposition [9]). La solution approchée de l'équation (1) sur l'espace de solutions $V_r \subset \mathbb{R}^N$, notée $\tilde{u}(\xi) \in V_r$, est définie par

$$\langle A(\xi)\tilde{u}(\xi) - b(\xi), v\rangle = 0 \ , \quad \forall v \in V_r \ . \tag{2}$$

En pratique, la solution réduite s'obtient par l'inversion d'un système réduit de dimension inférieure. En notant φ_V la matrice de projection de $\mathbb{R}^N$ sur V_r , la solution de l'équation (2) s'obtient en résolvant le système suivant de dimension $\dim(V_r) \ll N$:

$$\begin{aligned} (\varphi_V^T A(\xi)\varphi_V)u_r &= \varphi_V^T b(\xi) \\ \tilde{u} &= \varphi_V u_r \end{aligned} \tag{3}$$

Afin d'obtenir l'espace V_r , il est nécessaire de calculer la solution du modèle en plusieurs paramètres initiaux $(u(\xi_1), \ldots, u(\xi_n))$. L'espace V_r est alors engendré par l'ensemble de ces "snapshots". Il est aussi possible d'effectuer une décomposition en valeurs singulières afin de réduire la dimension de l'espace, en favorisant les directions dont la variance des coordonnées est la plus importante.

2.3 Correction Duale

Une première estimation de la quantité d'intérêt est : $\tilde{s}(\xi) = L(\xi)\tilde{u}(\xi)$. Cependant, lorsque cette quantité d'intérêt dépend linéairement de la quantité $u(\xi)$, il est possible d'apporter une correction définie dans le cas scalaire [10] ou vectoriel [2]. On introduit $Q(\xi)$ la solution du système suivant nommé problème dual :

$$A(\xi)Q(\xi) = (L(\xi))^T$$

Comme pour $u(\xi)$, il est possible de construire une approximation $\tilde{Q}(\xi)$ de $Q(\xi)$ en utilisant la projection de Galerkin sur un nouvel espace de solutions noté V_p. Une correction sur la valeur d'intérêt [2] est alors obtenue :

$$\tilde{s}(\xi) = L(\xi)\tilde{u}(\xi) + \tilde{Q}^T(\xi)(b(\xi) - A(\xi)\tilde{u}(\xi))$$

À partir de cette approximation de la quantité d'intérêt, il est possible d'obtenir une majoration de l'erreur effectuée par le modèle réduit. En effet, en observant que :

$$s(\xi) - \tilde{s}(\xi) = \left(L^T - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\right)^T (u(\xi) - \tilde{u}(\xi)) \tag{4}$$

On en déduit l'inégalité

$$\|s(\xi) - \tilde{s}(\xi)\| \leq \|L^T - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\|_{2,2}\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\| \tag{5}$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle et $\|\cdot\|_{2,2}$ est la norme spectrale. Le premier terme est peu coûteux à estimer car une fois la solution approchée du problème dual obtenue, le principal coût de calcul est le produit matrice-vecteur. Par contre, le second terme dépend de la solution exacte $u(\xi)$ du système, que l'on ne souhaite pas calculer. Pour pallier ce problème, on propose d'utiliser un préconditionneur afin d'approcher ce terme.

2.4 Préconditionneur

Dans cette partie, l'objectif est d'approcher le second terme de la majoration de l'erreur. L'information peu coûteuse disponible est le résidu sur la solution du système (3) : $A(\xi)\tilde{u}(\xi) - b(\xi)$. Afin d'obtenir une approximation de $\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\|$, dans [3], il est proposé d'estimer l'inverse de $A(\xi)$ par interpolation d'opérateurs. À partir des inverses $A^{-1}(\xi_1), \ldots, A^{-1}(\xi_m)$ obtenus en m paramètres, on définit le préconditionneur de la matrice $A(\xi)$ par :

$$P_m(\xi) = \arg\min_{\Lambda \in \mathbb{R}^m} \left\| I - \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i A^{-1}(\xi_i) \right) A(\xi) \right\|_F$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Comme ce problème est trop coûteux en grande dimension, il est proposé d'utiliser une approximation de $P_m(\xi)$ définie par :

$$P_m(\xi) = \arg\min_{\Lambda \in \mathbb{R}^m} \left\| \left(I - \left(\sum_{i=1}^{m} \Lambda_i A^{-1}(\xi_i) \right) A(\xi) \right) V \right\|_F \tag{6}$$

où $V \in \mathbb{R}^{N \times K}$ est une matrice aléatoire et $K > 0$ est un paramètre permettant d'ajuster la précision du calcul du préconditionneur. On peut alors approcher $\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\|$ par $\|P_m(\xi)\,(A(\xi)\tilde{u}(\xi) - b(\xi))\,\|$ dans l'inégalité (5) conduisant à une borne approchée de l'erreur :

$$\Delta^1(\xi) \equiv \|L^T - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\|\|P_m(\xi)\,(A(\xi)\tilde{u}(\xi) - b(\xi))\,\|$$

2.5 Borne corrigée

Grâce au préconditionnement, il est possible d'obtenir une approximation de la majoration de l'erreur obtenue grâce à l'inégalité (5). Afin d'augmenter la précision des résultats, on remarque que l'équation (4) s'écrit dans le cas scalaire :

$$|s(\xi) - \tilde{s}(\xi)| = \|L^T(\xi) - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\|\|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\||\cos\phi(\xi)|$$

où $\phi(\xi)$ est l'angle entre les deux vecteurs $L^T(\xi) - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)$ et $u(\xi) - \tilde{u}(\xi)$. Plutôt que de majorer $|\cos\phi(\xi)|$ par le pire cas, on va chercher à en estimer un quantile en considérant ξ comme une variable aléatoire. On note F la fonction de répartition de $|\cos\phi(\xi)|$ dans $[0,1]$. L'objectif est alors de déterminer un quantile de niveau α de la variable $|\cos\phi(\xi)|$: $\inf\{t \in \mathbb{R} : F(t) > 1-\alpha\}$. Lorsque la matrice $A(\xi)$ est symétrique définie positive, $\tilde{u}(\xi)$ est la projection orthogonale de $u(\xi)$ sur V_r par rapport au produit scalaire défini par $A(\xi)$. Le terme $u(\xi) - \tilde{u}(\xi)$ est donc à valeur dans $V_r^{\perp}$. De même, le terme $Q(\xi) - \tilde{Q}(\xi)$ est à valeurs dans $V_p^{\perp}$, donc $L^T(\xi) - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)$ est à valeur dans $W = \{Ax; x \in V_p^{\perp}\}$ qui est un espace vectoriel de dimension $N - \dim(V_p)$. Comme ces deux quantités sont issues de calculs différents (le premier étant le résidu du problème dual et le second étant l'erreur faite sur le problème direct), on peut supposer qu'elles sont indépendantes. Comme on n'a aucune autre information à priori sur la distribution du vecteur $u(\xi) - \tilde{u}(\xi)$ on supposera que sa direction est tirée uniformément sur la sphère unité. On peut alors montrer que ceci revient à estimer le quantile de la distribution de $|\cos\psi|$, où ψ est l'angle entre une direction fixe u_0 et un vecteur uniformément distribué sur la sphère unité de dimension $k = \dim(V_r^{\perp} \cap W) \geq N - \dim V_r - \dim V_p$. Pour estimer ce quantile, on utilise les coordonnées hypersphériques. Soit $(x_1, \ldots, x_{k-1}, u_0)$ une base orthogonale de $\mathbb{R}^k$ et $\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{k-1} \in \mathbb{R}^+ \times [0;\pi]^{k-2} \times [0:2\pi]$ les coordonnées hypersphériques associées. Par construction, on a $\theta_1 = \psi$. On cherche alors à obtenir la distribution des $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$, permettant d'obtenir une distribution uniforme sur la sphère, afin d'obtenir la distribution de ψ. Soit $f(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1})$ la densité de probabilité du tirage uniforme sur la sphère unité. Soit S_k un élément de surface infinitésimal de la sphère unité, sa surface dS_k (obtenue en calculant la jacobienne de la transformation entre la base cartésienne et la base hypershérique) est donnée par :

$$dS_k = 1^{k-1} \prod_{i=1}^{k-1} \sin^{k-1-i}\theta_i \, \mathrm{d}\theta_i$$

Soit S la surface de la sphère unité, on a :

$$\mathbb{P}(x \in S_k) = f(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}) \, \mathrm{d}\theta_1 \ldots \mathrm{d}\theta_{k-1} = \frac{dS_k}{S} = \frac{\prod_{i=1}^{k-1} \sin^{k-1-i}\theta_i \, \mathrm{d}\theta_i}{S}$$

Ainsi, il vient : $f(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}) = \prod_{i=1}^{k-1} f_i(\theta_i)$, avec

$$f_i(\theta_i) = \frac{\sin^{k-1-i}\theta_i}{\int_0^{\pi} \sin^{k-1-i} x \, \mathrm{d}x} \quad \text{pour} \;\; 1 \leq i \leq k-2 \tag{7}$$

et

$$f_{k-1}(\theta_{k-1}) = \frac{1}{2\pi}$$

On en déduit que les variables $(\theta_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ sont indépendantes et l'équation (7) permet d'obtenir les lois de probabilité f_i de chacune des coordonnées θ_i. On peut alors numériquement estimer la distribution de $\psi = \theta_1$ permettant de calculer les quantiles. On remarque que, avec nos hypothèses, les résultats ne dépendent que de la dimension de $W \cap V_r^{\perp}$. Les résultats numériques obtenus pour les quantiles d'ordre $1-\alpha$, notés $q_k(\alpha)$, sont donnés sur la Figure 2 et permettent d'observer une décroissance en $\frac{1}{\sqrt{k}}$.
Enfin, compte-tenu des hypothèses faites, on en déduit l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|s(\xi) - \tilde{s}(\xi)| &= \|L^T - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\| \|u(\xi) - \tilde{u}(\xi)\| |\cos\phi(\xi)| \\
&\approx \|L^T - A(\xi)\tilde{Q}(\xi)\| \|P_m(\xi)\,(A(\xi)\tilde{u}(\xi) - b(\xi))\| |\cos\phi(\xi)| \\
&\leq q_k(\alpha)\Delta^1(\xi) \equiv \Delta^2(\xi) \text{ avec une probabilité } 1-\alpha
\end{aligned}$$

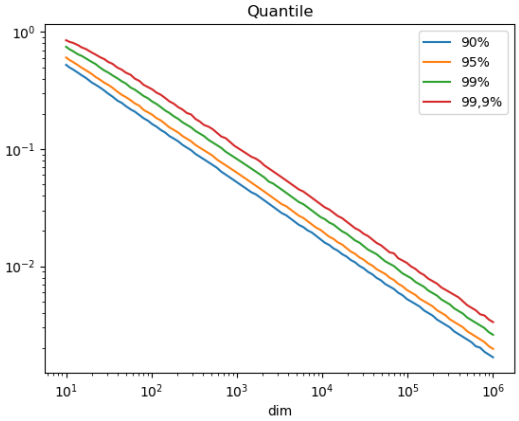


FIGURE 2 – Évolution du quantile de $|\cos\psi|$ à 90%, 95%, 99% et 99,9% en fonction de la dimension

3 Optimisation

3.1 Introduction

Dans cette partie, on cherche à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \arg\min\limits_{x\in\mathcal{D}} s(x) \\ c(x) \geq 0 \\ d(x) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Une solution proposée par Jones [4] repose sur l'utilisation d'un modèle de substitution de la fonction objectif et sur son exploitation afin de trouver un point intéressant pour l'optimisation. Le krigeage proposé par D. G. Krige [5] puis formalisé par G. Matheron [6] est utilisé comme modèle de substitution, dans l'algorithme Efficient Global Optimization (EGO) proposé par [4]. L'algorithme SEGO [12] (pour Super Efficient Global Optimization) est une évolution de EGO permettant de prendre en compte les contraintes $c(x) \geq 0$ et $d(x) = 0$.

3.2 Krigeage

Le krigeage, ou interpolation par processus gaussien, est une méthode d'approximation qui suppose que la fonction à approcher est la réalisation d'un processus gaussien. On cherche donc à estimer une fonction $s : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ à partir d'un ensemble de paramètres $(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)})$ où $\xi^{(i)} \in \mathbb{R}^p$ pour tout i, associés à leurs images respectives par la fonction s $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$. L'approximation par krigeage est alors paramétrée par le choix de la fonction moyenne $\mu(x)$ et le choix de la fonction de corrélation $Cov(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}; \theta)$. Un choix possible, qui sera utilisé dans la suite, est le noyau gaussien :

$$Cov(\xi^{(l)}, \xi^{(m)}) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{p} \theta_j |\xi_j^{(l)} - \xi_j^{(m)}|^2\right)$$

de paramètre $\Theta = (\theta_1 \ldots \theta_p)^T \in \mathbb{R}^p$. La détermination du paramètre Θ est effectuée par estimation du maximum de vraisemblance. A partir de ces paramètres définissant la corrélation entre deux points de notre ensemble de données, la matrice de covariance de notre jeu de données est calculée. Ceci permet de calculer en tout point ξ de l'ensemble de départ une approximation de notre fonction ainsi qu'une incertitude de prédiction associée. Le résultat du krigeage est qu'en tout point de notre espace de départ, $s(\xi)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\hat{s}(\xi), \sigma(\xi))$. La fonction $\hat{s}$ est l'estimation moyenne de la fonction s et la fonction σ est la variance de la loi gaussienne modélisant l'incertitude sur l'estimation et la valeur de la fonction.

3.3 Super Efficient Global Optimization (SEGO)

Cet algorithme d'optimisation repose sur l'utilisation des métamodèles de krigeage afin de diminuer le temps de calcul lors de l'optimisation. On définit l'amélioration espérée en un point donné ξ, comme l'amélioration que l'on espère obtenir en ξ. Ceci revient à calculer l'espérance de la quantité $\sup(I(\xi),0)$ en posant $I(\xi) \equiv y_{min} - s(\xi)$ où y_{min} est le minimum de la fonction objectif obtenu jusqu'à présent. Ainsi, en notant $\hat{s}(\xi)$ et $\sigma(\xi)$ la moyenne et la variance du krigeage obtenu en ξ, on obtient [11] :

$$\mathbb{E}[I(\xi)] = \begin{cases} (y_{min} - \hat{s}(\xi)) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{y_{min}-\hat{s}(\xi)}{\sigma(\xi)\sqrt{2}}\right)\right] + \sigma(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(y_{min}-\hat{s}(\xi))^2}{2\sigma(\xi)^2}\right] & \text{if } \sigma(\xi) > 0 \\ 0 & \text{if } \sigma(\xi) = 0 \end{cases}$$

On cherche donc à maximiser l'espérance espérée ce qui revient à chercher le point où l'on pense que l'amélioration va être la meilleure. Ce point est par la suite ajouté à notre base de données (enrichissement) et un krigeage est calculé en prenant en compte ce nouveau point. Comme les contraintes sont coûteuses à évaluer, elles seront elles aussi estimées à l'aide d'un krigeage. L'incertitude sur le modèle des contraintes n'est pas pris en compte. Ceci se traduit par l'Algorithme 1.

Algorithm 1 SEGO

procedure SEGO(s,c,d,$\mathcal{D}$,n_0) ▷ Find $\arg\min_{x\in\mathcal{D}} s(x)\ \ s.t.\ \ c(x) \geq 0, d(x) = 0$
  Initialization :
  doe_x ← n_0 set of vector on $\mathcal{D}$ sampled with Latin Hypercube.
  doe_y ← s(doe_x), doe_c ← c(doe_x), doe_d ← d(doe_x)
  y_min ← $\min_i$ doe_y[i] $s.t.$ doe_c[i]≥0, doe_d[i]=0
  $n_{iter} \leftarrow 0$
  while $n_{iter} < n_{iter}^{max}$ **do**
    $\hat{s}, \sigma \leftarrow$ Gaussian Process (doe_x, doe_y)
    $\hat{c}$,_ ← Gaussian Process (doe_x, doe_c)
    $\hat{d}$,_ ← Gaussian Process (doe_x, doe_d)
    $x_{n_{iter}} \leftarrow \arg\min_{x\in\mathcal{D}} EI(x)\ \ s.t.\ \ \hat{c}(x) \geq 0, \hat{d}(x) = 0$
    Add $x_{n_{iter}}$ to doe_x
    Add s($x_{n_{iter}}$) to doe_y
    Add c($x_{n_{iter}}$) to doe_c
    Add d($x_{n_{iter}}$) to doe_d
    y_min ← min doe_y
  end while
  return doe_x[$\arg\min_i$ doe_y[i] $s.t.$ doe_c[i]≥0, doe_d[i]=0]
end procedure

3.4 Utilisation de SEGO avec une réduction de modèles

Dans cette partie, il est proposé une combinaison de l'algorithme SEGO et de la réduction de modèles. Grâce à la valeur du modèle réduit et à la borne de l'erreur présentée dans les sections 2.4 et 2.5, on peut obtenir un encadrement de la valeur exacte de $s(\xi)$ permettant potentiellement de statuer sur son optimalité. Ceci permet d'écarter par le modèle réduit des points non intéressants trouvés par l'algorithme SEGO. À l'aide de la réduction de modèles présentée dans la section 2, on peut obtenir en tout point ξ une approximation $\tilde{s}(\xi)$ et une borne probabiliste de l'erreur $\Delta^{i=1,2}(\xi)$. Soit ξ^* le paramètre donné par SEGO, deux cas sont alors possibles :

— $\tilde{s}(\xi^*) - \Delta^i(\xi^*) < y_{min}$: dans ce cas, le modèle réduit ne permet pas de conclure au niveau de confiance fixé sur l'optimalité de $s(\xi^*)$. Le modèle complet est évalué, permettant d'obtenir $s(\xi^*)$, $u(\xi^*)$ et $Q(\xi^*)$. On rajoute alors $vect(u(\xi^*))$ (resp. $vect(Q(\xi^*))$) à l'espace V_r (resp. V_p). De plus, s'il s'avère que $s(\xi^*) < y_{min}$, l'opérateur $A(\xi^*)^{-1}$ remplace l'opérateur correspondant au paramètre le moins optimal dans le calcul du préconditionnement.

— $\tilde{s}(\xi) - \Delta^i(\xi) > y_{min}$: dans ce cas, il est fortement probable que le point ξ ne soit pas optimal (risque géré par le quantile de niveau α et la précision du préconditionneur). Il est alors inutile de calculer la vraie valeur de $s(\xi)$.

En ajoutant cette fonctionnalité à l'algorithme SEGO, il est possible d'éviter le calcul du modèle complet en un certain nombre de points. De plus, le modèle réduit est modifié à chaque fois que le modèle complet est pris en compte afin d'améliorer sa précision, permettant de réduire au fur et à mesure des itérations le nombre d'appels au modèle exact.

4 Premiers résultats

Il est proposé de tester ces résultats sur un cas de dimensionnement d'aile d'avion. La structure de l'aile est modélisée par un modèle éléments finis avec 15000 éléments plaques (DKT [7]) repartis sur trois sections d'aile. Chaque section d'aile est composée de nervures (vert), d'un longeron avant (gris), d'un longeron arrière (rouge) et d'une peau (bleu) comme l'illustre la Figure 3. Chacun de ces éléments est caractérisé par des propriétés physiques communes (module d'Young $E = 72.4GPa$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$) mais par des épaisseurs différentes. Les douze épaisseurs forment alors les paramètres ξ de notre modèle. L'objectif est d'obtenir un déplacement vertical minimal en bout d'aile sous contrainte

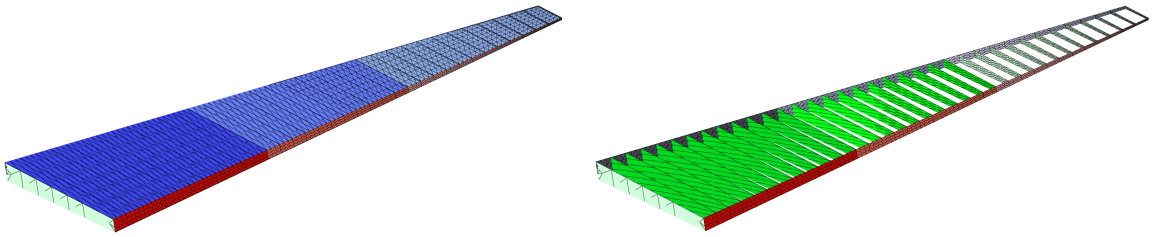


FIGURE 3 – Maillage de l'aile avec ou sans peau mettant en évidence les 3 sections et les différents composants : nervures (vert), longeron avant (gris), longeron arrière (rouge) et peau (bleu).

sur la masse maximale admissible. Le chargement est constant et calculé comme étant le résultat d'un calcul d'aéroélasticité où l'aérodynamique de l'aile est obtenue par une méthode Vortice Lattice Method (VLM [8]) dans le cadre d'une certification (coefficient de charge à 2.5). Le chargement ne sera pas recalculé pour chaque nouveau paramètre mais sera considéré comme représentatif du calcul aéroélastique puisque la géométrie de l'aile est inchangée. En posant $A(\xi)$ la matrice de rigidité de l'aile et F le chargement (supposé constant), le déplacement des noeuds de l'aile est obtenu en résolvant le système

$$A(\xi)u(\xi) = F \tag{9}$$

Après avoir inversé le système (9), la fonction objectif de notre problème est obtenue en extrayant une valeur particulière du déplacement $u(\xi)$. Ainsi, $L(\xi) = L$ ne dépend pas de ξ et est composé de zéros sauf en un point. La masse de l'aile est indépendante du résultat de ce calcul, elle dépend uniquement de la géométrie initiale de l'aile et des épaisseurs ξ.

Ce problème d'optimisation a été résolu à l'aide de trois algorithmes : l'algorithme SEGO sans réduction de modèles, l'algorithme SEGO avec réduction de modèles et approximation de la borne de l'erreur $\Delta^1(\xi)$ et, enfin, l'algorithme SEGO avec réduction de modèles et borne de l'erreur probabiliste $\Delta^2(\xi) = q_k(\alpha = 0.01)\Delta^1(\xi)$. Le nombre d'appels maximal au code complet éléments finis ou au modèle réduit est fixé à 300, en comptant un échantillon initial de dimension 40 (permettant d'initialiser le modèle réduit et le krigeage par SEGO). Avec une dimension minimale égale à $15276 - 2\text{nb}_{iter}$=14676, le coefficient $q_k(\alpha = 0.05)$ est égal à 1.65^{-2}. Le préconditionneur est évalué selon l'équation (6) par interpolation de $m = 10$ opérateurs, la valeur K permettant d'approcher les coordonnées des opérateurs est fixée à 400. Tous les déplacements et les solutions du problème dual sont utilisés pour la construction des espaces de solution.

Ces premiers résultats montrent que l'ajout de cette borne corrigée permet de diminuer de manière très importante le nombre d'appels au modèle complet sans dégrader la précision de l'optimisation.

5 Conclusion et perspectives

La réduction de modèles par projection et la correction duale ont permis de construire une approximation fidèle de la solution d'un code de calcul pour un coût numérique bien inférieur. À travers ce

Optimisation	Nombre d'appels au code complet	Nombre d'appels au modèle réduit	Minimum trouvé
sans réduction de modèles	300	0	2.13849
avec réduction de modèles et $\Delta^1(\xi)$	288	12	2.13976
avec réduction de modèles et $\Delta^2(\xi)$	162	138	2.13888

TABLE 1 – Résultats obtenus sur le cas test structure en fonction des modèles utilisés.

nouvel algorithme, il a été possible d'utiliser la réduction de modèles afin d'accélérer le processus d'optimisation en limitant le nombre d'appels à la fonction objectif. La correction de la norme proposée permet de sensiblement améliorer la précision de la borne de l'erreur et permet de réduire fortement le nombre d'appels au code de calcul. Par la suite la robustesse du processus sera investiguée par une étude plus poussée.

Références

[1] C. Gogu *Improving the efficiency of large scale topology optimization through on the fly reduced order model construction*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 101 :281–304, 2015.

[2] O. Zahm, M. Billaud-Friess, A. Nouy *Projection based model order reduction methods for the estimation of vector-valued variables of interest*, SIAM J. Sci. Comput, 39(4) :A1647-A1674, 2016.

[3] O. Zahm, A. Nouy *Interpolation of inverse operators for preconditioning parameter-dependent equations*, SIAM J. Sci. Comput, 38(2) :A1044–A1074, 2016.

[4] D.R. Jones, M. Schonlau, W.J. Welch *Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions*, Journal of Global Optimization, 13 : 455–492, 1998.

[5] D. G. Krige *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*, J. of Chem., Metal. and Mining Soc. of South Africa, 13(4) :119-139, 1951.

[6] G. Matheron *Principles of Geostatistics. Economic Geol.*, Economic Geology, 58(8) :1246–1266, 1963.

[7] A. Kudawoo *Éléments de plaque : modélisations DKT, DST, DKTG*, Code_Aster, 2018.

[8] J. R. Wright, J. E. Cooper *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*, John Wiley and Sons Ltd, 2015.

[9] A. Chatterjee. *An introduction to the Proper Orthogonal Decomposition*, Current Science, 78(7) :808–817, 2000.

[10] A. Janon, M. Nodet, C. Prieur *Goal-oriented error estimation for the reduced basis method, with application to sensitivity analysis*, Journal of Scientific Computing, Springer Verlag, 68(1) :21-41, 2016.

[11] A. Forrester, A. Sobester, A. Keane *Engineering Design via Surrogate Modelling : A Practical Guide*, Wiley, 2008.

[12] M. J. Sasena, P. Papalambros, P. Goovaerts *Exploration of metamodeling sampling criteria for constrained global optimization*, Engineering optimization, 34(3) :263-278, 2002.