



HAL
open science

**L'enseignement de la numération décimale de position
au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés
institutionnelles et pratiques des enseignants. Mémoire
de Master.**

Frédéric Tempier

► **To cite this version:**

Frédéric Tempier. L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants. Mémoire de Master.. IREM de Paris. IREM de Paris, 60, 2009, Cahier de DIDIREM, Christophe Hache, 2-86612-318-2. hal-02146992

HAL Id: hal-02146992

<https://hal.science/hal-02146992>

Submitted on 4 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

IREM
PARIS 7

N° 60
décembre 2009

Ldar

Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Cahiers de didirem

Mémoire de Master

L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants.

F. Tempier

ISSN : 2102-4871

**Université Paris VII Denis DIDEROT
UFR de Mathématiques**

**Mémoire de Master de Didactique des Mathématiques
Parcours Recherche**

par

Frédéric Tempier

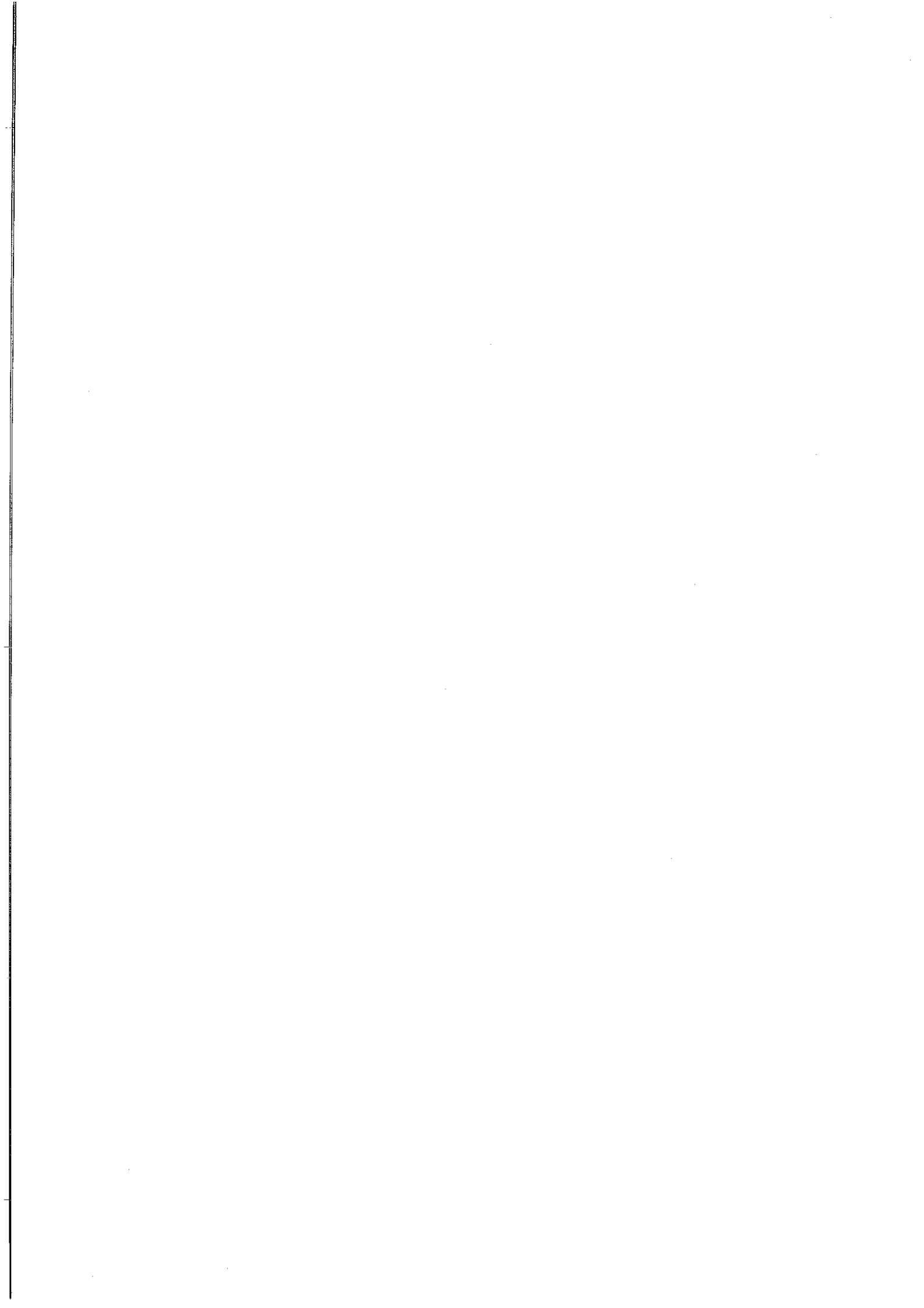
**L'enseignement de la numération décimale de
position au CE2 : étude des relations entre
contraintes et libertés institutionnelles et
pratiques des enseignants.**

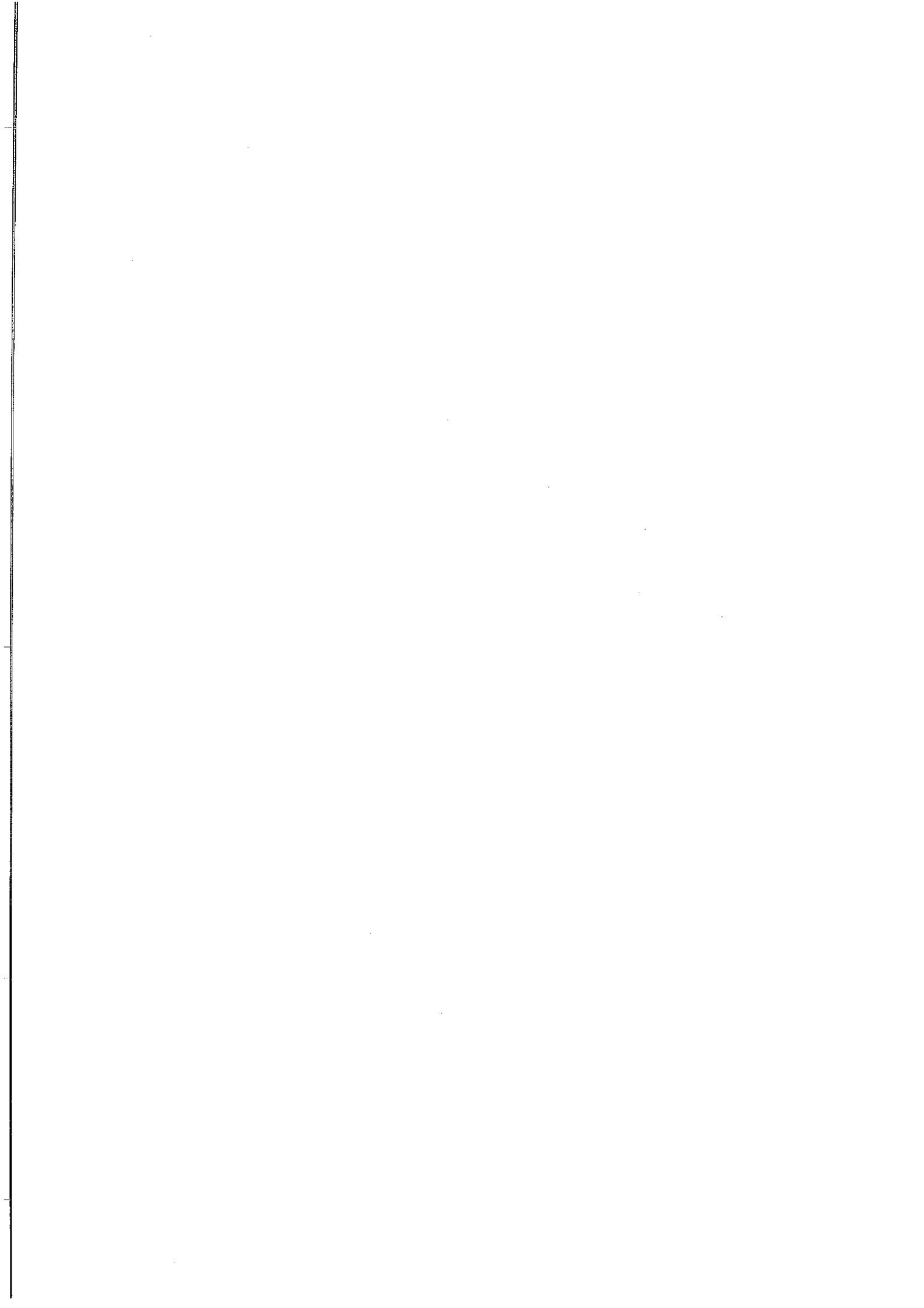
par Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Dirigé

Soutenu en juin 2009



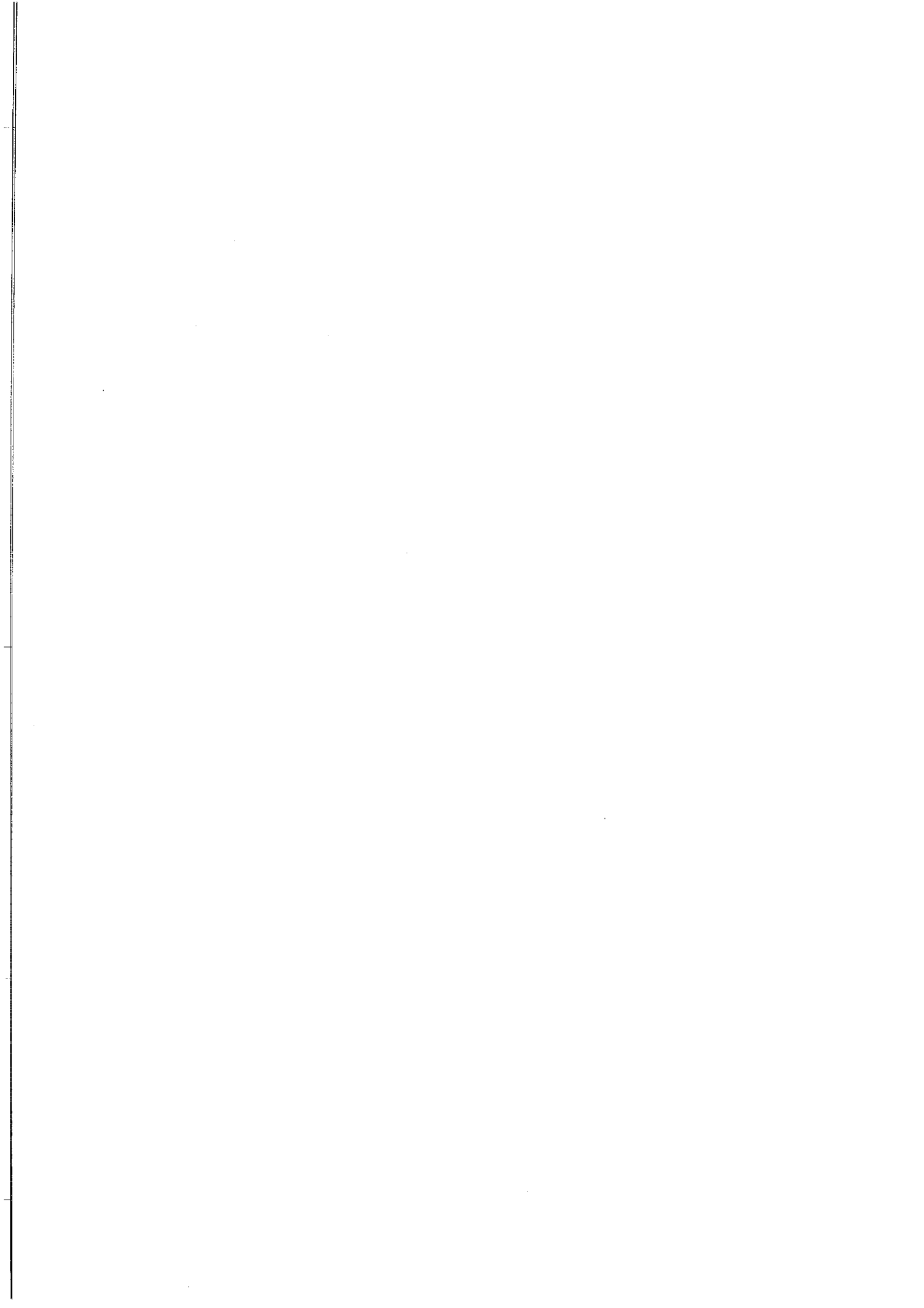




Remerciements

Je tiens à remercier Marie-Jeanne Perrin-Glorian pour son suivi et ses conseils qui m'ont éclairé sur l'utilisation des cadres théoriques de la didactique des mathématiques et m'ont permis de prendre conscience de la rigueur méthodologique liée au travail de recherche.

Je remercie également les trois enseignants qui m'ont ouvert les portes de leur classe cette année et sans qui ce travail n'aurait pu se faire.



Sommaire

Introduction.....	1
PARTIE A : Problématique et méthodologie.....	3
I. Position du problème en appui sur des travaux antérieurs.....	3
II. La problématique.....	10
III. Les cadres théoriques et la méthodologie.....	10
PARTIE B : Construction de l'OM de référence.....	17
I. Méthodologie.....	17
II. Comment peut-on définir le système de numération ?.....	17
II.1 Eclairage amené par des ouvrages de différentes époques.....	17
II.2 L'évolution de l'étude de la numération dans les manuels au cours du 20ème siècle.....	22
III. Les théories.....	28
III.1 La théorie classique.....	28
III.2 La théorie moderne.....	28
III.3 Illustration des différences entre ces théories sur une tâche.....	29
III.4 La théorie moderne adaptée.....	31
IV. Les types de tâches.....	32
V. Les techniques et technologies pour ces types de tâches.....	33
V.1 Les techniques et technologies relatifs à deux exemples de types de tâches.....	33
V.2 Les technologies.....	35
VI. Conclusion : schéma récapitulatif de l'OM de référence.....	37
VII. Les ostensifs de la numération.....	37
PARTIE C : Etude de l'OM à enseigner.....	43
I. Méthodologie.....	43
II. OM des Instructions Officielles de 2002.....	44
II.1 Les organisations mathématiques ponctuelles de l'étude de la numération dans le programme de 2002 :.....	44
II.2 L'organisation mathématique locale de l'étude de la numération dans le programme de 2002.....	49
II.3 Conclusions sur les IO 2002.....	50
II.4 Les évaluations nationales liées aux programmes 2002.....	51
III. OM de deux manuels de CE2 : « Cap Maths » et « J'apprends les maths ».....	52
III.1 Des éléments spécifiques de méthodologie.....	52
III.2 Les organisations mathématiques ponctuelles de « Cap Maths CE2 ».....	52
III.3 L'organisation mathématique locale de « Cap Maths CE2 ».....	58
III.4 Conclusion de l'étude de « Cap Maths CE2 ».....	59
III.5 Les organisations mathématiques ponctuelles de « J'apprends les maths CE2 ».....	60
III.6 L'organisation mathématique locale de « J'apprends les maths CE2 ».....	63
III.7 Conclusion de l'étude de « J'apprends les maths CE2 ».....	64
III.8 Conclusion de l'étude des manuels : comparaison des OM locales.....	64
IV. OM des Instructions Officielles 2007 et 2008.....	66
IV.1 Le programme 2007.....	66
IV.2 Le programme 2008.....	67
IV.3 Les évaluations nationales CM2 de 2009.....	68
IV.4 Conclusion sur les IO 2007 et 2008.....	68
V. Synthèse : les contraintes et libertés institutionnelles.....	69
PARTIE D : L'enseignement de la numération dans les classes : une étude de cas.....	72

I. Méthodologie.....	72
I.1 Le projet global, le projet local et la mise en œuvre.....	72
I.2 Le choix des classes et des enseignants.....	74
I.3 Recueil des données.....	74
II. Analyse du projet global des deux enseignants	75
II.1 Méthodologie.....	75
II.2 Le projet global du 1er enseignant (Marc)	77
II.3 Le projet global du 2ème enseignant (Sophie).....	88
II.4. Conclusions sur les projets globaux des enseignants.....	99
III. Analyse de la mise en œuvre du projet dans la classe pour les deux enseignants.....	101
III.1 Méthodologie.....	101
III.2 La mise en œuvre du projet du premier enseignant (Marc).....	102
III.3 La mise en œuvre du projet de la deuxième enseignante (Sophie).....	118
III.4 Conclusions sur la mise en œuvre dans les classes des projets des enseignants.....	129
PARTIE E : Conclusion et perspectives.....	132
Bibliographie.....	136
1. Bibliographie générale.....	136
2. Manuels scolaires et textes officiels.....	138
ANNEXES.....	140
Annexes Partie B.....	140
Extrait du Traité de Reynaud 1821, paragraphe 2 intitulé « de la numération ».....	141
Annexes Partie C.....	143
Extraits du document d'application du programme 2002.....	143
Extraits de l'évaluation nationale CE2 de 2005.....	146
Extraits de l'évaluation nationale 6ème 2005.....	149
Extraits du programme de 2007.....	150
Extraits du Socle Commun 2007.....	151
Extraits du programme 2008.....	152
Extraits de l'évaluation nationale CM2 de 2009.....	153
Extraits du manuel « J'apprends les maths CE2 ».....	154
Extraits du manuel « Cap Maths CE2 ».....	161
Annexes Partie D.....	170
Cahiers d'élèves de la classe de Marc	170
Cahiers d'élèves de la classe de Sophie	185

Introduction

Nous nous proposons d'étudier dans ce mémoire l'enseignement de notre système de numération décimale de position à travers une étude de cas.

La numération écrite joue un rôle central dans les mathématiques de l'école primaire. Elle permet de justifier des techniques de calcul : opérations posées ou multiplication par 10, 100, etc. Elle est un point d'appui pour le calcul réfléchi (les décompositions utilisant les puissances de 10 y jouent un rôle important) mais aussi pour les conversions entre unités de mesures pour les longueurs ou les masses. Enfin l'étude des nombres décimaux vient en prolongement des règles de la numération des entiers et elle va permettre de les généraliser.

Pourtant on peut souvent faire le constat dans les classes, auprès des enseignants, des difficultés suscitées par son apprentissage et parfois du désarroi de ces mêmes enseignants.

En outre, les recherches en didactique des mathématiques sont assez peu nombreuses sur ce sujet, en comparaison de ce que l'on peut trouver sur les nombres décimaux par exemple. On peut toutefois noter une étude très récente de Chambris (2008) concernant l'évolution de la numération dans les manuels au cours du 20^{ème} siècle (et les liens entre numération et système métrique) sur laquelle nous nous appuierons.

L'objectif de notre travail est de mieux comprendre l'enseignement de la numération écrite des nombres à quatre chiffres à travers différents niveaux de la *transposition didactique* (Chevallard, 1991).

Dans les classes, à travers une étude de cas de deux enseignants lors de l'introduction des nombres à quatre chiffres nous essaierons de caractériser *l'organisation mathématique enseignée* de ces enseignants. Cela nous permettra de mieux comprendre le travail du professeur : hors classe à travers la préparation de son projet d'enseignement mais aussi en classe lors de la mise en œuvre de ce projet avec ses élèves. Pour prendre en compte la complexité de ce travail il faut étudier les liens entre ces deux aspects mais aussi regarder certaines dimensions particulières qui ont une influence sur la préparation et la mise en œuvre : les conceptions des enseignants sur l'enseignement et sur les mathématiques en général ainsi que la façon dont l'enseignant tient compte du travail des élèves. Pour cela nous nous appuierons sur le modèle de l'activité du professeur de Margolinas (2002) et sur l'analyse des classes ordinaires en théorie des situations didactiques (Perrin-Glorian et Hersant, 2003). Nous souhaitons ainsi reconstituer certaines logiques d'actions des enseignants par la reconstitution des différents niveaux de l'activité.

Un enseignant n'est pas totalement libre dans sa classe : il est sous l'influence de contraintes institutionnelles liées au contenu des programmes et manuels. Il est donc nécessaire de se placer à un autre niveau de la transposition didactique, celui de *l'organisation mathématique à enseigner* afin de faire un éclairage sur ces contraintes mais aussi de montrer des marges de manœuvre des enseignants, des espaces de libertés qu'ils pourront plus ou moins occuper ensuite dans leur pratique. Comme le précisent Bosch et Gascon (2005) il est intéressant de se donner un « point de vue épistémologique », fourni par une *organisation mathématique de référence*, afin d'analyser les contenus des programmes et manuels. Celle-ci permettra également d'éclairer les mathématiques qui sont à l'œuvre dans les classes.

Nous allons commencer par présenter la problématique ainsi que la méthodologie utilisée et revenir plus en détail sur les cadres théoriques en jeu et leur articulation.

PARTIE A : Problématique et méthodologie

Remarque préliminaire : quand nous parlerons de « numération de position » il s'agira de notre système de désignation écrite des nombres entiers. C'est un système de numération positionnel et décimal.

Nous appellerons *nombre en chiffres* le signe utilisé dans cette désignation écrite (par exemple « 325 ») que nous distinguerons du *nombre en mots* (par exemple « trois cent vingt-cinq » à l'écrit ou à l'oral).

I. Position du problème en appui sur des travaux antérieurs.

Les deux aspects de la numération décimale de position

Dans l'écriture en chiffres d'un nombre, la position réfère à une unité : dans 3234, le 3 représente 3 milliers, etc. Cela donne une valeur différente à un même chiffre en fonction de sa position : le 3 du quatrième rang représente 3 milliers alors que le 3 du deuxième rang représente 3 dizaines. C'est ce qui fait que l'on parle de système de numération « positionnel ». Nous appellerons cet aspect de notre système *l'aspect positionnel de la numération*.

De plus, les différentes unités sont liées entre elles par des « relations » décimales : dix unités d'un certain ordre équivalent à une unité de l'ordre immédiatement supérieur de manière itérative : dix unités équivalent à une dizaine, dix dizaines à une centaine, etc. Il en découle alors des relations entre les unités des différents ordres (par exemple un millier équivaut à cent dizaines, etc.). C'est ce qui fait que notre système de numération est « décimal ». Nous appellerons cet aspect de notre système, *l'aspect décimal de la numération*.

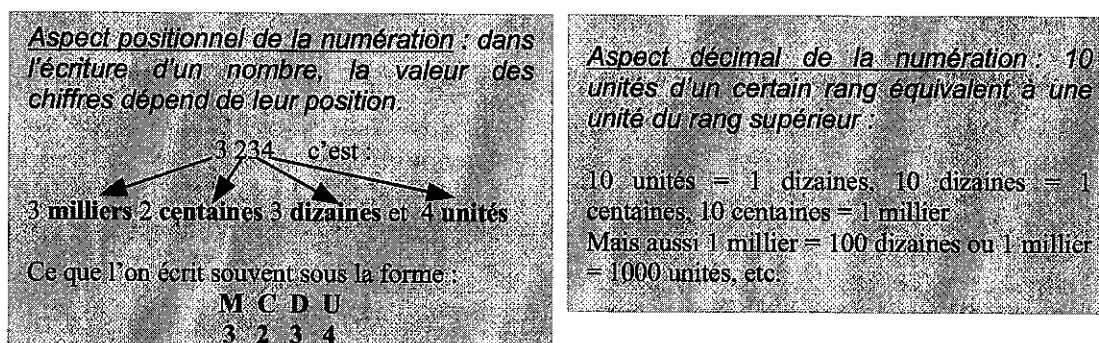


Figure 1: les deux aspects de la numération

Ces deux aspects de la numération sont très naturalisés chez les adultes (ce qui pourrait d'ailleurs constituer une difficulté possible pour les enseigner) mais finalement quand on regarde l'écriture d'un nombre (en chiffres) on ne voit pas apparaître la notion de base de numération. Les différentes unités ainsi que les liens entre ces unités sont invisibles dans cette écriture. Il s'agit bien d'une convention d'écriture qu'il s'agit de comprendre. En particulier, pour les élèves il s'agira d'apprendre ce que cache cette écriture en chiffres. C'est la conjonction des deux aspects de la numération qui est au cœur de cet apprentissage.

Quelques éclairages épistémologiques et sémiotiques

Serfati (2005) parlant de l'interprétation d'un nombre écrit 24579 comme « neuf unités à quoi s'ajouteront sept dizaines, etc., deux dizaines de milliers enfin. Si immédiate qu'elle nous paraisse aujourd'hui, cette interprétation aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant ». Une spécificité de notre système de numération tient donc au fait que la

« concaténation » (Serfati) de chiffres cache le fait que ces chiffres n'ont pas tous la même valeur et surtout le lien (décimal) entre les valeurs de ces chiffres.

De ce point de vue il est important de regarder l'objet qui représente, et pas seulement celui qui est représenté, pour éviter l'illusion de transparence de la représentation. Pour Duval (1996) :

« Toute représentation étant représentation de quelque chose de réel, d'imaginaire ou de théorique, on peut alors diriger son attention directement sur l'objet représenté comme si la représentation était transparente, ou on peut se centrer sur la représentation elle-même, c'est-à-dire sur la manière dont la représentation représente. En mathématiques, où les objets ne sont accessibles qu'à travers des représentations et où les traitements dépendent des possibilités données par les représentations elles-mêmes, le point de vue de dicto ou de representatione ne peut pas être considéré comme secondaire, même si pour le mathématicien c'est le point de vue de re ou de objecto qui, en définitive, compte ».

C'est bien cette centration sur la représentation (ici l'écriture en chiffres) qui nous intéresse quand nous étudions le système de numération car il s'agit de comprendre les règles de fonctionnement de ce système sémiotique.

Concernant les systèmes de numération, Duval, dans un autre article (2005) affirme que

« les systèmes décimaux, binaires, etc. de représentation des nombres sont les systèmes sémiotiques les plus simples, les plus purs et les plus puissants que l'on puisse trouver. Ainsi ils ont une règle organisatrice (un déplacement de position vers la gauche correspond à une opération d'élevation à la puissance) et leurs éléments sont définis par la base, laquelle comprend ce signe « 0 » qui ne peut désigner aucun objet. Les traitements numériques effectués dans ces systèmes, doivent respecter ces règles et contraintes organisatrices internes au système, car ce sont elles qui leur donnent non seulement une capacité de représentation illimitée mais également leur puissance opératoire pour toutes les opérations arithmétiques ».

L'apprentissage de la numération consiste donc bien en l'apprentissage de ces règles organisatrices, qui rendent ce système si « puissant », mais qui en retour est assez transparent concernant les propriétés qu'il met en jeu. On peut par exemple comparer avec les systèmes de numération additifs qui sont moins simples et moins puissants mais pour lesquels on voit les différentes unités à travers les différents symboles utilisés et les relations entre ces unités apparaissent à travers les groupements et échanges que l'on peut effectuer.

On pourrait alors se demander si, une fois que les enfants ont compris la relation entre unités et dizaines, ils peuvent les étendre aux relations entre les autres unités (construction itérative de notre système de numération).

Du point de vue des élèves

Sinclair, Tièche-Christinat et Garin (1994) concluent de leur étude auprès d'enfants de 5 à 7 ans que même si cela est vrai dans le domaine arithmétique, pour lequel les enfants se construisent des propriétés sur des petits nombres qu'ils étendent ensuite progressivement aux nombres plus grands, en revanche, « en ce qui concerne la compréhension du système écrit », ils constatent « tout autre chose. Il n'est pas vrai que le jeune enfant (5-7 ans) construit des intuitions (ou même une compréhension) de la signification différente des chiffres dans les nombres écrits représentant des petits nombres (dizaines) pour ensuite étendre cette compréhension à des nombres progressivement plus grands. L'enfant dispose d'un répertoire varié de conduites face à ce matériel graphique particulier et les diverses procédures qu'il utilise dépendent du type de nombres présentés ».

Dans l'étude de Thompson et Bramald (2002) sur les difficultés des élèves relatives à l'étude du système de numération, les auteurs placent tout d'abord leurs résultats en parallèle avec

ceux obtenus par d'autres recherches antérieures et sont amenés, en approfondissant leur étude, à faire apparaître les deux aspects de la numération (position et décimalité).

Ils ont cherché à étudier des relations entre le concept de « place value » (que l'on pourrait traduire par la valeur des chiffres en fonction de leur position) et les compétences de calcul mental d'additions pour des enfants de 6 à 9 ans (l'équivalent du CP au CE2 en France).

Ils ont repris en particulier pour leur expérience un test déjà utilisé par différents chercheurs, qu'ils nomment « face value task ». Cela consiste à :

- faire lire un nombre à deux chiffres à l'élève,
- lui faire compter ce nombre d'objets à partir d'une collection,
- entourer le chiffre des unités devant l'élève et lui demander de montrer avec les objets de la collection ce que signifie cette partie du nombre,
- faire de même avec le chiffre des dizaines.

C'est principalement l'aspect positionnel de la numération qui est en jeu dans cette tâche car par exemple pour 43, il s'agit d'associer le « 4 » à « quarante » (ce qui peut se faire en passant par l'écriture 40 ou bien par le fait que 4 dizaines c'est quarante). Les auteurs mettent les résultats de leur étude en parallèle avec ceux obtenus par d'autres chercheurs concernant la réussite à cette tâche pour des élèves d'âges différents :

Classe (équivalent France)	% Ross ¹ (USA)	% Kamii ² (USA)	% Price ³ (AUS)	% Thompson & Bramald (ENG)
CP		0		54
CE1	20		44	77
CE2	33	33		79
CM1	53	50		
CM2	67			
Moyenne	43	*		70

Tableau 1 : comparaison des résultats obtenus par quatre chercheurs à la tâche « face value »

* Il n'a pas été possible de calculer la moyenne car les données provenaient de différentes sources.

Les trois premières études montrent une difficulté importante (mais décroissante avec l'âge) relativement à cette tâche. On peut par exemple s'étonner de voir que seulement la moitié des élèves interrogés par Ross réussissent à faire le lien entre le chiffre des dizaines et une quantité d'objets, sachant que par exemple en France à cet âge-là les enfants ont à étudier les nombres jusqu'au milliard (dans les programmes 2008). Un autre point surprenant de ce tableau est la différence des résultats obtenus par les chercheurs anglais avec les études précédentes. Ces chercheurs s'étonnent eux-mêmes de cet écart, sachant qu'ils ont utilisé quasiment les mêmes formulations et ont repris le même nombre d'objets que les études américaines. Ils justifient cet écart en particulier par l'influence du National Numeracy Strategy, un programme national créé en 1999 puis inclus en 2003 dans le « National Strategies » (l'équivalent de nos programmes officiels au Royaume-Uni) et visant à améliorer les compétences des élèves dans le domaine des nombres et du calcul. Celui-ci affirmait par exemple la nécessité de mettre en avant les stratégies utilisées par les enfants dans le calcul à travers des discussions entre élèves et enseignants ou encore l'utilisation des cartes Gattegno (ci-contre) dans les moments de calcul mental de début de séance. L'utilisation de

¹ Ross, S. (1989). Parts, wholes and place value: a developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36(6), 47-51.

² Kamii, C. and Joseph, L. (1988). Teaching place value and double column addition. *Arithmetic Teacher*, 48-52.

³ Price, P. (1998). Year 3 students' place-value misconceptions: another look at MAB, *Teaching mathematics in new times* (Vol. 2). Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 452-459.

ce matériel peut justement aider les élèves à déterminer la valeur d'un chiffre en fonction de sa position, comme il est demandé dans la tâche « face value » car le 5 est associé à 50 (et c'est justement ce qui est attendu dans cette tâche).

Cependant, malgré cette réussite apparente, les auteurs ont montré que cela ne prouvait pas pour autant une réelle compréhension de notre système de numération. En particulier ils ont utilisé la tâche suivante pour laquelle les élèves ont rencontré beaucoup de difficultés : il s'agit d'utiliser un tableau de numération et de placer 3 cubes dans la colonne des dizaines et 4 dans la colonne des unités, puis de demander le nombre représenté. Ensuite on enlève les 3 cubes de la colonne des dizaines et on montre les cubes restants : « Ces cubes sont dans la colonne des unités et donc on dit qu'ils représentent 'quatre'. Je déplace les cubes dans la colonne suivante ... Peux-tu me dire de combien la valeur des cubes a changé ? » (question 8). Pour les enfants qui ne donnent aucune indication du fait que la valeur augmente de 10 fois (en passant de la colonne des unités à la colonne des dizaines), on pose la question : « Combien de fois plus grand est-il maintenant ? » (question 8b). C'est l'aspect décimal de la numération qui est en jeu dans cet item. En voici les pourcentages de réussite :

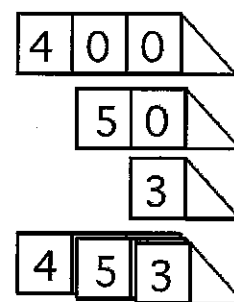


Figure 2 : exemple de cartes Gattegno

Classe (équivalent France)	% Item 8a	% Item 8b
CP	2	13
CE1	6	30
CE2	21	44
Moyenne	10	28

Tableau 2 : résultat aux deux items de Thompson et Bramald (2002)

Cela contraste avec les résultats obtenus à l'item précédent et montre, selon les auteurs, que les élèves n'ont pas conscience de la structure en colonne du système de numération écrite (« column structure of the notation system used for written numbers ») ce qu'ils appellent aussi la valeur de colonne (« column value »).

Les auteurs concluent alors que le concept de « place value » devrait être vu selon deux concepts séparés : valeur de quantité (« quantity value ») et valeur de colonne (« column value »).

Nous pouvons faire le parallèle entre ce concept de « place value » et celui de « valeur d'un chiffre en fonction de sa position » que l'on trouve actuellement dans les programmes en France. Cette dernière expression pourrait être interprétée comme faisant uniquement référence à l'aspect positionnel de la numération : dans 1234, le 2 représente 2 centaines ou 200. C'est ce qui correspond à ce que Thompson et Bramald (2002) nomment la valeur de quantité. Mais il faut aussi prendre en compte l'aspect décimal de l'écriture des nombres dans 1234, le 2 représente 2 centaines ou 200 mais aussi 20 dizaines car 1 centaine est composée de 10 dizaines (ou encore il représente dix fois plus que s'il était placé au rang immédiatement à sa droite). C'est ce qui correspond à ce que Thompson et Bramald (2002) nomment la valeur de colonne.

Cette étude révèle donc selon nous un point essentiel pour l'apprentissage de la numération : les élèves peuvent rencontrer des difficultés relativement à l'aspect décimal de la numération (relations entre unités) malgré une assez bonne compréhension de l'aspect positionnel (relation entre les unités et le rang dans l'écriture chiffrée). On peut également ajouter que la

compréhension de l'aspect positionnel pourrait cacher une non-compréhension de l'aspect décimal si on ne propose que certaines tâches (comme la tâche « face value » par exemple). Pour mieux comprendre pourquoi l'aspect décimal peut ne pas être en jeu quand on attend d'un élève qu'il dise que le 4 de 43 représente 40 (« face value task »), il suffit de remarquer que cela est aussi le cas quelle que soit la base de numération choisie (à condition dans le cas de « 43 » qu'elle soit strictement supérieure à 4). En effet pour toute base b (ici b entier naturel strictement supérieur à 4) on peut décomposer $\overline{43}$ (base b) en $\overline{40} + \overline{3}$ (base b). Cette décomposition est donc indépendante de la base choisie. Par contre cela n'est pas le cas si on utilise une décomposition faisant intervenir les unités en langue naturelle (unités, dizaines, centaines, etc.) car le mot dizaine réfère à un paquet de dix unités. Cependant certaines recherches tendent à montrer que ces noms d'unités réfèrent parfois uniquement aux noms des rangs du nombre en chiffres et non à une unité, chez les élèves comme chez certains enseignants, comme nous allons le voir.

Du point de vue des enseignants

Dans une recherche québécoise de cinq années sur la numération de position au primaire au début des années 1980, Bednarz et Janvier (1984), ont mis en évidence certaines « difficultés suscitées par son apprentissage ». En fait, on pourrait davantage parler de difficultés suscitées par son enseignement car il s'agit pour les auteurs de donner quelques caractéristiques de l'enseignement de la numération dans les classes observées (sur un échantillon de 200 élèves) et de montrer ensuite les difficultés qu'elles peuvent engendrer chez les élèves à la suite de leurs expérimentations.

Elles ont mis en évidence, à partir de leurs observations, la caractéristique suivante : « toute représentation du nombre apparaît selon un alignement reprenant l'ordre de l'écriture conventionnelle du nombre ». Elles concluent alors qu'« imposer prématurément une présentation ordonnée conduit nécessairement l'enfant à une interprétation de l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position, et écarte toute signification véritable accordée à cette position en termes de groupements ».

Elles citent également d'autres caractéristiques qui font apparaître que les activités proposées par les enseignants ne permettent pas une compréhension véritable de la relation entre les différentes unités de la numération car cela se limite souvent à associer un matériel de numération (éventuellement représenté) au nombre en chiffres (ce qui relève de l'aspect positionnel de la numération).

Quand il y a un travail sur les relations entre les unités cela semble souvent se limiter aux unités consécutives (comme par exemple entre dizaines et centaines ou centaines et milliers). La difficulté d'articuler deux échanges successifs (passer par exemple des dizaines aux milliers) n'est pas l'objet d'un travail spécifique dans les classes.

De par nos expériences d'observation de maîtres débutants, nous reconnaissons dans ces constats, même s'il s'agit d'une époque et d'un pays différents, des caractéristiques qui nous semblent correspondre à ce qui se passe encore aujourd'hui dans l'enseignement de la numération en France.

Dans une recherche sur les connaissances des enseignants relatives aux mathématiques à enseigner à l'école, Ma (1999) compare les connaissances d'enseignants chinois et américains (USA). Elle ne travaille pas directement sur l'observation de leur enseignement en classe, mais à travers des entretiens avec les enseignants sur les techniques opératoires de la soustraction et de la multiplication pour ce qui nous intéresse ici. Elle montre que les connaissances de numération ne sont pas mobilisées par certains enseignants (la plupart dans ce cas-là sont des Américains) pour justifier ou expliquer ces opérations posées. Ils en restent à des descriptions « procédurales », se contentant de dire comment il faut faire, contrairement à d'autres qui ont une approche plus « conceptuelle ». Ces derniers justifient les différentes

étapes des algorithmes en mettant en relation les savoirs mathématiques en jeu. L'auteur explique alors que même si ces deux groupes d'enseignants utilisent dans leurs explications le terme « place value » (valeur des chiffres en fonction de leur position) ce n'est pas avec la même signification (nous traduisons) :

« Ce que les enseignants classés du côté « procédural » voulaient dire par « place value » était seulement la première moitié de cette expression, « place » - la position des nombres [...]. Quand des enseignants [...] parlaient de la « colonne des dizaines » (« tens column ») ou de la « colonne des centaines » ils ne se concentraient pas sur la valeur des chiffres dans ces colonnes. Ils utilisaient les termes « dizaines » et « centaines » comme des étiquettes pour les colonnes ».

Ces enseignants ne prennent donc en compte que l'aspect positionnel de la numération, ce qui semble donc rejoindre les constats faits par Bednarz et Janvier (1984).

Tout cela nous amène à nous poser déjà un certain nombre de questions sur l'enseignement de la numération, en particulier, la façon dont les activités proposées par les enseignants peuvent permettre aux élèves d'être confrontés aux relations entre les différentes unités, sur la question de l'utilisation du matériel (de numération) dans les classes pour savoir comment elle s'articule avec ces savoirs, mais du point de vue des enseignants, sur les raisons possibles de la différence d'utilisation des savoirs relatifs à la numération pointée par Ma (1999). En particulier le fait qu'il s'agisse d'enseignants de deux pays différents nous amène à nous interroger sur les influences institutionnelles (des programmes, des manuels du pays, etc.) sur la façon dont les enseignants traitent l'étude la numération.

« Un état des lieux sur l'enseignement de la numération au cycle 3 » en France

De son côté, Parouty (2005) dresse un « état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 » en France. Sur un échantillon important d'élèves de cycle 3 (421 élèves de CE2, CM1, CM2), elle observe les difficultés rencontrées sur certaines tâches de numération.

Concernant l'exercice suivant : « pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? », elle constate un échec massif des élèves en CE2. Elle donne également un problème du même type aux élèves de CM1 (avec des nombres plus grands) où elle observe également un échec massif. Enfin le problème donné aux élèves de CM2 (il s'agit de nombres plus grands, avec des contenances et des groupements par 200) fait apparaître un échec moins important ce qui s'explique par le fait que les élèves utilisent alors l'algorithme de la division pour le résoudre.

La numération ne semble donc pas disponible au CE2 et au CM1 pour résoudre des problèmes de groupements par 100.

Elle montre également que pour les enseignants des élèves évalués cette situation est considérée comme difficile par plus de 85% d'entre eux. Elle ajoute :

« Dubitative, j'ai posé la même question aux enseignants en formation, dans le cadre de mon protocole expérimental. A l'unanimité, tous les enseignants [...] ont répondu soit qu'il s'agissait d'une résolution de problème, soit, à l'écrasante majorité, qu'il s'agissait d'une situation d'apprentissage de la division et d'ajouter que c'était impossible de demander cela à des CE2 ».

Ceci semble pouvoir expliquer en grande partie les résultats obtenus par les élèves.

Cette étude nous amène à formuler d'autres types de questions, toujours du point de vue de l'enseignement de la numération, sur les types de situations proposées par les enseignants et sur la part de l'activité de résolution de problèmes par rapport aux activités plus techniques.

Concernant cette dernière question, Bednarz et Janvier (1984) concluent de leur étude :

“Les résultats et les observations nous révèlent le peu de soutien qu'apporte l'enseignement courant de la numération. Axé sur l'écriture conventionnelle, cet enseignement met davantage l'accent sur le bagage symbolique et le vocabulaire technique que sur le sens que l'enfant doit accorder à l'écriture. En effet, celui-ci interprète l'écriture en termes de découpage, d'ordre, de position sans donner à la position une signification véritable en termes de groupements. On dicte à l'enfant beaucoup de règles ou de procédures qu'il apprend et applique, le plus souvent, mécaniquement. En conséquence, lorsque l'enfant rencontre l'une des difficultés soulignées précédemment, il est complètement démuné et n'a aucun recours (dessin, matériel, situation significative analogue ...) autre que l'écriture. Il n'essaie pas de donner un sens à ce à quoi il est confronté mais cherche plutôt à retrouver la règle oubliée ou la faille dans la procédure qu'il applique. Ceci nous révèle le peu de compréhension de la numération.”

Parouty a cherché l'origine de ce phénomène dans les conceptions des enseignants concernant la numération et son enseignement. Cependant, il ne nous semble pas qu'une telle interprétation suffise à comprendre l'origine des caractéristiques de l'enseignement de la numération, mais que celles-ci doivent être analysées en prenant en compte les contraintes liées au contenu à enseigner proposé par les programmes et les manuels qui influencent de manière importante les pratiques des enseignants (comme nous l'avons relevé dans l'étude de Ma, concernant des enseignants de « cultures » différentes).

Il faut donc dépasser cette idée de « caractéristiques » de l'enseignement, pour essayer d'étudier les pratiques des enseignants en nous intéressant à la fois aux contenus mathématiques mais aussi aux déroulements en classe pour comprendre les choix effectués par les enseignants.

On retrouve dans ces recherches, également, la difficulté liée à la conjonction de l'aspect positionnel et décimal de la numération. Elle apparaît comme la principale difficulté dans l'apprentissage de notre système de numération (du point de vue des élèves) et elle pourrait avoir son origine dans l'enseignement de la numération. Bednarz et Janvier (1984) l'appellent la « signification véritable [de la position d'un chiffre] en termes de groupements ».

On peut alors se demander comment est prise en compte la conjonction des deux aspects (position et décimalité) dans les attentes institutionnelles ainsi que dans les pratiques des enseignants.

Le choix des nombres à quatre chiffres pour cette étude

Ce choix est principalement guidé par l'étude de la conjonction des deux aspects de notre système de numération écrite (aspect décimal/aspect positionnel).

En effet, cela permet de voir en particulier comment sont traitées les relations entre les unités de la numération, qui sont plus riches qu'avec les nombres de deux ou trois chiffres (on a par exemple : $1m=10c$, $1m=100d$, $1m=1000u$ mais aussi toutes les relations entre les unités des nombres à trois chiffres). Cela met donc en jeu l'itération des groupements par 10 (pour les nombres à trois chiffres c'est assez pauvre puisque l'on a seulement $10u=1d$ et $10d=1c$), mais aussi toutes les relations qui découlent de ces groupements par 10 : les relations entre milliers et dizaines, milliers et unités et entre centaines et unités ($1m = 100d$, $1m = 1000u$ et $1c = 100u$). Mais comme les relations avec les unités sont données directement par l'écriture en chiffres ($1m$ s'écrit 1000 donc c'est 1000u) ou la lecture (quand on lit « millier » ou « centaine » on entend le nombre d'unités : mille ou cent), la relation qui nous semble importante et difficile pour l'apprentissage est celle qui existe entre le millier et la dizaine : celle-ci n'est pas visible directement par l'écriture chiffrée ou la lecture du mot « millier ». Cette caractéristique essentielle ne se retrouve qu'à partir des nombres à quatre chiffres, et

elle devrait, selon nous, constituer un enjeu important dans l'apprentissage de la numération pour ces nombres.

On peut aussi ajouter que, concernant les activités de lecture, écriture et manipulation de nombres à plusieurs chiffres pour les enfants de 5 à 7 ans, Sinclair, Tièche-Christinat et Garin (1994) rappellent que « différents travaux [...] montrent clairement que ces activités, ne peuvent pas pour ce groupe d'âge, reposer sur une compréhension de la structure multiplicative et récursive de notre système de nombres, ni sur une compréhension de la valeur de position, principe qui sous-tend la numération écrite. »

Notre choix s'est donc porté sur l'observation de classes de CE2 (élèves de 8-9 ans).

Nous allons maintenant préciser la problématique du mémoire à partir des questions soulevées dans cette première partie.

II. La problématique

Comment un enseignant prend-il en compte les deux aspects de la numération, position et décimalité ? Quels sont les choix qu'il effectue lors de l'introduction des nombres à quatre chiffres au niveau de la préparation de son projet (hors classe) mais aussi dans sa mise en œuvre avec les élèves (en classe) ?

Pour mieux comprendre ces choix, il faut les mettre en relation avec la façon dont les programmes et manuels prennent en compte l'étude de la numération. Quelles sont alors les contraintes institutionnelles qui risquent d'influencer les pratiques des enseignants ? Quelles sont les marges de manœuvre que ceux-ci peuvent investir ?

Nous allons donc faire une étude en plusieurs étapes : une étude des programmes et manuels suivie d'une étude de cas de deux enseignants. Nous précisons maintenant les cadres théoriques utilisés.

III. Les cadres théoriques et la méthodologie

Pour étudier l'activité des enseignants (hors classe lorsqu'ils préparent une séance ou un ensemble des séances et en classe lorsqu'ils mettent en œuvre cette préparation), nous nous appuyons sur l'analyse de cette activité du point de vue de la théorie des situations didactiques.

Le modèle de l'activité du professeur en TSD

Nous nous appuyons en particulier sur l'article de Margolinas (2002). Les différents niveaux de cette activité sont schématisés par le tableau ci-dessous, extrait de Coulange (2006) qui a toutefois l'inconvénient de ne pas montrer l'imbrication de ces différents niveaux :

Niveau +3 : idéologique

Réfléchir de façon générale à son enseignement des maths

Niveau +2 : de projet global

Concevoir les grandes lignes d'enseignement d'un thème mathématique

Niveau +1 : de projet local

Déterminer un scénario de leçon ou de situation

Niveau 0 : didactique

Action du professeur en classe – interactions publiques avec les élèves

Niveau -1 : d'observation/dévolution

Dévolution – observation de l'activité des élèves

Tableau 3 : les niveaux d'activité du professeur

Dans une première description approximative du modèle, Margolinas (2002) décrit ainsi les liens entre les différents niveaux :

« Le professeur acteur en classe (P0) est toujours en tension entre : son projet d'enseignement (+1) et les réactions des élèves (-1). Mais même le professeur qui prépare une leçon (P+1) est en tension entre sa planification du thème mathématique à l'intérieur duquel s'insère la leçon (+2) et ce qu'il sait des conditions de la réalisation en classe (0). »

Elle précise cependant que cette

« présentation de l'activité du professeur peut laisser penser qu'il s'agit d'un modèle temporel, c'est à dire que le professeur passe l'un après l'autre dans tous les niveaux considérés. En fait nous allons voir que ce modèle n'est pas temporel mais structurel.

Par exemple, quand il agit dans la classe, une première interprétation pourrait conduire à comprendre l'activité du professeur comme une activité didactique (niveau 0). Mais le professeur en classe peut travailler à son projet de future leçon (niveau +1), ou bien (toujours au niveau +1) au projet de la même leçon mais dans une autre classe. [...] Il existe donc une complexité temporelle de l'activité du professeur. »

Pour étudier l'activité du professeur pour l'enseignement de la numération, nous allons donc chercher à caractériser :

- le projet global de l'enseignant (+2) qui correspond à ce que l'enseignant projette de faire étudier à ses élèves, la progression qu'il a choisie, les contenus à travailler, les savoirs qu'il souhaite institutionnaliser, etc.
- le projet local (+1) qui correspond à la préparation d'une séance ou d'une situation particulière et des choix effectués par l'enseignant dans l'organisation de cette séance (ou situation).
- L'action didactique (0) qui correspond à la mise en œuvre de ce projet avec ses élèves.

Pour enrichir ce modèle, Margolinas (2002) utilise la notion de milieu du professeur et le modèle de la structuration des milieux qui lui permet de

« rendre compte du caractère réflexif du travail du professeur : Grâce à l'observation de l'activité des élèves (Niveau -1), le professeur peut prendre des décisions en classe (Niveau 0) qu'il n'avait pas anticipées, mais aussi transformer sa séquence (Niveau +1) voire sa conception du thème mathématique (Niveau +2) et même une de ses idées sur l'enseignement en général (Niveau +3). En changeant de conception sur l'enseignement des mathématiques (Niveau +3), le professeur peut transformer sa façon d'envisager l'enseignement d'un thème mathématique (Niveau +2), ce qui conduit à des projets de leçon différents (Niveau +1), et change aussi le type d'explication qu'il donne en classe (Niveau 0) et sa façon d'interpréter le travail des élèves (Niveau -1). »

Le professeur est alors perçu comme « un sujet dont les connaissances lui permettent d'interagir avec un milieu, qui en retour permet de transformer ses connaissances, c'est à dire d'apprendre ».

Tout comme Brousseau (1998) avait caractérisé « le milieu comme un 'oignon' dans une structure récursive dans laquelle la situation de niveau n devient le milieu de la situation de niveau $n+1$ », Margolinas (2002) utilise ce modèle pour caractériser l'activité de l'enseignant en le prolongeant donc aux niveaux surdidactiques (niveaux strictement positifs du tableau précédent).

Une utilisation particulière de ce modèle

Pour définir notre méthodologie d'analyse de l'activité du professeur, se pose alors la question de la description des différentes situations du professeur. Nous traiterons de manière différente le niveau didactique et le niveau surdidactique.

En effet, pour les niveaux surdidactiques, nous utilisons le modèle de Margolinas (2002) en conservant l'idée de situations emboîtées mais nous nous centrons sur l'analyse de la situation didactique et nous regardons alors les niveaux surdidactiques à un grain plus large. Ainsi nous considérons l'étude des pratiques des enseignants à travers les différents niveaux d'activité, en prenant en compte la complexité de ces pratiques (complexité temporelle et emboîtement de situations) mais de façon plus large pour essayer de déterminer des logiques d'action. En cela nous nous inspirons de la double approche didactique et ergonomique de Robert et Rogalski (2008), comme le fait Coulange (2006) qui précise que « ces logiques d'action qui émergent à la fois par et dans l'activité du professeur suggèrent en quelque sorte une analyse plus horizontale des niveaux didactiques et d'observation/dévolution : sans remontée obligée dans les niveaux surdidactiques, tout en restant cohérente avec ces niveaux ».

Concernant le niveau didactique, nous utiliserons une description en termes de situation. La situation didactique est définie en deux temps, par une analyse a priori suivie d'une analyse a posteriori qui prend en compte le déroulement de cette situation avec les élèves. Elle prend en compte le point de vue du professeur et des élèves.

Les concepts de « milieu » et « contrat didactique » pour l'analyse des classes ordinaires

Dans le cas de l'observation de classes « ordinaires », se pose le problème de l'utilisation du concept de situation adidactique. Comme le précisent Perrin-Glorian et Hersant (2003) « dans une situation de classe réelle il est parfois difficile de distinguer ce qui relève du milieu adidactique et ce qui relève du contrat didactique ».

Il ne s'agit pas alors de chercher des situations adidactiques dans ce qui est proposé par le maître mais plutôt de reconstruire une situation théorique (au sens de la TSD) qui modélise le déroulement en classe, puis de regarder comment le maître l'utilise ou non dans le déroulement effectif de la situation.

Perrin-Glorian et Hersant (2003) mettent en évidence deux cas disjoints :

- « ou il existe un milieu [*supposé indépendant du maître*] avec lequel l'élève peut avoir un rapport direct, effectif ou évoqué, et qui peut lui amener des rétroactions, mêmes insuffisantes ; dans ce cas on peut reconstruire une situation qui a des potentialités adidactiques, même si le maître peut être amené à intervenir sur le milieu et à aménager le milieu au cours de l'action [...]

- ou cette possibilité n'existe pas ; l'enseignant est le seul garant des procédés utilisés par les élèves ; c'est lui seul qui réagit aux actions des élèves. »

Il est donc important dans l'analyse *a priori* d'identifier le savoir visé, le milieu, et le savoir ancien avec lequel les élèves vont pouvoir interpréter les rétroactions du milieu.

Dans l'analyse a posteriori, nous regardons si l'enseignant utilise ou non cet éventuel potentiel adidactique de la situation, comment il utilise le milieu ou le contrat didactique. Nous incluons cette analyse dans le modèle des niveaux de l'activité du professeur : nous regardons le poids des niveaux surdidactiques sur la mise en œuvre du projet ainsi que la façon dont le maître prend en compte son observation des élèves (niveau -1) et l'influence de cette observation sur son action didactique.

Concernant les niveaux caractéristiques du travail de préparation de l'enseignant (niveaux +1 et +2), nous utiliserons la TAD afin d'étudier les organisations mathématiques construites par

l'enseignant. Ce cadre théorique nous permettra également d'analyser les programmes et manuels.

La théorie anthropologique du didactique (TAD)

« La TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » (Chevallard 1999).

Ces activités se décrivent avec la notion de praxéologie : type de tâche, technique (qui est une manière d'accomplir ce type de tâche), technologie (discours qui permet d'expliquer et de justifier la technique) et théorie (qui permettent à son tour de justifier ces technologies).

Ainsi, étudier l'enseignement de la numération d'un point de vue mathématique consiste à définir les praxéologies (ou organisations mathématiques) utilisées dans cet enseignement.

C'est ainsi que nous chercherons à caractériser le projet global (correspondant au niveau +2 de l'activité de l'enseignant) et le projet local (niveau +1) de l'enseignant en les reconstruisant à partir de nos observations de classes. Pour le niveau global, on pourra utiliser la notion d'organisation mathématique (OM) locale, c'est-à-dire organisée autour d'une technologie (ici les propriétés de l'écriture en chiffres). Pour le projet local, on peut l'associer plus ou moins à une organisation mathématique (OM) ponctuelle, c'est-à-dire une praxéologie organisée autour d'un type de tâche. Comme à ce niveau on cherche à caractériser la préparation d'une séance ou d'une situation, il peut s'agir parfois d'une partie d'une OM ponctuelle ou bien de plusieurs OM ponctuelles.

On peut alors résumer la description des niveaux de l'activité ainsi :

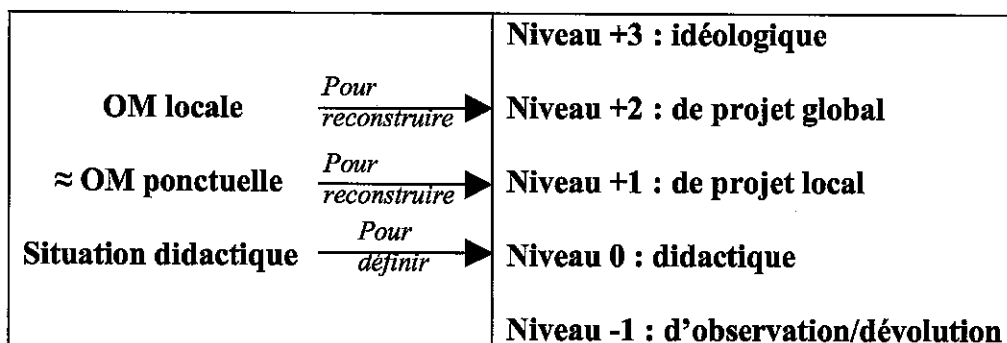


Figure 3 : méthodologie utilisée pour la description des niveaux de l'activité du professeur

Comme le précise Margolinas (2002),

« le professeur est ainsi pris entre des considérations qui le tirent en quelque sorte vers les élèves et d'autres qui proviennent de sa condition de professeur de mathématiques, et comme tel fortement assujéti à l'institution scolaire et à l'institution mathématique. »

Afin de préciser cette influence de différentes institutions sur l'activité de l'enseignant, nous utiliserons encore le cadre théorique de la TAD.

La TAD et les contraintes et libertés institutionnelles

Pour un objet de savoir O (ici la numération décimale de position), Chevallard (1992) précise les notions de rapport institutionnel, de contraintes et de libertés :

« Supposons donc que la personne X entre dans l'institution I , et soit O un objet institutionnel pour I . L'objet O va se mettre à « vivre » pour X sous la contrainte du rapport institutionnel $R_i(O)$. En d'autres termes, un rapport personnel $R(X,O)$ va se construire, ou va changer, sous la contrainte $R_i(O)$ – et plus largement, sous la contrainte du contrat institutionnel C_i . »

« Une personne X est assujettie à une foule d'institutions. Je poserai ici l'axiome qu'une personne n'est en fait rien d'autre que l'émergent d'un complexe d'assujettissements institutionnels. Ce qu'on nomme « liberté » de la personne apparaît alors comme l'effet obtenu en jouant un ou plusieurs assujettissements institutionnels contre d'autres.

A cet égard les institutions sont toujours « flouées » par leurs sujets. Là où elles s'attendent à trouver de purs sujets, qu'elles croient entièrement façonnées par elles, elles rencontrent des personnes, qui leur apparaissent toujours, peu ou prou, comme de mauvais sujets. »

A travers ces contraintes institutionnelles il apparaît donc des espaces de liberté que les enseignants vont plus ou moins pouvoir occuper. Un premier pas dans la mise en évidence de ces contraintes institutionnelles se fait par l'analyse de la transposition didactique de l'objet de savoir en jeu.

La TAD et la transposition didactique

Le concept de transposition didactique (Chevallard, 1991) permet d'étudier les modifications que subit un objet de savoir « savant » quand il est d'abord désigné comme étant objet « à enseigner » puis quand il devient objet « enseigné ». Ces transformations se font à l'intérieur de différentes institutions, qui jouent toutes un rôle différent dans ce processus, qui est résumé dans la figure suivante (Bosch et Gascon, 2005) :

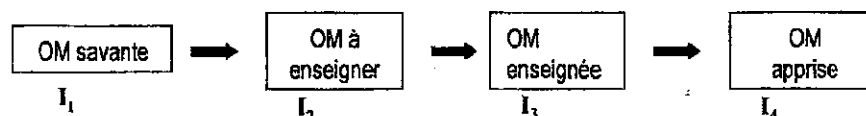


Figure 4: schéma de la transposition didactique

« Dans ce schéma, I_1 est l'institution productrice du savoir mathématique, I_2 la noosphère, I_3 l'institution scolaire et I_4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique ».

Bosch et Gascon (2005) précisent alors

« Bien que certaines théories didactiques tendent à circonscrire leur unité d'analyse dans I_4 , la TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » (ni les phénomènes didactiques qui émergent de I_4) sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition ».

Nous définirons donc les contraintes et libertés institutionnelles à travers l'étude de l'OM à enseigner, c'est-à-dire des praxéologies présentes dans les manuels et programmes.

Mais pour étudier cette OM à enseigner il est important, comme le proposent Bosch et Gascon (2005), d'avoir un « point de vue épistémologique » qui permet de regarder les programmes et manuels à partir d'un promontoire d'observation. Celui-ci est donné par une « organisation mathématique de référence ».

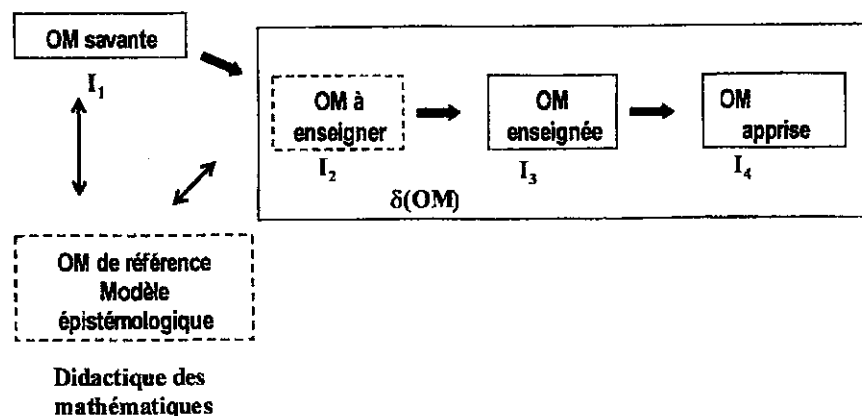


Figure 5 : l'OM de référence dans la transposition didactique

Selon Bosch et Gascon (2005) :

« La description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniements. »

Enfin, concernant la description des objets mathématiques nous utiliserons également un point de vue issu de la TAD : la distinction ostensif, non ostensif.

LA TAD et la dialectique ostensif / non ostensif

Bosch et Chevillard (1999) distinguent deux types d'objets utilisés dans l'activité mathématique :

- « les objets ostensifs – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance »- pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible.

- Les objets non ostensifs sont alors tous ces « objets », qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence- sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés ».

Cette question sera centrale dans notre travail puisque nous nous intéressons aux propriétés de l'ostensif « écriture en chiffres d'un nombre » et que les liens avec d'autres ostensifs vont être une caractéristique importante de l'étude de cette écriture. Nous incluons donc dans nos différentes analyses, une étude des ostensifs qui seront utilisés.

Schéma général de la méthodologie utilisée

Nous pouvons schématiser ainsi notre méthodologie :

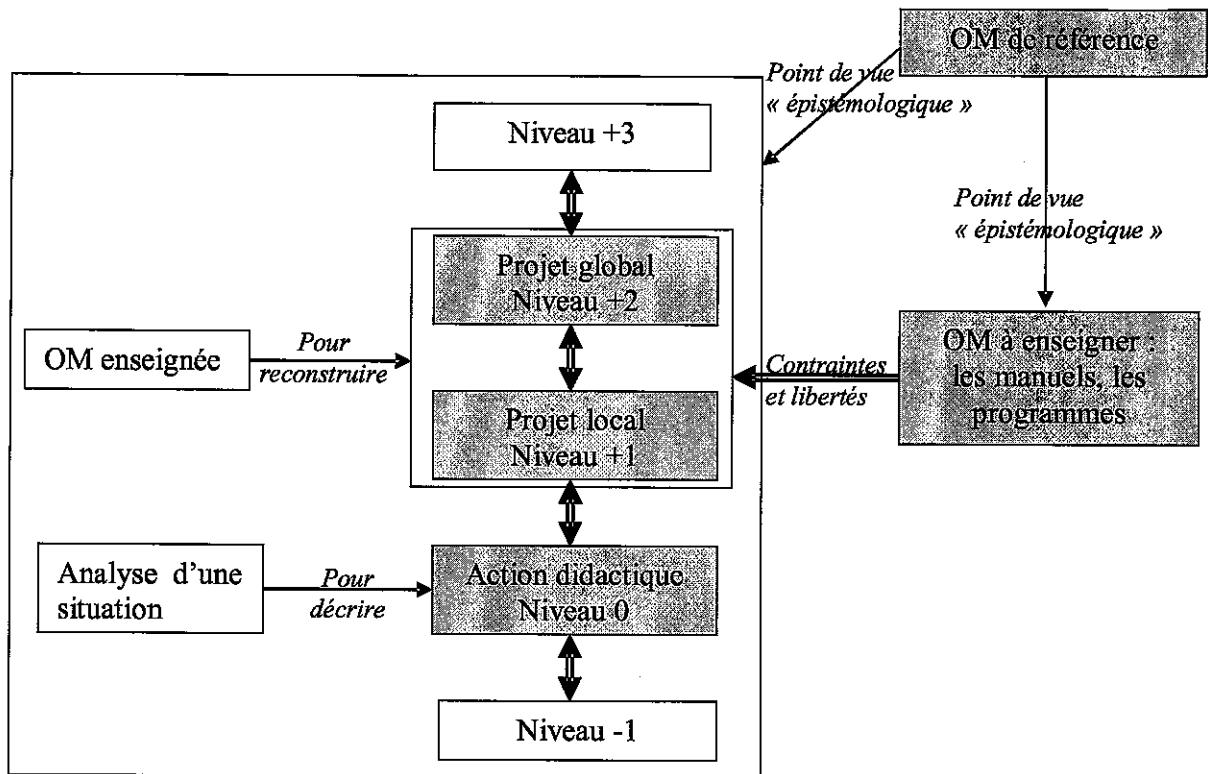


Figure 6 : schéma général de la méthodologie

Conclusion et plan de l'étude

Pour étudier l'enseignement de la numération des nombres à quatre chiffres, nous allons donc commencer par construire une OM de référence dans la partie B, en nous appuyant sur la TAD. Ensuite nous l'utiliserons pour faire l'analyse des programmes et manuels (OM à enseigner) dans la partie C, en utilisant encore la TAD. Cela nous permettra de déterminer les contraintes et libertés institutionnelles. Enfin, dans la partie D, à travers une étude de cas de deux enseignants, nous ferons tout d'abord l'analyse des pratiques de deux enseignantes au niveau de leur projet d'enseignement avec la TAD. Pour cela nous essaierons de caractériser l'OM enseignée en la mettant en perspective avec l'OM de référence. Nous essaierons alors de déterminer l'influence des contraintes institutionnelles sur les choix des enseignants et éventuellement les marges de manœuvre qu'ils investissent. Ensuite nous analyserons la mise en œuvre d'une situation en classe, avec les élèves en nous appuyant sur la TSD. Dans toute cette partie nous utiliserons également la TSD pour essayer de recomposer les différents niveaux (-1 à +3) de l'activité de l'enseignant.

Nous terminerons par une conclusion générale et une proposition de perspectives de recherches.

PARTIE B : Construction de l'OM de référence

Rappelons tout d'abord que cette OM est construite par le chercheur et qu'elle est un outil pour se donner « un point de vue épistémologique » sur l'OM à enseigner.

Nous considérons que pour la construction de notre OM de référence l'étude de Chambris fournit un point d'appui intéressant car elle montre une certaine stabilité au niveau des types de tâches des OM au cours du 20^{ème} siècle, et fait apparaître différents modèles théoriques qui permettent de justifier les technologies qui sont en jeu dans cette période. Nous nous appuyerons tout d'abord sur des ouvrages datant de différentes époques pour caractériser des approches différentes du système d'écriture des nombres.

Nous nous limiterons au cas des nombres ayant quatre chiffres ou moins, puisqu'il s'agit des nombres que nous étudierons ensuite dans les programmes et manuels ainsi que dans les classes.

I. Méthodologie

Bosch et Gascon (2005) précisent les manières de décrire l'OM de référence :

« La description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniements. »

Nous utiliserons tout d'abord deux sources pour cela :

- différentes façons de définir la numération depuis la fin du 18^{ème} siècle (qui nous permettra de nous approcher du savoir « savant »),
- la thèse de C. Chambris (2008) sur l'évolution des OM dans les manuels au cours du 20^{ème} siècle,

Cela nous permettra de répondre à la question suivante : comment peut-on définir le système de numération ? Nous présenterons alors différentes théories possibles pour l'étude de la numération à l'école et nous donnerons ensuite les types de tâches ainsi que les techniques et technologies liées à chacun de ces modèles théoriques. Enfin nous récapitulerons les différents ostensifs utilisés dans l'étude de la numération.

Comme le précisent Bosch et Gascon (2005), nos observations de classes et nos réflexions nous permettront de remanier cette OM de référence au fur et à mesure de l'avancée de notre travail.

II. Comment peut-on définir le système de numération ?

II.1 Eclairage amené par des ouvrages de différentes époques

Pour essayer de se faire une idée des manières de définir la numération à différentes époques, nous allons regarder différents ouvrages, datant de 1799 à 2005, s'adressant à des enseignants ou des étudiants.

Le premier est un livre de Condorcet : « Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité ». En 1794, suite à la révolution française, la Convention Nationale ouvrit un « concours pour les livres élémentaires de la première éducation ». Condorcet, qui sera mis hors-la-loi par Robespierre moins de deux mois après, entreprit de se mettre à l'écriture d'un manuel scolaire, comme il l'avait souhaité déjà depuis de longue date. Il n'eut pas le temps de

mener ce projet entièrement à son terme (il prévoyait de traiter de la géométrie, des proportions et des équations du premier degré) mais il fut sélectionné sur la liste des livres élémentaires autorisés, juste après sa publication en 1799. Il s'intitulera alors « Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité ». Gert Schubring, dans les commentaires de l'édition de 1988, précise toutefois que l'on ne sait rien jusqu'ici de son utilisation effective dans les classes (mais il fut réédité en 1854). Il cite cependant quelques commentaires effectués par le jury du concours à propos de cet ouvrage qui montrent tout l'intérêt qu'il pouvait susciter dans l'institution scolaire :

« La première partie contient les éléments d'arithmétique en plusieurs leçons. Ces éléments sont très méthodiques, très clairs et très propres à être enseignés aux enfants ; mais ils ne comprennent que les quatre premières règles de l'arithmétique appliquées aux entiers et aux décimales : de sorte qu'à cet égard on peut les regarder comme incomplets. [...] »

La seconde partie renferme des informations sur chaque leçon, destinées aux instituteurs, pour leur faire remarquer les points essentiels sur lesquels ils doivent principalement insister dans l'enseignement. Cette seconde partie est en quelque sorte unique en son genre et donne à l'ouvrage un mérite particulier. »

Nous allons nous intéresser à la façon dont Condorcet définit le système de numération dans ces éléments d'arithmétique.

Il commence par construire la numération parlée : il définit le nom des premiers nombres : « un ajouté à un s'appelle Deux », etc. jusqu'à Dix. Par ajouts successifs de un il donne le principe de la numération orale : « un ajouté à dix, dix et un s'appellent Dix-Un », etc. puis « un et nonante-neuf, nonante et dix par Cent, cent et cent ou deux fois cent par Deux Cent » et ainsi jusqu'à Neuf Cent, en expliquant qu'en « plaçant après le mot cent les noms de nombres inférieurs à cent, depuis un jusqu'à nonante-neuf, pour exprimer qu'ajoutés à cent, à deux cent, à neuf cent, ils forment le nombre qu'on veut indiquer, on pourra exprimer tous les nombres d'unités en unités, jusqu'à neuf cent nonante-neuf » (il y a des différences avec la convention adoptée actuellement). Puis il poursuit « un et neuf cent nonante-neuf, neuf cent et cent, s'expriment par le mot ... Mille », etc.

A partir de la définition des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, il explique l'écriture en chiffres d'un nombre à deux chiffres : « on a supposé que le chiffre placé le premier, désignant des unités depuis 1 jusqu'à 9, celui qui seroit placé à la gauche du premier, exprimeroit autant de dizaines qu'il auroit exprimé d'unités, s'il avoit été seul ». Il fait alors le lien avec l'écriture en mots, par l'exemple : « 32 exprime donc, qu'un nombre est formé de deux unités et de trois dizaines ; de deux et de trente ; la formule en chiffres 32 exprime ... Trente-deux ». Il définit ensuite le « caractère 0 qui se prononce zéro » qui sert à écrire un nombre « composé seulement d'un certain nombre de dizaines ». La valeur du chiffre placé au troisième rang est alors définie par un procédé itératif : « convenons qu'un chiffre placé à la gauche de celui qui indique des dizaines, exprime autant de dizaines de dizaines, autant de centaines qu'il auroit exprimé de dizaines, s'il s'étoit trouvé moins avancé d'un rang vers la droite » tout comme le quatrième rang :

« Si l'on suit la même démarche, et que l'on place un quatrième chiffre à la gauche de ceux qui indiquent des centaines, il indiquera autant de dizaines de centaines, ou autant de mille, qu'il auroit désigné de centaines, s'il avoit été moins avancé d'un rang ; autant de centaines de dizaines, ou de mille, qu'il auroit indiqué de dizaines, s'il avoit été moins avancé de deux ; enfin autant de mille, qu'il auroit désigné d'unités, s'il avoit été moins avancé de trois rangs : ainsi, 6452, indique six mille quatre centaines cinq dizaines et deux unités, exprime le nombre six mille quatre cent cinquante-deux ».

Il poursuit ensuite avec le passage de la numération orale à la numération écrite.

On voit donc une construction progressive de l'écriture chiffrée s'appuyant sur le fait qu'un chiffre situé à un rang immédiatement à gauche d'un rang donné indique des dizaines de l'unité représentée par ce rang. Le quatrième rang indique donc des dizaines de centaines. Il en découle toutes les relations avec les unités inférieures : le millier est donc équivalent à une dizaine de centaines mais aussi à une centaine de dizaines et enfin à un millier d'unités.

La numération en unités est ici l'ostensif privilégié pour exprimer ces relations entre les unités mais aussi pour faire le lien entre la numération parlée et la numération écrite.

Le deuxième ouvrage que nous avons étudié est « Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cycle élémentaire » (1978) écrit par l'équipe ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire). C'est un ouvrage destiné aux enseignants dans lequel on trouve des activités à proposer aux élèves mais aussi quelques apports théoriques sur les notions mathématiques en jeu. On ne peut donc pas tout à fait faire le parallèle entre ces apports théoriques avec ce que nous avons vu dans l'ouvrage de Condorcet qui s'adressait, lui aussi, aux maîtres mais également directement aux élèves alors qu'ici il s'agit d'une partie destinée uniquement aux enseignants.

Dans le chapitre sur la numération, les auteurs précisent qu'« il ne s'agit pas d'entreprendre ici une étude détaillée des différents systèmes de numération [...] mais seulement de dégager les caractéristiques et de comprendre les mécanismes de notre numération écrite et de notre numération orale ».

Les auteurs commencent par définir les systèmes de numération en bases comme des constructions algorithmiques permettant de résoudre le problème de la désignation de chaque entier naturel sans ambiguïté. Ils indiquent ensuite l'intérêt de ces systèmes pour communiquer une information concernant le nombre d'éléments d'une collection, en précisant que « cette information n'a de sens que si, pour une collection donnée, donc pour un nombre donné, cette décomposition existe nécessairement et est unique ». Ils continuent en démontrant que pour tout entier naturel n , « il existe une décomposition canonique unique de ce naturel selon les puissances d'un nombre donné ($a > 1$) ». Cette démonstration s'appuie sur l'existence et l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne (il s'agit de faire des divisions euclidiennes successives des quotients obtenus successivement par la base).

Les auteurs reviennent alors au dénombrement d'une collection : comment transmettre « l'information qui se présentait sous la forme : x unités, y objets de première espèce, z objets de deuxième espèce ... ce que nous avons traduit par l'écriture : $x + (y \times a) + (z \times a^2) + \dots$ ».

Ils proposent une classification des différents systèmes de numération comme différentes solutions à ce problème : les numérations d'addition, les numérations hybrides et la numération de position. L'écriture d'un nombre y est définie ainsi :

1.3.3. Numération de position

1.3.3.1. Les seuls chiffres retenus désignent les coefficients des puissances de la base (c'est-à-dire les nombres inférieurs à la base a : 1, 2, 3, 4, ... $a-1$ et aussi 0). Le nombre ayant donné lieu à la décomposition $x + (y \times a) + (z \times a^2) + (t \times a^3)$ va pouvoir s'écrire dans de tels systèmes $x y z t$ ou $t z y x$. En effet, dès lors que l'on choisit de ne pas écrire les puissances de la base la position des chiffres n'est pas indifférente et il faut convenir d'un ordre (3 424 ne désigne pas le même nombre que 4 234). Cette convention étant établie, c'est la position d'un chiffre qui définit la puissance de la base dont il est le coefficient. D'où le nom de numération de position.

Ainsi dans 3 424, la juxtaposition des chiffres renvoie à la décomposition selon les puissances de la base $(3 \times 10^3) + (4 \times 10^2) + (2 \times 10) + 4$, alors que 4234 renvoie à la décomposition $(4 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (3 \times 10) + 4$.

Figure 7 : extrait de ERMEL CE (1978)

Il s'agit donc ici de définir l'écriture des nombres par la juxtaposition des coefficients de la décomposition obtenue précédemment.

On peut donc noter dans cette approche une place importante de l'écriture algébrique (décomposition selon les puissances de la base) de laquelle va découler l'écriture chiffrée. Les unités sont représentées par les puissances successives de la base. Les relations entre ces unités n'apparaissent pas, elles sont la conséquence de règles de calcul sur les puissances ($10^3 = 100 \times 10^1$ car $10^3 = 10^2 \times 10^1$). Enfin on peut noter l'appui mathématique important sur la division euclidienne qui apparaît comme l'élément théorique venant justifier l'existence et l'unicité de l'écriture chiffrée.

On voit donc à travers ces deux premiers ouvrages deux approches différentes dans la définition de la numération décimale de position. Nous appellerons la première l'approche *classique* et la deuxième l'approche *moderne*. Pour étayer ce résultat nous allons maintenant nous appuyer sur des ouvrages destinés, eux, moins directement aux élèves de l'école.

L'ouvrage de Bézout et Reynaud (1821) intitulé « Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie », qui propose un cours d'arithmétique par Bézout suivi de notes par Reynaud. Dans la préface, Bézout indique que ce cours doit « rassembler les connaissances élémentaires nécessaires aux Gardes des Pavillons de la Marine pour être admis au rang d'officiers de vaisseaux ». Il s'agit donc là d'un public très différent. Il est précisé qu'il s'agit d'un ouvrage « adopté par l'université royale ».

Comme nous reprendrons plus en détail la construction théorique proposée par Bézout dans la partie suivante, nous allons ici étudier celle de Reynaud. On y trouve une construction proche de celle de Condorcet : l'auteur commence par définir la numération parlée en s'appuyant sur les unités de la numération. Par exemple « la collection de 10 unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dixaine ; et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines ; mais pour abrégé au lieu des mots composés, une dixaine, deux dixaines, [...] on dit dix, vingt [...] quatre-vingt-dix ». Il ajoute plus loin : « la collection de neuf dixaines et de neuf unités compose le nombre nonante-neuf ; celui-ci augmenté d'un, donne le nombre cent, composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme centaine » (on peut noter qu'il utilise à la fois nonante et quatre-vingt-dix).

Après avoir défini les chiffres de 1 à 9 il indique comment passer de la numération parlée à la numération orale en utilisant les unités de la numération : « pour écrire le nombre neuf cent quarante-sept unités, on le décomposa en neuf centaines, quatre dixaines et sept unités ; ce qui conduisit à 9 centaines 4 dixaines 7 unités ». Il fait alors ainsi le lien avec l'écriture en chiffres :

La nécessité de soumettre des nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dizaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent il était utile de faire entièrement disparaître les lettres. Pour y parvenir, on classa les noms des unités, dizaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang de formation; les unités simples furent nommées *unités du premier ordre*; les dizaines, *unités du deuxième ordre*; les centaines, *unités du troisième ordre*; etc.; de sorte que le nombre *neuf cent quarante-sept* peut s'écrire :

9 unités du 3^e ordre, 4 unités du 2^e ordre, 7 unités du 1^{er} ordre.

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dizaines; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines; et ainsi de suite. D'après cette convention, le nombre, *neuf cent quarante-sept*, peut s'écrire ainsi, 947; car le chiffre 9 occupant la troisième place, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou neuf centaines, ou neuf cents; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités du deuxième ordre, ou quatre dizaines, ou quarante; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc *neuf cent quarante-sept* unités.

Plusieurs nombres échappent à ce système; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas toutes les unités des ordres inférieurs à ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre *auxiliaire* 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités.

Figure 8 : extrait de Bézout et Reynaud (1821)

On trouvera en annexe, un plus grand extrait de ce chapitre de l'ouvrage de Reynaud intitulé « de la numération ».

Nous pouvons voir une proximité avec l'approche de Condorcet avec toutefois ici le passage par une numérotation des ordres des unités pour faire le lien entre les unités de la numération et le rang dans l'écriture en chiffres.

Enfin, pour la période contemporaine, nous avons choisi le livre de Perrin (2005), intitulé « mathématiques d'école, nombres, mesure et géométrie ». Lors de la parution du livre, l'auteur était à la fois professeur de mathématiques en IUFM (institut de formation des maîtres) et à l'université. Ce livre a pour but, selon son auteur,

« de former aux mathématiques de futurs professeurs des écoles, avec le projet d'en faire, selon le mot d'Yves Chevallard, des « mathématiciens d'école ». Notre ambition est de donner aux étudiants les bases d'une réflexion approfondie sur les thèmes des mathématiques enseignées à l'école primaire (essentiellement les nombres et la géométrie) qui leur permette d'aborder ces thèmes en mathématiciens. Cela signifie que ces étudiants devenus professeurs ne se contenteront pas de reproduire les contenus des manuels mais que, face aux situations même les plus élémentaires, ils seront en mesure de se poser leurs propres questions, d'en mesurer la pertinence et de tenter d'y apporter leur propre réponse ».

Il s'adresse donc à un public universitaire d'étudiants souhaitant devenir enseignants avec le souci de donner des bases de réflexion sur les mathématiques élémentaires.

Tout comme dans ERMEL CE (1978) l'écriture d'un nombre en base b y apparaît comme une conséquence du théorème d'existence et d'unicité de la division euclidienne :

d. Application : écriture d'un entier en base b

C'est la généralisation de l'écriture décimale usuelle qui correspond à $b = 10$. L'autre cas très important est le cas $b = 2$ qui est utilisé par les ordinateurs (car ceux-ci ne travaillent qu'avec deux chiffres : 0 et 1).

Théorème 1.12. Soit $b \in \mathbf{N}$, $b \geq 2$. Tout entier $a > 0$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = a_n b^n + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

avec $n \geq 0$, $a_i \in \mathbf{N}$, $0 \leq a_i < b$ et $a_n \neq 0$. L'unicité signifie que si on a

$$a = a_n b^n + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 = a'_m b^m + \dots + a'_2 b^2 + a'_1 b + a'_0,$$

alors on a $m = n$ et $a_i = a'_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$.

Cette écriture s'appelle l'écriture en base b de a et les a_i sont les chiffres de a en base b . Nous utiliserons la convention d'écriture suivante : lorsque la base est dix nous noterons, comme il est d'usage, $a = a_n \dots a_1 a_0$. Lorsque la base est différente de dix nous noterons $a = \bar{a}_n \dots \bar{a}_1 \bar{a}_0$.

Figure 9 : extrait de Perrin (2005)

Suit ensuite la démonstration de ce théorème et une application pour le passage d'une base quelconque à la base 10 et réciproquement. Enfin, l'auteur termine par une présentation des différents types de systèmes de numération en précisant que pour la numération de position, « la signification d'un symbole dépend de sa position, ainsi 729 signifie 7 centaines, 2 dizaines et 9 unités, tandis que 297, écrit avec les mêmes chiffres, a un tout autre sens ». Il termine en expliquant la nécessité d'introduire le symbole (« 0 ») pour marquer l'absence d'unité d'un certain rang. On retrouve, comme dans ERMEL, une place importante pour l'écriture algébrique, la décomposition selon les puissances de la base, de laquelle découle l'écriture chiffrée, ainsi que l'invisibilité des relations entre les unités.

Finalement, à travers ces ouvrages, nous voyons apparaître deux visions très différentes de la définition de l'écriture des nombres.

Dans l'approche « classique », on définit les objets que sont les chiffres, les mots nombres. On construit au fur et à mesure l'écriture des nombres de plus en plus grands en présentant un procédé itératif de construction. On se sert des unités de la numération pour faire le lien entre écriture en chiffres et écriture en mots et pour définir les relations entre les unités (ainsi le mille apparaît comme la dizaine de centaines ou la centaine de dizaines ou encore le millier d'unités).

Dans l'approche « moderne », on définit l'écriture d'un nombre en base b quelconque (b entier supérieur ou égal à 2) à partir d'une écriture algébrique correspondant à la décomposition polynomiale selon les puissances de la base et on prouve l'existence et l'unicité de cette écriture. On ne voit donc pas une construction itérative mais une définition valable pour tous les nombres, quelle que soit leur taille. Les relations entre les unités ne sont pas données : elles sont à déduire de règles de calcul.

II.2 L'évolution de l'étude de la numération dans les manuels au cours du 20^{ème} siècle

Nous nous sommes appuyé ici sur le travail de Chambris (2008) qui a fait un état des lieux des organisations mathématiques sur la numération, dans les manuels scolaires du 20^{ème} siècle (et du tout début du 21^{ème} siècle) pour le CE (2^{ème} et 3^{ème} année de l'école primaire).

Elle met en évidence le fait que les organisations mathématiques ont évolué au cours de ce siècle en particulier aux moments de la réforme et de la contre réforme.

La période classique

Ainsi des années 30 à la réforme (période de l'enseignement qu'elle nomme « période classique »), il existait un niveau théorique des OM qui s'appuyait sur une « théorie » très proche de celle que nous avons décrite dans le livre de Condorcet, qui proposait une construction du système de numération s'appuyant sur les unités de la numération.

Chambris s'appuie le traité de Bézout et Reynaud (1821). Nous y retrouvons une construction itérative de la suite des nombres qu'elle décrit ainsi :

« On construit les dix premiers nombres en ajoutant l'unité à chaque nombre obtenu. Ensuite on définit l'unité du deuxième ordre : dix ou une dizaine. On compte par dizaines comme on a compté par unités, jusqu'à dix dizaines. Ensuite, on ajoute à chacune des dizaines, les neuf premiers nombres. On définit l'unité du troisième ordre, comme 99 auquel on ajoute 1 qui est aussi dix dizaines ou une centaine. Ensuite, on compte par centaines comme on a compté par unités, jusqu'à dix centaines. Entre deux centaines, on ajoute les 99 premiers nombres. On définit l'unité du quatrième ordre comme 999 auquel on ajoute 1 qui est aussi dix centaines ou un millier. Selon les manuels, on a deux possibilités : certains comptent par milliers comme on a compté par centaines, dizaines et unités, d'autres comptent par unités de mille comme on a compté par unités. Dans les deux cas, on intercale entre deux milliers, les 999 premiers nombres. Mais ceux qui ont compté seulement les unités de mille poursuivent en comptant par dizaines de milliers qui est l'unité du cinquième ordre et en intercalant entre deux dizaines de mille les 9999 premiers nombres, etc. »

Chambris insiste sur l'utilisation importante, dans les OM des manuels de l'époque, des unités de la numération (contrairement aux manuels récents).

Pour écrire par exemple un nombre comme 8564 on pouvait alors trouver des écritures comme : 8 milliers 5 centaines 6 dizaines 4 unités ou bien 85 centaines 64 unités ou encore 8 milliers 4 unités 56 dizaines, etc. Elle parle alors de « numération en unités » pour évoquer ce type d'écriture. Nous choisirons, de notre côté, d'appeler cette désignation *nombre en unités*, afin de bien montrer le parallèle avec le nombre en chiffres et le nombre en mots qui sont aussi d'autres façons de désigner les nombres.

On voit également à travers cette étude des manuels que d'autres façons de désigner les nombres sont utilisées.

Les ostensifs

Nous allons les présenter en reprenant le problème présenté dans la partie A :

« Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ? »

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'en utilisant les unités de la numération on peut facilement décrire et justifier les manipulations effectuées : 8564 c'est 85 centaines et 64 unités, il faudra donc commander 86 paquets de 100. Cette manipulation est guidée par les valeurs des chiffres dans le nombre-chiffre : le 5 au troisième rang vaut 5 centaines, le 8 au quatrième rang vaut 8 milliers donc 80 centaines car 1 millier équivaut à 10 centaines, cela fait donc un total de 85 centaines, soit 85 paquets de 100 auquel il faut ajouter 1 paquet de 100 pour les unités restantes. Ce discours met en lumière les propriétés de la numération utilisées : la valeur des chiffres en fonction de leur position dans le nombre en chiffres et les relations entre les différentes unités.

Concernant les autres ostensifs ces manipulations peuvent être effectuées ainsi :

- 8564 c'est $8000+500+60+4$, donc c'est 80 paquets de 100 et 5 paquets de 100 soit 85 paquets de 100. Cette désignation des nombres utilisant les *écritures chiffrées des puissances de 10*, appelées pour simplifier ECPD par Chambris, sera ici nommée *nombre en ECPD*. On peut déjà remarquer que contrairement au nombre en unités, cet

ostensif ne permet pas de décrire l'équivalence de 8 milliers et 80 centaines. Comme l'a déjà remarqué Chambris, la valence instrumentale de cet ostensif est moins grande que celle de l'ostensif nombre en unités.

- 8564 c'est aussi $8 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 4$. Mais $1000 = 10 \times 100$, donc $8 \times 1000 = 8 \times 10 \times 100 = 80 \times 100$. Comme $80 \times 100 + 5 \times 100 = 85 \times 100$ on a 85 paquets de 100. Cette désignation des nombres utilisant les *écritures chiffrées des puissances de 10 généralisées*, appelées pour simplifier ECPDG par Chambris, sera ici nommée *nombre en ECPDG*. Même s'il semble très proche du précédent, on peut déjà remarquer que contrairement à l'ostensif nombre en ECPD, celui-ci permet de décrire l'équivalence de 8 milliers et 80 centaines à travers l'écriture multiplicative $8 \times 1000 = 8 \times 10 \times 100 = 80 \times 100$ (la relation entre le millier et la centaine apparaît alors sous la forme $1000 = 10 \times 100$).
- 8564 c'est aussi 8 paquets de 1000, 5 paquets de 100, 6 paquets de 10 et 4 unités. Mais 1 paquet de 1000 c'est 10 paquets de 100, donc 8 paquets de 1000 c'est 80 paquets de 100. Si on ajoute les 5 paquets de 100 de 8564 on obtient 85 paquets de 100. Cette désignation des nombres utilisant les expressions « paquets de 10, 100, 1000 » sera nommée *nombre en « paquets de »*. L'équivalence entre les unités de la numération apparaît dans l'exemple par « 1 paquet de 1000 c'est 10 paquets de 100 ». Cet ostensif apparaît souvent associé au nombre en ECPD, qui justement, ne permet pas de décrire les équivalences entre unités.

On peut remarquer que l'utilisation de ce dernier ostensif (ainsi que celui de la numération en unités) utilise le registre des écritures chiffrées et celui de la langue naturelle alors que les deux précédents (les ECPD et ECPDG) utilisaient exclusivement le registre des écritures chiffrées des nombres.

Enfin pour nommer les nombres nous utilisons également l'ostensif *nombre en mots*. Dans l'exemple précédent il ne permet pas de faire les manipulations décrites ci-dessus. En effet dans « huit mille cinq cent soixante-quatre » on ne peut plus faire cette coupure dans le nom du nombre (« huit mille cinq cent » ne nous donne pas le nombre cherché). Sa valence instrumentale est très faible pour ce type de tâche. Il nécessite le recours à un autre ostensif. Par contre il est largement utilisé dans la vie courante (contrairement au nombre en unités ou au nombre en ECPDG par exemple) car il permet de communiquer sur les nombres.

Pour revenir à l'évolution des OM dans les manuels au cours du 20^{ème} siècle, nous pouvons constater que la période « classique » et la période « moderne » peuvent se caractériser par l'utilisation privilégiée d'un type d'ostensif différent : les unités de la numération pour la période « classique » et les ECPD ou ECPDG pour la période « moderne ».

Nous allons maintenant préciser certaines raisons qui ont provoqué ce basculement des ostensifs utilisés ainsi que le lien avec le basculement qui a eu lieu également aux différents niveaux des organisations mathématiques (nous regarderons rapidement ici les types de tâches et théories).

La réforme et la contre-réforme

Au moment de la réforme, malgré une modification des OM au niveau des types de tâches (avec l'introduction du changement de base), il n'y a pas eu de modification profonde aux niveaux technologique et théorique. Cette modification a quand même amené l'utilisation des ostensifs nombres en ECPD et en ECPDG que l'on trouvait assez peu dans les manuels de l'époque « classique » pour le premier et pas du tout pour le deuxième. Il semble donc que la modification théorique insufflée par le mouvement de la réforme (qui est, elle, proche de celle que nous avons décrite dans Perrin) ait amené à utiliser ces ostensifs (ECPD et ECPDG) qui

ont l'avantage de faciliter le travail de changement de base et qui sont aussi plus proches des ostensifs de la théorie (qui utilise, elle, les notations avec les puissances de la base).

Mais Chambris montre que c'est finalement au moment de la contre-réforme, avec l'avènement de ces nouveaux ostensifs (le nombre en ECPD et en ECPDG), que la théorie savante s'affirme clairement comme un modèle pour la théorie des OM de l'époque. Elle en donne un exemple dans le livre réalisé par l'équipe ERMEL, déjà cité (ERMEL, 1978) pour lequel elle a étudié la transposition de la théorie savante :

« Sur le plan théorique, pour obtenir la notation positionnelle, on peut définir des règles de calcul sur les ECPD (avec des règles positionnelles de calcul). En fait cela revient à dire que la numération positionnelle est une numération hybride, puisque si on considère que les objets premiers sont 1, 2, ..., 9, 10, 100, 1000, c'est bien par du calcul d'addition et de multiplication qu'on obtient la notation positionnelle. »

Les règles positionnelles de calcul consistent à justifier par exemple que $3 \times 100 = 300$ par le fait que l'on ajoute deux zéros à droite du chiffre 3 ou encore que $300 + 20 = 320$ par une addition posée.

D'autre part, il nous semble personnellement qu'une des causes possibles de la moindre importance donnée, après la réforme, aux unités de la numération et en particulier à l'écriture des nombres en unités (par exemple 3 centaines 2 dizaines 1 unité) est l'importance donnée aux écritures algébriques à partir de cette période. En contrepartie, on a alors pu également observer une certaine suspicion (voire une interdiction) envers les écritures mêlant les registres de la langue naturelle et de l'algèbre, ce qui était alors considéré comme non mathématique. On se donne ainsi des interdits comme celui d'écrire par exemple, comme on pouvait le voir dans les anciens manuels, $321 = 3 \text{ centaines } 2 \text{ dizaines } 1 \text{ unité}$ ou encore $321 = 3 \text{ centaines} + 2 \text{ dizaines} + 1 \text{ unité}$. Du coup les unités de la numération ne disparaissent pas après la réforme, mais c'est plutôt leur utilisation pour écrire un nombre en unités qui est rejetée.

On peut faire un parallèle ici avec la question des unités de mesure dans les calculs étudiée par exemple par Noirfalise (2007). Les unités de numération sont, en effet, des unités de mesure de quantités. Noirfalise cite l'encyclopédie Imago Mundi⁴ pour définir les notions de nombres concrets et de nombres abstraits :

« Quand un nombre est énoncé sans que l'on indique la nature des unités qu'il représente, on le nomme nombre abstrait; dans le cas contraire, il s'appelle nombre concret; ainsi 7 est un nombre abstrait, et quand on dit 7 litres, le nombre est concret. Nous mentionnons ces dénominations parce qu'on risque de les rencontrer dans les anciens ouvrages d'arithmétique, mais nous devons avertir que la seconde tend à donner une idée inexacte. Un nombre concret n'est pas un nombre, c'est une grandeur. Quand on dit 7 litres, le nombre est 7, le mot litre complète l'idée, mais ne la modifie pas »

L'auteur différencie alors les techniques concrètes des techniques abstraites suivant le type de nombre qu'elles utilisent. Pour le problème des carrelages, la technique utilisant la décomposition de 8564 en 85 centaines et 64 unités ou 85 paquets de 100 et 64 unités sont des techniques concrètes alors que celle utilisant la décomposition $8564 = 85 \times 100 + 64$ est une technique abstraite. On peut donc également voir les différences entre les manuels classiques et ceux d'après la réforme à travers cette distinction dans le type de nombre utilisé, les manuels d'après la réforme donnant plus d'importance aux nombres abstraits. Ils s'interdisent même d'utiliser les unités dans les calculs, donc des techniques concrètes. C'est l'utilisation des « paquets de » qui peut alors permettre de réintroduire ces nombres concrets.

⁴ On peut trouver l'article en question à cette adresse : <http://www.cosmovisions.com/nombre.htm>

Les différences que nous avons pointées à travers nos différents ouvrages « classiques » (Condorcet, Bézout et Reynaud) et « moderne » (Ermel et Perrin) se retrouvent ici dans les différences entre les modèles théoriques des OM des manuels au cours du 20^{ème} siècle et entraînent avec elles une modification des techniques et technologies ainsi que des ostensifs utilisés.

Nous profitons de ce rapide état des lieux de l'évolution de la numération dans les manuels au 20^{ème} siècle pour regarder la prise en compte des deux aspects de la numération dans les manuels anciens.

Une parenthèse sur la prise en compte des deux aspects de la numération (position et décimalité) dans les manuels anciens

Selon Chambris (2008) l'utilisation de certains ostensifs a des conséquences sur la prise en compte des relations entre les unités. En particulier l'absence de l'ostensif unités de la numération rend plus difficile la formulation de ces relations dans les manuels récents. Qu'en est-il dans les manuels anciens ?

L'extrait suivant du manuel de Boucheny (1930) pour le CE nous montre qu'il y a bien une prise en compte des relations entre unités. Lors de l'introduction du millier, les relations avec les centaines mais aussi les dizaines apparaissent dans la leçon :

UNITÉS DE MILLE

119. Prenons 9 sacs de cent jetons (fig. 50), 9 piles de dix et 9 jetons, soit 999 jetons. Ajoutons 1 jeton; nous avons mille jetons.
Le nombre mille s'écrit 1 000.




Fig. 49.

Avec les dix jetons séparés, formons une pile de dix; nous avons en tout 9 sacs de cent jetons et 10 piles de dix.
Avec ces 10 piles de dix jetons, nous pouvons former un sac de cent jetons, ce qui fait, en définitive, 10 sacs de cent jetons.

120. Mille jetons correspondent à dix sacs de cent jetons.
Mille unités = dix centaines ou 10 fois 100.

121. Chaque sac contient 10 piles de dix jetons. Les 10 sacs représentent 10 fois 10 piles, soit 100 piles de dix jetons.
Mille jetons correspondent à cent piles de dix jetons.
Mille unités = cent dizaines ou 100 fois 10.

On a : $1\ 000 = 100 \times 10$ ou 10×100 .

122. On compte par unités de mille comme on compte par unités simples. On a :

mille que l'on écrit 1 000	six mille que l'on écrit 6 000
deux mille " 2 000	sept mille " 7 000
trois mille " 3 000	huit mille " 8 000
quatre mille " 4 000	neuf mille " 9 000
cinq mille " 5 000	

123. Dans l'écriture des nombres, les unités de mille s'écrivent au 4^e rang à partir de la droite.

Figure 10 : extrait de Boucheny, CE 1930, 29^{ème} leçon : « Unités de mille »

Cela est lié au fait que la théorie utilisée est proche de celle que l'on trouve dans le traité de Bézout et Reynaud (1821) ou encore de Condorcet, dans lequel, rappelons-le, le millier est mis en relation avec les centaines, dizaines et unités.

On peut aussi voir des traces de l'importance donnée à l'aspect décimal de la numération à travers les exercices proposés qui pour la plupart mettent en jeu ces relations :

EXERCICES ORAUX ET CALCUL MENTAL

1. Compter par 1 000 de 1 000 à 9 000, de 9 000 à 1 000.
2. Avec 1 000 enveloppes, combien peut-on faire de paquets de 100 ?
3. Combien faut-il de billets de 100^f pour faire 1 000^f ? 2 000^f ?
4. Un réservoir contient 1 000^f d'eau. Avec cette eau, combien pourrait-on remplir de seaux de 1^{er} ? de fûts de 1^{er} ?
5. Combien y a-t-il de dizaines dans 1 000 unités ? dans 3 000 ? dans 5 000 ? dans 7 000 ? dans 9 000 ?
6. Combien y a-t-il de centaines dans 1 000 unités ? dans 4 000 ? dans 6 000 ? dans 8 000 ?
7. Pour avoir 1 000^f, que faut-il ajouter à 700^f ? à 800^f ?

EXERCICES ET PROBLÈMES

- 1^{er} et 2^e années. — 347. Écrire en chiffres les nombres suivants : Soixante-dix. — Sept cents. — Sept mille. — Neuf mille. — Neuf cents. — Quatre-vingt-dix. — Six cents. — Soixante. — Six mille.
348. Convertir en unités : 8 unités de mille; 80 centaines, 800 dizaines; 8 unités de mille et 8 centaines.
349. Convertir en dizaines : 4 000 unités; 4 unités de mille; 40 centaines; 6 unités de mille et 8 centaines.
350. Convertir en centaines : 6 unités de mille; 800 dizaines.

Figure 11 : extrait de Boucheny, CE 1930, les exercices sur les unités de mille

Dans ces exercices on trouve un type de tâches pour lesquelles il s'agit de convertir un nombre dans une unité donnée, comme par exemple : « convertir en dizaines 4 unités de mille » qui met en jeu la relation entre les milliers et les dizaines. On le trouve également sous la forme « combien y a-t-il de dizaines dans 100 unités ? » qui est plus proche de ce que l'on peut trouver dans les manuels actuels. Nous y reviendrons dans la partie C.

On peut noter également dans cet extrait de manuel que l'aspect positionnel pour les milliers se fait à travers une numérotation des rangs dans l'écriture en chiffres : « Dans l'écriture d'un nombre, les unités de mille s'écrivent au 4^{ème} rang à partir de la droite ». On n'utilise pas ici le tableau de numération. Il apparaît cependant dans la leçon suivante intitulée « Entre deux unités de mille consécutives » lorsqu'est abordée la lecture des nombres à quatre chiffres :

426. De 1 000 à 9 999, les nombres entiers ont 4 chiffres.
Le premier chiffre, à droite, représente des unités; le 2^e, des dizaines; le 3^e, des centaines; le 4^e, des unités de mille.
Le nombre formé de 5 unités de mille, 4 centaines, 8 dizaines et 2 unités s'écrit 5 482.
Le nombre formé de 3 unités de mille, 7 dizaines et 5 unités s'écrit 3 075.
Le nombre 8 402 comprend 8 unités de mille, 4 centaines et 2 unités. Il se lit huit mille quatre cent deux.

u de mille	c	d	u
5	4	8	2
3	0	7	5

Figure 12: extrait de Boucheny, CE 1930, 30^{ème} leçon : « Entre deux unités de mille consécutives »

Dans cette leçon (et les exercices qui suivent) c'est d'ailleurs uniquement l'aspect positionnel de la numération (et le lien avec le nombre en mots) qui est en jeu : il s'agit d'associer les unités aux rangs de l'écriture chiffrée. Par exemple on trouve des exercices comme « Dans le nombre 3475, que représente le 5 ? le 3 ? le 4 ? le 7 ? ».

Il semblerait donc, au moins dans ce manuel, que l'on voie apparaître distinctement les deux aspects de la numération : un travail sur l'aspect décimal suivi dans la leçon suivante par un travail sur l'aspect positionnel et la lecture/écriture des nombres. Nous verrons ce qu'il en est dans les manuels et programmes actuels dans la partie C. On notera toutefois que dans ce manuel, au niveau didactique, il s'agit d'un exposé du savoir suivi d'exercices d'application.

Nous allons maintenant essayer de formaliser les différents modèles théoriques qui sont apparus dans cette partie et qui vont constituer les différentes théories de l'OM de référence.

III. Les théories

III.1 La théorie classique

Elle s'inspire de la théorie utilisée dans les manuels du début du 20^{ème} siècle, dont on peut trouver des éléments de description dans les traités Condorcet (1799) ou de Bézout et Reynaud (1821). C'est pourquoi nous l'appellerons *théorie classique*.

On définit d'abord le nom des premiers nombres et leur écriture en chiffre : *zéro (0), un (1), deux (2), trois (3), quatre (4), cinq (5), six (6), sept (7), huit (8), neuf (9)*. Bézout poursuit ainsi :

« Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de dixaine, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire que l'on compterait deux dixaines, trois dixaines, etc. , jusqu'à 9 : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples. [...]

Depuis 100 on peut compter jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf par une convention semblable. De dix dixaines on composera une seule unité qu'on nommera centaine, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines. [...]

En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables ».

III.2 La théorie moderne

Elle s'inspire largement de la théorie que l'on trouve dans l'approche moderne (par exemple dans l'ouvrage de Perrin, 2005), c'est pourquoi nous l'appellerons *théorie moderne*.

Nous la décrivons ici pour la base 10 mais elle pourrait être donnée pour une base b quelconque (b entier supérieur ou égal à 2).

Soient 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 les chiffres utilisés pour écrire les nombres. Le nombre correspondant à la base s'écrit donc 10 (car pour toute base b on a $b=1 \times b+0$).

On obtient l'écriture d'un nombre par les divisions euclidiennes successives par les puissances de 10 (existence et unicité de cette écriture, comme il a été décrit précédemment dans l'ouvrage de Perrin).

Soit a un nombre entier quelconque. Il existe un unique entier x_0 tel que $a=10 \times q_0+x_0$ tel que $0 \leq x_0 < 10$ et $q_0 < a$. Il existe ensuite un unique entier x_1 tel que $q_0 = b q_1 + x_1$ (et $0 \leq x_1 < 10$ et $q_1 < q_0$). On a alors : $a = q_1 \times 10^2 + x_1 \times 10 + x_0$.

En poursuivant cet algorithme on obtient une unique suite finie x_0, x_1, \dots, x_n telle que : $a = x_n \times 10^n + x_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + x_2 \times 10^2 + x_1 \times 10 + x_0$ (avec $x_n \neq 0$, et $0 \leq x_i < 10$ pour tous $0 \leq i \leq n$). L'écriture du nombre en base 10 est alors : $x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0$.

Cette théorie nécessite des outils mathématiques difficilement accessibles aux élèves de l'école primaire pour être décrite. On peut par exemple remarquer que l'on considère au début un entier a , sans le donner par son écriture en chiffres (puisqu'on va la construire) mais par une notation algébrique. Nous allons décrire ci-dessous comment elle permet de définir l'écriture du nombre d'éléments d'une collection (situation que l'on rencontre davantage à l'école !).

Elle utilise également les écritures avec les exposants ce qui lui confère des besoins trophiques élevés. On utilisera donc plutôt l'ostensif ECPDG pour écrire les décompositions

selon les puissances de 10. Par exemple pour écrire la décomposition du nombre 325 en base 10, on écrit $3 \times 100 + 2 \times 10 + 5$, et réciproquement quand on a cette écriture on en déduit directement l'écriture du nombre 325.

On remplace alors les règles de multiplication par 10 (pour n, p entiers naturels, on a : $10^n \times 10^p = 10^{n+p}$) par des règles positionnelles de calcul : pour n, p entiers naturels, $10 \dots 0$ (n zéros) multiplié par $10 \dots 0$ (p zéros) est égal à $10 \dots 0$ ($n+p$ zéros).

III.3 Illustration des différences entre ces théories sur une tâche

Pour illustrer les différences entre ces théories, considérons le problème de la constitution de l'écriture du nombre d'objets d'une collection : dans les deux cas, pour écrire le nombre d'objets d'une collection on fait des opérations de groupements successifs.

Sur le dessin ci-dessous, on a groupé 10 objets (ou une dizaine d'objets) en les entourant par une ellipse, puis on a groupé les paquets de 10 obtenus (ou les dizaines) par 10 en les entourant par un rectangle.

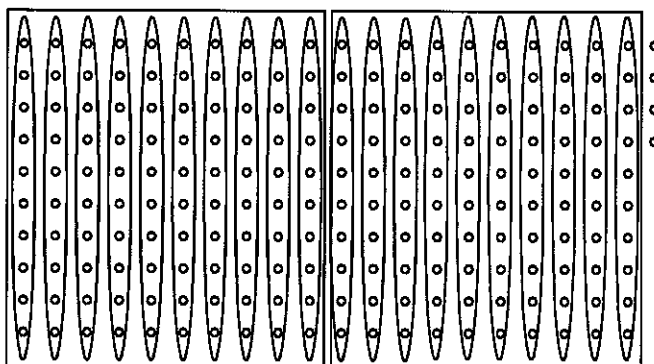


Figure 13 : collection à dénombrer

a) Dans la théorie classique

On commence par grouper les objets par dizaines. Dès que l'on a 10 dizaines on les regroupe en une centaine (en utilisant la relation 10 dizaines c'est 1 centaine). On obtient donc tout d'abord 1 centaine et il reste un grand nombre d'unités non groupées :

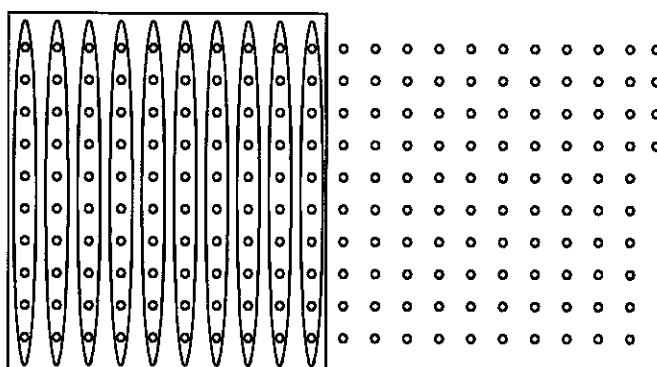


Figure 14: première étape du dénombrement par groupements successifs dans la théorie classique

Nous réitérons la même opération : on obtient alors 10 autres dizaines ce qui nous fait un total de 2 centaines. Il ne reste alors que 4 unités isolées.

On a donc 2 centaines et 4 unités, ce qui s'écrit 204.

Remarques :

- ❑ rang des unités : ordre 1 pour les unités (ce sont les premiers objets que l'on considère), ordre 2 pour les dizaines, etc.
- ❑ chiffres : représentent le nombre d'unités de chaque sorte ;
- ❑ zéro : il marque la position. Permet de signaler que le chiffre 2 est celui des centaines. Il n'a pas le même statut que les autres chiffres (on pourrait le remplacer par un point par exemple) ;
- ❑ les nombres 10, 100, ... : ce sont des nombres comme les autres (ou presque, car en fait ils correspondent à une centaine, un millier, etc.) ;
- ❑ ostensifs : nombre en unités, nombre en chiffres ;
- ❑ registres en jeu : les objets représentés, la langue naturelle (unités, dizaines, centaines) et les écritures chiffrées ;

b) Dans la théorie moderne

On groupe d'abord toutes les unités par 10 pour obtenir les objets du premier ordre. On compte ensuite les objets restants (ceux qui ne sont pas groupés) : on en a ici 4.

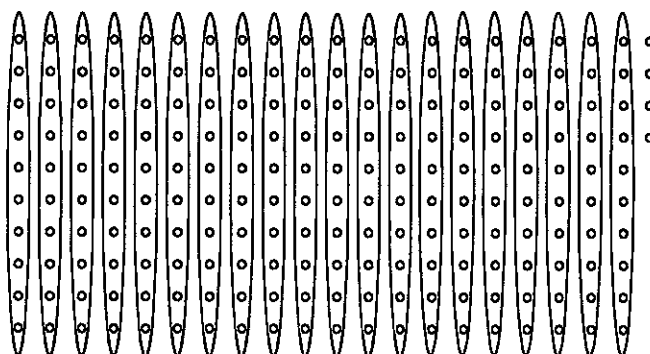


Figure 15 : première étape du dénombrement par groupements successifs dans la théorie moderne

Ensuite nous groupons par 10 les objets du premier ordre pour obtenir les objets du deuxième ordre. On compte alors les objets du premier ordre restants (non groupés) : ici il n'y en a pas. Les objets du deuxième ordre ne peuvent pas se grouper par 10 car il n'y en a que 2. Finalement nous avons obtenu 4 unités, 0 objet du premier ordre et 2 objets du deuxième ordre.

L'écriture du nombre en chiffres est donc 204 car le nombre obtenu peut s'écrire : $4+0 \times 10+2 \times 100$.

Remarques :

- ❑ rang des unités : ordre 1 pour les dizaines (car c'est le coefficient de la puissance de 10 associée), ordre 2 pour les centaines, etc.
- ❑ chiffres : nombre d'objets de chaque ordre et coefficients des puissances de 10 dans la décomposition polynomiale selon les puissances de 10 ;
- ❑ zéro : dans la théorie savante c'est un coefficient comme les autres dans la décomposition polynomiale du nombre ; ici il permet de signaler l'absence de groupement d'objets d'un certain ordre. Il a le même statut que les autres chiffres : il est associé à une quantité (nulle).
- ❑ les nombres 10, 100, ... : ce sont les puissances de la base. Ils ont un rôle clé pour les décompositions (en ECPDG). Ils ont le même rôle que les puissances de 10 dans la décomposition polynomiale ;

- ostensifs : ECPDG due à la nécessité d'abaisser les besoins trophiques par rapport à la théorie savante. En particulier on ne peut pas utiliser l'écriture avec les puissances de 10. Donc on utilise à la place de ces puissances les écritures 10, 100, 1000, etc.
- registres en jeu : les objets représentés, les écritures chiffrées, les écritures algébriques.

III.4 La théorie moderne adaptée

On peut remarquer que malgré une modification des ostensifs utilisés par rapport à la façon dont elle est décrite dans Perrin par exemple, cette théorie moderne a encore des besoins trophiques importants à cause de son utilisation de la multiplication. Rappelons qu'actuellement, l'étude du système de numération est abordée dès la première année de l'école primaire alors que la multiplication n'est abordée qu'en 2^{ème} année. Il est donc nécessaire de construire une variante de cette théorie qui utilise les ECPD et l'addition.

Cette théorie relève du même modèle « savant » que la théorie moderne mais nous avons cherché à adapter les ostensifs utilisés. Nous l'appellerons donc *théorie moderne adaptée*.

Par exemple pour écrire la décomposition du nombre 325 en base 10, on écrit $300+20+5$, et réciproquement quand on a cette écriture on en déduit directement l'écriture du nombre 325.

On peut passer par la décomposition intermédiaire $100+100+100+10+10+1+1+1+1+1$. On peut également utiliser les expressions : 3 paquets de 100, 2 paquets de 10 et 5 unités.

On s'appuie ici sur la règle positionnelle déjà décrite pour la théorie moderne mais aussi sur des règles positionnelles d'addition : $300+20+5 = 325$, comme dans une addition posée en colonne sans retenue.

On peut remarquer que ce type de décomposition est en fait lié à la lecture du nombre : 325 s'écrit en mots trois cent vingt cinq ce qui est très proche de la façon de dire la décomposition $300 + 20 + 5$. En fait pour qu'il y ait tout à fait congruence (entre les mots et les nombres) il faudrait écrire $3 \times 100 + 20 + 5$.

Comment se fait alors la constitution de l'écriture du nombre d'objets de la collection précédente ?

Comme pour la théorie moderne mais au lieu de parler d'unités, d'objets du premier ordre, deuxième ordre, ..., nous parlerons d'unités, de paquets de 10, de paquets de 100, etc.

Nous faisons d'abord tous les paquets de 10 possibles. Ensuite nous groupons par 10 les paquets de 10 obtenus, ce qui nous fait des paquets de 100. On en obtient 2. Finalement, nous avons donc 4 unités, 0 paquet de 10 et 2 paquets de 100, soit $200+4$, ce qui s'écrit 204.

Remarques :

- rang des unités : pas de numérotation privilégiée ;
- chiffres : représentent le nombre de paquets de 10, de 100, etc. Mais ils peuvent aussi être vus comme coefficients des puissances de 10 dans la décomposition polynomiale selon les puissances de 10. Dans $200+80+4$ par exemple, ces coefficients apparaissent comme le premier chiffre de chaque terme de la décomposition ;
- zéro : Permet d'utiliser les règles positionnelles de calcul, donc permet de marquer la position ;
- les nombres 10, 100, ... : ils ont un rôle proche de celui des mots dizaines, centaines, ... dans la numération en unités, notamment quand on parle de paquets de 10, paquets de 100, etc.
- ostensifs : nécessité d'abaisser encore les besoins trophiques par rapport à la théorie 2. Du coup on utilise les expressions « paquets de 10 », « paquets de 100 » ... pour faire référence aux puissances de 10 ;

- registres en jeu : les objets représentés, les écritures chiffrées, les « paquets de 10, ... » (mélange langue naturelle et écritures chiffrées) et les écritures algébriques.

A travers cet exemple nous voyons donc que la théorie moderne adaptée même si elle a été construite à partir du même modèle théorique que la théorie moderne, est en fait intermédiaire entre cette théorie et la théorie classique. Cela est certainement lié au fait qu'elle utilise à la fois l'ostensif « paquets de 10 », « paquets de 100 » qui sont assez proches des unités de la numération de la théorie classique et les ECPD qui sont aussi utilisés dans la théorie moderne.

Ces différentes constructions théoriques vont donc nous permettre de former trois OM différentes que nous noterons OMR_C (pour la théorie classique), OMR_M (pour la théorie moderne) et OMR_{MA} (pour la théorie moderne adaptée). L'OM de référence sera donc la réunion de ces 3 OM. Nous allons maintenant en décrire les types de tâches.

IV. Les types de tâches

On peut considérer que les types de tâches suivants constituent l'ensemble des types de tâches de la numération :

T₁ : dénombrer

Nous regroupons sous ce terme les activités de dénombrement de collections ou de constitution de collection de cardinal donné.

T₂ : associer le nombre en chiffres au nombre en mots

Il peut s'agir de dire un nombre, de l'écrire en mots ou bien à partir d'un nombre dicté ou écrit en mots de l'écrire en chiffres.

T₃ : comparer, ranger des nombres

On trouve ici les types de tâches relatifs à l'ordre : comparer deux nombres, ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant, intercaler un nombre entre deux nombres donnés (non consécutifs), encadrer un nombre entre deux dizaines (ou centaines ...) consécutives, etc.

T₄ : avancer/reculer dans la suite écrite ou orale des nombres

De 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, etc. (ou d'unités en unités, dizaines en dizaines, etc.).

T₅ : décomposer, recomposer un nombre

Il s'agit ici d'effectuer des changements d'écriture des nombres : passer d'un nombre en unités (ou d'un nombre en ECPD, d'un nombre en ECPDG, etc.) à un nombre en chiffres et réciproquement.

T₆ : « nombre de »

Ce type de tâche est un cas particulier des « conversions » entre unités de la numération qui est un type de tâche que l'on ne rencontre plus actuellement dans les manuels et programmes actuels. Il peut s'agir par exemple de convertir 856 dizaines en centaines. On le rencontre aujourd'hui plus particulièrement sous la forme « nombre de » comme quand on demande le nombre de paquets de 10 (ou de dizaines) dans 8564.

Il existe également un autre type de tâche qui est le « changement de base » mais nous ne le prendrons pas en compte dans notre OM de référence car il ne fait plus partie des programmes actuels.

Nous allons maintenant étudier comment se traitent ces types de tâches dans nos différents modèles théoriques.

V. Les techniques et technologies pour ces types de tâches

Tous les types de tâches que nous venons de lister ne sont pas susceptibles de mettre en jeu à la fois l'aspect positionnel et l'aspect décimal de la numération. Par exemple lorsque nous effectuons des tâches de comparaison il n'est pas nécessaire d'avoir à utiliser les relations entre les différentes unités mais juste de regarder le nombre de chiffres et éventuellement la comparaison des chiffres de plus haut rang (ce qui met en jeu l'aspect positionnel uniquement).

Au contraire certains types de tâches, en fonction des variables utilisées pour la tâche, peuvent nécessiter la conjonction de ces deux aspects, comme par exemple dénombrer, décomposer/recomposer, convertir ou encore avancer/reculer.

Par conséquent, nous avons choisi, pour étudier les différences entre ces OMR au niveau des techniques et technologies, de considérer les deux exemples de types de tâches suivants : « recomposer » et « nombre de ».

V.1 Les techniques et technologies relatifs à deux exemples de types de tâches

a) « Recomposer »

La recomposition dépend des ostensifs utilisés, par exemple : 2 milliers 12 centaines et 1 unité ou $2 \times 1000 + 12 \times 100 + 1$ ou encore 2 paquets de 1000, 12 paquets de 100 et 1 unité.

Voici différentes techniques possibles (les technologies sont entre parenthèses) :

OMR classique	OMR moderne	OMR moderne adaptée
2 milliers 12 centaines et 1 unité c'est donc 2 milliers 1 millier 2 centaines et 1 unité (aspect décimal : 10 centaines c'est 1 millier), soit 3 milliers 2 centaines et 1 unité. C'est donc un 3 au quatrième rang du nombre en chiffres, un 3 au troisième rang et un 1 au premier rang (aspect positionnel : le quatrième rang est le rang des milliers, etc.), soit 3201.	$2 \times 1000 + 12 \times 100 + 1 = 2 \times 1000 + 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 1$ (aspect décimal : $10 \times 100 = 1000$) c'est donc $3 \times 1000 + 2 \times 100 + 1$, soit 3201 (aspect positionnel : on associe 1000 au 4 ^{ème} rang dans l'écriture en chiffres, etc. ou bien on utilise une règle positionnelle de calcul 4×1000 c'est 4 suivi de trois zéros, etc.).	$1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 1$ soit $2000 + 1000 + 200 + 1$ (aspect décimal : 10 paquets de 100 c'est 1 paquet de 1000) donc c'est $3000 + 200 + 1$, soit 3201 (aspect positionnel : on utilise une règle positionnelle de calcul, comme dans l'addition posée sans retenue).

Tableau 4 : les techniques et technologies des trois OMR pour « recomposer »

Remarque : on peut noter dans cet exemple l'intérêt de la numération en unités qui permet à la fois d'évoquer une valeur décimale (par exemple « trois dizaines » évoque une certaine quantité d'objets) et une position dans l'écriture du nombre (par exemple « trois dizaines » évoque la position du chiffre 3 au rang des dizaines dans l'écriture du nombre).

Dans l'OMR_M, les « unités d'ordre 1 » par exemple évoquent seulement une position dans l'écriture du nombre et dans l'OMR_{MA}, les « paquets de 10 » font davantage référence à la valeur qu'à la position dans l'écriture du nombre.

Cette dualité des unités de la numération nous semble être un atout important dans la compréhension de la conjonction de l'aspect décimal et de l'aspect positionnel de la numération.

Par exemple, lorsque l'on dit que « 10 dizaines c'est 1 centaine » cela peut à la fois faire référence à des quantités d'objets que l'on groupe et que l'on échange (pour dénombrer une

collection par exemple) mais aussi que dans l'écriture du nombre le chiffre du rang des centaines a une valeur dix fois supérieure à celui du rang des dizaines.

b) « nombre de »

Par exemple, on cherche le nombre de paquets de 10 (ou de dizaines) dans 2031.
Voici différentes techniques possibles :

OMR classique	OMR moderne	OMR moderne adaptée
Dans 2031 il y a 2 milliers et 3 dizaines donc 203 dizaines (car 1 millier c'est 100 dizaines, donc 2 milliers c'est 2 centaines de dizaines soit 200 dizaines, on termine avec un passage par les nombres en mots : deux cents dizaines et trois dizaines c'est deux cent trois dizaines soit 203 dizaines).	$2031 = 203 \times 10 + 1$, donc 203 paquets de 10 (car $2031 = 2 \times 1000 + 3 \times 10 + 1$ et $2 \times 1000 + 3 \times 10 = 2 \times 100 \times 10 + 3 \times 10 = 200 \times 10 + 3 \times 10 = 203 \times 10$).	203 paquets de 10 (car $2000 = 1000 + 1000$ soit 100 paquets de 10 et 100 paquets de 10, d'où 200 paquets de 10, mais comme dans 2031 on a aussi 3 paquets de 10, cela fait 203 paquets de 10).

Tableau 5 : les techniques et technologies des trois OMR pour « nombre de »

c) Conclusion

Ces exemples nous montrent finalement que les techniques sont assez proches au niveau des trois OMR : par exemple pour le deuxième cas, cela revient en fait à lire le nombre formé par les chiffres à gauche du deuxième rang (rang des dizaines) : 2031. Elles se distinguent parfois par l'utilisation d'ostensifs différents, comme nous avons pu le voir dans le premier cas. Les différences que nous avons soulevées se situent au niveau des justifications, c'est-à-dire des technologies.

Concernant l'OMR_M, pour le deuxième cas, la suite d'opérations : $2 \times 1000 + 3 \times 10 = 2 \times 100 \times 10 + 3 \times 10 = 200 \times 10 + 3 \times 10 = 203 \times 10$ utilise des propriétés de la multiplication (associativité et distributivité par rapport à l'addition) et une règle de calcul positionnelle pour l'addition $200 + 3 = 203$ (on place le 3 au premier rang à la place du zéro). Pour le premier cas, nous avons vu que l'on pouvait aussi utiliser une règle positionnelle de calcul pour la multiplication : 4×1000 c'est 4 suivi de trois zéros, etc. ou associer directement 1000 au 4^{ème} rang dans l'écriture en chiffres.

Dans l'OMR_{MA}, pour le deuxième cas par exemple, l'utilisation des « paquets de 100 » dispense des propriétés de la multiplication mais utilise encore une règle de calcul positionnelle pour l'addition : $100+100=200$ et $200+3=203$.

Enfin dans l'OMR_C, l'utilisation des unités de la numération dispense des propriétés de la multiplication, et le passage par les nombres en mots permet de ne pas utiliser de règle de calcul. Cela ne signifie pas que l'on ne fait pas de calcul, car en fait le calcul que l'on fait dans cette OMR est davantage un calcul sur les grandeurs qui prend appui sur le comptage des différentes unités (en lien avec les collections). On pourra aussi remarquer qu'il sera parfois nécessaire d'utiliser la proportionnalité. Par exemple dans le cas du « nombre de » nous avons utilisé ce raisonnement : « 1 millier c'est 100 dizaines, donc 2 milliers c'est 2 centaines de dizaines » qui met en jeu la proportionnalité (propriété de linéarité multiplicative). Le registre de la langue naturelle est très présent (contrairement à l'OMR_M) et les savoirs utilisés sont moins nombreux mais cela se fait au prix d'une formulation parfois un peu lourde (« centaine de dizaines »).

Ces différences de technologies sont des conséquences de différences, que nous avons déjà évoquées, à la fois au niveau des théories et des ostensifs utilisés. Dans les théories moderne et moderne adaptée, l'écriture algébrique et l'utilisation des puissances de la base (1, 10, 100, 1000) conduit à utiliser des règles positionnelles de calcul (d'addition ou de multiplication), alors que celles-ci n'apparaissent pas dans la théorie classique qui privilégie le registre de la langue naturelle (et dans laquelle on s'autorise à mêler ce registre à celui de l'algèbre).

Nous allons donc maintenant présenter les éléments technologiques en jeu dans les trois OMR.

V.2 Les technologies

Les technologies des trois OMR peuvent être facilement mises en parallèle car il s'agit dans tous les cas des relations entre :

- les unités et leur rang dans le nombre en chiffres (aspect positionnel de la numération) : \mathcal{Q} ;
- les différentes unités (aspect décimal) : \mathcal{Q}_2 ;
- les mots-nombres et les unités (lien numération orale/écrite) : \mathcal{Q}_3 .

a) Les technologies classiques

\mathcal{Q} . Relations entre les unités de la numération et le rang dans le nombre en chiffres.

Par exemple : « 2 centaines » est associé à un 2 au troisième rang (en partant de la droite) ;

\mathcal{Q}_2 . Relations entre les unités de la numération.

Par exemple une centaine équivaut à dix dizaines (ou encore cent unités). Deux centaines c'est donc deux fois dix dizaines, soit deux dizaines de dizaines, donc 20 dizaines, etc.

\mathcal{Q}_3 . Relations entre les mots-nombres et les unités de la numération.

Il existe de nombreuses irrégularités : pour une dizaine on ne dit pas *un dix* mais *dix*.

2 dizaines c'est *vingt* (et non pas deux-dix), 3 dizaines c'est *trente*, etc. 1 dizaine et une unité c'est *onze* (et non dix-un), une dizaine et 2 unités c'est *douze*, etc.

Pour une centaine on ne dit pas *un cent* mais *cent*. Par contre ensuite on a bien deux cents, trois cents, etc.

Pour un millier on ne dit pas *un mille* mais *mille*. Par contre ensuite on a bien deux mille, trois mille, etc.

b) Les technologies moderne et moderne adaptée

Nous les présentons en parallèle dans le tableau suivant car elles sont bâties toutes les deux sur un même modèle théorique.

	Technologie moderne	Technologie moderne adaptée
\mathcal{Q}	L'unité d'ordre n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros (association entre ECPD et rang dans l'écriture du nombre).	(association entre ECPD et rang dans l'écriture du nombre)
	Exemple : l'unité d'ordre 2 c'est 100 (car c'est 1×10^2 , et $1 \times 10^2 + 0 \times 10 + 0$ s'écrit 100).	Exemple : l'unité d'ordre 2 s'écrit par définition 100 (1 suivi de 2 zéros).
	Concernant p unités ($0 < p < 10$) d'ordre n :	
	p unités d'ordre n s'écrivent avec un p suivi de n zéros. Par exemple pour 3 unités d'ordre 2, on écrit 300 (car c'est $3 \times 10^2 + 0 \times 10 + 0$). Par conséquent, p multiplié par $10 \dots 0$ ($0 < p < 10$) est égal à $p0 \dots 0$	p unités de $10 \dots 0$ c'est $10 \dots 0 + \dots + 10 \dots 0$ (p fois) soit $p0 \dots 0$. Cela revient à utiliser une règle de calcul pour l'addition des nombres de « même longueur » (comme dans une addition en colonnes).

	(ce qui revient à juxtaposer le p et les zéros de $10\dots 0$). Par exemple 5 multiplié par 1000 s'écrit 5000 ;	Par exemple 3 objets de 100 c'est $100+100+100 = 300$ car $1+1+1=3$ et on juxtapose les zéros à droite.
\mathcal{E}_2	Relations entre les unités : une unité d'ordre $n+1$ vaut 10 unités d'ordre n . Cela amène deux variantes qui utilisent deux types d'ostensifs différents et qui ne font pas intervenir les mêmes savoirs. 10 unités d'ordre n valent 1 unité d'ordre $n+1$. En effet 10 objets de $10\dots 0$ (n zéros) valent $100\dots 0$ ($n+1$ zéros) car $10 \times 10^n = 1 \times 10^{n+1}$ (règles sur les exposants). Plus généralement, $10\dots 0$ unités (avec p zéros) d'ordre n valent 1 unité d'ordre $n+p$. Sans utiliser les règles sur les exposants (besoins trophiques importants) on est réduit à justifier ces équivalences par une règle de multiplication avec les ECPDG : multiplier par 10 revient à ajouter un zéro à droite du nombre (par exemple $10 \times 100 = 1000$), multiplier par 100 revient à ajouter deux zéros, etc.	10 paquets de $10\dots 0$ (n zéros) c'est $100\dots 0$ ($n+1$ zéros) puisque au rang $n+1$ on a $1 + 1 + \dots + 1 = 10$ et on remet les n zéros. Ainsi, 100 paquets de $10\dots 0$ (n zéros) c'est $1000\dots 0$ ($n+2$ zéros), etc. De manière générale, $10\dots 0$ paquets (p zéros) de $10\dots 0$ (n zéros) c'est $10\dots 0$ ($n+p$ zéros).
\mathcal{E}_3	Liens avec la numération orale. Relation entre mots-nombres et ordre des unités. Une unité d'ordre un est nommée <i>dix</i> , une unité d'ordre 2 est nommée <i>cent</i> , une unité d'ordre 3 est nommée <i>mille</i> . Par exemple 200 c'est 2 unités d'ordre 2, donc deux cents. De même 5009 c'est 5 unités d'ordre 3 et 9 unités d'ordre 0 donc cinq mille neuf. Mais il y a des irrégularités. Pour une unité d'ordre 1 on ne dit pas <i>un dix</i> mais <i>dix</i> . Pour une unité d'ordre 2 on ne dit pas <i>un cent</i> mais <i>cent</i> . Pour une unité d'ordre trois on ne dit pas <i>un mille</i> mais <i>mille</i> . 2 unités d'ordre 1 c'est <i>vingt</i> (et non pas deux-dix), 3 unités d'ordre 1 c'est <i>trente</i> , etc. 1 unité d'ordre 1 et une unité d'ordre 0 c'est <i>onze</i> (et non dix-un), une unité d'ordre 1 et 2 unités d'ordre 0 c'est <i>douze</i> , etc.	Relation entre mots-nombres et les « paquets » de 10, ... Un paquet de 10 est nommé <i>dix</i> , un paquet de 100 est nommé <i>cent</i> , un paquet de 1000 est nommé <i>mille</i> . Par exemple 200 c'est 2 paquets de 100, donc deux cent. De même 5009 c'est 5 paquets de 1000 et 9 unités donc cinq mille neuf. Mais il y a des irrégularités. Pour une unité d'ordre 1 on ne dit pas <i>un dix</i> mais <i>dix</i> . Pour une unité d'ordre 2 on ne dit pas <i>un cent</i> mais <i>cent</i> . Pour une unité d'ordre trois on ne dit pas <i>un mille</i> mais <i>mille</i> . 2 paquets de 10 c'est <i>vingt</i> (et non pas deux-dix), 3 paquets de 10 c'est <i>trente</i> , etc. 1 paquets de 10 et une unité c'est <i>onze</i> (et non dix-un), un paquet de 10 et 2 unités c'est <i>douze</i> , etc.

Tableau 6 : comparaison des technologies moderne et moderne adaptée

Remarque : pour la deuxième technologie de la théorie moderne adaptée, on peut faire la même remarque que Chambris quand elle compare les unités de la numération aux ECPD : il est impossible ici :

« de distinguer deux énoncés : dix dizaines et une centaine. En effet, dans 100 on peut aussi bien lire 10 dizaines que 1 centaine et que 100 unités : on ne peut pas distinguer les trois ».

Elle ajoute « Cette particularité est une propriété essentielle de la numération positionnelle mais elle ne permet pas en fait de formuler, sans calcul, de nombreuses technologies de la numération de position, toutes celles qui mettent en relation des ordres d'unités. Fondamentalement, on ne peut exprimer la relation entre unités de la numération dans le registre des écritures chiffrées si on ne dispose pas de la multiplication. Si on n'a pas non plus celui de la numération en unités, on ne peut donc pas la formuler. C'est peut-être ce qui explique son absence dans les manuels que nous avons consultés. En fait, elle pourrait être formulée avec un registre intermédiaire, avec des mots et des « paquets de 10, 100, 1000, etc. ». Il faudrait développer cet aspect pour approfondir notre étude. »

Etant donné qu'il s'agit d'un point essentiel de notre étude (regarder la prise en compte de l'aspect décimal de la numération), nous avons donc choisi de construire la théorie moderne adaptée avec les expressions paquets de 10, 100 ... pour justement pouvoir décrire les relations entre les unités. C'est aussi une pratique que l'on retrouve dans certains manuels

comme nous le montrerons dans un chapitre suivant (on trouve dans un des manuels étudiés la description des relations entre unités en utilisant l'expression « groupes de 10 », « groupes de 100 », etc.).

VI. Conclusion : schéma récapitulatif de l'OM de référence

On peut résumer l'imbrication des trois OMR construites par le schéma suivant qui représente l'OM de référence par la réunion de ces trois OMR.

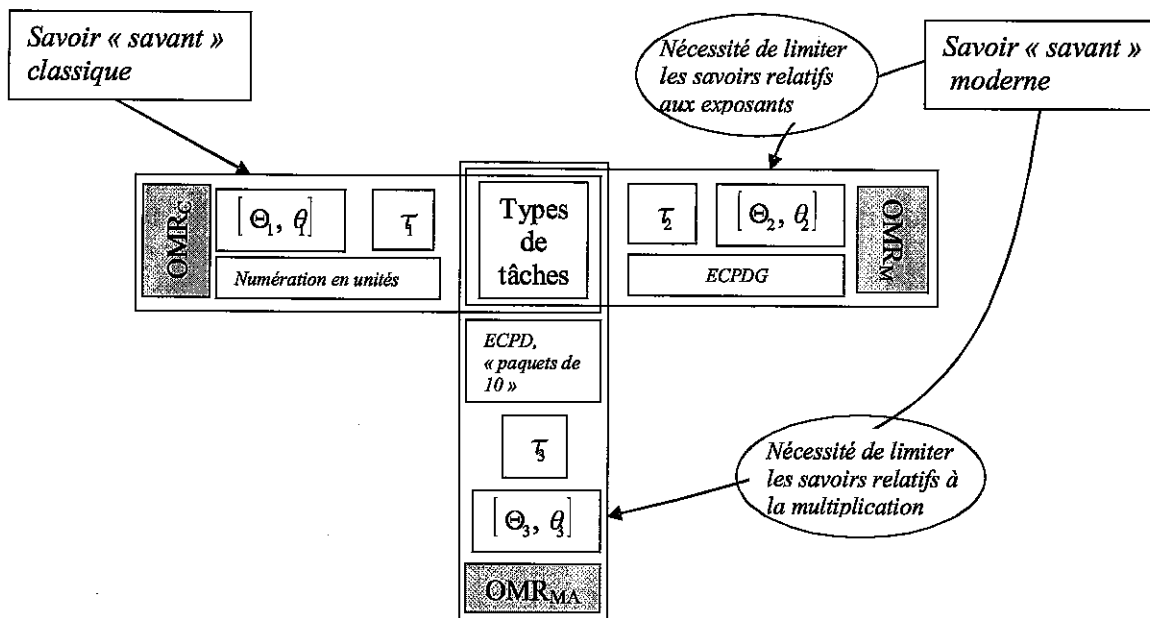


Figure 16 : schéma récapitulatif de l'OM de référence

On pourrait aussi imaginer d'autres OMR possibles (par exemple en mélangeant plusieurs ostensifs) mais il nous semble avoir montré dans cette OM de référence trois modèles théoriques prenant en compte différentes façons de transposer le savoir savant avec des savoirs accessibles au niveau de l'école primaire et qui permettent de traiter les différents types de tâches que nous avons listés. Il nous semble donc que l'on pourrait placer n'importe quelle OM dans l'un de ces modèles théoriques même s'il apparaîtrait quelques petites variantes des OMR construites.

VII. Les ostensifs de la numération

Nous allons faire le point sur les différents ostensifs possibles pour l'étude de la numération dans les classes.

a) L'étude de la numération vue comme « une manipulation d'écritures qui rend compte des pratiques matérielles auxquelles elle se substitue »

Rappelons tout d'abord que Mercier (1997), à la suite de Chevallard, conçoit l'activité mathématique comme une manipulation d'objets ostensifs, guidée par les non ostensifs qui leur sont associés. Il précise dans le cas de la numération que ces manipulations d'ostensifs sont guidées « par des pratiques matérielles auxquelles elles se substituent » :

« Grâce au système de numération en base, toutes les pratiques par déplacements d'objets matériels (bûchettes, cailloux, boules, jetons, etc.) sont remplacées par un travail ostensif qui peut légitimement se substituer aux pratiques matérielles (bûchettes, cailloux, boules, jetons,

etc.) parce qu'il en rend compte complètement. Cela nous amène à dire que l'activité mathématique humaine consiste en une manipulation d'écritures qui rend compte des pratiques matérielles auxquelles elle se substitue ».

C'est dans cette perspective que nous allons étudier les différents ostensifs de la numération qui permettent de rendre compte de ces « pratiques matérielles » et de donner leur « sens » aux écritures et aux manipulations faites sur cette écriture.

Nous allons nous intéresser en particulier à ce que ces ostensifs donnent à voir, c'est-à-dire leur valence sémiotique, en commençant par le nombre en chiffres puis en listant tous les autres ostensifs que l'on trouve actuellement dans les manuels, programmes ou dans les classes.

b) L'ostensif « nombre en chiffres »

Pour les types de tâches qui nécessitent de mettre en jeu l'aspect décimal de la numération, la valence instrumentale de l'écriture en chiffres est forte (on peut travailler facilement) mais la visibilité de la propriété en jeu est nulle : on ne voit pas les relations entre les unités.

Par exemple pour trouver le nombre de paquets de 10 dans 4894 il suffit de lire le nombre formé par les trois chiffres à gauche du deuxième rang, mais cela cache les relations entre unités. Si on utilise par exemple l'ostensif unités de la numération, on peut formuler l'équivalence entre 8 centaines et 80 dizaines et entre 4 milliers et 400 dizaines. Si on utilise un matériel de numération, on peut faire des groupements et échanges entre ces unités qui nous permettent de voir ces relations.

Pour les types de tâches qui nécessitent de mettre en jeu l'aspect positionnel, le problème est un peu différent car il s'agit ici de mettre en relation la position des chiffres dans l'écriture chiffrée avec les différentes unités. Ces unités n'étant pas visibles dans l'écriture chiffrée (valence sémiotique), cela va nécessiter l'utilisation d'un autre ostensif. C'est alors la façon dont se fait le lien entre cet ostensif et la position des chiffres dans le nombre en chiffres qui va nous intéresser.

Pour reprendre l'exemple précédent, pour trouver le nombre de paquets de 10 dans 4894, il faut commencer par associer les « paquets de 10 » à un rang dans l'écriture en chiffres. Cela peut se faire en référence à la position du 1 de « 10 » qui indique le rang cherché ou encore par l'intermédiaire d'un tableau de numération dans lequel on va écrire dans chaque colonne le nom des unités : « unités », « paquets de 10 », etc.

On ne voit donc les unités de la numération dans le nombre en chiffres qu'à travers le rang des chiffres (c'est d'ailleurs cela qui fait l'économie d'écriture et l'efficacité des systèmes de numération positionnels). Les relations entre ces unités, elles, sont complètement invisibles. Cela va donc nécessiter l'utilisation d'autres ostensifs pour faire les liens entre la position et les différentes unités (aspect positionnel) et les liens entre ces différentes unités (aspect décimal).

c) Les autres ostensifs de l'étude de la numération

Nous indiquerons pour chacun des ostensifs, le (ou les) registre(s) qu'il mobilise (par exemple le nombre en chiffres n'utilise que le registre numérique) ce qui nous permettra de rappeler les types d'objets utilisés.

Nous essaierons d'explicitier comment ces ostensifs donnent à voir (valence sémiotique) les différentes unités du système de numération, puis le lien entre ces unités et la position des chiffres dans le nombre en chiffres (aspect positionnel) et les relations entre ces unités (aspect décimal) de la numération.

Ostensif (objets utilisés)	Registre	Valence sémiotique		
		Les unités	Aspect positionnel (lien entre les unités et la position dans l'écriture en chiffres)	Aspect décimal (lien entre les unités)
Le compteur	Numérique	Données par la position	Ne montre rien de plus que le nombre en chiffres	
Le nombre en mots	Langue naturelle	Certains mots-nombres (cent, mille)	Ne permet pas de voir la relation entre ces mots et la position correspondante (mais l'ordre des mots peut donner des indications)	Non visible
Le nombre en ECPD et « paquets de »	Numérique, et langue naturelle (avec utilisation du symbole algébrique +)	« Paquets de 10 », etc.	La place du 1 (ou le nombre de 0) donne le rang dans l'écriture : par exemple 10 correspond au deuxième rang, etc.	Les relations entre les unités sont vues comme des règles positionnelles de calcul : 10 paquets de 10 c'est 100 ou $10 \times 10 = 100$, etc. (car on ajoute un zéro)
Le nombre en ECPDG	Numérique (avec utilisation des symboles algébriques + et ×)	Les ECPD : 1, 10, 100 et 1000		
Le tableau de numération	Numérique et tableau	Les colonnes et le nom des unités dans la marge du haut : unités, dizaines, etc. ou « paquets de 10 » ou « 10 », etc.	Les colonnes sont associées à une position (1 ^{ère} colonne pour le 1 ^{er} rang, etc.). Permet de lier le rang au nom des unités de la numération ou aux ECPD (10, 100, 1000)	Non visible
Le nombre en unités	Numérique et langue naturelle	« Unités », « dizaines », « centaines », « milliers ».	Non visible	Permet de formuler en langue naturelle les relations entre les unités (10 dizaines c'est 1 centaine, etc.)
Un matériel de numération du type abaque ou boulier où les unités sont données par la position	Objets (éventuellement représentés)	Les différentes tiges	Les tiges sont associées à une position (1 ^{ère} tige pour le 1 ^{er} rang, etc.)	Equivalence entre 10 objets d'un certain ordre avec 1 objet de l'ordre immédiatement supérieur : 10 boules d'une certaine tige s'échangent contre 1 boule de la tige de rang immédiatement supérieur.
Un matériel de numération où les unités sont marquées symboliquement : couleur, écriture en chiffres (par exemple « 10 ») ou nom de l'unité (par exemple « dizaine »)	Objets (éventuellement représentés) et le symbole : éventuellement numérique (écriture en chiffres de l'unité) ou langue naturelle (nom des unités)	Objets divers avec traces symboliques.	Lien entre le symbole et le rang correspondant	Groupement et échange de 10 objets d'un certain ordre avec 1 objet de l'ordre immédiatement supérieur (par exemple un échange de 10 étiquettes « 1 » contre 1 étiquette « 10 »)
Un matériel de numération où les unités restent visibles	Objets (éventuellement représentés)	Objets divers.	Lien entre l'objet et le rang correspondant	Groupement (et éventuellement échange) de 10 objets d'un certain

				ordre dans 1 objet de l'ordre immédiatement supérieur (par exemple un groupement de 10 billes dans 1 boîte)
--	--	--	--	---

Tableau 7 : Liste des ostensifs utilisés dans l'étude de la numération avec leur valence sémiotique pour les aspects décimaux et positionnels de la numération

Le matériel de numération est le seul ostensif qui permette de voir physiquement les relations entre les unités à travers les groupements et échanges, mais leur variété entraîne des échanges de nature différente selon le type de matériel utilisé (nous allons préciser cela). Les unités de la numération permettent alors de formuler ces relations mais pour faire le lien avec la position on peut alors utiliser le tableau de numération qui semble être l'ostensif privilégié pour associer les unités à une position dans l'écriture en chiffres. La manipulation des ECPD donne à voir des règles positionnelles de calcul, qui ne s'appuient pas sur les groupements et échanges entre unités. Le compteur utilisé tout seul n'apporte rien de plus que le nombre en chiffres. Le nombre en mots non plus.

Précisons un peu le cas des matériels de numération car leur variété entraîne des différences de visibilité au niveau de l'aspect décimal. Nous reprenons ici le classement des divers types de matériel de numération de Bacquet et Gueritte-Hess (1997) :

Nous étudierons en particulier la question de savoir comment on peut voir la relation entre 1 millier et 100 dizaines avec chaque type de matériel.

- « Les « uns » qui demeurent » (cas 1 de la figure)

Les unités restent présentes après regroupement. La nouvelle unité est représentée par le lien matériel qui unit les unités d'ordre inférieur (un élastique, un sachet, etc.)

Dans ce cas l'aspect décimal se voit directement sur le matériel (on retrouve bien la signification première de la dizaine : un groupement de 10 objets).

Pour le millier, les unités inférieures peuvent être toujours visibles à condition d'avoir des sacs, boîtes, ... transparents.

Dans le cas d'un contenant opaque, il faut alors défaire successivement les différents paquets pour retrouver le nombre d'unités inférieures.

En défaisant le paquet représentant le millier, on obtient donc 100 dizaines (on peut les compter).

- « Les « uns » qui s'échangent mais restent visibles » (cas 2)

Ici les unités se regroupent et s'échangent contre une unité de l'ordre supérieur mais dans laquelle les 10 unités restent toujours visibles.

Le millier peut alors par exemple être représenté par un cube (si par exemple la centaine est une plaque de 10 barres et le millier un cube de 10 plaques), pour lequel on voit encore une trace de chaque unité mais on ne peut plus défaire directement le cube : il faut mettre en

	10 unités	1 dizaine
1		
2		
3		
4		
5		

Figure 17 : Représentation de 10 unités et de la dizaine pour chaque type de matériel de numération

parallèle 1 cube avec 10 plaques (centaines) puis pour chaque plaque les mettre en parallèle avec 10 barres (dizaines). On obtient alors 100 barres, soit 100 dizaines (on peut les compter).

- « Les « uns » qui disparaissent mais laissent une trace symbolique » (cas 3 et 4)

Les unités se regroupent et s'échangent contre une unité de l'ordre supérieur avec une trace symbolique de cette équivalence.

Dans ce cas l'aspect décimal ne se voit plus : on choisit une convention pour matérialiser l'unité d'ordre supérieur qui ne montre plus le lien avec l'unité de départ. C'est la règle d'échange que l'on se donne qui définit les relations entre les unités.

Pour le millier, on est obligé d'effectuer des échanges successifs contre 10 unités de l'ordre inférieur pour faire apparaître tout d'abord les 10 centaines (par la règle d'échange que l'on s'est donnée) puis dans chaque centaine les 10 dizaines. On obtient alors 100 dizaines (on peut les compter).

- « Les « uns » qui parlent suivant la position » (cas 5)

Il s'agit des matériels de type abaque ou boulier. Nous ne considérons que le matériel qui est uniquement en base 10 (pas de base intermédiaire comme la base 5)

Dans ce cas l'aspect décimal se voit par l'équivalence (qui est aussi une convention) entre 10 boules d'une certaine tige et 1 boule de la tige d'à côté ou du dessous.

Pour le millier, on peut donc faire l'opération en sens inverse : enlever une boule de millier et la remplacer par 10 boules de centaines mais on ne pourra alors pas échanger chacune de ces centaines en 10 dizaines. On ne peut pas obtenir 100 dizaines avec le matériel.

Pour l'aspect décimal de la numération, ces matériels ont donc une caractéristique commune qui est l'obtention d'une unité supérieure à une unité donnée par un groupement de 10 de ces unités puis échange avec la nouvelle unité. On a alors toujours la possibilité de revenir en arrière sur l'unité immédiatement inférieure par l'opération inverse.

Ils permettent donc tous de voir les relations entre deux unités successives. Cependant, tous ne donnent pas à voir les relations entre n'importe quelles unités : avec les matériels de type abaque on ne peut pas obtenir le nombre d'unités correspondant à deux niveaux inférieurs par exemple (comme le passage du millier à la dizaine).

Concernant l'aspect positionnel de la numération, dans le cas des matériels de type abaque, le lien avec la position dans le nombre en chiffres est visible : à la première tige (en partant du haut ou de la droite) correspond au premier rang, etc. Mais pour les autres matériels, cela nécessite l'utilisation d'un autre ostensif (comme le tableau de numération par exemple) pour associer les différentes unités aux rangs de l'écriture en chiffres.

Cette rapide étude nous montre des valences sémiotiques différentes des ostensifs vis-à-vis des deux aspects de la numération. Certains ostensifs sont privilégiés pour voir les relations entre les unités (comme les matériels de numération) mais ne permettent pas le lien avec la position des chiffres (il faut alors utiliser un autre ostensif) et à l'opposé d'autres ostensifs comme le tableau de numération permettent d'associer les unités à la position dans l'écriture en chiffres tout en laissant invisibles les relations entre les unités. L'ostensif « unités de la numération » (unités, dizaines, centaines, milliers) apparaît alors comme privilégié pour faire le lien entre ces deux types d'ostensifs. Ce rôle peut aussi revenir aux ECPD (1, 10, 100, 1000 ou paquets de 10, de 100, de 1000), mais les relations entre les unités peuvent alors apparaître comme des règles de calcul et rompent donc ainsi le lien avec les activités de groupements et d'échanges faites avec le matériel de numération.

PARTIE C : Etude de l'OM à enseigner

I. Méthodologie

Cette étude vise à déterminer les contraintes et libertés institutionnelles afin de mieux comprendre les choix des enseignants que nous analyserons dans la partie suivante. Nous allons nous appuyer sur les programmes officiels de 2002, 2007 et 2008, des évaluations nationales ainsi que sur deux manuels récents.

Nous commencerons par une étude du programme de 2002. Celui-ci est accompagné d'un « document d'application » donnant des commentaires et précisions sur les compétences citées dans le texte du programme. Ces éléments nous permettront de faire une analyse des organisations mathématiques ponctuelles de la numération (pour chacun des types de tâches) qui nous permettra ensuite de construire un schéma de l'organisation mathématique locale de ce programme.

Nous regarderons également les évaluations nationales de 2005 pour compléter cette analyse : c'est une période à laquelle les programmes 2002 sont appliqués à tous les niveaux du cycle 3. Nous utiliserons les évaluations de début de CE2 (qui concernent donc les compétences de cycle 2, mais dont le contenu nous semble pouvoir donner une indication sur les attentes institutionnelles pour la classe de CE2) ainsi que celles de début de 6^{ème} (qui concerne donc les compétences attendues à la fin du cycle 3).

Nous étudierons ensuite les OM de deux manuels de CE2 dont les éditions consultées datent de 2003 et de 2007 (ce dernier date de mars 2007, soit avant la parution des programmes de 2007). Les manuels choisis sont « Cap Maths » CE2, éditions Hatier et « J'apprends les maths » CE2, éditions Retz. Ce sont des manuels largement utilisés dans les classes et dont les auteurs sont influencés par les travaux de didactique des mathématiques (ils sont tous les deux formateurs d'enseignants du premier degré et auteurs d'ouvrages sur l'enseignement des mathématiques à l'école). Tout comme pour les programmes de 2002 nous ferons une analyse en deux temps : les organisations mathématiques ponctuelles puis l'organisation mathématique locale.

Nous compléterons ensuite notre étude pour voir comment a évolué cette organisation dans les textes officiels suivants (2007 et 2008) pour lesquels il n'existe pas de commentaires officiels. En particulier nous étudierons l'évolution (en termes de rupture ou de continuité) des formulations utilisées dans la description des compétences attendues chez les élèves pour mettre en évidence l'évolution de l'organisation mathématique des programmes.

Enfin nous étudierons le traitement de la numération dans les évaluations nationales de 2009 : ces évaluations de CM2 ont eu lieu au mois de janvier et portent sur les compétences attendues au cycle 3 relativement au programme officiel de 2008 (ces programmes sont appliqués au CM2 dès la rentrée 2008).

Comme nous l'avons déjà précisé dans la partie B, tous les types de tâches ne sont pas susceptibles de mettre en jeu à la fois l'aspect positionnel et l'aspect décimal de la numération. Nous étudierons donc plus en détail les types de tâches décomposer/recomposer, « nombre de », avancer/reculer et dénombrer pour lesquels nous pourrions regarder comment les deux aspects de la numération y sont traités.

On trouvera en annexe tous les extraits des documents officiels utilisés pour notre analyse ainsi que certains extraits des deux manuels étudiés.

II. OM des Instructions Officielles de 2002

Les types de tâche sont organisés en deux catégories : « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels » et « Ordre sur les nombres entiers naturels » à l'intérieur d'une grande catégorie du programme : « connaissance des nombres entiers naturels »

II.1 Les organisations mathématiques ponctuelles de l'étude de la numération dans le programme de 2002 :

a) T : « nombre de »

Il apparaît sous l'intitulé suivant (qui est en fait l'élément technologique justifiant la technique utilisée) :

« Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position. »

Un exemple est donné : « Les formulations du type « Combien y a-t-il de paquets de 10 dans 8 926 ? » accompagnent celles comme « Quel est le nombre de dizaines dans 8926 ? ». » Cela correspond à la tâche « nombre de ».

- T : former le nombre contenant les chiffres à partir du rang de l'unité voulue.

Nous l'avons reconstruite à partir des éléments technologiques car cette technique n'est pas explicitée ni dans les textes des programmes, ni dans les commentaires qui les accompagnent. Il est précisé qu' « il convient d'éviter les activités formelles et l'utilisation trop systématique du tableau de numération ».

- θ : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) et relations entre les unités.
- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en unités, « paquets » de 10, 100 ... mais éviter « l'utilisation trop systématique du tableau de numération ».

On peut lire dans les commentaires que « les mots dizaines, centaines, milliers... sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de « paquets » de 10, de 100, de 1000... »

Il apparaît donc une certaine défiance vis-à-vis de l'ostensif « nombre en unités ». D'ailleurs, on peut lire cette fois dans les commentaires des programmes de cycle 2 : « L'utilisation du vocabulaire (dizaine, centaine) ne constitue pas un objectif prioritaire : les expressions « paquet de dix, paquet de cent » sont en effet plus explicites. »

Il y a une volonté affichée d'avoir un travail sur les éléments technologiques : « La valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent », mais :

- le type de tâche qui y est associé est flou : il faut lire les commentaires pour comprendre qu'il s'agit du type de tâches « nombre de » ;
- on ne voit pas apparaître clairement les relations entre les unités (aspect décimal) : on parle « d'activités d'échanges et de groupements ». Dans ces activités il semble que les ostensifs « paquets de » et les unités de la numération permettraient de formuler les relations entre les unités.
- les techniques utilisées ne devraient pas être formalisées, ce qui risque donc de les rendre invisibles tout en devant être justifiées ! Tout se passe comme si on voulait passer directement du niveau des types de tâches au niveau des technologies.

b) T : Décomposer/recomposer

On le trouve sous cette formulation :

« – Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.

– Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000, etc. »

C'est un type de tâche qui est sensible aux ostensifs des OM possibles : par exemple pour l'OMR « classique » on ne trouve que des décompositions/recompositions en unités de la numération. Ici on peut d'ores et déjà noter que l'ostensif privilégié est le nombre en ECPDG. Cela a des conséquences sur les technologies en jeu, comme nous allons le montrer.

Des exemples de décompositions et recompositions sont donnés dans les commentaires. Certains nécessitent une simple association unité/rang (aspect positionnel), comme c'est le cas pour les exemples suivants :

- décomposition : « $5324 = (5 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 4$ »

- recomposition : « $(3 \times 100) + (5 \times 1\ 000) + (6 \times 10) = 5\ 360$ ».

Les autres exemples nécessitent l'utilisation des relations entre les unités (aspect décimal) :

- décomposition : « $(53 \times 100) + 24$ »

- recomposition : « $(3 \times 100) + (12 \times 10) + 8 + (5 \times 1000) = 5\ 428$ ».

La première $((53 \times 100) + 24)$ pourrait être justifiée par les relations entre les unités d'ordre 2 et les unités d'ordre 3 (ou encore « paquets de 100 » et « paquets de 1000 »). Cependant l'utilisation des ECPDG ici rend difficile la formulation de ces relations car elle fait intervenir des propriétés de la multiplication. Cela explique peut-être le fait qu'on ne trouve justement pas de telles justifications dans les commentaires.

On peut seulement y lire : « de telles égalités sont produites en référence à la valeur des chiffres en fonction de leur position plutôt qu'à l'utilisation du tableau de numération. Elles peuvent également être contrôlées par un calcul ».

C'est-à-dire que dans 5324, le 5 étant au quatrième rang, il vaut 5×1000 , etc. On peut ensuite vérifier par un « calcul » que $(5 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 4 = 5324$. Il faudra alors utiliser une règle de juxtaposition de zéros pour la multiplication par 10, 100, 1000 et ensuite des règles positionnelles de calcul pour les additions.

Tout se passe donc comme s'il y avait deux types de technologies permettant de justifier les égalités produites : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) mais aussi les règles positionnelles de calcul. Nous interprétons cela comme le fait que le calcul va permettre d'éviter de justifier les relations entre les unités (aspect décimal) ce qui nécessite le recours à des propriétés de la multiplication. Par exemple $53 \times 100 = 5300$ n'est pas justifié par l'équivalence entre 10×100 et 1000 mais par l'utilisation d'une règle de calcul : multiplier par 100 c'est ajouter deux zéros à droite du nombre.

Nous retrouvons peut-être ici une conséquence des besoins trophiques élevés de l'utilisation des ECPDG, que nous avons déjà relevés lors de la construction des OMR moderne et moderne adaptée.

Du coup, l'aspect décimal de la numération n'apparaît pas clairement comme un savoir essentiel de la numération. Pourtant il nous semble voir dans les programmes ou commentaires quelques références implicites à ce savoir. Par exemple dans les commentaires du document d'application de cycle 2, concernant l'addition posée, on peut lire : « la technique utilisée doit être justifiée (notamment le principe de la retenue) en référence aux connaissances sur la numération ». Dans les commentaires pour le cycle 3, c'est moins explicite : « pour chacune des autres opérations (soustraction, multiplication et division euclidienne), une technique doit être mise en place au cycle 3 en s'attachant en priorité à assurer la compréhension de son fonctionnement » : on ne précise plus le lien avec les connaissances de numération. Il nous semble donc qu'il y ait une volonté de justifier ces techniques opératoires en s'appuyant implicitement sur l'aspect décimal (notamment pour le

principe des retenues). Il apparaît plus explicitement dans les commentaires du document d'application de cycle 3 sur les nombres décimaux. En effet, pour la compétence « déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule en fonction de sa position », on peut lire : « la valeur d'un chiffre est dix fois plus petite que celle du chiffre écrit immédiatement à sa gauche et dix fois plus grande que celle du chiffre qui est écrit immédiatement à sa droite (ce qui est vrai aussi bien pour la partie entière que pour la partie décimale) ». On voit donc ici énoncée la conjonction de l'aspect positionnel et décimal de la numération pour les décimaux.

Ce petit détour par d'autres thèmes du programme nous a permis de montrer que l'aspect décimal de la numération, pour les auteurs du programme 2002, est implicite dans l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position ».

- τ : Utilisation du « nombre de » (ou plutôt ici du « chiffre des »), avec possibilité d'ajouts de nombres à un rang donné pour les recompositions (par exemple pour la recomposition $(3 \times 100) + (12 \times 10) + 8 + (5 \times 1000)$ en 5 428, il faut ajouter 3 centaines et 1 centaine).

Cette technique est invisible (ce qui semble être lié à l'utilisation des ECPDG)

- θ : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffres (aspect positionnel) et règles de calcul.

Concernant la règle positionnelle de calcul qui consiste à juxtaposer des zéros pour multiplier par 10...0, on peut remarquer que dans ces mêmes programmes, mais au niveau du cycle 2, on peut lire qu'elle est une conséquence des éléments technologiques de la numération de position. En effet les commentaires des programmes de cycle 2 précisent : « Enfin, pour la multiplication par dix, on met en évidence « la règle du 0 », en la justifiant (4×10 , c'est 4 dizaines, donc 40) ».

Tout se passe comme si pour les petits nombres on allait justifier la multiplication par 10, 100 ... mais qu'une fois qu'on a établi cette règle on la généralise aux nombres plus grands et ce n'est alors plus une règle de la numération qui la justifie mais juste cette généralisation (puisque pour multiplier par 10 on ajoute un zéro, par 100 deux zéros, alors pour multiplier par 1000 on ajoute trois zéros ...)

- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en ECPDG.

La décomposition/recomposition n'est associée qu'aux ostensifs nombre en chiffres et nombre en ECPDG. On ne retrouve plus l'ostensif nombre en unités.

Pour ce type de tâche on observe donc une proximité avec l'OMR moderne.

e) T : dénombrer

On peut noter l'absence de ce type de tâche dans les programmes de cycle 3. Celui-ci apparaît pourtant dans les programmes de cycle 2 sous cette forme : « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines. »

Cette disparition peut certainement avoir pour origine la taille des nombres étudiés : jusqu'à 1000 en cycle 2 et nombre de plus de quatre chiffres en cycle 3, pour lesquels le dénombrement est fastidieux ... Pourtant il est tout à fait possible de dénombrer des collections qui sont déjà organisées (ou au moins en partie).

Du coup, alors que ce type de tâche permet d'utiliser des « procédés de groupements et d'échanges » (qui sont justifiés par l'aspect décimal de la numération) on réserve uniquement cela au type de tâche « nombre de ».

On peut pourtant noter que dans l'introduction de la partie « connaissance des nombres entiers naturels » du document d'application on peut lire :

« Ces connaissances ne doivent pas fonctionner uniquement pour elles-mêmes. Elles doivent, le plus souvent, être envisagées en relation avec des activités de résolution de problèmes : dénombrement, mesurage, graduation ».

Le dénombrement apparaîtrait donc comme moyen de faire fonctionner les connaissances de numération mais le lien avec les compétences des programmes n'est pas explicite.

d) T : avancer/reculer dans la suite écrite ou orale

On le retrouve sous ces formulations :

« – Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre » (dans la partie « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels ») ;

Suites écrites :

- T : avancer de 10 en 10 revient à ajouter 1 au rang des dizaines. Si on a déjà 9 dizaines on passe à 0 et on ajoute 1 au rang des centaines, etc.

On peut lire dans les commentaires qu'« il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) », ce qui peut faire penser que le compteur a un rôle d'élément technologique : c'est son fonctionnement qui peut permettre de justifier les techniques en jeu. Cette utilisation du compteur peut alors masquer les relations entre les unités (aspect décimal).

Mais il est aussi précisé que « la production de suites de nombres (écrits en chiffres) de 10 en 10, 100 en 100... doit être mise en relation avec les effets d'ajouts successifs de 10 (ou d'une dizaine), de 100 (ou d'une centaine)... ». On peut alors se demander quel type de relation est en jeu : les techniques d'ajouts successifs de 10, 100, ... justifient-elles les techniques de production de suite numérique (règles positionnelles de calcul justifieraient l'avancée de 10 en 10, ...) ou bien est-ce l'inverse (règles de fonctionnement du compteur justifierait les ajouts successifs de 10, ...) ? Là encore nous relevons un certain flou concernant les éléments technologiques en jeu.

On peut aussi se demander comment est justifié le passage d'un rang au suivant quand par exemple on avance de 10 en 10 à partir de 2990. Cela fait intervenir l'aspect décimal de la numération mais nous ne voyons toujours pas de référence explicite dans les commentaires pour ce type de tâche.

- Ø : régularité de la suite écrite et régularité et accidents de la suite orale : le compteur comme objet technologique ou bien relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) et les relations entre les unités ? ou encore des règles positionnelles de calcul ?
- Ostensifs : nombre en chiffres.

Un mot sur les suites orales :

Il n'y a pas d'explicitation de technique mais seulement une évocation d'éléments technologiques : « Il s'agit de mettre en évidence [...] les régularités et les accidents des suites de nombres dits oralement ».

e) T : Lire/écrire un nombre

On le retrouve sous cette formulation :

« Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres), pour des nombres jusqu'à la classe des millions ».

- T : s'appuie sur la lecture des nombres à trois chiffres et le découpage en « classes » du nombre : au-delà de la classe des unités lire le nombre à trois chiffres suivi du nom de la classe et réciproquement.

Deux exemples sont donnés :

- « 56 246 789 se lit 56 millions 246 mille 789 ;
- cent sept millions cinquante-trois mille cent trente-quatre s'écrit 107 053 134 ».

Le premier exemple correspond en fait à une décomposition utilisant des unités de la numération (que l'on pourrait qualifier ici de « nombre en classes »).

- \emptyset : relations entre numération orale et écrite.
- Ostensifs : nombre en chiffres et nombre en mots. Le nombre en unités (ou « en classes ») apparaît dans l'exemple donné comme un intermédiaire pour passer du nombre en chiffres au nombre en mots.

Les commentaires précisent : « l'intérêt du découpage en tranches de trois chiffres pour la lecture usuelle des nombres (fondée sur les classes : mille, millions, milliards...) est souligné ».

f) T : comparer, ranger, intercaler, encadrer

On les retrouve sous ces différentes formulations (dans la partie « Ordre sur les nombres entiers naturels ») :

- « Comparer deux entiers naturels, utiliser les signes $<$ et $>$ (lus « plus petit » et « plus grand »).
- Ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant.
- Situer un nombre dans une série ordonnée de nombres.
- Écrire des encadrements d'entiers entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs... »
- Situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100... ».

Commençons par deux remarques :

- nous nommons « intercaler » la compétence « Situer un nombre dans une série ordonnée de nombres » pour alléger la description mais nous avons conscience que l'intercalation n'est pas toujours possible pour les entiers (cas des entiers consécutifs) ;
- nous avons choisi de mettre toutes ces compétences dans un même type de tâche car, comme nous l'avons déjà précisé, ce n'est pas notre propos de détailler davantage ce type de tâche qui généralement ne met en jeu que l'aspect positionnel de la numération.

- T : utilisation du nombre de chiffres dans le nombre en chiffres et s'il y a le même nombre de chiffres, comparaison des chiffres de plus haut rang successivement.

Cette technique n'est pas explicitée dans les commentaires. Il est seulement précisé qu'« au cours de l'apprentissage, les procédures de comparaison font l'objet d'une explicitation par les élèves ». Cela peut sembler être en décalage avec ce que l'on a pu voir pour les autres types de tâches, pour lesquelles le niveau technique n'apparaît pas explicitement (on passe souvent du niveau des types de tâche au niveau des technologies directement).

- \emptyset : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel).
- Ostensifs : nombre en chiffres.

Pour ce qui est de « Situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100... », il est associé à ce type de tâche dans les programmes, mais il pourrait être également associé à « avancer/reculer ... » même si cela

demande une étape supplémentaire pour trouver les pas de la graduation (qui peut faire intervenir la proportionnalité ou bien par essais/erreurs).

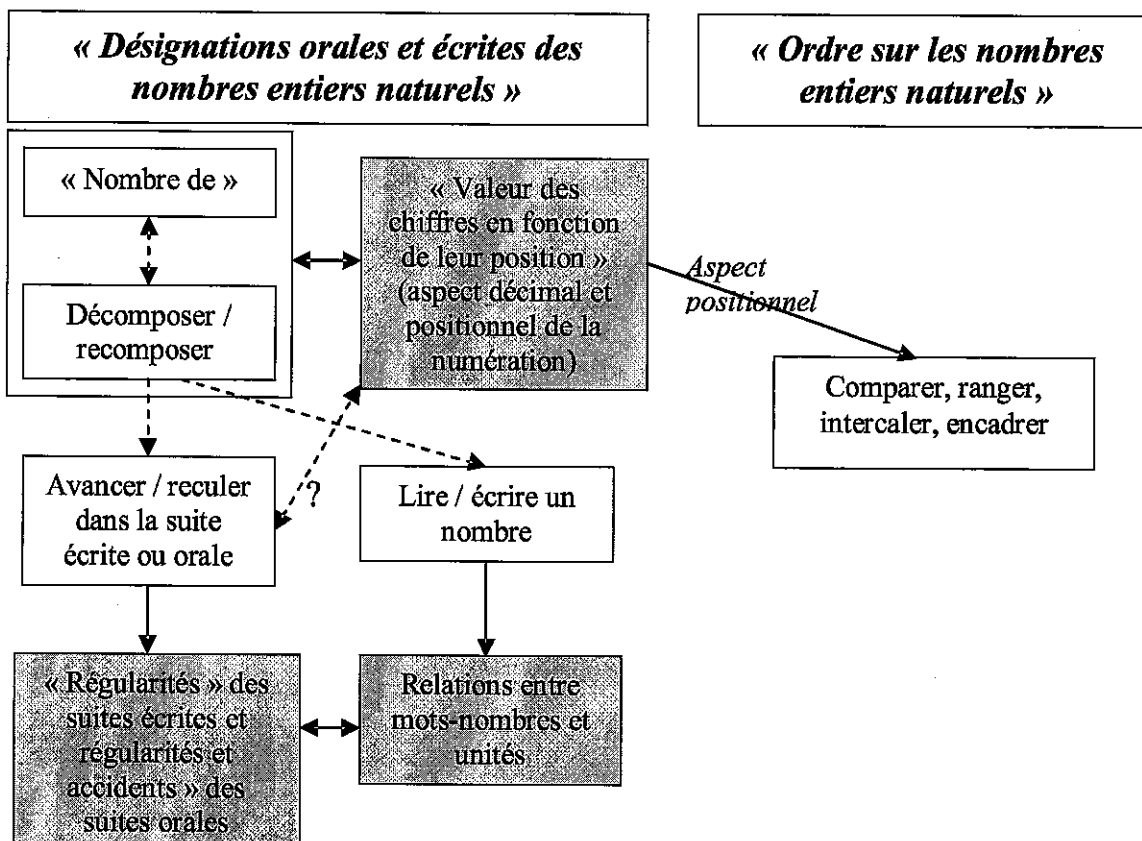
II.2 L'organisation mathématique locale de l'étude de la numération dans le programme de 2002

Nous reconstruisons l'OM locale à partir de l'étude précédente. On peut penser que dans ces programmes, les « compétences » citées ne sont pas données dans un ordre aléatoire, même si les auteurs précisent dans les commentaires généraux du document d'application que « l'ordre d'exposé des compétences, pour chaque domaine, ne correspond pas nécessairement à celui de leur apprentissage ». Nous faisons alors des hypothèses (flèches en pointillés sur le schéma ci-dessous) pour essayer de reconstituer les liens entre les différents types de tâches.

Par contre il est difficile de reconstruire les liens entre les deux sous thèmes de l'étude de la numération : « désignations orales et écrites des nombres entiers naturels » et « ordre sur les nombres entiers naturels ». Nous nous contentons donc de les placer en parallèle. Cependant pour le type de tâche « comparer, ranger, ... » le programme demande de faire expliciter les techniques utilisées par les élèves. Cela s'appuie donc sur la valeur des chiffres en fonction de leur position, en particulier l'aspect positionnel de la numération.

Les éléments technologiques apparaissent en gris sur le schéma. Nous avons utilisé une double flèche entre les types de tâche « nombre de » et « décomposer/ recomposer » et l'élément technologique « valeur des chiffres en fonction de leur position » pour rappeler qu'il s'agit de types de tâches technologiques. D'ailleurs dans les formulations du programme le type de tâche « nombre de » est nommé « valeur des chiffres en fonction de leur position ». Nous faisons également apparaître les « régularités de la suite écrite et régularités et accidents de la suite orale » comme élément technologique justifiant le type de tâche « avancer/reculer » comme nous l'avons vu précédemment.

Nous résumons cette OM à travers le schéma ci-dessous.



II.3 Conclusions sur les IO 2002

On peut noter une faible place donnée à l'explicitation de techniques (que nous avons essayé ici de reconstituer) mais une centration sur l'aspect technologique (avec quelques implicites notés) dans les commentaires pour les trois premiers types de tâche, qui sont des types de tâches qui pourraient permettre de mettre en jeu l'aspect décimal de la numération. On verra que finalement celui-ci n'a pas pour autant la place que l'on pourrait croire.

On retrouve peut-être là une trace du « logocentrisme » dont parlent Bosch & Chevillard (1999). Tout se passe comme si on voulait accéder directement au « sens » des écritures chiffrées à travers les types de tâches proposés.

D'ailleurs les compétences suivantes citées dans le programme :

- « Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position ;
- Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.
- Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000, etc. »

(qui relèvent de « nombre de » et « décomposer/recomposer ») sont des types de tâches que nous pouvons qualifier de « technologiques » car leur technique de résolution utilise directement la technologie en jeu.

Concernant ces technologies, il y a une forte domination de l'aspect positionnel dans le bloc technologico-théorique. L'aspect décimal nous semblant, de son côté, principalement pris en charge par des règles de calcul (notamment la règle des zéros) alors même que ces règles de calcul, dans ces mêmes IO sont décrites comme des conséquences des règles de la numération.

Cependant nous avons montré que derrière l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » les auteurs des programmes incluent les deux aspects de la numération, même si l'aspect décimal est implicite.

Son lien un peu flou avec les règles positionnelles de calcul est peut-être une conséquence de l'utilisation des ECPDG, qui ont des besoins trophiques élevés pour décrire les relations entre les unités. On peut parfois voir un recours aux unités de la numération ou aux « paquets de » dans les commentaires du programme quand ces relations sont en jeu mais on ne voit jamais clairement ces relations exprimées.

Une conséquence de ce phénomène est l'utilisation d'éléments technologiques qui relèvent de la valeur des chiffres (3×1000 c'est 3 au rang des milliers) mais aussi de règles positionnelles de calcul (3×1000 c'est 3000 car on juxtapose les trois zéros).

Concernant les unités de la numération nous avons noté une certaine défiance à leur rencontre dans les commentaires des programmes. Cela semble être lié au fait que cet ostensif est associé, selon les auteurs des programmes, à des « activités formelles » et à « l'utilisation trop systématique du tableau de numération », ce qui ne permettrait donc pas de comprendre le fonctionnement du système de numération.

On peut penser que le fait de remplacer les unités de la numération par les expressions « paquet de » peut amener à perdre l'aspect « unité de mesure » des unités de la numération (la dizaine sert à mesurer une certaine quantité d'unités) pour ne plus voir dans les unités de la numération que le nom d'un rang dans l'écriture chiffrée.

Finalement, malgré une utilisation des ostensifs unités de la numération et « paquets de », on peut conclure de cette étude une inscription du bloc technologico-théorique de cette OM à la fois dans l'OMR moderne et l'OMR moderne adaptée, avec une place très réduite (liée justement à l'utilisation des ECPDG et des règles de calcul avec les ECPD) donnée à la description des relations entre les unités.

II.4 Les évaluations nationales liées aux programmes 2002

a) *Evaluation nationale de CE2, 2005*

Rappelons tout d'abord que ces évaluations portent sur le programme de cycle 2 car elles ont lieu en début d'année de CE2. On retrouve toutefois dans le programme de cycle 2 quasiment les mêmes compétences que dans celui de cycle 3. Comme nous l'avons déjà relevé, il y a une compétence qui n'apparaît pas en cycle 3 : « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines. »

Pour le cycle 2, les différences principales avec le programme de cycle 3 relèvent de la taille des nombres utilisés (nombres inférieurs à mille au cycle 2) et de l'absence de décompositions/recompositions au cycle 2.

Pourtant dans ces évaluations CE2, on ne retrouve que les types de tâche :

- « désigner par écrit des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000)
- comparer des nombres entiers naturels ».

Les compétences suivantes des programmes de cycle 2 ne sont pas évaluées :

- « Dénombrer ou réaliser une quantité en utilisant le comptage de un en un ou en utilisant des procédés de groupements et d'échanges par dizaines et centaines.
- Comprendre et déterminer la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture décimale d'un nombre.
- Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100 (en avant ou en arrière), à partir de n'importe quel nombre, en particulier citer le nombre qui suit ou qui précède un nombre donné ».

Ce sont des types de tâches qui, notamment au CE1 avec les nombres à trois chiffres, devraient permettre de travailler l'aspect décimal de la numération par les groupements et échanges entre les unités de la numération : 10 paquets de 10 valent 1 paquet de 100 ...

Au contraire ici les compétences évaluées au CE2 font uniquement intervenir l'aspect positionnel de la numération à travers l'écriture en chiffres et la comparaison.

b) *Evaluation nationale 6^{ème}, 2005*

Dans cette évaluation, qui porte cette fois sur les compétences de cycle 3, parmi les compétences des programmes 2002, une seule est évaluée : « désigner par écrit des nombres entiers naturels ».

On trouve un seul grand domaine « connaissance des nombres » qui regroupe la connaissance des nombres entiers naturels et des nombres décimaux, contrairement aux programmes où ils sont séparés.

Tous les autres items de ce domaine concernent les nombres décimaux (non entiers).

Le fait qu'il s'agisse d'une évaluation 6^{ème} permet certainement d'expliquer en grande partie cela : on évalue plutôt des compétences travaillées en fin de cycle.

Or les types de tâches concernant les nombres entiers sont principalement travaillés en début de cycle 3, comme nous le montre le tableau de programmation extrait des documents d'application des programmes de cycle 3 (annexe). Au début du cycle 3 il s'agit d'un travail de « construction, structuration », alors qu'à la fin du cycle c'est principalement un travail de « consolidation, utilisation ».

De plus quand il y a des types de tâches communs avec ceux travaillés sur les nombres décimaux, les évaluations ne portent que sur les nombres décimaux.

C'est le cas par exemple de la comparaison de nombres.

On ne retrouve pas de trace de la compétence « valeur des chiffres en fonction de leur position ».

Il est à noter que dans les évaluations 6^{ème} de septembre 2002 (qui portaient donc sur le programme de 1995) on trouvait cet exercice : « Complète : 25 dizaines = unités ».

c) Conclusions sur les évaluations CE2 et 6^{ème} de 2005

Le niveau de classe CE2 semble payer le prix d'être le premier niveau du cycle. En effet on y voit encore un besoin de construire et de structurer le travail sur la numération dans le champ des entiers (comme on peut le lire dans les documents d'application des programmes de cycle 3), mais tout ce travail de construction ne fait pas l'objet de l'évaluation de 6^{ème} qui porte plutôt sur des compétences de fin de cycle sur les nombres décimaux et se limite pour les entiers à la désignation par écrit.

Cependant on peut remarquer, que même dans les évaluations CE2 (qui portent sur la fin du cycle 2 où le travail de construction de la numération est déjà bien commencé), les types de tâches qui relèvent plutôt de la construction de la numération (« dénombrer », « nombre de ») ne sont pas évalués. Cela semble en contradiction avec l'importance accordée à « la valeur des chiffres en fonction de leur position » que l'on a pu constater à travers les commentaires du document d'application du programme.

On peut donc en déduire une importance institutionnelle accordée aux types de tâche lire/écrire et comparer et par voie de conséquence à l'aspect positionnel de la numération au niveau technologique.

III. OM de deux manuels de CE2 : « Cap Maths » et « J'apprends les maths »

III.1 Des éléments spécifiques de méthodologie

Dans l'étude de ces deux manuels nous faisons ce choix des exercices :

- ils appartiennent au thème « nombres et numération » du manuel,
- ils utilisent des nombres supérieurs à mille.

Pour les organisations mathématiques ponctuelles, nous présenterons les types de tâche selon l'ordre décroissant de leur nombre d'apparitions dans le manuel (entre parenthèses figurera le nombre d'exercices de la séance pour le type de tâche étudié). Cela nous permettra déjà de mettre en évidence les types de tâches les plus travaillés. Nous n'avons pas pris en compte les activités courtes effectuées en début de séance qui se font à l'oral et/ou sur ardoise (activités d'« échauffement »). Nous essaierons de reconstituer les techniques et technologies en jeu en nous appuyant notamment sur les livres du maître de ces manuels. Tout comme pour l'étude du programme de 2002, nous détaillerons davantage les types de tâches susceptibles de faire travailler conjointement l'aspect positionnel et l'aspect décimal de la numération.

Pour l'organisation mathématique locale, nous nous appuyerons sur cette première étude que nous compléterons par une lecture chronologique des types de tâches des manuels afin de dégager les liens que les différentes OM ponctuelles entretiennent entre elles à travers un schéma récapitulatif.

III.2 Les organisations mathématiques ponctuelles de « Cap Maths CE2 »

Les séances de ce manuel ayant pour objectif un travail sur la numération sont les suivantes : U7S1, U7S2, U7S3, U7S4, U9S2, U9S7, U10S5, U11S3, U11S4, U12S4, U12S7.

a) T : comparer, ranger des nombres

U7S3(1), U7S4(4), U9S4(7), U10S5(2), U11S3(1), U11S4(8)

- τ : regarder le nombre de chiffres. S'ils ont même nombre de chiffres, on compare les chiffres de plus haut rang, etc.
- Ostensif : nombre en chiffres
- θ : aspect positionnel : en particulier, plus un chiffre est situé sur la gauche dans le nombre en chiffres plus sa valeur est grande.

Ce type de tâche utilise en général uniquement l'ostensif nombre en chiffres mais on a trouvé des sous-types de tâche qui utilisent l'ostensif nombre en mots, comme par exemple « déterminer des nombres compris entre deux nombres donnés qui s'écrivent avec un certain nombre de mots (par exemple 3 mots) ».

Le manuel associe également à ce type de tâche les activités qui consistent à « situer des nombres sur une droite graduée ».

b) T : lire/écrire un nombre

U7S1(3), U7S3(3), U9S2(1), U9S7(1), U10S4(3), U10S5(4), U12S7(1)

Ecrire un nombre en chiffres en nombre en mots (ou lire un nombre en chiffres) :

- τ : écrire en mots (ou lire) le chiffre du rang des milliers suivi de « mille » puis écrire en mots (ou lire) le nombre de 3 chiffres de la classe des unités.
- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots
- θ : aspect positionnel et relations entre numération écrite et numération orale (on s'appuie ici sur la connaissance de ces relations pour les nombres à trois chiffres).

Ecrire un nombre en mots en nombre en chiffres :

- τ : écrire en chiffres le mot-nombre du rang des milliers (c'est-à-dire avant le mot « mille ») puis écrire en chiffres le nombre de 3 chiffres restant.
- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots
- θ : aspect positionnel et relations entre numération écrite et numération orale (on s'appuie également ici sur la connaissance de ces relations pour les nombres à trois chiffres).

c) T : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres

U7S1(2), U7S3(2)

Plusieurs techniques apparaissent ici :

- τ : Reproduire les numérotations d'un livre de plus de mille pages.
- Ostensif : nombre en chiffres
- θ : La suite numérique écrite comme objet social de référence

- τ : Utiliser un compteur
- Ostensifs : nombre en chiffres
- θ : Le compteur comme objet technologique

- τ : Lire le nombre, puis lire son suivant et l'écrire en chiffres.

On peut lire dans le guide du maître (U7S3) : « la réponse peut également être obtenue en s'appuyant sur la suite orale des nombres : après deux mille quatre-vingt-dix-neuf, on s'attend à entendre deux mille cent ».

- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots
- \mathcal{Q} : La suite numérique orale connue pour les petits nombres, relations entre numération écrite et numération orale

- τ : ajouter/retrancher 1 avec la calculatrice
- Ostensifs : nombre en chiffres, calculatrice
- \mathcal{Q} : calculatrice comme objet technologique

- τ : Ajouter/retrancher 1 en faisant les groupements et échanges éventuellement
- Ostensifs : nombre en chiffres, étiquettes 1, 10, 100 ...
- \mathcal{Q} : aspect décimal mais les relations entre les unités n'interviennent que pour les nombres à trois chiffres.

On peut lire dans le guide du maître (U7S3) : « 2 099 c'est 2 cartons « 1 000 », 9 cartons « 10 » et 9 cartons « 1 » ; avancer de 1 c'est ajouter un carton 1 ; on a alors 10 cartons « 1 » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 10 » ; on a alors 10 cartons « 10 » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 100 ». »

On a donc ici une apparition de l'aspect décimal de la numération avec les ECPD. On ne voit pas par contre sur quoi se fonde l'équivalence entre 10 cartons de 10 et 1 carton de 100 : par une règle positionnelle ? Par définition des relations entre les ECPD comme pour les unités de la numération par exemple (10 dizaines c'est une centaine) ?

Il est important de noter que même si les deux exercices en question utilisent les nombres à 4 chiffres, il n'y a pas de changement du chiffre des milliers dans les nombres choisis, donc l'élément technologique 10 paquets de 100 équivaut à 1000 ne pourra pas apparaître (ni 100 paquets de 10 ...).

d) T : « nombre de »

U7S1(5), U12S4(1)

- τ : décomposer le nombre avec une multiplication par 10 ou 100
- Ostensif : nombre en chiffres
- \mathcal{Q} : règle positionnelle de calcul (règle de juxtaposition de zéros)

- τ : Lire directement le nombre de dizaines ou de centaine dans l'écriture du nombre
- Ostensif : nombre en chiffres
- \mathcal{Q} : aspect positionnel (et aspect décimal mais celui-ci n'apparaît pas explicitement)

La première séance sur les nombres à quatre chiffres est consacrée au nombre 1000. Il y a un travail sur les relations entre 10 et 100 et entre 100 et 1000. Voici un des exercices proposés (exercice 4, U7, S1) :

4 Maïa dessine des colonnes de dix carrés. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?

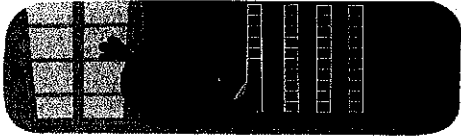


Figure 19 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 7, séance 1 (exercice 4)

Voici ce qu'on peut lire dans le guide du maître, concernant cet exercice : « après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :

- $1000 = 10 \times 100$ (il faut dessiner 100 rangées de 10 unités) avec éventuellement utilisation de la règle des zéros,
- comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100 ... »

Le « éventuellement » que nous avons souligné rend difficile l'interprétation de la technologie en jeu : est-ce que $1000 = 10 \times 100$ par définition du nombre 1000 ou bien est-ce que c'est « la règle des zéros » qui a le rôle de technologie ?

On retrouve également ce type de tâche dans la dernière séance du manuel consacrée à la numération. Il s'agit alors de rechercher le nombre de paquets de 10 ou de 100 dans 640 (U12S4). Les auteurs conseillent aux maîtres de mettre en évidence les procédures les plus efficaces : « utiliser la multiplication par 10 ou par 100 [...] ou utiliser le fait que dans 640 il y a 64 dizaines ou 6 centaines, reconnues comme plus rapides et efficaces que d'autres procédures par ajouts ou retrais successifs. Insister sur la validation par un calcul multiplicatif : [...] $640 = 64 \times 10$; $640 = (6 \times 100) + 40$. »

Concernant la recherche du nombre de paquets de 100 dans 2416 ils ajoutent : « $2416 = (24 \times 100) + 16$ ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2416 (ce qui correspond également une procédure qui a pu être utilisée) ».

Il y a donc bien deux types de techniques : avec les ECPDG, et c'est alors la règle positionnelle de multiplication par 10, 100 ... qui a le statut d'élément technologique (c'est celle que les auteurs demandent d'utiliser pour la validation des réponses, qui semble donc la plus importante) mais aussi l'utilisation des unités de la numération qui serait justifiée par l'aspect positionnel et l'aspect décimal de la numération. Mais cette dernière technique n'est citée qu'entre parenthèses, et on ne voit pas comment elle est justifiée contrairement à la première (on ne dit pas par exemple que dans 2 milliers il y a 20 centaines). C'est une technique faible alors que la première est une technique forte dans ce manuel.

Cela a pour conséquence de ne pas faire apparaître les relations entre les unités (aspect décimal de la numération) pour justifier ces techniques. Celle utilisant les unités de la numération pourrait s'y prêter mais ce n'est pas le choix des auteurs. Pour celle qui utilise les ECPDG, comme nous l'avons déjà relevé, cela peut être lié aux connaissances sollicitées par l'utilisation de la multiplication (associativité de la multiplication, distributivité par rapport à l'addition). Ici il faudrait par exemple écrire $2 \times 1000 + 4 \times 100 = 2 \times 10 \times 100 + 4 \times 100 = 20 \times 100 + 4 \times 100 = 24 \times 100$.

e) T : Décomposer, recomposer un nombre

U7S2(3), U10S5(2)

Pour les recompositions : par exemple 3 cartes de 1000 points et 4 cartes de 100 points

- τ : $1000 + 1000 + 1000 = 3000$ et $100 + 100 + 100 + 100 = 400$ donc 3400
- Ostensifs : ECPD
- \mathcal{Q} : règle positionnelle de calcul (addition)

- τ : $3 \times 1000 = 3000$ et $4 \times 100 = 400$ donc 3400
- Ostensifs : ECPDG, nombre en chiffres (et éventuellement utilisation du tableau de numération)

- \mathcal{Q} : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffres (aspect positionnel : 3×1000 c'est 3 au 4^{ème} rang, etc.) ou règles positionnelles de calcul : juxtaposition de zéros puis addition.
- \mathcal{T} : 3 cartes de 1000 points et 4 cartes de 100 points c'est 3 milliers et 4 centaines donc 3400
- Ostensifs : ECPD, numération en unités, nombre en chiffres (et éventuellement utilisation du tableau de numération)
- \mathcal{Q} : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) et association entre ECPD et unités de la numération (1000 associé à 1 millier)

La première technique apparaît comme pouvant être mise en œuvre par les élèves dans les problèmes proposés mais ce sont la deuxième et la troisième qui semblent visées. On peut en effet lire dans les commentaires du guide maître (U7S2) :

« au début les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type $10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + \dots$ (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme $4 \times 10\ 000$ (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000. On laissera se développer ces différentes pratiques, et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre ».

Lors de la même séance dans la description de la synthèse (voir extrait ci-dessous), les auteurs donnent le tableau de numération. Celui-ci fait apparaître dans la marge du haut à la fois les ECPD et les unités de la numération, ce qui permet de prendre en charge l'association entre 1000 et 1 millier par exemple (donc entre ECPD et unités de la numération) qui est nécessaire pour la troisième technique.

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	0	5	2	6

Ce nombre s'écrit 40 526 (l'espace est destiné à repérer plus facilement le rang de chaque chiffre).
 Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités.
 Il se décompose en $4 \times 10\ 000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 6$
 ou sous forme d'addition du type
 $10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + 100 + 100 + \dots$
 ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

Figure 20 : extrait du manuel Cap Maths CE2, unité 7, séance 2 (synthèse)

Cette fois, l'ostensif « numération en unités » apparaît comme un objet de savoir qui permet de nommer les rangs, mais les « décompositions » et « recompositions » sont associées aux ECPD et ECPDG.

On peut toutefois remarquer que dans le « dico-maths » (cahier de leçons de ce manuel) on peut voir différentes façons de décomposer un nombre (nombre en unités, nombre en ECPD et nombre en ECPDG) qui sont mises en relation :

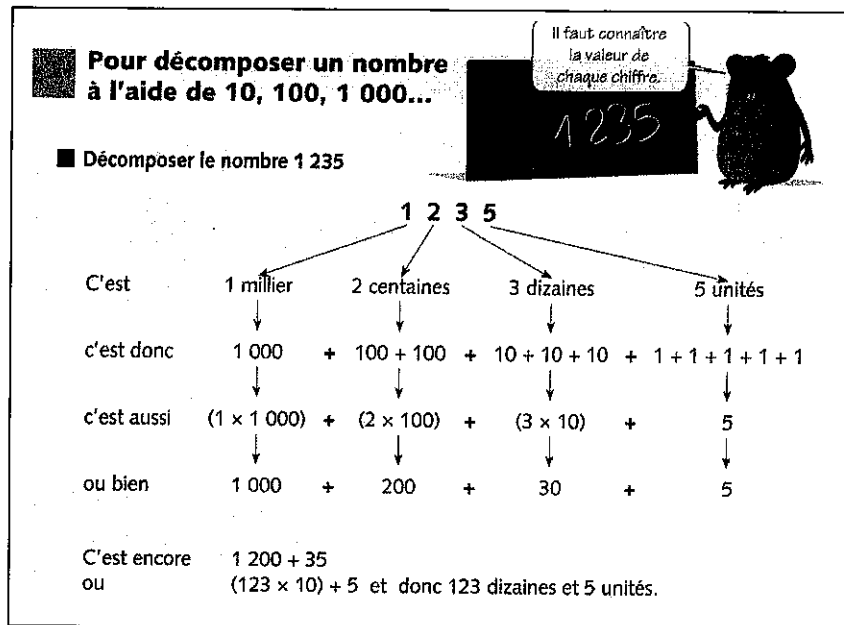


Figure 21 : extrait du « Dico maths » du manuel Cap Maths CE2

Il apparaît donc ici nettement que la numération en unités peut être un intermédiaire pour l'association des rangs aux ECPD ou ECPDG. On peut noter que pour le nombre en unités le signe d'addition n'apparaît pas. Peut-on voir ici la contrainte de non mélange du registre de la langue naturelle et de celui des signes algébriques ?

On trouve même un exemple de différentes décompositions d'un nombre avec les unités de la numération (« 23056 c'est 2 dizaines de mille, 3 milliers, 5 dizaines et 6 unités, ou 23 milliers et 56 unités, ou 230 centaines, 5 dizaines et 6 unités ... »). Mais nous n'avons pas trouvé d'exercices qui pourraient faire écho à ces décompositions.

Nous pouvons également y voir une expression des relations entre les unités (aspect décimal) exprimées avec les unités de la numération :

Dizaine : groupement de 10 unités	1 dizaine = 10 unités
Centaine : groupement de 100 unités	1 centaine = 100 unités
Une centaine, c'est aussi un groupement de 10 dizaines.	1 centaine = 10 dizaines
Millier : groupement de 1 000 unités	1 millier = 1 000 unités
Un millier, c'est aussi un groupement de 100 dizaines.	1 millier = 100 dizaines
Un millier, c'est aussi un groupement de 10 centaines.	1 millier = 10 centaines

Figure 22 : extrait du « Dico maths » du manuel Cap Maths CE2

Mais nous n'avons pas trouvé non plus de référence à ces équivalences dans le manuel ou le guide du maître, ou d'activités qui pourraient y conduire. Plus généralement, nous n'avons pas vu de référence au « dico maths » dans les séances de numération.

Pour les décompositions : par exemple 3400 à décomposer en ECPDG

- τ : 3400 c'est 3000 + 400 donc 1000 + 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 100 donc $3 \times 1000 + 4 \times 100$
- Ostensifs : ECPD, nombre en chiffres, ECPDG
- ϱ : règle positionnelle de calcul (addition)

On peut aussi s'aider de la lecture du nombre en mots pour le décomposer : 3 400 c'est trois mille quatre cent.

- $\overline{5}$: 3400 c'est $3 \times 1\,000 + 4 \times 100$ (directement, en référence à la position des chiffres ou par des règles positionnelles de calcul)
- Ostensifs : ECPDG, nombre en chiffres
- \mathcal{Q} : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel)

- $\overline{5}$: 3400 c'est 3 milliers et 4 centaines donc $3 \times 1\,000 + 4 \times 100$
- Ostensifs : ECPDG, nombre en chiffres et numération en unités (mais une formulation comme « 3 milliers et 4 centaines » n'apparaît pas clairement dans le manuel où les noms des unités sont plutôt donnés isolément)
- \mathcal{Q} : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) et association des ECPD aux unités de la numération.

Ces techniques sont déduites des techniques de recombinaison car ne sont pas explicitées dans le guide du maître où on peut seulement lire : « il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser ». Il semble donc là encore que ce soient la deuxième et la troisième technique qui soient visées, la première intervenant davantage comme technique « personnelle » des élèves.

f) T : dénombrer

Tout comme dans le programme 2002 (hormis le commentaire d'introduction du document d'application), ce type de tâche n'est pas présent.

III.3 L'organisation mathématique locale de « Cap Maths CE2 »

On peut résumer l'OM locale par le schéma ci-dessous (en gras figurent les tâches principalement travaillées dans chaque « unité »).

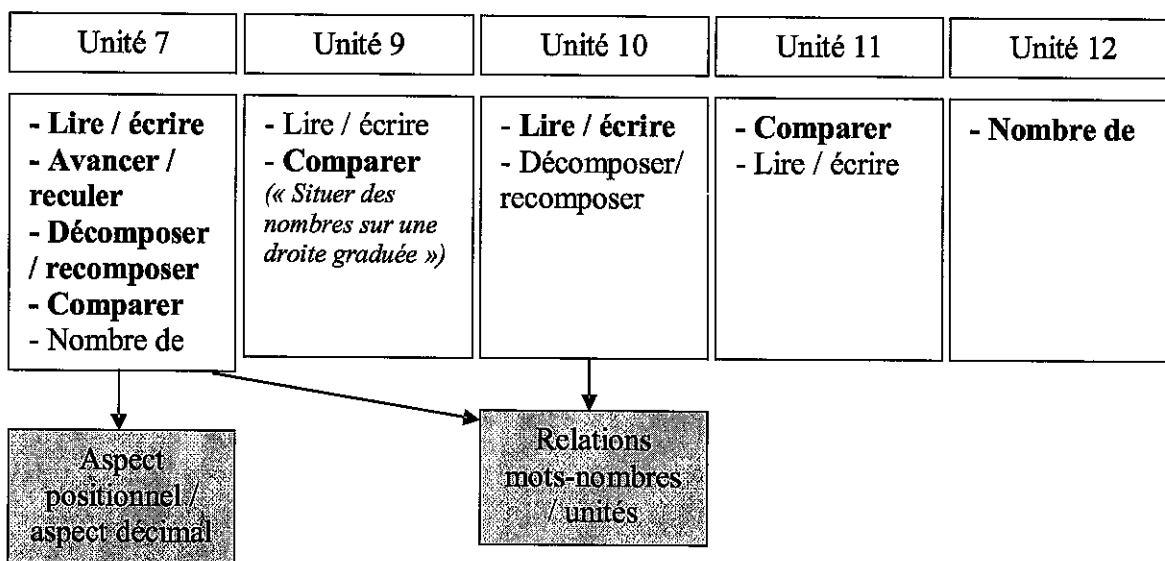


Figure 23 : Schéma de l'OM locale de Cap Maths CE2 sur la numération (nombres à quatre chiffres)

III.4 Conclusion de l'étude de « Cap Maths CE2 »

Globalement on a donc une OM qui est proche de l'OM étudiée dans le programme de 2002, avec une prépondérance des types de tâches que l'on rencontre dans les évaluations nationales : lire/écrire et comparer. On peut s'étonner que le poids (en termes de nombres d'exercices proposés) des types de tâches « nombre de » et « décomposer/recomposer » ne soit pas plus important car les commentaires des programmes (document d'application) insistaient justement sur ces deux types de tâches. Nous avons déjà relevé cela dans les évaluations nationales.

On peut voir dans l'OM locale que le type de tâche « nombre de » est travaillé au début uniquement pour le nombre 1000 (combien de paquets de 10, de 100 dans mille ?) ce qui permet d'amener des éléments de technologies pour le nombre 1000 (aspect décimal) mais ceux-ci ne sont plus utiles par la suite. En effet le travail est ensuite davantage centré sur la lecture/écriture et sur la comparaison, qui ne nécessite pas le recours à l'aspect décimal de la numération. On ne retrouve le type de tâche « nombre de » qu'en toute fin de séquence (cette fois pour des nombres quelconques) et, à ce moment-là, les élèves ayant travaillé la multiplication par 10 et 100 c'est cette technique qui semble mise en avant par les auteurs, comme on le voit dans cet extrait du guide du maître : « $2416 = (24 \times 100) + 16$ ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2416 » même si les auteurs ajoutent ensuite entre parenthèses : « ce qui correspond également une procédure qui a pu être utilisée ».

La plupart du temps les techniques visées sont donc justifiées par un calcul multiplicatif (avec les ECPDG qui est l'ostensif privilégié pour les décompositions/recompositions) et il semble que les auteurs du manuel considèrent les techniques utilisant des additions avec les ECPD comme étant utilisées spontanément par les élèves (procédures personnelles) : les élèves étendent alors aux nombres à quatre chiffres les règles positionnelles de calcul connues pour les nombres à trois chiffres.

Après le travail initial sur le nombre 1000, l'aspect décimal apparaît subrepticement avec les ECPD mais reste cantonné aux relations sur les unités, dizaines et centaines. L'aspect décimal n'intervient par contre jamais quand les ECPDG sont utilisés. On retrouve donc le phénomène déjà observé dans l'étude des programmes de 2002.

Pourtant dans la partie introductive du manuel, concernant le chapitre sur les nombres et la numération, les auteurs précisent :

« Cette étude se fait dans le prolongement de ce qui a été établi pour les nombres jusqu'à 1000. La difficulté supplémentaire tient au fait qu'une représentation des nombres par des groupements effectifs n'est plus possible et que ceux-ci doivent donc être évoqués de même que les équivalences entre par exemple 1 millier et 10 centaines ou 100 dizaines. Le recours aux décompositions utilisant les nombres 10, 100, 1000 ... devient plus fréquent, en relation avec la justification des procédures de multiplication d'un nombre par ces puissances de 10 ».

L'aspect décimal est clairement évoqué ici mais la taille des nombres ne permet plus, selon les auteurs, qu'une « évocation » des activités de groupements. On voit également que c'est une règle de calcul (multiplication par les puissances de 10) qui permet de justifier les décompositions.

C'est comme si nous avions affaire à une sorte de basculement : du fait de la taille des nombres, on ne justifie plus les relations entre les unités par les activités de groupement et d'échanges sous-jacentes : cela est désormais pris en charge par une généralisation des règles de multiplication par 10, 100, ... aux nombres à quatre chiffres. Pour reprendre l'exemple cité ci-dessus : « $2416 = (24 \times 100) + 16$ ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2416 » : ce n'est pas la numération qui permet de justifier le calcul mais c'est le calcul qui permet de justifier le nombre de centaines dans 2416.

Il apparaît également dans cette étude que la numération en unités sert principalement à évoquer le nom des rangs dans le nombre en chiffres. Elle est utilisée dans les techniques

mais nous avons vu que cela nécessitait alors l'utilisation d'un élément technologique supplémentaire : l'association des unités de la numération aux ECPD (1000 c'est 1 millier). Nous avons pu voir cette association dans un tableau de numération proposé en synthèse ou encore dans un extrait du « dico maths ».

Il semble donc que l'on ait affaire à une OM qui utilise des ostensifs variés et qui emprunte des éléments technologiques issus des différentes OM de l'OM de référence (classique, moderne et moderne adaptée). On peut même voir dans le « dico maths » apparaître les relations entre les unités avec la numération en unités comme dans les manuels de l'époque classique (« un millier c'est un groupement de 1000 unités. 1 millier = 1000 unités. Un millier c'est aussi un groupement de 100 dizaines. 1 millier = 100 dizaines », etc.). On remarque toutefois une différence avec la théorie de l'OMR classique : ici le millier est défini à partir de l'ECPD « 1000 » alors que dans la théorie classique c'est le mot-nombre « mille » qui est l'objet premier, comme nous l'avons vu dans le traité de Condorcet par exemple.

Globalement il ressort de notre analyse que c'est l'OMR moderne qui semble servir de référence théorique principale. Mais concernant l'aspect positionnel de la numération, nous n'avons pu déterminer clairement s'il est justifié par l'association rang/unité (3×1000 c'est alors un 3 au quatrième rang donc 3000 : c'est la position du 1 qui donne le rang du 3) ou par une règle positionnelle (3×1000 c'est 3000 car on ajoute trois zéros à droite). Cette ambiguïté est liée à l'ostensif ECPD et à l'utilisation de la multiplication qui peut amener à interpréter des règles de numération comme des règles de calcul. Cela a déjà été relevé lors de la construction de l'OM moderne.

III.5 Les organisations mathématiques ponctuelles de « J'apprends les maths CE2 »

Les séances de ce manuel ayant pour objectif un travail sur la numération sont les suivantes : S74, S77 et S78.

a) T : « nombre de »

S74(3), S77(2), S78(2)

Dans ce type de tâche il y a toujours la présence à la fois du nombre en chiffres et du nombre représenté avec le matériel de numération du manuel.

L'importance de ce type de tâche est affirmée par les auteurs :

« de la même façon que l'oralisation de 130 ne dit pas c'est 13 groupes de 10, l'oralisation de 1350 par ex. ne précise pas que c'est 13 groupes de 100 (sauf à dire « treize cent cinquante »), ni qu'il contient 135 groupes de 10. Or, sans cela, il n'y a pas de bonne compréhension des nombres à quatre chiffres. C'est pourquoi, dès la découverte des nombres au-delà de 999, qui fait événement pour les élèves, nous en faisons l'objectif principal de l'étude de ces nombres ».

On retrouve une limite de l'ostensif nombre en mots que le nombre en unités permet de combler. Ici le choix est fait d'utiliser principalement les termes « groupes de 100 » mais on voit également l'utilisation de « centaines ».

Nous considérerons l'exemple de la recherche du nombre de « groupes de 100 » dans l'exercice suivant :

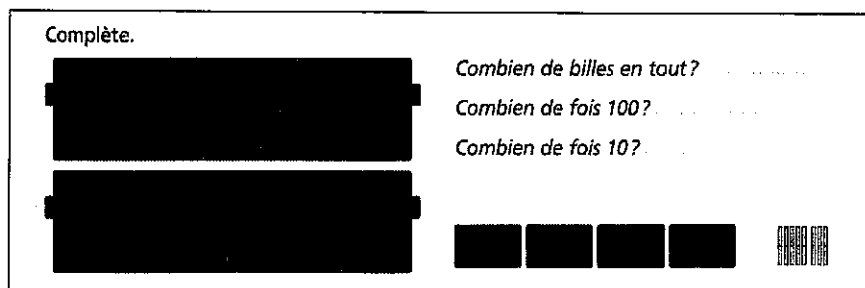


Figure 24 : extrait de la séquence 77 (exercice 1) du manuel « J'apprends les maths CE2 »

- τ : compter les paquets de 100 de un en un puis compter de dix en dix pour les paquets de 1000 ;
- Ostensifs : nombre représenté avec matériel, nombre en mots ;
- ϱ : relations entre les unités et la suite numérique orale de un en un, dix en dix (et de cent en cent pour les « groupes de 10 »).

- τ : dénombrer (trouver le nombre en chiffres) puis lire le nombre formé par le chiffre des centaines et celui de milliers
- Ostensifs : nombre en chiffres et nombre représenté avec le matériel ;
- ϱ : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffres (aspect positionnel) et relations entre unités (par exemple 10 « groupes de 100 » c'est 1000, etc.).

Cette deuxième technique de « découpage » du nombre en chiffres est assumée par les auteurs : « sur l'écriture chiffrée, on voit les 10 groupes de 100 et même les 100 groupes de 10 » (extrait du livre du maître).

Dans le « j'ai appris » de la séquence 77, on peut lire :

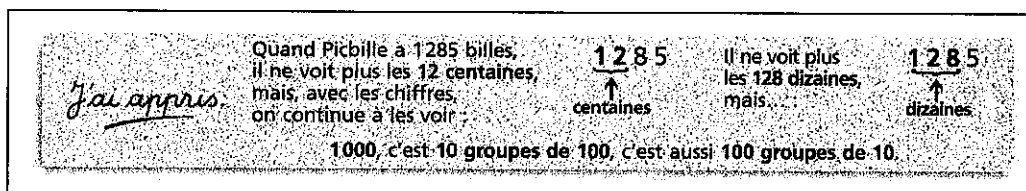


Figure 25 : extrait du « j'ai appris » du manuel J'apprends les maths CE2

La numération en unités est ici utilisée comme un équivalent de l'expression « groupe de ». Elle permet de décrire la technique utilisée. Cependant l'élément technologique en jeu (aspect décimal) apparaît avec le nombre en paquets : « 1000 c'est 10 groupes de 100 ... ».

On peut remarquer qu'un des exercices (S78) se traite dans le contexte des conversions entre unités de longueur, et que dans un des exercices proposés (S77) il suffit en fait de compter de un en un les paquets de 100 (sans effectuer d'échange). L'élément technologique « relations entre les unités de la numération » n'est plus alors en jeu.

b) T : dénombrer

S74(1), S77(2), S78(2)

Concernant ce type de tâche, on peut faire les remarques suivantes :

- il n'y a que des dénombrements (pas de constitution d'une collection de cardinal donné)

- il s'agit principalement de collections représentant le matériel de numération du manuel (billes, boîtes, valises et malles). On trouve aussi des collections organisées en paquets de 100, 50 et unités (le nombre de paquets de 100 dépasse 9),
- un exercice est donné dans un contexte de mesure avec des unités de longueur (S78), mais étant dans une séquence intitulée « numération » il y a un lien très fort pour les auteurs avec la tâche « dénombrer » telle qu'elle est travaillée dans la séquence précédente.

- T : comptage de mille en mille, cent en cent, etc.
- Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots
- θ : la suite numérique orale de un en un, dix en dix, cent en cent et relations entre numération orale et numération écrite.

- T : associer les nombres d'unités, dizaines, centaines, milliers au rang dans l'écriture en chiffres, après groupements et échanges éventuels.
- Ostensifs : nombre en chiffres, parfois matériel de numération (billes, boîtes, valises, malles) ou collections diverses (billets, trombones)
- θ : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel) et relations entre les unités (le nombre de groupes de 100 dépasse 9, donc l'équivalence « 10 groupes de 100 c'est 1 millier » est en jeu ici).

L'aspect décimal est donc en jeu également pour ce type de tâche car les groupements et échanges restent parfois encore à effectuer comme on le voit dans l'exemple ci-dessous.

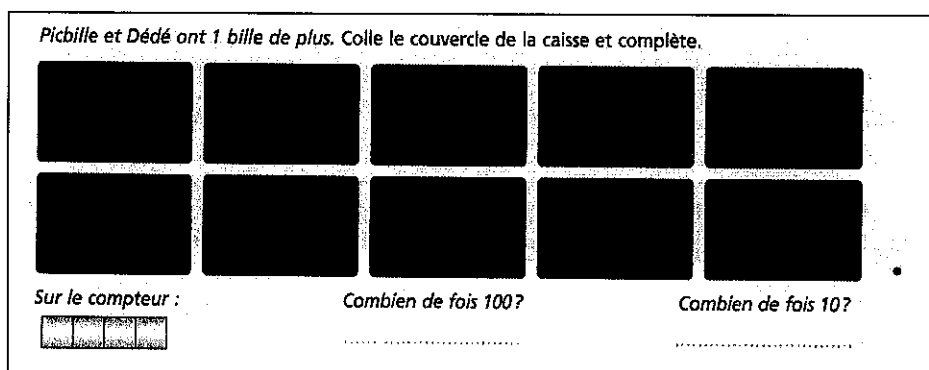


Figure 26 : extrait de l'exercice 1, séquence 74 du manuel J'apprends les maths CE2

Les groupements et échanges consistent en fait ici au collage d'une étiquette de « malle » sur les 10 « valises ».

c) T : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres

S74(2)

Il s'agit en fait, dans les exercices proposés, d'ajouter 1 à un nombre donné. On avance de 1 en 1 mais jamais de 10 en 10 ou 100 en 100.

Les élèves ont parfois la collection représentée avec le matériel de numération, nous considérons alors qu'il s'agit de recomposer le nombre.

- T : ajouter 1 au rang des unités. Si on a 9 on passe à 0 et on ajoute 1 au rang suivant
- ...
- Ostensifs : nombre en chiffres, compteur ;

- θ : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffres (aspect positionnel) et relations entre les unités (groupes de 10, 100, 1000).

Ce type de tâche permet également de faire des échanges et groupements (en collant des étiquettes de valise ou de malle), donc permet de faire apparaître les relations entre les unités.

d) T : comparer

S78(1)

Ce type de tâches est traité dans un contexte d'unités de longueurs uniquement (mais toujours dans la séquence intitulée « numération au-delà de 1000 »). Les nombres sont donnés dans différentes unités, donc il faut les convertir dans la même unité (recomposition) pour pouvoir appliquer l'algorithme de comparaison.

Le guide du maître n'évoque pas les techniques de comparaison, la technique qui est donnée ici est reconstruite.

- τ : convertir les nombres dans la même unité puis regarder le nombre de chiffres. S'ils ont même nombre de chiffres, on compare les chiffres de plus haut rang, etc.
- Ostensif : nombre en chiffres
- θ : pour la comparaison : relations entre unités et positions dans le nombre en chiffre (aspect positionnel). Pour la conversion : relations entre unités métriques.

Même pour ce type de tâche on peut donc voir une utilisation des relations entre les unités métriques et une volonté de faire un lien entre le système métrique et le système de numération. Il est par exemple précisé dans cette séquence (S78) : « ce sera aussi l'occasion de relier les décompositions obtenues au langage plus général de la numération décimale : 2386 mm = 23 dm et 86 mm, parce que 2386 mm c'est 23 centaines de mm et 86 mm ; 2386 mm = 238 cm et 6 mm, parce que 2386 mm c'est 238 dizaines de mm et 6 mm. »

On notera au passage que c'est la numération en unités qui est utilisée pour faire ce lien et que dans ce manuel elle n'est pas uniquement utilisée pour nommer les rangs dans le nombre en chiffres mais aussi comme une unité de mesure (un groupe de 100) comme dans l'OMR classique.

III.6 L'organisation mathématique locale de « J'apprends les maths CE2 »

On peut donc résumer l'organisation mathématique locale par le schéma ci-dessous qui montre l'aspect central donné aux relations entre unités dans ce manuel.

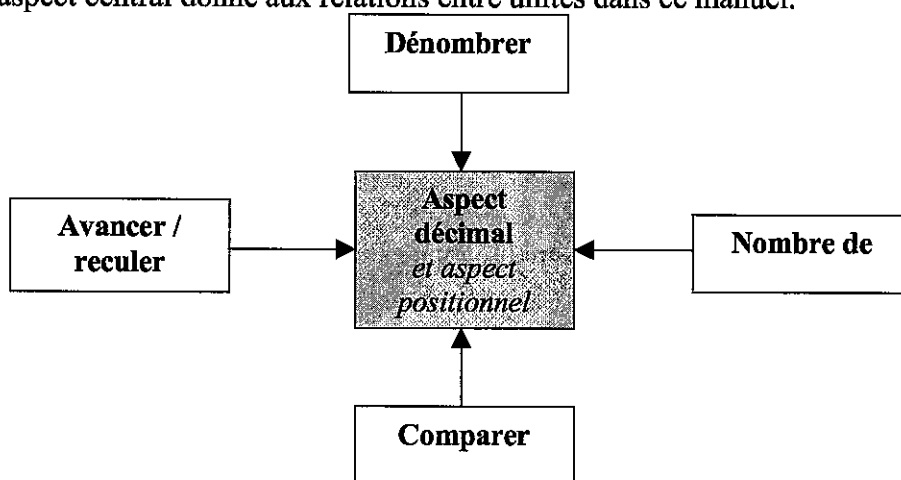


Figure 27 : Schéma de l'OM locale du manuel J'apprends les maths CE2

III.7 Conclusion de l'étude de « J'apprends les maths CE2 »

On peut tout d'abord conclure à une place centrale donnée à cet aspect décimal de la numération qui est un enjeu essentiel pour les auteurs. C'est ce qui semble orienter les auteurs dans leurs choix de type de tâches. On a donc ici une importance donnée aux types de tâches « nombre de » et « dénombrer » et au contraire une absence de lire/écrire (nous ne l'avons trouvé que dans des courts moments d'échauffement de début de séance où il s'agit d'écrire des nombres en chiffres sur l'ardoise) et une place insignifiante à comparer. Ce choix des types de tâche est en opposition avec ce que nous avons pu voir dans le programme.

Concernant les ostensifs, on trouve ici une utilisation privilégiée des ECPD et des nombres en paquets (avec les groupes de 10, 100, 1000), comme le montre le fait par exemple que la formulation de l'aspect décimal se fasse avec cet ostensif (« 1000 c'est 10 groupes de 1000 ... »).

On peut noter la présence de la numération en unités qui remplace parfois les « groupes de » (et qui n'est donc pas seulement utilisée pour nommer les rangs dans le nombre en chiffres) mais une absence totale des ECPDG ainsi qu'une absence des nombres en mots.

Il semble que l'on ait ici une OM proche de l'OMR moderne adaptée avec l'utilisation des « groupes de » à la place des « paquets de ». Les technologies semblent toujours s'appuyer sur les règles de numération (aspect positionnel et aspect décimal) sans apparaître comme des règles positionnelles de calcul (c'est ce qui la distingue de l'OMR moderne). Quand il est dit par exemple que « 1000 c'est 10 groupes de 100 » cela fait référence aux échanges et groupements avec le matériel de numération et non à une multiplication par 10 ou à un ajout de groupes de 100 par addition posée par exemple. Par contre pour l'aspect positionnel on ne voit pas clairement comment il est pris en charge : par l'addition posée comme dans l'OMR moderne adaptée ? Ou bien par utilisation des unités de la numération comme dans l'OMR classique ? Cela n'apparaît pas clairement.

Enfin, il semble que l'on considère, dans ce manuel, les techniques de comptage comme étant des techniques sur lesquelles les élèves peuvent s'appuyer tout en cherchant à montrer leurs limites. L'utilisation des règles de la numération devrait ainsi apparaître comme un moyen plus efficace pour dénombrer les collections.

III.8 Conclusion de l'étude des manuels : comparaison des OM locales

L'OM locale de « J'apprends les maths » est centrée autour des relations entre les unités : tous les types de tâches travaillés doivent permettre d'utiliser ces relations. L'aspect positionnel apparaît moins clairement.

Dans « Cap Maths », on peut voir une progression qui est, elle, marquée par la succession de différents types de tâches avec une mise en place des éléments technologiques en début de progression (aspect décimal et positionnel). Cependant, l'aspect décimal, comme élément technologique, y apparaît moins nettement que dans l'autre manuel et n'est pas une priorité affichée par les auteurs. Du coup les types de tâches travaillés ne sont pas tout à fait les mêmes et surtout l'importance accordée à chacun des types de tâche est différente entre les deux manuels.

Nous avons synthétisé les différences et points communs des OM locales des deux manuels dans le tableau suivant.

	« Cap Maths » CE2	« J'apprends les maths » CE2
Types de tâches	Dans les deux manuels on trouve les types de tâches, « nombre de », « comparer » et « avancer/reculer dans la suite des nombres »	
	Absence de « dénombrer »	Absence de « décomposer/recomposer », lire/écrire un nombre ». Moindre importance à « comparer » (un seul exercice).

	Présence importante des types de tâches « lire/écrire » et « comparer »	Présence importante des types de tâches « nombre de » (importance affirmée par les auteurs) et « dénombrer ».
Techniques	Les techniques visées sont relativement communes (« comparer » et « avancer/reculer »), mais on observe des choix différents concernant l'utilisation de règles positionnelles de calcul et au niveau des techniques de base attendues et enfin des ostensifs utilisés.	proches pour certains types de tâches mais on observe des choix différents concernant l'utilisation de règles positionnelles de calcul et au niveau des techniques de base attendues et enfin des ostensifs utilisés.
	<p>Pour le type de tâche « recomposer » par exemple : on a ici l'utilisation de l'addition posée ou de la « règle des zéros » qui apparaissent comme des techniques que peuvent utiliser les élèves (procédures de base). Technique visée : associer la valeur de l'unité à sa position ou utilisation de règles positionnelles de calcul. Ostensifs utilisés : ECPD, ECPDG, nombre en unités. Le tableau de numération est présenté mais il est précisé que son utilisation systématique est à éviter dans les techniques.</p> <p>Pour le type de tâche « nombre de » on peut noter que la technique de « découpage » de l'écriture chiffrée apparaît toujours à côté de la technique utilisant la multiplication par 10, 100 et qu'elle n'est pas justifiée par les relations entre les unités.</p>	<p>Pour le type de tâche « dénombrer », le comptage a une place importante du fait de la présence de collections représentées (matériel de numération), mais elle est décrite par les auteurs comme procédure de base. Technique visée : associer la valeur de l'unité (matérialisée par des billes, boîtes, ...) à sa position. Ostensifs utilisés : « groupes de 10 », numération en unités, matériel de numération représenté. Absence du tableau de numération.</p> <p>Pour le type de tâche « nombre de » cette technique de « découpage » de l'écriture chiffrée est assumée par les auteurs (elle apparaît dans le « j'ai appris ») tout en étant justifiée par les relations entre unités.</p>
Technologies	Aspect positionnel : on observe des différences.	
	<p>C'est un élément technologique essentiel. Les ostensifs pour évoquer la position d'un nombre sont : « paquets de », la numération en unités. Dans le travail sur le nombre en mots le mot « mille » est associé à un rang dans l'écriture. Le tableau de numération est un ostensif qui permet de montrer les éléments technologiques (aspect positionnel et liens entre ECPD et unités de la numération).</p>	<p>C'est un élément technologique qui n'est pas mis en avant. Les ostensifs pour évoquer la position d'un nombre sont « groupes de 100 », « centaine », ou « valises » par exemple (mais on peut remarquer qu'ils font davantage référence à la valeur qu'à la position). Il n'y a pas d'ostensif utilisé pour montrer le lien entre ces unités et la position dans le nombre en chiffres.</p>
	Aspect décimal : les relations entre les unités ne sont pas traitées de la même manière dans les deux manuels :	
	<p>Les relations entre les unités de la numération, en particulier avec le millier n'apparaissent pas (elles interviennent uniquement dans la technique d'ajout/retrait d'unités en faisant des échanges, mais sur les unités inférieures au millier). La règle des zéros (multiplication par 10, 100 ...) apparaît comme élément technologique. Concernant ces échanges sur les unités inférieures au millier, cela se fait avec les ECPD (et les « paquets de »).</p>	<p>Une place centrale est donnée aux relations entre les unités de la numération. Les relations « 1000 c'est 10 groupes de 100, c'est aussi 100 groupes de 10 » sont utilisées et données dans le « j'ai appris ». C'est donc l'ostensif « paquet de » qui permet d'évoquer cet élément technologique mais on peut noter également que le matériel de numération (représenté) est aussi un support privilégié. Les élèves ont par exemple à coller une étiquette d'une « malle » (groupe de 1000) pour recouvrir 10 « valises » (groupes de 100).</p>

Tableau 8 : comparaison des organisations mathématiques locales de « Cap Maths CE2 » et « J'apprends les maths CE2 »

On peut donc voir des points communs et des différences dans les choix faits par les auteurs de ces manuels qui nous permettront de dégager par la suite des contraintes mais aussi des espaces de libertés pour les enseignants. Avant cela nous allons nous intéresser aux programmes 2007 et 2008.

IV. OM des Instructions Officielles 2007 et 2008

IV.1 Le programme 2007

On y retrouve le même découpage qu'en 2002 : « Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels » et « Ordre sur les nombres entiers naturels » à l'intérieur de la même grande catégorie du programme (domaine) : « connaissance des nombres entiers naturels ».

Dans la phrase d'introduction du domaine, on retrouve mot pour mot une phrase du texte de 2002 : « Ils doivent comprendre les principes de la numération décimale, en particulier que la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture des nombres, en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent ». Cela est une référence explicite aux deux aspects de la numération et en particulier à l'aspect décimal à travers les « activités de groupements et d'échanges ».

On y retrouve également les mêmes types de tâches dont les formulations ont été elles aussi reprises mot pour mot sur celles de 2002.

Il n'y a pas de commentaires accompagnant ces instructions officielles, donc on ne voit pas aussi clairement apparaître l'organisation mathématique en jeu (au niveau des techniques et technologies), mais comme il n'y pas d'évolution des types de tâches (et que l'on retrouve en particulier encore cette expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » ainsi que les décompositions avec les ECPDG), tout laisse à penser que les techniques et technologies sont, elles aussi, les mêmes que celles que nous avons présentées pour le programme 2002. D'ailleurs ces programmes servent à faire des ajustements pour mettre en cohérence et adapter les programmes au socle commun.

Il y a ainsi une distinction qui est faite dans ce programme entre les « capacités » et les « connaissances » que l'on peut rapprocher de la distinction bloc pratique/bloc théorique de la TAD. On peut alors noter que l'élément technologique « connaître la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position » qui apparaissait en 2002 comme un type de tâche fait ici partie des « connaissances » du sous domaine « désignation orale et écrite des nombres entiers naturels ». Il prend ainsi une place plus appropriée comme élément technologique. Cependant on peut alors se demander ce que devient le type de tâche « nombre de » qui y était associé. Si on ne regarde que les capacités attendues, on peut l'interpréter comme une disparition de ce type de tâche. Cela n'est pas anodin car pour le programme 2002 il s'agissait du seul type de tâche pour lequel on pouvait rencontrer l'aspect décimal de la numération. Comment est alors travaillé cet élément technologique dans ce programme ? Il apparaît pourtant comme élément technologique essentiel (comme nous l'avons relevé à travers la référence aux activités de groupements et d'échanges) mais il n'a plus de type de tâche qui permettrait de le « nourrir ». On peut alors se demander comment les élèves peuvent rencontrer ces activités de « groupements et d'échanges ».

Pour les types de tâche concernant l'ordre sur les entiers, la « connaissance » citée est « connaître le sens des signes $<$ et $>$ » mais il n'est plus fait référence à la valeur des chiffres.

On peut trouver une trace de l'ostensif nombre en ECPDG avec les décompositions/recompositions : « donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000..., et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition ».

Par contre on ne voit plus l'ostensif nombre en unités. On peut noter que dans le programme précédent il n'apparaissait en fait que dans les commentaires du document d'application. Avec la disparition de ce document, on assiste donc à la disparition, dans le texte du programme, de cet ostensif.

On peut donc conclure que ce programme s'inscrit dans la même lignée que le précédent, mais l'introduction de la distinction entre connaissances et capacités semble amener avec elle

la disparition du type de tâche « nombre de ». De plus, l'absence de document d'application rend invisible les ostensifs utilisés (hormis les ECPDG).

Remarque : le texte du Socle Commun de 2007 n'apporte rien de nouveau par rapport au texte du programme, nous ne l'avons donc pas utilisé.

IV.2 Le programme 2008

C'est un texte qui, dans son ensemble, est nettement raccourci par rapport aux textes précédents. Voilà ce qu'en dit le ministre dans l'introduction :

« J'ai voulu que ces outils essentiels à votre activité soient plus lisibles, plus courts et qu'ils constituent des références utiles dans votre pratique quotidienne. » (X.Darcos)

L'étude du système de numération se fait toujours dans le domaine intitulé « Les nombres entiers naturels » (qui remplace « connaissance des nombres entiers naturels »).

On n'a plus le découpage en deux sous domaines comme dans les textes précédents, ni la dissociation connaissances/capacités du programme 2007.

Les compétences attendues en fin de cycle sont :

- « principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ;
- désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ;
- comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes > et < ; »

Ce sont des compétences que l'on avait déjà dans les IO précédentes, avec les mêmes formulations.

Cependant on ne retrouve plus de trace des décompositions et recompositions qui ont peut-être été intégrées à l'élément technologique « principe de la numération décimale de position ... ».

Du coup il n'apparaît plus que les ostensifs nombre en chiffres et nombre en mots. On assiste donc à la disparition du nombre en ECPDG dans les textes des programmes.

On peut se demander à quel type de tâche correspond désormais l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position ». Si on se réfère aux IO de 2002 cela pourrait faire référence au type de tâche « nombre de ». Mais cette expression pourrait également faire référence aux décompositions/ recompositions puisque après avoir été mises en parallèle dans le programme 2007 (l'une dans les « capacités » et l'autre dans les « connaissances »), elles semblent maintenant confondues.

Et peut-être aussi le type de tâche « Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre », dont on ne retrouve plus de trace et qui a été lui aussi une victime de la « coupe » faite à partir des programmes précédents.

Il est à noter que les techniques associées à ce type de tâche pouvaient permettre de mettre en jeu à la fois l'aspect positionnel et décimal de la numération. Il ne reste donc plus que les compétences sur la « valeur des chiffres en fonction de leur position » qui pourraient permettre de faire apparaître l'élément technologique « relations entre les unités » (aspect décimal). Mais le manque de visibilité des types de tâches associés à cette formulation (notamment si on ne prend pas en compte les documents d'application des programmes 2002) peut nous faire penser que cet élément technologique est minoré dans ces derniers programmes.

On peut par exemple lire dans le tableau de progression qui est proposé à la fin du programme, pour la classe de CE2 : « *Les nombres entiers jusqu'au million*

- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres ».

Le « principe de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres » se transforme donc ici en « connaître [...] les nombres entiers jusqu'au million ». On peut même se demander si « connaître » ce n'est pas finalement « savoir écrire et nommer ». D'ailleurs cela est le cas au CP ou au CE1 où on peut lire : « connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers ». « Connaître » c'est donc bien ici savoir lire et écrire les nombres ...

Cependant la proximité des compétences attendues (on retrouve des formulations équivalentes par rapport aux textes précédents mais avec quelques « coupes » comme nous l'avons vu), peut nous faire penser que les techniques et technologies à l'œuvre (pour les types de tâches restants) restent toujours les mêmes.

Il faudra nous appuyer sur d'autres sources pour pouvoir peut-être affiner ce constat et en particulier voir les ostensifs utilisés, c'est pourquoi nous poursuivons avec l'étude des évaluations nationales associées à ce programme.

IV.3 Les évaluations nationales CM2 de 2009

Concernant les nombres entiers, on trouve les types de tâches suivants : écrire un nombre entier en chiffres, comparer deux nombres entiers, placer un nombre entier sur une droite graduée.

Pour le dernier l'intérêt nous semble plutôt du côté du placement des nombres décimaux car pour les nombres entiers la taille des nombres est petite et, après avoir repéré le type de graduation, il suffit de compter (pour 19 on peut s'appuyer sur la décomposition $19 = 10 + 9$) :

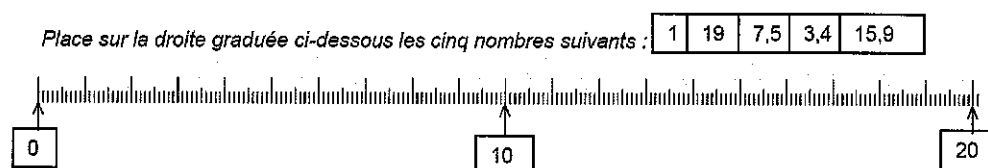


Figure 28 : extrait de l'évaluation nationale CM2 de 2009

Ce sont des types de tâches pour lesquels seul l'aspect positionnel de la numération est en jeu. Cela confirme ce que nous avons relevé à la lecture des programmes mais ne nous dit pas ce que les programmes entendent par « connaître [...] les nombres entiers » car il n'y a pas de type de tâche s'y rattachant ici.

On ne voit pas non plus d'autres ostensifs en jeu ici que le nombre en chiffres et le nombre en mots.

IV.4 Conclusion sur les IO 2007 et 2008

Nous avons affaire à des programmes de moins en moins précis, notamment concernant les types de tâches. En effet l'utilisation de l'expression « valeur des chiffres en fonction de leur position » (qui réfère aux éléments technologiques de la numération) ne laisse pas apparaître les types de tâches qui s'y rattachent.

Certains types de tâches prennent une place importante dans les évaluations (lire/écrire et comparer), d'autres au contraire y sont complètement absents. Cela est dans la continuité des évaluations liées aux programmes de 2002.

Nous avons également remarqué un manque de clarté sur les ostensifs utilisés. Dans les derniers textes, on ne voit plus que le nombre en chiffres et le nombre en mots.

On assiste donc à un appauvrissement du point de vue des types de tâches mais aussi des ostensifs utilisés.

Enfin, l'invisibilité des types de tâches précédemment cités (en particulier « nombre de ») a pour conséquence une centration sur l'aspect positionnel de la numération.

On peut alors se demander l'interprétation qu'un nouvel enseignant ne connaissant pas le programme de 2002 pourrait faire de cette formulation ou encore de « Connaître [...] les nombres entiers jusqu'au million ». On peut penser que ce sont les interprétations des auteurs de manuels et le poids des programmes précédents sur ces auteurs qui pourraient influencer les choix de cet enseignant.

V. Synthèse : les contraintes et libertés institutionnelles

Pour déterminer les contraintes institutionnelles, nous nous sommes appuyé sur les points communs entre les documents étudiés : IO, évaluations et manuels. Les libertés ont donc, elles, été reconstruites à travers les différences observées. En particulier nous avons noté de nombreuses différences entre les deux manuels étudiés qui sont à l'origine de la plupart des espaces de libertés pour les enseignants. Le flou laissé par les derniers programmes peut aussi être interprété comme un espace de liberté mais comme nous avons montré qu'il semble malgré tout s'inscrire dans la continuité du programme de 2002 (au niveau de l'organisation mathématique) nous avons pris ce dernier programme comme principale référence au niveau des instructions officielles.

a) Les contraintes institutionnelles

On peut observer une centration sur certains types de tâches (lire/écrire et comparer) dans les IO récentes et les évaluations nationales. Ceci est quand même à nuancer avec ce que nous avons pu voir dans le manuel « J'apprends les maths » qui au contraire met l'accent sur d'autres types de tâches (recomposer, dénombrer). Nous trouvons également dans les deux manuels le type de tâche avancer/reculer dans la suite des nombres.

Ce phénomène a des conséquences au niveau technologique car ces deux types de tâches (lire/écrire et comparer) mettent en jeu uniquement l'aspect positionnel de la numération. Cet élément technologique est lui-même d'ailleurs très lié au type de tâche décomposer/recomposer qui nécessite le lien entre les unités et les rangs dans le nombre en chiffres, mais nous avons remarqué que ce type de tâche n'est plus visible dans le dernier programme.

Cette prédominance des types de tâche cités a du coup pour conséquence la minoration de l'aspect décimal : dans les programmes successifs, il n'apparaît pas explicitement comme un savoir essentiel ou bien n'a pas les types de tâches qui pourraient le faire vivre. Il apparaît par le travail sur le type de tâche « nombre de » qui est nommé dans les IO « valeur d'un chiffre en fonction de sa position » (en particulier en 2002). Mais il nous semble que cette expression recouvre les deux aspects de la numération sans faire apparaître suffisamment explicitement l'aspect décimal.

Nous avons pu noter que les ostensifs privilégiés pour évoquer le nom des unités (ou pour travailler avec ces unités) étaient les ECPD (1, 10, 100 et 1000) ou les « paquets de ». Pour les décompositions ce sont donc les ECPDG qui sont utilisées, cependant, ils ne sont plus visibles dans les derniers programmes. On ne trouve pas de décomposition utilisant les expressions « paquets de ». Cela est certainement lié au fait que l'on ne s'autorise pas (ou peu) à mêler la langue naturelle à des symboles algébriques (signes d'égalité et d'addition) ce qui nous semble être une contrainte non spécifique à la numération. On peut d'ailleurs penser, comme nous l'avons signalé dans la partie B, que c'est aussi une des raisons de la disparition des unités de la numération dans les décompositions. Dans les programmes, comme dans un des manuels (Cap Maths) on ne trouve alors que des techniques concrètes (c'est à dire utilisant des nombres concrets). Cela est lié à l'utilisation des unités en ECPD (1, 10, 100, 1000).

Les unités de la numération servent principalement à désigner les rangs dans l'écriture chiffrée (aspect positionnel) et semblent perdre leur signification d'unité de mesure (une

dizaine par exemple sert à mesurer en « paquets de 10 ») qui permet justement d'exprimer les relations entre les unités (avec l'idée de groupements et d'échanges qui les sous-tend). De plus l'expression « paquets de » nous semble faire référence plutôt à des quantités (groupées) donc permettre de faire référence à l'aspect décimal mais est-elle réellement utilisée pour dire le nom des rangs ? Comment se fait le lien entre ces « paquets de 10 et la position des chiffres dans le nombre en chiffres ?

La conjonction de l'aspect décimal et de l'aspect positionnel de la numération est donc prise en charge par les unités en ECPD, c'est-à-dire les nombres 1, 10, 100 et 1000.

Nous avons dit que l'aspect positionnel a une place centrale au niveau des technologies mais en même temps les programmes (en particulier ceux de 2002) font preuve d'une certaine suspicion vis-à-vis du tableau de numération (mais nous l'avons vu utilisé dans le manuel « Cap Maths »). Comment se fait alors le lien entre les unités et la position des chiffres ? Ce sont justement les unités en ECPD et « paquets de » qui le permettent. Nous l'avons observé de deux façons différentes. Par exemple pour 1000 ou 1 paquet de 1000, la position correspondante dans l'écriture en chiffres peut être donnée par la position du 1 de 1000. Dans ce cas, on peut même voir que parfois la numération en unités peut être un intermédiaire : 1000 ou un paquet de 1000 c'est 1 millier (car on lit « mille »), c'est-à-dire 1 au quatrième rang (avec la signification de « millier » comme nom d'un rang). C'est pour cette raison que dans « Cap Maths » le tableau de numération possède deux marges du haut : une avec les ECPD et l'autre avec les unités de la numération, ce qui permet de faire le lien entre les deux. Nous avons aussi vu que l'aspect positionnel peut être pris en charge par des règles positionnelles de calcul (règle de juxtapositions de zéros).

De plus, hormis dans un des manuels étudiés (« J'apprends les maths »), nous ne voyons pas de trace de dénombrement de collections. Il n'est jamais fait référence (même dans le manuel en question) à des activités de groupements et d'échanges d'objets d'une collection physique. Il n'est pas fait référence dans les programmes à l'utilisation de matériel de numération. On peut toutefois en voir dans les manuels : dans « Cap Maths » il s'agit de cartes avec les ECPD (1, 10, 100, 1000), donc d'un matériel où les unités sont marquées symboliquement. Il est utilisé ponctuellement (lors d'une séance). C'est un matériel manipulable : on a donc la possibilité de faire des groupements et échanges (on peut par exemple grouper 10 cartes 100 et les échanger contre 1 carte 1000). Dans « J'apprends les maths » il s'agit d'un matériel où les unités sont également marquées symboliquement mais peuvent toutefois être visibles, par exemple on voit une « valise » ouverte avec 10 « boîtes » (de 10 billes qui, elles, ne sont pas visibles) à l'intérieur ou encore une « malle » avec 10 « valises ». Dans ce dernier cas il s'agit d'un matériel représenté (les groupements sont donc déjà réalisés et les échanges se font éventuellement par collage d'une « valise » ou d'une « malle ». Le matériel est utilisé systématiquement dans les séances de numération.

On peut noter que le compteur est aussi un ostensif qui apparaît dans les textes du programme 2002 et dans le manuel « J'apprends les maths » où il est représenté. Il permet de travailler ce qu'on peut appeler l'aspect algorithmique de la suite écrite des nombres (« pour mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres » comme il est précisé dans le programme 2002). Cela est associé au type de tâche avancer/reculer (dans la suite écrite).

Enfin, il nous semble avoir pu noter un certain logocentrisme des programmes 2002 qui nous fait penser que les techniques ne sont pas mises en avant (excepté pour avancer/reculer et comparer) au risque de provoquer des activités trop « formelles » chez les élèves. Dans les programmes suivants l'orientation est beaucoup moins claire du fait de l'absence de documents d'application.

b) Les espaces de libertés :

Dans les dernières IO, on ne voit plus apparaître d'ostensif (hormis le nombre en chiffres et le nombre en mots), ce qui peut laisser apparaître un espace de liberté quant à l'utilisation des ostensifs, même si le poids du passé nous semble important.

Il y a certains choix faits par les auteurs du manuel « J'apprends les maths » qui nous montrent que malgré l'influence importante des programmes et du manuel « Cap Maths », il existe d'autres choix possibles pour l'enseignement de la numération.

Pour les types de tâches, même s'il y a une domination de lire/écrire et comparer, on peut voir que dans ce manuel, ce n'est pas le cas. Il est donc possible de donner plus de place par exemple aux types de tâches « nombre de » (comme cela semblait être le cas dans les commentaires des programmes de 2002) ou même au dénombrement (qui n'apparaît pas comme type de tâche dans les programmes ni dans « Cap Maths »).

Concernant le niveau technologique, malgré le peu de place accordée à l'aspect décimal de la numération dans tous les programmes récents et dans « Cap Maths », on peut remarquer son importance dans « J'apprends les maths » qui en fait l'élément central de la progression.

Au niveau des ostensifs, même si la recommandation des programmes 2002 concernant l'utilisation du tableau de numération (« il convient d'éviter les activités formelles et l'utilisation trop systématique du tableau de numération ») risque de peser sur les choix des enseignants, on peut remarquer que celui-ci est présent dans le manuel « Cap Maths ». On peut également noter un espace de liberté possible concernant l'utilisation de matériels de numération car même s'ils ne sont pas évoqués dans les programmes, ils sont utilisés dans les manuels. Enfin, malgré une présence importante des ECPD et « paquets de » (ou « groupes de ») dans les documents étudiés, on peut noter que les ECPDG ne sont pas utilisées dans « J'apprends les maths » et n'apparaissent pas non plus dans les derniers programmes officiels. Nous avons même noté que dans ce manuel les unités de la numération ne servent pas qu'à désigner le nom des rangs dans le nombre en chiffres mais évoquent les unités de la numération comme des unités de mesure de quantités au même titre que l'expression « groupe de ».

Pour finir, précisons toutefois qu'il s'agit de contraintes et d'espaces de libertés possibles dans l'institution (qui pourrait d'ailleurs gagner en précision en étudiant davantage de manuels) mais que pour un enseignant donné il se peut qu'il n'ait pas accès par exemple à un des deux manuels étudiés ou encore qu'il en utilise d'autres (relevant même de programmes plus anciens). Cela signifie que son espace de liberté et les contraintes qui vont peser sur ses choix ne peuvent pas être exactement ceux qui sont présentés ici, même s'ils devraient toutefois en être assez proches.

PARTIE D : L'enseignement de la numération dans les classes : une étude de cas.

Afin d'étudier l'enseignement de la numération dans les classes nous avons observé deux enseignants de CE2 sur trois séances, lors de l'introduction des nombres à quatre chiffres. Nous allons en faire une étude en deux temps en commençant par le projet global de chaque enseignant suivi de la mise en œuvre d'une situation en classe. Nous commencerons par présenter quelques éléments de méthodologie spécifiques à cette partie.

I. Méthodologie

I.1 Le projet global, le projet local et la mise en œuvre

Nous allons faire une analyse en deux parties. Nous commencerons par essayer de déterminer le projet global des enseignants puis nous étudierons sa mise en œuvre en classe à travers une situation choisie.

Le projet global de l'enseignant constitue ce que l'enseignant a prévu de faire étudier à ses élèves pour le thème de la numération des nombres à quatre chiffres.

Comme nous ne pouvons pas avoir accès directement à ce projet, nous allons le reconstruire à partir de l'organisation mathématique effectivement enseignée. Il est difficile d'avoir accès au travail de préparation de l'enseignant car il n'y a souvent pas de trace écrite de cette préparation et les entretiens éventuels avant la séance peuvent nous donner des informations mais ce n'est pas suffisant. Nous avons alors choisi de faire une reconstruction de ce travail à partir de nos observations de séances et également de cahiers d'élèves, pour les séances non observées. Cela nous permet de reconstituer les OM ponctuelles étudiées dans la classe (que nous mettons en parallèle avec le déroulement proposé par le maître pour les séances observées). Nous complétons cette analyse par des entretiens pour nous assurer que ce qui a été mis en œuvre dans la séance correspond bien à ce que l'enseignant avait projeté. Cela permet de reconstruire le niveau +1 de projet local de l'enseignant pour les séances observées. La succession des OM ponctuelles nous permet de recomposer l'OM locale de l'étude des nombres à quatre chiffres. Nous nous appuyons alors sur l'évaluation finale et encore sur nos entretiens (où nous cherchons cette fois des éléments plus globaux de la préparation) pour reconstruire le projet global (niveau +2) de l'enseignant. Les entretiens nous permettent également de commencer à recomposer des liens entre les différents niveaux de l'activité (influence du niveau idéologique sur le projet global, de sa connaissance des difficultés des élèves, ...).

Ce qui nous intéresse ici est en particulier d'étudier le poids du travail sur la conjonction de l'aspect positionnel et décimal de la numération dans le projet de l'enseignant. Plus généralement, cela nous permettra de mesurer l'influence des contraintes institutionnelles sur le projet des enseignants.

Nous nous proposons donc d'approcher ce projet global à travers divers types de données :

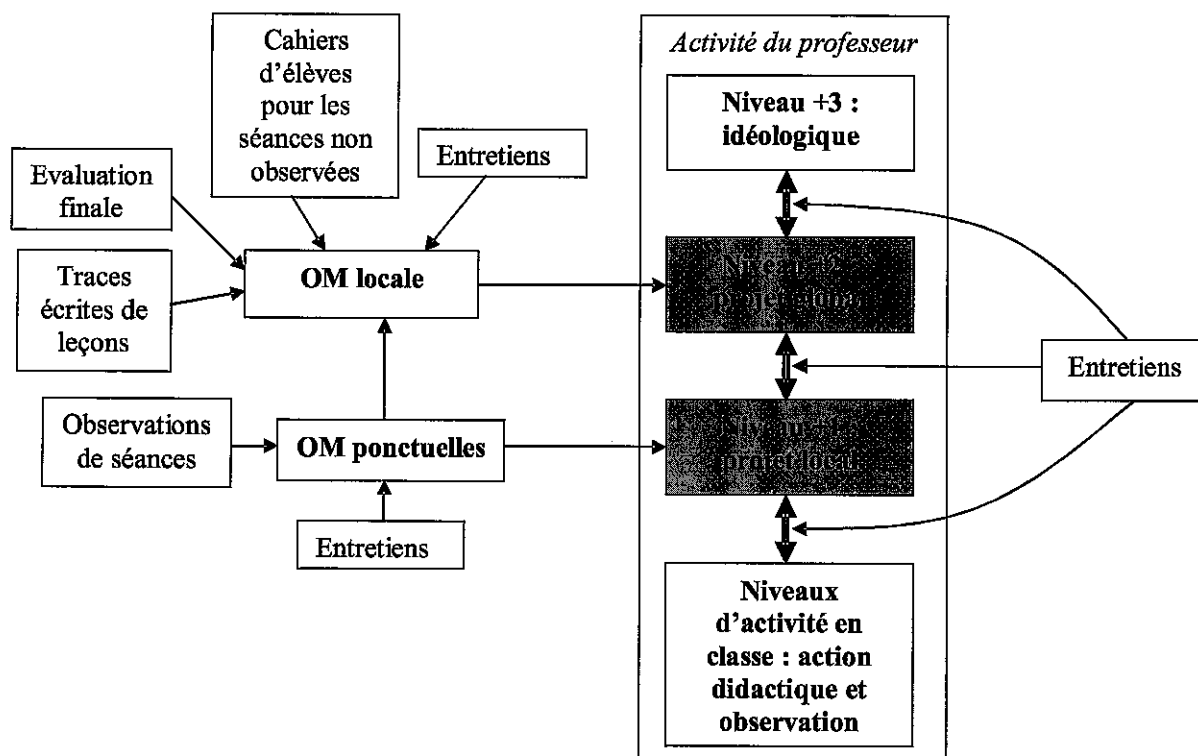


Figure 29 : Méthodologie de l'analyse du projet global

La mise en œuvre dans la classe d'une situation donnée concerne le niveau de l'action didactique, en classe, sur une situation donnée. Pour le choix de la situation, il s'agira de trouver un type de tâche qui est favorable pour travailler le lien entre aspect décimal et positionnel de la numération. Cela permettra de voir si dans les situations proposées il y a une possibilité a priori pour que ce lien apparaisse. Si cette possibilité existe, le maître va-t-il utiliser les possibilités du milieu ? Si cette possibilité n'existe pas a priori, le maître va-t-il quand même y faire appel ? Comment va-t-il traiter l'aspect positionnel sans prendre en compte l'aspect décimal ?

Nous nous appuierons sur notre observation en classe de la situation choisie pour laquelle nous avons des enregistrements et des prises de notes. Cela permettra de faire l'analyse de la situation du point de vue des élèves et des enseignants (nous pouvons éventuellement nous appuyer également sur une observation de séance de début d'année sur les nombres à trois chiffres) afin de définir le niveau 0 de l'activité de l'enseignant pour cette situation.

Nous utiliserons également nos entretiens afin d'essayer de recomposer les liens entre les différents niveaux de l'activité de l'enseignant, ce qui nous permettra de dégager certaines logiques d'action.

Nous utiliserons ici encore divers types de données :

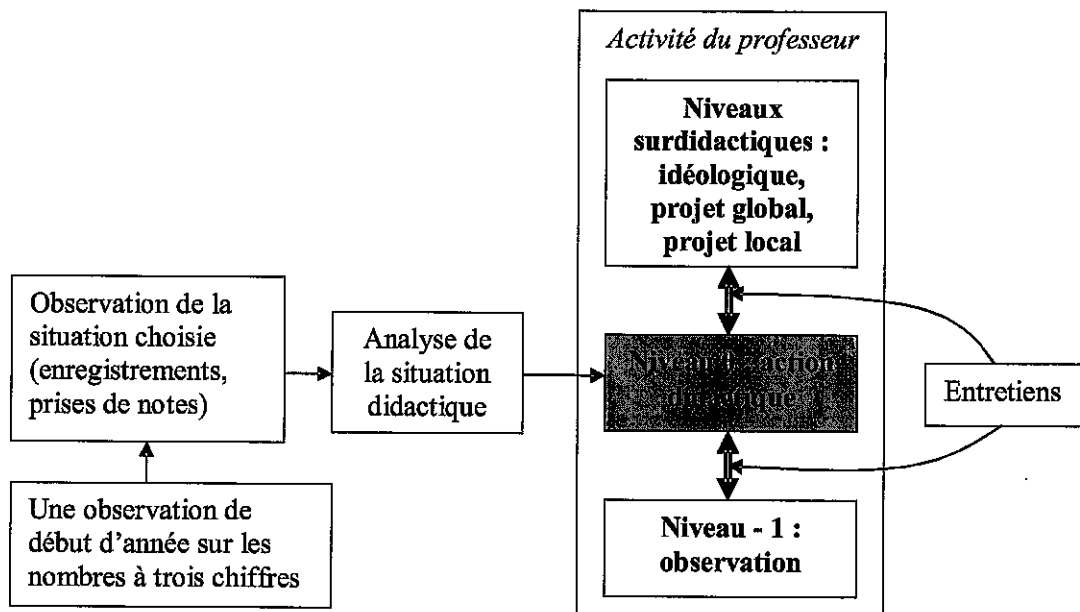


Figure 30 : méthodologie de l'analyse des mises en œuvre

I.2 Le choix des classes et des enseignants

L'objectif est de fixer le maximum de variables comme le contexte de classe, l'expérience des enseignants ... afin de pouvoir interpréter au mieux les variations concernant les pratiques des enseignants. Malheureusement, nous n'avons pas réussi à fixer la variable des ressources utilisées et il existe une différence au niveau de l'expérience des deux enseignants observés.

- Le savoir : étude de la numération de position pour les nombres à quatre chiffres.
- Le contexte social, culturel des classes observées :
 - en milieu rural à une vingtaine de kilomètres du chef lieu de département,
 - des effectifs de classe assez proches,
 - un double niveau identique : CE1/CE2 dans les deux classes. C'est un paramètre qu'il est important de fixer car il a une influence forte sur les pratiques des enseignants.
- Les enseignants (Sophie et Marc) :
 - expérimentés (ce ne sont pas des débutants) mais Sophie n'a que 5 années d'expérience (et il s'agit de sa première année dans cette classe) contre 18 années pour Marc dont 11 ans dans cette classe ;
 - utilisation de ressources différentes :
 - Sophie utilise un guide du maître (ERMEL) pour les situations de recherche (introduction de nouvelles connaissances, réinvestissement, problèmes ouverts, ...) et propose des exercices d'application parfois issus d'un manuel (« Spirale CE2 »)
 - Marc dit ne pas utiliser de manuel. Les fiches distribuées aux élèves sont manuscrites. Il a cependant déjà utilisé des manuels dans les années précédentes (« Cap Maths CE2 », « J'apprends les maths CE2 »).

I.3 Recueil des données

Nous avons enregistré les séances observées à l'aide d'un dictaphone et nous avons pris des notes de ce qui se passait dans la classe. Concernant les OM ponctuelles, ce sont principalement nos notes qui nous ont servi à les reconstruire, les enregistrements venant compléter les descriptions plus précises des techniques et technologies qui apparaissent

publiquement dans les classes. Alors que pour l'analyse de l'action didactique (niveau 0) nous nous sommes appuyé sur des transcriptions de certains moments de la séance observée.

Nous avons observé trois séances pour chaque enseignant, ce qui ne constitue pas l'ensemble du travail sur la numération des nombres à quatre chiffres pour ces enseignants. Il y a donc eu des séances intermédiaires et/ou postérieures à celles que nous avons observées.

Pour ces séances que nous n'avons pas observées nous avons photocopié les cahiers des élèves (ces photocopies figurent en annexe) et nous avons aussi demandé lors des entretiens de nous préciser les exercices proposés lors des moments de travail sur ardoise qui ne laissent pas de trace des énoncés. Pour un des enseignants (Marc) la séquence a duré une majeure partie de l'année. Il n'a pas été possible d'avoir accès à tous ces moments collectifs oraux qui ne laissent pas de trace.

Nous avons également voulu, lorsque cela était possible, mener des entretiens de fin de séance avec les enseignants (enregistrés si possible) pendant lesquels nous leur demandions ce qu'ils pensaient de la séance par rapport à ce qu'ils avaient prévu.

Cependant ces entretiens ayant lieu « à chaud » (juste après la séance), donc pendant la récréation ou au moment du repas, il nous semble que nous n'avons pas eu le temps ni la disponibilité suffisante des enseignants pour qu'ils soient aussi riches que nous le souhaitions. Nous n'avons pas utilisé de technique d'entretien particulière. L'objectif de ces entretiens étant simplement de chercher à compléter nos analyses avec le point de vue de l'enseignant.

Pour la deuxième enseignante, il nous a semblé y avoir une certaine réticence à faire des entretiens enregistrés en fin de séance. Nous avons alors choisi de les faire de façon plus informelle pendant le temps de récréation (sans enregistrer avec le dictaphone), et nous avons essayé d'en décrire le contenu par la suite.

Enfin pour les deux enseignants, nous avons fait un dernier entretien après l'évaluation finale de la séquence qui nous a permis de revenir sur le projet des enseignants et sur le regard qu'ils portaient sur les erreurs des élèves.

II. Analyse du projet global des deux enseignants

II.1 Méthodologie

a) Tableaux d'observation des OM enseignées

Nous avons découpé les séances observées en épisodes qui correspondent à des moments différents de la mise en œuvre : présentation d'une situation, recherche des élèves, correction, ... Ce sont donc en particulier les changements de mode d'organisation qui indiquent un changement d'épisode, mais aussi les changements d'objet d'enseignement (quand on passe à un autre exercice mais que l'on reste en collectif, cela marque un changement d'épisode).

Nous utiliserons des tableaux de ce type :

Episode Durée Organisation	Type de tâche	Technique et <u>éléments</u> <u>technologiques</u>	Ostensifs
<i>Présentation succincte de la nouvelle activité à chaque changement d'activité, en italique.</i>			
Organisation, durée <i>Les nombres proposés au cours de cet épisode (en italique)</i>	Les types de tâches en jeu.	Les techniques qui apparaissent publiquement ainsi que <u>les éléments technologiques</u> (soulignés). <i>Des citations de l'enseignant ou des élèves (en italique et entre guillemets)</i>	Les ostensifs utilisés

Tableau 9 : présentation des tableaux descriptifs des OM ponctuelles

Le déroulement y est mis en parallèle avec les types de tâches travaillés, les techniques et technologies rendues publiques ainsi que les ostensifs utilisés. Cela permet donc d'avoir de premières indications sur la mise en œuvre de ce projet à un niveau plus global (OM locale) : le temps passé sur chaque type de tâche, l'enchaînement des types de tâches, les moments où les techniques et/ou technologies apparaissent, etc.

On peut déjà noter que pour un type de tâche donné, il peut ne pas apparaître dans la classe de technique associée. On parlera alors de « technique invisible » dans une institution (Assude, Mercier, Sensevy, 2007) : « elles permettent de produire un résultat mais ne sont pas explicitées ». Il se peut aussi que pour une technique donnée on ne voie pas apparaître d'éléments technologiques. On parlera alors de « technique faible » : ce sont « celles qui permettent de produire un résultat et qui sont explicitées : la manière de faire peut être montrée à travers un discours de la technique ». Enfin si la technique est justifiée par un élément technologique, on parlera de « technique forte » : ce sont celles qui sont « non seulement explicitées mais aussi justifiées par une technologie ou théorie explicites ».

Au cours de notre expérimentation, il s'est posé le problème de la prise en compte du type de tâche « lire/écrire ». Celui-ci apparaît souvent dans les moments collectifs pour communiquer avec les nombres. S'il n'y a pas une prise en compte spécifique de ce type de tâche, nous considérons alors qu'il n'est pas travaillé. Si l'enseignant demande, par contre, explicitement à un élève de lire un nombre pendant une phase collective nous l'avons alors considéré comme travaillé.

b) Tableaux récapitulatifs du temps approximatif passé sur chaque type de tâche, technique, et technologie

Pour nous aider à analyser ces OM ponctuelles (après les avoir décrites dans les tableaux décrits ci-dessus) afin d'en dégager une OM locale, nous synthétiserons dans un tableau le temps total des phases dans lesquelles le type de tâche étudié est en jeu.

	Type de tâche		Techniques				Technologies	
	Collectif	Individuel/ en groupe						
Temps								

Tableau 10 : présentation des tableaux récapitulatifs du temps approximatif passé sur les types de tâche, techniques et technologies

Cela ne signifie pas que le type de tâche est travaillé pendant tout ce temps mais nous permet d'avoir une approximation du temps passé sur chaque type de tâche (il s'agit en fait d'une majoration très grossière mais qui nous permet quand même de dire que tel type de tâche n'a pas été travaillé plus de tant de minutes ...). Pour les techniques et technologies, le temps indiqué correspondra au temps des phases collectives pendant lesquelles elles apparaissent publiquement.

c) Les entretiens

Les entretiens de fin de séance permettent de compléter et corriger éventuellement l'interprétation effectuée. Ils servent aussi à constituer l'OM locale en essayant de déterminer des choix globaux faits par les enseignants. Enfin, l'entretien final (suite à l'évaluation) peut permettre de mettre en évidence certains éléments dans la pratique du professeur correspondant aux différents niveaux dans le modèle des milieux du professeur de Margolinas. Ils seront complétés par l'analyse de l'action didactique dans la partie suivante

mais cela peut déjà permettre de mettre en évidence des liens entre ces différents niveaux. Par exemple de remarquer chez un enseignant l'importance d'une certaine conception de l'enseignement des mathématiques (niveau +3) ou bien des liens qu'il veut faire avec d'autres parties du programme (niveau +2), ou encore du poids de la prise en compte des procédures des élèves (niveau -1) dans l'avancement du projet, etc. Les niveaux de référence pour étudier ces liens étant ici les niveaux +1 et +2 (alors que dans la partie suivante ce sera autour du niveau 0).

Ce sont donc ces différents outils qui vont nous permettre de reconstruire le projet mis en œuvre par les enseignants tout en essayant d'avoir des informations sur d'éventuelles modifications par rapport à ce qu'ils avaient prévu.

II.2 Le projet global du 1^{er} enseignant (Marc)

Nous avons observé trois séances sur la numération. Il s'agit des trois premières séances. L'enseignant a ensuite poursuivi ce travail sur une très longue période de l'année (de novembre à juin). Pour les séances qui ont suivi nous avons eu accès aux fiches d'exercices distribuées par le maître. L'évaluation finale a donc été très tardive dans l'année (juin). Nous n'avons donc pas pu l'intégrer à notre étude mais le maître ayant fait une évaluation « intermédiaire » en avril, c'est celle-ci que nous utiliserons et nous demanderons à l'enseignant de nous préciser le contenu de l'évaluation finale prévue.

a) Description des OM ponctuelles

Séance 1 (17/11/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et éléments technologiques	Ostensifs utilisés
<i>Nous avons choisi d'intégrer les activités de calcul mental dans l'OM de la séance car le maître a choisi d'y insérer des nombres à 4 chiffres. Par contre il s'agit bien pour le maître de types de tâches relevant du calcul donc nous ne prendrons pas en compte ces tâches dans l'OM locale (nous ne les numéroterons pas).</i>			
<i>Il s'agit ici de calculer mentalement des produits de nombres à un ou deux chiffres par 10 ou 100.</i>			
Recherche individuelle, 5' Nombre à 4 chiffres : 100×43	T : multiplier par 10, 100		Nombre en chiffres
Correction collective, 5'	T : multiplier par 10, 100	T : écrire le nombre et « ajouter le (ou les) zéros »	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat)
<i>Il s'agit maintenant de calculer mentalement des doubles de nombres à deux chiffres ou trois chiffres.</i>			
Recherche individuelle, 4' Nombre à 4 chiffres : double de 500 et double de 600	T : Calculer le double d'un nombre de la forme n0 ou n00 (n entier compris entre 1 et 9)		Nombre en chiffres
Correction collective, 2'	T : calculer le double d'un nombre de la forme n0 ou n00 (n entier compris entre 1 et 9)	T : écrire le double de n et ajouter un ou deux zéros « 6 et 6, 12 et je rajoute deux zéros »	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat)
<i>L'activité suivante va consister à recomposer des nombres donnés en nombre en unités (par exemple 8c4d3u). Les élèves ont à disposition des étiquettes 1, 10, 100 qu'ils peuvent manipuler.</i>			
Distribution du matériel, 10'			
Recherche individuelle, 3' Nombre à recomposer : 8c4d3u	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités

Correction collective, 1'	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots et nombre en unités
Recherche individuelle, 4' Nombre à recomposer : 32d	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 4'	T ₁ : recomposer un nombre	<p>ƒ_{1,1} : compter de 1000, en 1000, 100 en 100, 10 en 10 et 1 en 1 puis écrire le nombre (le maître fait dessiner au tableau les étiquettes et demande aux élèves de compter)</p> <p>ƒ_{1,2} : pour les dizaines, écrire le nombre de dizaines et ajouter un zéro (« j'ai marqué 32 et j'ai ajouté un zéro »)</p>	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 3' Nombre à recomposer : 13c	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 3'	T ₁ : recomposer un nombre	ƒ _{1,1} : compter de 1000, en 1000, 100 en 100, 10 en 10 et 1 en 1 puis écrire le nombre	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 4' Nombre à recomposer : 12c8d1u	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 3'	T ₁ : recomposer un nombre	ƒ _{1,1} : compter de 1000, en 1000, 100 en 100, 10 en 10 et 1 en 1 puis écrire le nombre	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 4' Nombre à recomposer : 14c2u	T ₁ : recomposer un nombre	« Dans les nombres qu'on est en train de chercher, on a millier, centaine, dizaine, unité » :	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 3'	T ₁ : recomposer un nombre	<p>----- m c d u</p> <p>ƒ_{1,1}</p>	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 4' Nombre à recomposer : 12c11d2u	T ₁ : recomposer un nombre		Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 15'	T ₁ : recomposer un nombre	<p>ƒ_{1,1}</p> <p>ƒ_{1,2} avec échanges : faire des échanges et associer le chiffre au rang correspondant dans l'écriture chiffrée. 10 dizaines c'est 1 centaine car 10 × 10 = 100</p>	Étiquettes 1/10/100, nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités

Tableau 11 : séance 1 Marc

Séance 2 (18/11/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et éléments technologiques	Ostensifs utilisés
Le maître commence avec une activité de calcul mental faisant intervenir des nombres à quatre chiffres. Il s'agit de calculer des produits par 10, 100 ou 1000.			
Recherche individuelle, 5' Nombres à 4 chiffres : 403×10 et 4×1000	T : multiplier par 10, 100, 1000		Nombre en chiffres
Correction collective, 4'	T : multiplier par 10, 100, 1000	T : écrire le nombre et « ajouter le (ou les) zéros » Exemple : « on écrit 4 et on rajoute les 3 zéros »	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat)
Activité toujours sur ardoise, il s'agit de recomposer des nombres donnés en ECPDG et en unités.			
Recherche individuelle, 3' Nombre à 4 chiffres : $(4 \times 1000) + (2 \times 10) + (3 \times 100) + 8$	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres, nombre en ECPDG, numération en unités
Correction collective, 10'	T ₁ : recomposer un nombre	$\overline{4}_3$: lire le nombre en remplaçant les ECPD par les mots nombres associés puis écrire le nombre 4×1000 c'est quatre mille, etc. quatre mille trois cent vingt huit c'est 4328 $\overline{4}_1$ (dessiner des paquets de 1000, 100 ... et compter)	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat), nombre en ECPDG, nombre en unités
L'activité suivante est une reprise de l'activité de la séance 1 : recomposer des nombres donnés en nombre en unités (par exemple 3m2c4d2u). Les élèves ont à disposition des étiquettes 1, 10, 100 qu'ils peuvent manipuler.			
Recherche individuelle, 4' 3m2c4d2u à recomposer	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 4'	T ₁ : recomposer un nombre	$\overline{4}_1$ $\overline{4}_3$	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 3' 4c11d à recomposer	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 5'	T ₁ : recomposer un nombre	$\overline{4}_1$ $\overline{4}_4$: utilisation de la technique de l'addition posée en colonnes : 4 0 1 1 0 m c d u « On efface le 4 et le 1 et on remplace par 5 ».	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités
Recherche individuelle, 2' 14c à recomposer	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 3'	T ₁ : recomposer un nombre	$\overline{4}_1$ $\overline{4}_2$: « Tu mets le 1 dans les mille, tu mets le 4 et tu rajoutes les deux zéros ».	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer le résultat) et nombre en unités

Recherche individuelle, 5' <i>8d13c2u à recomposer</i>	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres et nombre en unités
Correction collective, 4'	T ₁ : recomposer un nombre	$\overline{7},1$ $\overline{7},2$	Nombre en chiffres, nombre en mots (<i>pour communiquer le résultat</i>) et nombre en unités
Il s'agit ici de la même activité que la précédente mais sous forme de jeu entre deux élèves. Un élève donne une décomposition et son voisin doit recomposer le nombre.			
Recherche par groupes de 2 élèves, 8'	T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres et nombre en unités
La dernière activité est un exercice sur fiche où les élèves ont à recomposer des nombres donnés en divers types de décompositions : une décomposition avec les étiquettes 1/10/100 dessinées, des nombres en unités, un nombre en ECPD, un en ECPDG et enfin un nombre en mots.			
Exercice sur fiche Individuel, 5'	T ₁ : recomposer un nombre T ₂ : écrire un nombre		Nombre en chiffres, nombre en unités, nombre en ECPD et ECPDG, étiquettes 1/10/100

Tableau 12 : séance 2 Marc

Séance 3 (22/11/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et éléments technologiques	Ostensifs utilisés
Activité de calcul mental : il s'agit ici de calculer mentalement des produits de nombres à deux chiffres par 10 ou 100.			
Calcul mental, recherche individuelle, 2'30 <i>Nombres à 4 chiffres : 100 × 82, 100 × 41, 10 × 108</i>	T : multiplier par 10, 100		Nombre en chiffres
Correction collective, 5'	T : multiplier par 10, 100 T ₂ : lire un nombre (<i>le maître demande explicitement de lire le nombre trouvé</i>)	T : écrire le nombre et « ajouter le (ou les) zéros » <i>Exemple (pour 27 × 10) : « on écrit 27 et on rajoute le 0 de 10 »</i> $\overline{2},1$: pour un nombre de la forme « 1... » on dit « mille ... » (<i>le maître corrige un élève qui dit « un mille ... »</i>)	Nombre en chiffres, nombre en mots
<i>Le maître poursuit le moment de calcul mental avec ardoises : travail sur les compléments à la dizaine supérieure. Comme il n'y a pas de nombre à 4 chiffres ici, nous ne détaillons pas ce moment.</i>			
Individuel puis collectif, 7'			
L'activité suivante consiste à écrire (en chiffres) un nombre lu par le maître sur le compteur puis donner le nombre suivant et le nombre précédent avec le compteur. Le maître donne successivement ces consignes à l'oral :			
1. « Vous me fabriquez le nombre ... »			
2. Trouvez le nombre qui vient juste avant.			
3. Trouvez le nombre qui vient juste après. »			
Recherche individuelle, 2'30 <i>« Quatre cent quatre-vingt-dix-neuf ».</i>	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur
Correction collective, 4'	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la	$\overline{5},1$: on fait tourner la roue des unités en avançant de 1. Si on arrive à 0 il faut aussi avancer	Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur

	suite écrite des nombres	de 1 pour les dizaines, etc. <i>NB : le maître précise que pour avancer on peut regarder le sens de la flèche sur le compteur.</i>	
Recherche individuelle, 1' « Mille deux cent vingt quatre »	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur
Correction collective, 3'	T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres T ₂ : écrire un nombre (le maître demande de lire le nombre trouvé)	$\overline{5}_{,1}$: on fait tourner la roue des unités en avançant de 1. Si on arrive à 0 il faut aussi avancer de 1 pour les dizaines, etc. <i>NB : le maître précise que pour avancer on peut regarder le sens de la flèche sur le compteur.</i>	Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur, unités de la numération
Recherche individuelle, 1' « Neuf cent quatre vingt dix neuf »	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur
Correction collective, 4'	T ₂ : écrire un nombre (le maître demande de lire le nombre trouvé) T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur, unités de la numération
Recherche individuelle, 1' « Mille quatre cent quatre vingt dix neuf »	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur
Correction collective, 4'	T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres T ₂ : écrire un nombre (le maître demande de lire le nombre trouvé)	$\overline{5}_{,1}$ (« le neuf devient un zéro mais il y a une incidence sur les dizaines ... »)	Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur, unités de la numération
Recherche individuelle, 2' « Mille neuf cent quatre vingt dix neuf »	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur
Correction collective, 8'	T ₂ : écrire un nombre (le maître demande de lire le nombre trouvé) T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres	$\overline{5}_{,1}$ (« le neuf devient un zéro et ça a une incidence sur tous les autres et le mille il change ... »)	Nombre en mots, nombre en chiffres, compteur, unités de la numération
<i>L'activité suivante est le même exercice (avec compteurs) mais sous forme de jeu entre deux élèves.</i>			
Présentation collective, 2'			
Jeu à deux élèves, 6'	T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en chiffres, compteur
<i>La dernière activité est un exercice sur fiche où les élèves doivent trouver le nombre précédent et le nombre suivant d'une liste de nombres (à trois ou quatre chiffres).</i>			
Exercices sur fiche Individuel, 10'	T ₃ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres		Nombre en chiffres, compteur

Tableau 13 : séance 3 Marc

Les séances suivantes :

- Séance 4 (22/01/09) :

T₄ : encadrer un nombre (avec le nombre précédent et le nombre suivant, ce qui finalement est équivalent à avancer/reculer de 1 en 1).

Ostensifs : nombre en chiffres

- Séance 5 (23/01/09) :

T₄ : encadrer un nombre (avec le nombre précédent et le nombre suivant).

Ostensifs : nombre en chiffres

□ Séance 6 (13/02/09) :

T₁ : recomposer

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en unités, nombre en ECPD et en ECPDG

T₂ : lire/écrire

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots

T₄ : encadrer un nombre (avec le nombre précédent et le nombre suivant).

Ostensifs : nombre en chiffres

T₄ : ranger du plus petit au plus grand.

Ostensifs : nombre en chiffres

T₁ : décomposer

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en ECPDG

□ Séance 7 (10/03/09) :

T₄ : encadrer un nombre (avec le nombre précédent et le nombre suivant)

Ostensifs : nombre en chiffres

T₃ : avancer/reculer dans la suite écrite (avancer de 100 en 100)

Ostensifs : nombre en chiffres

□ Séance 8 (27/03/09) :

T₄ : encadrer un nombre (entre deux dizaines consécutives)

Ostensifs : nombre en chiffres

T₃ : avancer/reculer dans la suite écrite

Ostensifs : nombre en chiffres

T₁ : recomposer

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en unités, nombre en ECPD et en ECPDG

□ **Evaluation intermédiaire (14/04/09) :**

T₄ : ranger des nombres dans l'ordre croissant (ex1, ex2)

Ostensifs : nombre en chiffres

T₂ : lire/écrire (ex3, ex4)

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en mots

T₁ : décomposer/recomposer (ex5, ex10)

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en unités, nombre en ECPD et en ECPDG

T₃ : avancer/reculer dans la suite écrite (ex6, ex7, ex8, ex9)

Ostensifs : nombre en chiffres

□ Séance 9 (14/05/09) :

T₄ : encadrer un nombre

Ostensifs : nombre en chiffres

T₃ : avancer/reculer dans la suite écrite

Ostensifs : nombre en chiffres

T₁ : recomposer

Ostensifs : nombre en chiffres, nombre en unités, nombre en ECPD et en ECPDG

□ Séance 10 (20/05/09) :

T₄ : encadrer un nombre

Ostensifs : nombre en chiffres

Les traces écrites de « leçons » :

Il n'y a pas de trace écrite de leçon dans le cahier des élèves, ni d'affiche dans la classe.

b) Analyse de l'OM enseignée

Les nombres à quatre chiffres sont introduits lors du moment de calcul mental, dans des tâches relevant du calcul (multiplication par 10, 100, calculs de doubles). Les techniques de calculs sur les nombres à trois chiffres sont alors naturellement étendues aux nombres à quatre chiffres. Il n'y a pas d'élément technologique qui apparaît à ce moment-là. Nous pouvons même ajouter que cette façon d'introduire les nombres à quatre chiffres ne crée pas de besoin au niveau technologique puisque la simple application des techniques de calcul connues fonctionne.

Nous pouvons dire qu'il s'agit ici d'une introduction officieuse des nombres à quatre chiffres. L'introduction officielle se fera avec les tâches de recomposition.

Nous allons maintenant étudier l'OM enseignée à partir des types de tâches travaillés. Nous indiquons les types de tâches par ordre décroissant du temps de travail dans la classe.

T₁ : décomposer/recomposer

	Type de tâche		Techniques				Technologies	
	Collectif	Individuel/ en groupe	T _{1,1}	T _{1,2}	T _{1,3}	T _{1,4}	Aspect décimal	Aspect position.
Temps	55'	52'	44'	26'	10'	5'	15'	4'

Tableau 14 : temps approximatif pour décomposer/recomposer, Marc

C'est un type de tâche qui a une place importante dans cette OM. Elle occupe la majorité du temps des deux premières séances. La numération en unités est l'ostensif privilégié pour décomposer et recomposer (on trouve la trace des nombres en ECPD et ECPDG dans un item de la fiche d'exercices distribuée en fin de 2^{ème} séance et dans l'évaluation intermédiaire). Cela s'apparente donc à une utilisation des unités de la numération comme des unités de mesure, ce qui se distingue de ce que nous avons pu voir dans les contraintes institutionnelles. Nous interrogerons l'enseignant sur ce choix lors de notre dernier entretien.

Différentes techniques apparaissent mais il y en a une que l'on retrouve principalement : le comptage de 1000 en 1000, 100 en 100 ... On peut voir aussi la technique utilisant la valeur des chiffres pour laquelle on a un élément de justification qui relève du calcul ($10 \times 10 = 100$). Pour les autres, elles ne sont pas justifiées (elles utilisent l'addition posée ou le passage par la numération orale). On peut donc parler de techniques faibles.

On peut aussi voir que les unités de la numération et le tableau de numération (m, c, d, u écrits en dessous du nombre) sont utilisés pour faire le lien entre les unités de la numération et le rang dans le nombre en chiffres (aspect positionnel).

L'aspect décimal semble avoir une place importante, mais en fait c'est parce qu'il apparaît dans une mise en commun qui dure 15'. Nous analyserons plus en détail cette mise en commun dans l'analyse de la mise en œuvre.

T₃ : avancer/reculer

	Type de tâche		Techniques	Technologies	
	Collectif	Individuel/ en groupe	T _{3,1}	Aspect décimal	Aspect position.
Temps	19'	22'30	15'	0'	0'

Tableau 15 : temps approximatif pour avancer/reculer, Marc

Ce type de tâche fait l'objet de la troisième séance. Il est ensuite beaucoup travaillé dans les séances suivantes.

Une technique apparaît dans la classe mais elle n'est jamais justifiée en lien avec les relations entre les unités de la numération. Le compteur est systématiquement utilisé. Il a un rôle d'élément technologique : les manipulations effectuées sont justifiées par le fonctionnement du compteur.

T₂ : Lire/écrire :

	Type de tâche		Technique	Technologies
	Collectif	Individuel / en groupe		
Temps	28'	12'30	5'	0'

Tableau 16 : temps approximatif pour lire/écrire, Marc

Dans les séances observées la lecture des nombres apparaît principalement pour communiquer avec les nombres. Il y a juste une brève de technique qui apparaît (suite à une difficulté d'un élève) concernant le cas particulier de la lecture d'un nombre ayant le chiffre 1 au rang des milliers.

T₄ : encadrer, ranger

Ce type de tâche est travaillé dans les séances non observées où il prend une place importante. Il n'y a pas de travail sur la comparaison de deux nombres mais directement des encadrements et rangements.

c) Les entretiens

L'entretien qui fait suite à la première séance montre une difficulté à dire les difficultés rencontrées par les élèves malgré une bonne connaissance des procédures utilisées par ceux-ci. Nous utiliserons les lettres E pour désigner l'enseignant et O pour l'observateur. Les +, ++ ou +++ traduisent des moments plus ou moins long de pause dans le discours.

E : [...] Bon c'est le dernier qui a posé problème effectivement. Le problème d'une dizaine. Alors qu'en comptant de 1 en 1, de 10 en 10 tu vois ils sont arrivés à trouver le nombre, donc euh + Alors c'est pas facile il y a encore du travail à faire.

O : oui

E : donc après ce que je pense c'est qu'il faudra utiliser les compteurs.

O : oui

E : +++ (réfléchit) Bon parce que là ils ont écrit douze, onze, deux, ils ont cru que c'était comme ça mais bon là y'avait un problème, y'avait une centaine de plus parce qu'on dépassait cent.

[...]

E : Et le passage aux centaines du genre 1290, là ils ont du mal. C'est là où les compteurs peuvent aider.

O : Ah oui d'accord.

E : (sort ses compteurs) Peut-être que vendredi on peut passer sur le travail sur compteur : se déplacer de 1 en 1. Je ne sais pas du genre 1290 on avance de 1 en 1 jusqu'à 1310 donc y aura le passage de la centaine ou le passage des mille du genre si on compte de 100 en 100 de 1500 à 2300 donc le changement de mille. Le cap des mille.

O : oui d'accord.

E : Quitter un peu ce travail là aussi. Ne pas toujours faire la même chose.

O : d'accord.

E : J'aurais peut-être dû m'arrêter là (montre l'avant dernier cas), les lâcher mais bon.

O : on a toujours envie de savoir ...

E : eh bien voilà je voulais les titiller un peu. C'est ce que j'ai dit, alors bon. Mais n'empêche qu'en passant au tableau ils y sont arrivés. Les deux y sont arrivés alors qu'ils étaient 3 ou 4 à avoir écrit 12112.

La difficulté pour Marc est bien dans le « passage » d'une centaine à une autre qui provoque un changement de millier (il nous semble que c'est une vision très liée au fonctionnement du compteur) mais les éléments technologiques sous jacents (relation entre les unités de la numération) n'apparaissent pas dans son discours. On peut remarquer aussi que le cas permettant l'utilisation de l'aspect décimal apparaît pour lui comme un exercice pour « titiller » les élèves.

Quand il évoque les compteurs ils apparaissent comme un moyen d'aider les élèves à gérer les « passages » aux centaines ou milliers dans la procédure de comptage mais cela ne permet pas de traiter le problème des échanges entre les unités. C'est alors le compteur qui va intervenir comme élément technologique, ce qui occulte encore l'aspect décimal de la numération, comme on peut le voir dans l'entretien qui suit la deuxième séance :

E : Peut-être prendre les compteurs. Et puis avancer. Par exemple on se fabrique 999. Trouver le nombre qui vient juste après. Donc ils se rendent compte qu'après le 9 il y a un 0 et il faut changer là (montre le rang des milliers). Même chose on se fabrique 1198, on avance de 1, on avance encore de 1, et tiens ! Qu'est-ce qui se passe ? »

Nous avons également l'impression lors de ces entretiens que lorsque Marc évoque son projet global il s'agit pour lui d'une succession d'activités mais l'on ne perçoit pas clairement l'intérêt de chacune, les liens entre ces activités (hormis le compteur pour aider à compter de 1 en 1, 10 en 10 etc.), l'intérêt de leur ordre d'apparition, ce qu'il y a à savoir, etc. Tout se passe comme si la progression se résumait finalement à une liste de types de tâches à travailler au cours de laquelle les enfants vont se construire les techniques attendues.

On peut le voir en particulier dans les arguments donnés par le maître pour changer d'activité. Il semble que le principal intérêt ne soit pas d'ordre mathématique mais plutôt pédagogique : « ne pas toujours faire la même chose », comme il le dit lors du premier entretien. On retrouve cela aussi lors du deuxième :

E : De toute façon pour que ça se mette en place il faut encore plusieurs séances à faire dessus ++ Y'a plusieurs séances. Et puis revoir de temps en temps.

O : alors la prochaine séance tu travailles ?

E : Alors la prochaine séance, ce que j'avais pensé c'était peut-être changer, hein, changer un petit peu, de forme d'approche des nombres. Peut-être prendre les compteurs.

Et lorsque nous évoquons sa progression l'enseignant donne une liste de tâches à réaliser (deuxième entretien) avec toutes les variantes possibles :

O : ta progression grosso modo, c'est tu vas faire ça (*le travail sur compteur*) et après ?

E : Après manipulation. Se déplacer de 1 en 1. Voir qu'il y a des passages. Des changements de dizaines, des changements de centaines, des changements des mille. Et après on fait de 2 en 2. Reculer aussi de 1 en 1. Reculer de 2 en 2, de 10 en 10, de 100 en 100, de 1000 en 1000.

O : oui. Après tu abordes la comparaison ?

E : la comparaison ? ++ (*réfléchit*) Aussi ce qu'on peut faire c'est aussi faire des encadrements. On a un nombre, on essaie de trouver le nombre avant le nombre après. Par exemple 699, le nombre avant, le nombre après, on peut le faire avec les mille, faire des rangements de nombres. Dans les encadrements on peut aussi chercher la dizaine

avant, la dizaine après. Donc là le compteur est intéressant au niveau utilisation. Chercher aussi la centaine avant et la centaine après. Faire des encadrements comme ça. O : d'accord.

E : Et puis des rangements avec les signes plus petit ou égal quand tu compares des nombres. Et toujours un nombre peut être représenté sous différentes écritures. Donc là y'a de quoi travailler toute l'année avec ça.

Le niveau du projet didactique global de Marc semble donc piloté par un ensemble de types de tâches à parcourir, mais il n'apparaît pas dans l'entretien de liens entre ces types de tâches et des savoirs qui pourraient les justifier.

Lors de l'entretien final, Marc nous a montré sa « programmation » : il s'agit en fait des compétences du programme de 2002 qui sont réécrites avec une croix pour chaque période de l'année afin de signaler qu'elles seront travaillées dans toutes les périodes. Cet outil ne donne guère d'information sur l'OM locale.

Cet entretien nous a permis également de confirmer l'importance du type de tâche avancer/reculer et donc de l'aspect algorithmique de la suite écrite :

E : Je pense qu'ils ont bien compris euh + les relations entre les nombres et comment ça se passe. Après 1999, on est dans la dernière série des mille et après on passe à une nouvelle série des mille. Donc ce passage là des nombres + le passage des centaines aussi. Donc voilà ça commence à être acquis.

Marc évoque aussi le programme en disant qu'avec les nouveaux programmes, il faut aller jusqu'au million, ce qui lui semble être trop précoce car d'habitude il se limitait aux nombres à quatre chiffres (sans s'empêcher d'aller au-delà). Cela semble donc être une contrainte qui a une influence sur son travail. Mais quand je lui demande s'il y a eu des changements dans sa progression, il évoque seulement une place plus importante donnée à la manipulation depuis quelques années (ce qui n'est pas lié au changement de programme) tout en indiquant que sa « trame » (sa programmation liée aux compétences de 2002) reste inchangée.

O : concernant ta progression as-tu effectué des changements, y a-t-il pour toi des passages importants ?

E : non dans ma progression même s'il y a des nombres plus grands je n'ai rien changé, ça fait des années que je pratique comme ça euh ++ Je pense manipuler un peu plus maintenant depuis deux trois ans que je ne le faisais au départ tu vois. Donc par les jetons de cent, de dix, de un et de mille. Je manipule beaucoup les nombres et d'ailleurs pour les découvertes des techniques opératoires je fonctionne beaucoup avec ça. Je pense à la soustraction notamment. Donc beaucoup de manipulation. Je pense que ça les aide beaucoup. Quand on dit vingt-cinq dizaines, ils se fabriquent avec les jetons de 10 le nombre et après ils trouvent que ça fait deux cent cinquante. Dans à force de le répéter vingt-cinq dizaines ils ont fini par faire l'acquisition que ça fait deux cent cinquante. Donc je pense manipuler un peu plus que je ne le faisais autrefois. Parce que sentais qu'il y avait des manques, donc avec l'expérience, tu te crées toujours ... + on fait jamais deux fois la même chose d'une année sur l'autre. Et on fait jamais la même chose en fonction du public d'une année sur l'autre. Le public n'est pas le même, les enfants ne sont pas les mêmes donc faut toujours essayer de trouver une petite astuce pour faire passer une notion. Ça fait dix ans ou onze ans que j'ai cette classe mais c'est jamais la même chose d'une année sur l'autre même si je suis ma trame.

Enfin, nous évoquons également dans cet entretien l'utilisation des nombres en unités puisque cette utilisation apparaît comme une marge de manœuvre investie par l'enseignant (cette utilisation est différente de ce que nous avons vu dans les programmes et manuels). En fait cela semble être lié à l'influence d'un collègue maître formateur qui a la classe de CM1/CM2 dans le même RPI (regroupement pédagogique intercommunal) ainsi qu'à l'utilisation d'un guide du maître (ERMEL). Il évoque aussi le lien avec le travail qui vient ensuite avec les

fractions et les décimaux, non à travers le contenu du programme mais à travers son expérience personnelle avec ses enfants.

O : Y'a quelque chose qui est intéressant dans ce que tu fais, que je n'ai pas vu dans les autres classes. Dans les autres classes je vois beaucoup de décompositions comme ça (ECPD ou ECPDG) qui correspondent à ce qu'on a dans les programmes et on a finalement assez peu de décomposition qui utilisent dizaines, centaines, unités et est-ce que tu sais d'où ça vient cette façon de travailler ?

E : je pense ... ++ en discutant avec mon collègue Pierre qui est maître formateur qui disait que même ses étudiants avaient beaucoup de mal en manipulant les nombres comme ça. Mais aussi par le fait que j'ai deux grands garçons mais qui sont passés par l'école et le collège, bon eux n'avaient pas de problème mais je me suis rendu compte que quand ils travaillaient les fractions, les décimaux, notamment les dixièmes, centièmes, s'ils n'ont pas fait l'acquisition des dizaines, centaines, ils auront du mal à faire les acquisitions des dixièmes, centièmes, comprendre ce que ça veut dire, tu vois.

O : est-ce que tu vois des avantages à cette écriture par rapport à celle-là (nombre en ECPDG) ou celle-ci (nombre en ECPD) [...] car c'est finalement celle-ci (nombre en unités) que tu utilises le plus ?

E : oui alors qu'autrefois c'était l'inverse.

O : ah oui ?

E : oui j'utilisais plus celles-ci (nombre en ECPD et ECPDG) quand j'étais lié aux fichiers [...] Du coup je me suis un peu inspiré d'ERMEL, bon je ne suis pas la méthode, mais ... + pour créer ces fiches. Donc un petit peu d'ERMEL aussi. Ce qui m'a incité un petit peu à changer ma façon de faire et aussi en discutant avec Pierre, mon collègue.

d) Conclusion

Les entretiens avec l'enseignant nous montrent que l'OM locale est piloté par la rencontre avec différents types de tâches successifs. Les deux éléments technologiques qui ressortent de notre étude sont l'aspect positionnel de la numération (avec les m, c, d, u qui jouent le rôle de tableau de numération) et l'aspect algorithmique de la suite écrite (qui apparaît à travers le compteur).

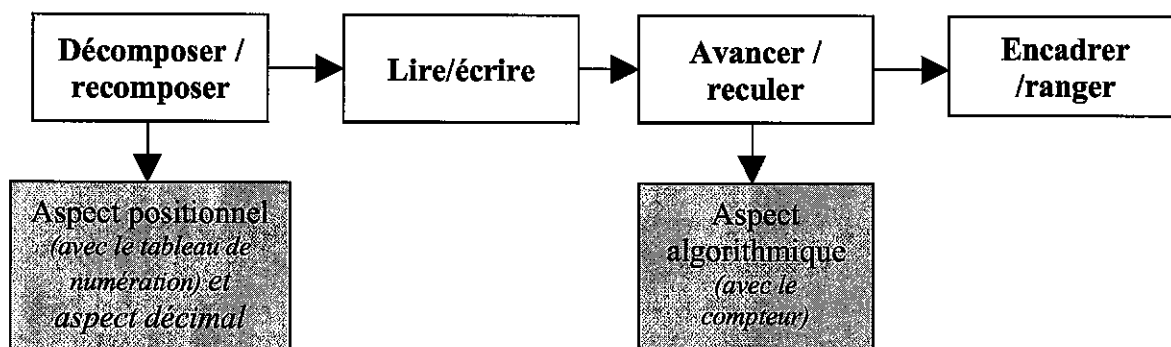


Figure 31 : OM locale du projet global de Marc

Concernant l'OM locale du projet global de cet enseignant, on peut noter lors de ces trois premières séances, une centration autour de deux types de tâches (décomposer/recomposer et avancer/reculer) et une utilisation du lire/écrire principalement pour communiquer.

Ces types de tâches sont susceptibles de faire apparaître l'aspect décimal de la numération mais celui-ci n'est pourtant pas utilisé (ou quasiment pas) et le maître favorise des techniques

pour lesquelles le recours à cet élément technologique n'est pas nécessaire : comptage et utilisation « mécanique » du compteur.

Lors des séances suivantes, le travail est davantage centré sur l'aspect algorithmique de la suite des nombres, avec le compteur qui fonctionne comme élément technologique. Les types de tâches travaillés sont alors : avancer/reculer et encadrer/ranger.

La formulation des techniques a une place importante dans les phases collectives, mais on en reste donc à des techniques faibles (non justifiées).

Cette pauvreté des éléments technologiques de cette OM rend difficile son positionnement dans l'OM de référence.

Cela est confirmé par les entretiens qui montrent que du point de vue du niveau +2 dans le modèle de l'activité du professeur, les savoirs semblent invisibles, celui-ci étant piloté principalement par les types de tâches à réaliser au cours de ce projet. Il n'y a en fait que l'aspect algorithmique de la suite écrite qui y apparaît.

Concernant les ostensifs, les unités de la numération servent ici à désigner le nom des rangs dans le nombre en chiffres mais sont aussi utilisées, comme dans l'OMR classique, pour les décompositions et recompositions dans des nombres en unités comme par exemple « 12c 11d 2u » (où les unités ont alors un statut d'unités de mesure), sans le signe d'addition. Cependant nous pouvons remarquer qu'en l'absence de matériel de numération ou de collections, ces unités ne font pas référence directement à des quantités.

Cette utilisation, qui apparaît comme une marge de manœuvre investie par l'enseignant, est liée à une expérience personnelle de l'enseignant. C'est en effet un de ses collègues, qui est maître formateur, qui l'utilise dans sa classe et avec les professeurs des écoles stagiaires. Il précise également l'influence du guide ERMEL (édition consultée : 1995) dans ce choix (qui est également utilisé par le maître formateur cité).

Cependant concernant cet ostensif on peut remarquer que l'on n'observe pas vraiment de « travail » qui l'utilise. En effet les unités sont directement associées au rang dans le nombre en chiffres. On ne voit pas par exemple de calcul avec ces unités. Cela est peut-être lié à la contrainte de non-mélange du registre de la langue naturelle et du registre algébrique qui semble limiter les utilisations possibles de la numération en unités.

Pour faire le lien entre les unités et le rang dans le nombre en chiffres, le maître écrit m, c, d, u au-dessous du nombre ce qui revient à utiliser un tableau de numération.

Enfin le compteur est lui aussi utilisé. Son utilisation est associée au type de tâche avancer/reculer, où il apparaît comme élément technologique.

Enfin les nombres en ECPD ou en ECPDG sont aussi utilisés pour les décompositions et recompositions, notamment lors de l'évaluation (ce qui montre l'influence des contraintes institutionnelles).

Finalement, dans ce projet global de l'enseignant on retrouve certaines contraintes repérées dans l'étude des programmes et manuels de la partie C. Les types de tâches sont globalement assez proches. On retrouve l'importance du type de tâche décomposer/recomposer pour travailler l'aspect positionnel de la numération. On peut aussi voir l'absence de l'aspect décimal comme une conséquence de ces contraintes.

Par contre l'enseignant a investi certaines marges de manœuvre en particulier concernant l'utilisation de l'ostensif nombre en unités pour les décompositions et recompositions. On ne voit pas non plus de trace du logocentrisme des programmes 2002 puisque, ici, les techniques sont souvent formulées.

II.3 Le projet global du 2^{ème} enseignant (Sophie)

Nous avons observé également trois séances sur la numération. Les deux premières séances observées sont consécutives. Il y a ensuite eu une séance pour laquelle nous n'avons que les

exercices distribués aux élèves qui a eu lieu avant la troisième séance observée. L'évaluation finale s'est déroulée la semaine suivante. La séquence s'est déroulée sur un temps assez court (environ trois semaines pour les cinq séances).

a) Description des OM ponctuelles

Séance 1 (24/11/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et <u>éléments</u> <u>technologiques</u>	Ostensifs utilisés
<i>La première activité est le jeu du « bowling » : on a des quilles de 1, 10, 100 et 1000 représentées. On cherche combien de points marqués quand on renverse un certain nombre de quilles (entre 1 et 9 de chaque sorte). Voici les différents nombres à recomposer 4q de 1000, puis 1q de 1000, 5q de 100, 2q de 10, 3q de 1, puis 3q de 1000, 7q de 10, 6q de 1, puis 6q de 1000, 5q de 100, 1q de 10 et enfin 8q de 1000, 3q de 1.</i>			
Présentation de l'activité. Collectif, 5'			
Recherche individuelle, 15'	T ₁ : recomposer un nombre		« Quilles de 1 », « quilles de 10 », etc. Nombre en chiffres.
Mise en commun. Collectif, 10'	T ₁ : recomposer un nombre	<p>T_{1,1} : écriture en ECPDG et associer chaque ECPD au rang. <u>Le quatrième rang (rang des 1000) s'appelle les « unités de mille » :</u></p> <p style="text-align: center;">unités de c d u mille 5 2 3</p> <p>T_{1,2} : écriture en ECPD et calcul (éventuellement avec addition posée en colonnes) <u>Addition posée en colonnes comme élément technologique :</u></p>	- Nombre en chiffres, nombre en ECPD, en ECPDG pour les techniques, nombre en mots (lors de la mise en commun la maîtresse ou les élèves sont amenés à lire des nombres pour communiquer les résultats). - unités de la numération pour la technologie.
<i>Pour l'activité suivante, il s'agit toujours du jeu du bowling mais les élèves doivent cette fois décomposer le nombre. Voici les nombres à décomposer : 5000, puis 6210, puis 3004 et enfin 1437.</i>			
Présentation de l'activité. Collectif, 3'	T ₂ : lire un nombre (lors de la présentation de l'exercice, la maîtresse fait lire les nombres de l'énoncé aux élèves)	La technique est donnée uniquement pour la lecture des nombres de la forme 1... : « le 1 quand il est au début on lit mille »	
Recherche Individuel, 15'	T ₁ : décomposer un nombre		
Mise en commun Collectif, 8'	T ₁ : décomposer un nombre	<p>T_{1,1} : associer chaque rang à l'ECPD correspondante. Exemple : 6210 = (6 × 1000) + (2 × 100) + (1 × 10)</p> <p>T_{1,1bis} : associer chaque rang au type de quille correspondant. Exemple : 6210 = 6 quilles de 1000, 2 quilles de 100, 1 quille de 10.</p>	Nombre en chiffres, nombre en mots (pour communiquer les résultats), nombre en ECPD, en ECPDG et « quilles de 1, 10, 100, 1000 »
<i>La troisième situation s'appuie toujours sur le jeu du bowling, mais il s'agit maintenant de lire des nombres donnés par</i>			

une décomposition en quilles de 1, 10, 100, 1000. Voici les nombres à lire : 9q de 1000, 2q de 100, puis 1q de 1000, 3q de 100, 1q de 10, puis 5q de 1000, 9q de 1, puis 2q de 1000, 8q de 100, 2q de 10, 1q de 1 et enfin 4q de 1000, 1q de 100, 3q de 10, 2q de 1.			
Collectif, 6'	T ₂ : lire un nombre <i>Ici le nombre n'est pas écrit en chiffres mais on a seulement sa décomposition avec des quilles (par exemple 9 quilles de 1000 et 2 quilles de 100 représentées).</i>	T _{2,1} : lire le nombre de quilles de 1000 suivi de « mille » (exception pour les nombres de la forme 1...) puis lire le nombre à trois chiffres.	« quilles de 1, 10, 100, 1000 » représentées, nombre en mots.
La dernière situation s'appuie, elle aussi, sur le jeu du bowling. Tout comme pour la première il s'agit de recomposer des nombres : 2q de 100, 3q de 10, 7q de 1000, puis 5q de 1000, 6q de 1, 8q de 10 et enfin 2q de 1, 3q de 1000, 5q de 100, 2q de 10. Les quilles sont cette fois dans le désordre.			
Individuel, 5'	T ₁ : recomposer un nombre		« quilles de 1, 10, 100, 1000 »
Mise en commun Collectif, 5'	T ₁ : recomposer un nombre	T _{1,1} et T _{1,2} T _{2,1}	Nombre en chiffres, nombre en mots (<i>pour communiquer les résultats</i>) et « quilles de 1, 10, 100, 1000 »

Tableau 17 : séance 1 Sophie

Séance 2 (28/11/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et éléments technologiques	Ostensifs utilisés
Première activité. Le maître dicte un nombre à chaque groupe qui doit l'écrire en chiffres, en mots et faire sa décomposition en ECPD. Les enfants échangent ensuite leurs étiquettes (avec nombre en chiffres ou ECDP) et doivent retrouver le nombre d'un autre groupe. Nombres donnés : 7451, 6758, 2813, 4385, 9047, 6009, 8072, 5307.			
Jeu par groupes de 2/3 élèves, 30'	T ₂ : écrire un nombre T ₂ : lire un nombre T ₁ : décomposer un nombre T ₁ : recomposer un nombre		Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en ECDP ou ECPDG
Discussions autour de deux décompositions produites par des groupes Collectif, 5' <i>Un premier échange autour de 800d3u puis 9m4d7u.</i>	T ₁ : recomposer un nombre	T _{1,3} : convertir en unités et additionner les unités (800d = 8000u et 8000+3=8003)	Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en unités
Deuxième activité. Les enfants ont des étiquettes de mots nombres (un, deux, ..., dix, onze, ..., vingt ; trente, ... cent et mille) qu'ils doivent utiliser pour former un nombre. A l'intérieur de chaque groupe, les élèves écrivent leur nombre puis les rangent (le gagnant est celui qui a le nombre « du milieu »).			
Présentation du jeu Collectif, 10'			
Jeu par groupes de 3 élèves, 32'	T ₂ : écrire un nombre T ₃ : ranger des nombres		Nombre en chiffres, nombre en mots

Tableau 18 : séance 2 Sophie

Séance intermédiaire :

Il s'agit d'une séance non observée pour laquelle nous n'avons eu accès qu'aux exercices distribués (annexe).

Il y a d'abord eu un travail autour de quelques exercices avec une remédiation pour les élèves en difficulté. Pour les autres, la maîtresse a distribué ensuite une feuille d'exercices supplémentaires à faire en autonomie (annexe).

Voici les types de tâche en jeu.

□ Les premiers exercices :

T₂ : écrire un nombre en chiffres (ex 1)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en mots

T₂ : écrire un nombre en mots (ex 2)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en mots

T₁ : décomposer un nombre (ex 3)

Ostensif : nombre en chiffres, nombre en ECPD, nombre en ECPDG, nombre en unités

T₁ : recomposer un nombre (ex 4)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en unités

□ Les exercices supplémentaires :

T₃ : trouver un nombre compris entre deux nombres (ex 2)

Ostensif : nombre en chiffres

T₁ : recomposer un nombre (ex 3)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPD

T₃ : comparer deux nombres dont un est écrit en nombre en ECPDG (ex 4)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPDG

T₁ : décomposer un nombre (ex 5)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPD

T₂ : écrire un nombre en chiffres (ex 6)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en mots

T₂ : écrire un nombre en mots (ex 7)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en mots

Séance 3 (9/12/08) :

Episodes Durée Organisation	Types de tâches	Techniques et éléments technologiques	Ostensifs utilisés
<i>La première activité est le jeu des cartons des nombres. Il s'agit d'associer l'écriture en chiffres (formée avec des étiquettes d'ECPD) à l'écriture en mots (formée avec des étiquettes de mots nombres). C'est un jeu par groupes de 2/3 élèves : ce sont les élèves qui déterminent les nombres.</i>			
Présentation du jeu Collectif, 1'30			Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en ECPD
Recherche par groupes de 2/3 élèves, 19'	T ₂ : lire un nombre (écrit en ECPD ou en chiffres) T ₂ : écrire un nombre (en ECPD ou en chiffres)		Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en ECPD
Correction collective, 2' <i>La maîtresse demande s'il y a encore des problèmes avec l'écriture des chiffres, des lettres. Elle revient sur une erreur d'un élève.</i>	T ₁ : recomposer un nombre <i>(pour vérifier le résultat d'un élève)</i>	T _{1,2} : écriture en ECPD et calcul <i>Pour vérifier la maîtresse dessine les étiquettes les unes sous les autres comme pour une addition posée :</i> 3000 300 4	Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en ECPD

		5	
La deuxième activité est le jeu « qui a le plus grand nombre ? » : des équipes ont chacune un nombre et doivent se poser des questions pour savoir qui a le plus grand nombre (avec interdiction de dire ce nombre dans la question).			
Présentation du jeu : Collectif, 7'			Nombre en chiffres, nombre en mots, nombre en unités
Recherche par groupes de 2/3 élèves, 19'	T ₃ : comparer des nombres		Nombre en chiffres, nombre en mots (<i>pour communiquer</i>)
Mise en commun et synthèse. Collectif, 6'30 <i>La maîtresse met en commun les procédures puis demande : « comment est-ce qu'on fait pour comparer deux nombres » ?</i>	T ₃ : comparer des nombres	$\overline{5},1$: comparaison des nombres de chiffres et s'il y a le même nombre de chiffres, comparaison des chiffres de plus haut rang successivement	Nombre en chiffres, nombre en mots, unités de la numération
La dernière activité est une liste d'exercices sur fiche : <i>Ex 1 : trouver le nombre suivant et le nombre précédent de 1009, 1048, 2999, etc. Ex 2, 3 : donner des nombres situés entre deux nombres donnés. Ex 4 : comparer deux nombres Ex 5 : ranger des nombres dans l'ordre croissant</i>			
Présentation de la fiche d'exercices. Collectif, 7'			
Recherche individuelle, 16'	T ₄ : avancer/reculer dans la suite écrite des nombres <i>Exercice 1</i> T ₃ : intercaler un nombre (entre deux nombres donnés) <i>Exercices 2 et 3</i> T ₃ : comparer des nombres <i>Exercice 4</i> T ₃ : ranger des nombres <i>Exercice 5</i>		Nombre en chiffres

Tableau 19 : séance 3 Sophie

Séance suivante :

Il y a une dernière séance à laquelle nous n'avons pas eu accès où a été abordé le type de tâche suivant (d'après un entretien avec l'enseignante) :

T₃ : encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs de 10, 100 ou 1000.

Ostensif : nombre en chiffres

Evaluation :

T₁ : recomposer un nombre (ex 1)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPD

T₁ : décomposer un nombre (ex 2)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPD ou en ECPDG

T₂ : écrire un nombre en mots (ex 2)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en mots

T₁ : passer d'une décomposition à une autre (ex 3)

Ostensif : nombre en unités, nombre en ECPD en nombre en ECPDG

T₃ : comparer deux nombres (ex 4)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPDG

T₃ : ranger des nombres (ex 5)

Ostensif : nombre en chiffres et nombre en ECPDG

T₃ : encadrer un nombre entre deux multiples consécutifs de 100 (ex 6)

Ostensif : nombre en chiffres

T₃ : Situer approximativement des nombres sur une droite graduée (ex 7)

Ostensif : nombre en chiffres, droite numérique

Les traces écrites de « leçons » :

Il n'y a pas de trace écrite de leçon dans le cahier des élèves, ni d'affiche dans la classe.

b) Analyse de l'OM enseignée

Nous indiquons les types de tâches par ordre décroissant du temps d'apparition dans la classe.

T₁ : Décomposer/recomposer :

	Type de tâche		Techniques			Technologies
	Collectif	Individuel/ en groupe	T _{1,1}	T _{1,2}	T _{1,3}	Aspect positionnel
Temps	30'	60'	23'	17'	5'	10'

Tableau 20 : temps approximatif pour décomposer/recomposer Sophie

Ce type de tâche est travaillé dans les trois séances observées et a aussi une place importante dans l'évaluation finale de la séquence. On peut noter une place importante du travail en collectif (le tiers du temps total). Ce choix de la maîtresse peut-être lié à des difficultés rencontrées par les élèves.

Il s'agit de décomposition/recomposition avec les ostensifs « paquets de », nombre en ECPD et en ECPDG (et unités de la numération dans la séance non observée ainsi que dans l'évaluation). Ce type de tâche est donc associé à une variété importante d'ostensifs.

Trois techniques apparaissent mais deux sont principalement formulées et sont justifiées. Elles correspondent aux techniques et technologies (aspect décimal uniquement) de l'OMR moderne (mais le nom des rangs est donné avec la numération en unités et il est écrit m, c, d, u au-dessus du nombre comme dans un tableau de numération) et de l'OMR moderne adaptée (la règle positionnelle de calcul est donnée par l'addition posée avec des colonnes). On peut aussi remarquer que l'ECPD « 1000 » est l'objet premier à partir duquel on va définir l'unité de numération « unité de mille » mais sans prendre en considération les relations entre ces ECPD. L'aspect décimal n'apparaît donc dans aucune séance.

Remarquons enfin que du point de vue du contexte d'utilisation des nombres, on travaille ici avec des valeurs (quilles 1/10/100/1000). L'aspect « quantité » n'intervient pas.

T₂ : lire/écrire un nombre

	Type de tâche		Techniques	Technologies
	Collectif	Individuel/ en groupe	T _{2,1}	
Temps	28'	1h02'	14'	0'

Tableau 21 : temps approximatif pour lire/écrire Sophie

On remarque que contrairement au type de tâche précédent on a un travail en individuel qui a une part beaucoup plus importante que le travail en collectif, ce qui peut être lié à des difficultés moins importantes. La maîtresse laisse un topos plus important aux élèves.

Ce type de tâche apparaît non seulement pour communiquer sur les nombres (alors non comptabilisé dans le temps) mais aussi dans des activités spécifiques de passage de la

numération orale à la numération écrite. Une technique est alors formulée mais elle correspond au cas particulier où le nombre à lire est donné sous forme d'une décomposition en « paquets de » (avec des quilles). Elle n'est pas justifiée.

Les ostensifs « paquets de » et ECPD sont utilisés pour faire des liens entre les nombres en mots et les nombres en chiffres.

T₃ : Comparer, ranger, intercaler

	Type de tâche		Techniques	Technologies
	Collectif	Individuel/ en groupe		
			T _{3,1}	
Temps	6'30	1h07'	6'30	0'

Tableau 22 : temps approximatif pour comparer Sophie

Là encore, ce type de tâche est beaucoup travaillé en individuel, mais par contre pour celui-ci très peu en collectif.

Une technique est formulée mais n'est pas justifiée (technique faible).

On utilise ici uniquement les ostensifs nombres en chiffres et nombres en mots.

T₄ : Avancer/reculer

	Type de tâche		Techniques	Technologies
	Collectif	Individuel/ en groupe		
Temps	0'	16'	0'	0'

Tableau 23 : temps approximatif pour avancer/reculer Sophie

Cette fois il s'agit d'un type de tâche travaillé uniquement lors d'un exercice individuel mais qui a en fait était travaillé aussi en « jeu du furet » oral (comme elle nous le précisera lors d'un entretien).

L'ostensif utilisé est le nombre en chiffres. Même s'il est souvent associé à ce type de tâche, ici le compteur n'est pas utilisé.

c) Les entretiens

Lors du premier entretien (non enregistré), Sophie nous fait part de son étonnement face à la réussite des élèves. Elle se demande même si elle ne va pas modifier le contenu de la séance suivante prévue (lecture de nombres avec étiquettes et décompositions) pour aller plus vite.

Nous n'avons pas pu avoir d'entretien suite à la deuxième séance (suite à des problèmes familiaux de l'enseignante qui a été obligée de quitter l'école sitôt la séance terminée).

Lors de l'entretien qui a suivi la troisième séance, nous avons voulu revenir sur un exercice donné dans une séance observée, dans lequel les enfants avaient à recomposer entre autres : 24 dizaines, 5 centaines, 8 unités puis 6 dizaines, 15 centaines, 7 milliers. Ces exercices se distinguent des autres pour deux raisons :

- ils font travailler les recompositions avec les unités de la numération, ce qui n'est pas ce qui se faisait dans les séances précédentes (nombre en ECPD, en ECPDG ou paquets de) ;
- ils pourraient nécessiter d'utiliser les relations entre les unités de la numération (donc sont susceptibles de faire apparaître l'aspect décimal de la numération). En effet, pour le deuxième cas par exemple il faut échanger 10 centaines contre 1 millier.

Nous avons donc interrogé Sophie sur ce qu'elle pensait de cet exercice. Il en ressort que pour elle il s'agit d'un exercice pour aller plus loin. D'ailleurs tous les enfants n'ont pas eu le temps de le faire et pour ceux qui l'ont fait, elle est passée les corriger individuellement. Il n'y a pas eu de phase collective sur cet exercice. Elle ajoute qu'il sera peut-être retravaillé plus tard dans l'année, mais que pour le moment ce n'est pas le plus important.

Nous discutons également de l'exercice de fin de la troisième séance observée où il s'agit d'avancer et reculer dans la suite écrite. L'enseignante précise alors qu'elle a fait un travail à l'oral (« jeu du furet »).

Enfin, nous avons fait un dernier entretien suite à l'évaluation. Nous lui demandons tout d'abord d'interpréter les résultats des élèves. Sophie revient tout d'abord sur le premier exercice dont nous donnons ici deux exemples de production d'élèves qui ont commis des erreurs :

□ Océane :

Ecris le nombre correspondant aux écritures :

5 000 + 600 + 3 : 5 603

(4 x 1 000) + 9 : 4 009

9 m 8 d : ? 9 080

12 centaines, 3 milliers : ~~3 120~~ 4 200

(2 x 1 000) + (5 x 10) : 2 050

67c 8d 9u : 6789

6 000 + 80 + 1 : 6 081

25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : ~~4 625~~ 4 850

□ Frances :

Ecris le nombre correspondant aux écritures :

5 000 + 600 + 3 : 5 603

(4 x 1 000) + 9 : 4 009

9 m 8 d : ? 9 080

12 centaines, 3 milliers : ~~3 120~~ 4 200

(2 x 1 000) + (5 x 10) : 2 050

67c 8d 9u : 6789

6 000 + 80 + 1 : 6 081

25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : ~~4 625~~ 4 850

Figure 32 : extrait de l'évaluation finale de deux élèves

Voici un extrait de la transcription (E : enseignante, O : observateur) :

E : [...] Le seul exercice on va dire qui n'a pas été tout à fait bien réussi c'est le premier en fait pour écrire le nombre correspondant aux écritures. Donc là on a les décompositions et après il fallait retrouver le nombre entier.

O : oui

E : c'est là où j'ai eu le plus d'erreur dans le sens où j'avais fait exprès de mettre des nombres dans lesquels on n'avait pas forcément le ++ euh ++ oh là là je perds mes mots ! + enfin les unités de mille, les centaines, les dizaines et les unités enfin dans l'ordre. On n'avait pas forcément l'ordre à chaque fois qui était imposé. J'avais inversé parfois, j'avais d'abord mis le nombre de centaines et le nombre de milliers ou alors j'avais pas mis de centaines ou voilà + Et là c'est là où ils se sont trompés en général, enfin y'en a une partie, on va dire la moitié, se sont trompés dans ces cas-là. Ils ne font pas attention, de suite ils écrivent le nombre par rapport à ce qui est écrit dans l'ordre en fait

On peut donc remarquer que dans les variables de l'exercice citées, elle n'évoque que l'ordre de présentation des unités de la numération mais ne parle pas du fait d'avoir un nombre à deux chiffres pour certaines unités ce qui met en jeu l'aspect décimal de la numération et qui est à l'origine des principales difficultés rencontrées par les élèves. Les erreurs des élèves sont ici ramenées à des fautes d'inattention.

On peut aussi noter une difficulté à parler des unités de la numération (« oh là là je perds mes mots ») : il n'existe en effet pas de vocabulaire institutionnel (dans les programmes ou manuels) pour les évoquer.

Sophie poursuit :

E : [...] ça je l'avais mis c'était quand même assez difficile, hein, je le reconnais.

O : c'est-à-dire qu'au niveau de tes attentes ... T'attendais vraiment la bonne réponse ou c'était pour voir s'ils allaient plus loin ?

E : non là ceux que j'avais mis là c'était pour voir s'ils étaient capables d'aller plus loin.

O : d'accord.

E : Donc là par rapport à ces réponses là, non, non, c'était des attentes quand même ... Voilà ceux qui étaient capables vraiment qui avaient compris qui étaient capables de manipuler dans tous les sens c'est vraiment qu'ils faisaient attention. Alors y'en a aussi qui m'ont fait des étourderies, dans le sens, où elle, elle en était capable mais elle n'a pas fait attention.

O : oui ?

E : Y'a deux types d'élèves en fait. Ceux qui n'ont pas fait attention dans le sens où c'était plutôt des étourderies et y'en a d'autres comme Théo, lui il ne maîtrise pas encore tout à fait.

Ici on sent bien encore chez Sophie une difficulté à faire une analyse des difficultés des élèves. Elle fait alors un classement des types d'erreur : étourderie et « ne maîtrise pas ». L'aspect décimal n'intervenant toujours pas, nous décidons alors de faire un parallèle avec le travail qu'elle avait effectué sur les nombres à trois chiffres où justement il était en jeu à travers le type de tâche « nombre de » qui était travaillé dans une situation appelée « les craies » où il s'agit de faire des commandes de craies par unités, paquets de 10 ou de 100 (situation extraite de l'ouvrage ERMEL CE2, dont le directeur de collection est aussi le directeur de la collection du manuel Cap Maths que nous avons étudié dans la partie B) :

O : j'ai repris un petit peu tout ce que tu avais fait et dans ce que j'ai vu sur les nombres à quatre chiffres tu as moins fait ce travail finalement qui correspond aux nombres qui sont là, où y'a des échanges à faire entre les dizaines et les centaines ou entre les centaines et les milliers finalement.

E : Oui, oui. Oui, là j'ai moins travaillé les échanges, oui c'est vrai. Non là j'étais plus dans la décomposition pure on va dire et puis dans la comparaison. Donc après là c'est peut-être un point qu'on va davantage approfondir sur la période suivante. Utiliser plus les échanges. On a aussi la monnaie. Donc c'est vrai qu'on va peut-être utiliser la monnaie pour voir des échanges supplémentaires.

Sophie fait-elle ici le lien entre les échanges et les difficultés rencontrées par les élèves dans l'exercice ? Cela est difficile à dire car c'est nous qui avons fait ce parallèle.

Il nous semble que l'on peut voir ici l'influence du manuel utilisé par la maîtresse (ERMEL CE2) dans ces choix globaux. En effet dans ce manuel (qui est en fait plutôt un guide destiné à l'enseignant), la première situation de l'année sur la numération est le problème des craies (cité ci-dessus). Les auteurs choisissent de travailler sur des problèmes du type « nombre de » qui sont donc susceptibles de faire faire des échanges et groupements. Ils utilisent alors des nombres à quatre chiffres dès cette première situation et l'aspect décimal peut donc y avoir sa place (même si on n'en trouve pas de trace dans la description de la situation). Mais Sophie, même si elle a utilisé cette situation, a choisi de ne pas introduire dès le début d'année les nombres à quatre chiffres mais de commencer par faire des révisions sur les nombres à trois chiffres (c'est une pratique courante). Cependant on peut voir qu'au moment de revenir sur les nombres à quatre chiffres en deuxième période de l'année, elle utilise la situation proposée par le manuel à ce moment-là, sans prendre en compte le fait que dans la progression du manuel, le type de tâche « nombre de » et donc éventuellement l'aspect décimal pour les nombres à quatre chiffres avaient déjà été travaillés.

Sophie hésite d'ailleurs un peu quant à ce travail pour la suite (c'est nous qui soulignons) : « Donc après là c'est peut-être un point qu'on va davantage approfondir sur la période

suivante. Utiliser plus les échanges. On a aussi la monnaie. Donc c'est vrai qu'on va peut-être utiliser la monnaie pour voir des échanges supplémentaires ». Ces hésitations peuvent faire penser qu'elle n'est pas maîtresse de sa propre progression sur la numération. Elle semble en fait ici faire référence au travail proposé par ERMEL sur la monnaie qui a lieu à la dernière période de l'année. A la lecture des activités proposées par ce manuel, on peut voir qu'il y a bien un travail proposé sur les équivalences en lien avec la numération. Il s'agit de comprendre les équivalences entre 1 euro et 100 centimes et ensuite entre les différentes pièces de 10 centimes, 20 centimes, etc. Cependant aucun nombre à quatre chiffres n'apparaît dans les activités proposées. Il n'y a donc aucune chance pour que cela permette de faire apparaître les relations entre les unités pour ces nombres.

Tout se passe donc comme si le projet global de Sophie était piloté par le manuel et qu'une modification de ce projet créait des trous dans l'organisation mathématique prévue par les auteurs que l'enseignante n'était pas à même de combler, par manque de vigilance épistémologique.

Ce phénomène a déjà fait l'objet d'interrogations de la part de Margolinas et Wozniak (à paraître) :

« Si l'œuvre se construit à partir d'un document générateur en incorporant des matériaux pédagogiques et didactiques hétérogènes, cette construction est-elle cohérente du point de vue de son organisation mathématique ? Le document générateur a des caractéristiques propres du point de vue de l'organisation mathématique, notamment au travers de la « progression » qu'il propose, le travail de développement dont il est la source prend-il en compte la façon dont se structurent les savoirs enseignés entre eux et dans leur ensemble ? Pour le dire autrement, le professeur exerce-t-il un contrôle épistémologique des savoirs enseignés ? Si les professeurs dressent les grandes lignes de la progression suivie en nommant les thèmes d'étude « je fais ma division au début du 2^e trimestre », en revanche, d'une année sur l'autre, ce ne sont pas nécessairement les mêmes exercices qui sont repris pour travailler un sujet d'étude donné. L'œuvre, cristallisée autour d'un document générateur, si elle présente une certaine stabilité, notamment en matière d'organisation mathématique globale – comme la programmation des thèmes d'études, par exemple – présente aussi une certaine souplesse en matière d'organisations mathématiques ponctuelles, dans le choix, mouvant, des exercices proposés aux élèves, par exemple. Mais la cohérence, dont on peut supposer qu'elle existait au départ, peut être perdue dans le cours du travail de l'œuvre. Par exemple, quand les programmes changent le professeur peut gommer ou intégrer des objets mathématiques sans vérifier la cohérence de l'organisation mathématique. »

Il nous semble donc que cela pourrait être aussi une interprétation de l'absence de travail sur l'aspect décimal sur les nombres à quatre chiffres : le type de tâche « nombre de » qui est propice à son utilisation n'est pas repris, alors qu'il avait pourtant été travaillé sur les nombres à trois chiffres. Cela est peut-être lié à un manque de vigilance « épistémologique ».

d) Conclusion

On peut résumer l'OM locale par le schéma ci-dessous.

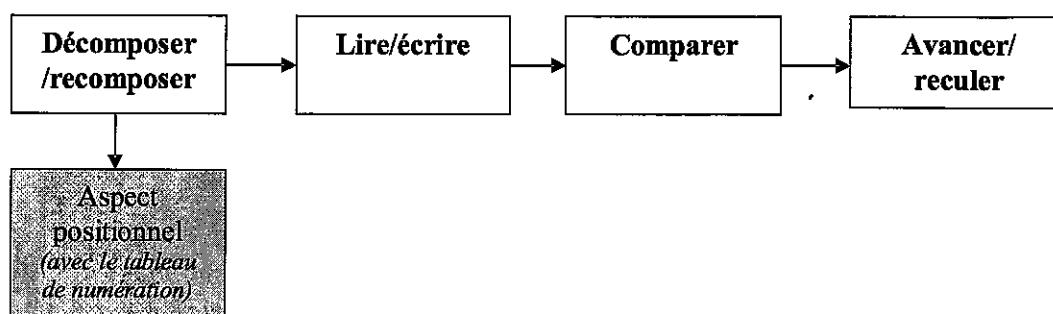


Figure 33 : OM locale du projet global de Sophie

Nous avons remarqué un déséquilibre important entre les temps de traitement en collectif des différents types de tâche qui montre la place importante accordée aux décompositions/recompositions et lectures/écritures de nombres. Le temps de recherche individuel sur comparer / ranger / intercaler ainsi que le nombre d'exercices de l'évaluation montre que ce type de tâche a aussi une place importante dans cette OM. Par contre avancer/ reculer est traité de manière tout à fait anecdotique.

On peut noter une grande variété des ostensifs utilisés : nombre en ECPD, en ECPDG, unités de la numération, « paquets de », nombre en mots et nombre en chiffres. Toutefois les décompositions et recompositions sont principalement associées aux nombres en ECPD et en ECPDG (par exemple $1000+500+20+3$ ou $1 \times 1000+5 \times 100+2 \times 10+3$)

Les unités de la numération apparaissent un peu dans les recompositions mais sont surtout utilisées pour évoquer le nom des rangs dans le nombre en chiffres. C'est pourquoi on les retrouve par exemple pour formuler la technique de comparaison de nombres.

On a pu voir des éléments technologiques qui relèvent des règles positionnelles de calcul (addition avec les ECPD) ou de l'association d'un rang à l'unité correspondante (avec les ECPDG). Cela témoigne de l'utilisation de deux modèles théoriques dans la classe relevant de l'OMR moderne et de l'OMR moderne adaptée.

C'est uniquement l'aspect positionnel qui est en jeu au cours de la séquence. Le nom du quatrième rang apparaît en particulier avec une disposition qui s'apparente à un tableau de numération (« unités de mille », c, d, u écrits au-dessus de chacun des chiffres).

Lors des entretiens nous pouvons voir que l'enseignante considère les exercices qui font intervenir les relations entre les unités de la numération comme des exercices qui ne sont pas importants, qui permettent juste d'aller plus loin. D'ailleurs ils ne sont pas traités par tous les élèves et leur traitement relève uniquement du mode individuel. Cependant on les retrouve lors de l'évaluation. La maîtresse évoque uniquement la difficulté liée à l'ordre de présentation des unités de la numération. Lorsque nous lui parlons des échanges nécessaires, elle précise que cela sera peut-être travaillé plus tard. Il nous a alors semblé que le manuel utilisé avait une influence importante sur les choix de l'enseignante au niveau du projet global et qu'une modification du projet prévu par les auteurs pouvait rendre difficile pour l'enseignante le respect des choix mathématiques des auteurs. Cela montre aussi le poids important des manuels dans les contraintes qui pèsent sur le niveau de construction du projet global.

Concernant les contraintes institutionnelles relevées dans la partie C, on peut noter l'influence sur les types de tâches travaillés (principalement décomposer/recomposer, lire/écrire et comparer) et sur l'absence du type de tâche dénombrer. On retrouve aussi l'absence de l'aspect décimal de la numération, l'utilisation des ostensifs institutionnellement privilégiés (nombres en ECPD et en ECPDG) et une place de la numération en unités réduite principalement au nom des rangs dans le nombre en chiffres. Le tableau de numération est uniquement utilisé lors de l'institutionnalisation pour associer le nom de l'unité au rang dans le nombre en chiffres. Il y a un matériel de numération (les quilles) utilisé ponctuellement

mais seulement pour l'aspect positionnel car le nombre d'unités de chaque ordre est limité à 9 (nous y reviendrons dans l'analyse de la mise en œuvre).

On note toutefois une marge de manœuvre qui est investie par l'enseignante concernant l'utilisation dans une tâche de décomposition/recomposition (dans un exercice et dans l'évaluation).

II.4. Conclusions sur les projets globaux des enseignants

a) Tableau récapitulatif de l'influence des contraintes et libertés institutionnelles sur le projet global des enseignants

Contraintes institutionnelles	Marc	Sophie
<p>Types de tâches : Centration sur lire/écrire et comparer. Les décompositions/recompositions se font avec les ECPD et ECPDG</p>	Place importante aux types de tâches décomposer/recomposer et lire/écrire. Absence de « dénombrer », et de « nombre de »	
	Pour décomposer / recomposer : avec le nombre en unités	Pour décomposer / recomposer : avec les ECPD et ECPDG mais aussi parfois avec le nombre en unités
	Du coup dans les deux classes, il apparaît une marge de manœuvre vis à vis des unités de la numération : elles sont utilisées comme des unités de mesure.	
	Pour lire/écrire : principalement pour communiquer	Pour lire/écrire : des activités spécifiques
	Pour avancer / reculer : utilisation du compteur	Pour avancer / reculer : place très réduite de ce type de tâche et pas de compteur
	Pour comparer : une place importante mais seulement des encadrements et rangements.	Pour comparer : une place importante (comparer, ranger, intercaler, situer sur une droite graduée)
<p>Techniques : ne sont pas mises en avant dans le programme 2002 (excepté pour certaines tâches : comparer et avancer/ reculer). « il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) » IO 2002 « les procédures de comparaison font l'objet d'une explicitation par les élèves » IO 2002 Des techniques abstraites (lié à l'utilisation des nombres en ECPD et en ECPDG et à la non-utilisation de la langue naturelle avec les signes algébriques d'addition).</p>	Même si elles ne sont pas toujours justifiées les techniques apparaissent dans les classes (techniques faibles)	
	Pour décomposer / recomposer : place importante du comptage. On trouve aussi l'association rang/unité (avec la numération en unités).	Pour décomposer / recomposer : deux techniques : association rang/unité (avec ECPDG) et règles positionnelles de calcul (avec ECPD).
	Pour lire/écrire : techniques invisibles	Pour lire/écrire : une technique faible
	Pour avancer / reculer : en lien avec le compteur (technique faible)	Pour avancer / reculer : technique invisible.
	Pour comparer : pas de technique de comparaison car la comparaison n'est pas travaillée.	Pour comparer : technique faible (explicitée mais non justifiée).
	L'absence du type de tâche « dénombrer » dans les projets globaux semble avoir pour conséquence une absence de lien entre les ECPD ou les unités de la numération avec des collections d'objets : on est principalement sur la valeur ou sur des nombres abstraits, ce qui correspond donc à des techniques abstraites. Cependant nous avons noté chez les deux enseignants des utilisations ponctuelles des unités de la numération comme unités de mesure en particulier lors des décompositions/recompositions.	
<p>Technologies : majoration de l'aspect positionnel de la numération et minoration de l'aspect décimal.</p>	Dans l'ensemble on note une faible place des technologies dans les phases collectives.	
	L'aspect décimal n'apparaît pas (ou quasiment) dans la classe. Il apparaît comme quelque chose de facultatif, pour aller plus loin (notamment lors d'un entretien avec Sophie). L'aspect positionnel apparaît à travers le nom des rangs dans l'écriture en chiffres,	

	avec les unités de la numération (le millier ou l'unité de mille est le chiffre du quatrième rang).	
	Utilisation d'un équivalent de tableau de numération (m, c, d, u) pour faire le lien entre les unités de la numération et la position. Le compteur est un objet technologique pour l'aspect algorithmique de la suite écrite.	Utilisation de règles positionnelles de calcul (nombre en ECPD et ECPDG). Le tableau de numération est uniquement utilisé lors de l'institutionnalisation. Le compteur n'est pas utilisé.

Tableau 24 : influence des contraintes et libertés institutionnelles sur le projet global des enseignants

b) Discussion de ces résultats : quelles contraintes semblent avoir un poids important sur les projets globaux ? Quelles sont les marges de manœuvre investies par les enseignants ?

Globalement, si on met en parallèle les schémas des OM locales des deux enseignants, la proximité de leur projet global est frappante. On peut faire un rapprochement avec les OM locales du programme de 2002 ou du manuel « Cap Maths CE2 » avec cependant une place plus importante accordée aux décompositions/recompositions.

La principale contrainte qui semble avoir du poids à la fois sur les deux enseignants est l'absence de l'aspect décimal de la numération. Cela est confirmé par les entretiens lors desquels les savoirs en jeu relatifs à l'aspect décimal de la numération n'apparaissent pas dans le projet global tel qu'il est décrit par les enseignants.

De manière plus générale on peut noter :

- une faible place des technologies dans ces deux projets ;
- dans le cas de l'utilisation d'un manuel par l'enseignant, on observe un poids important, parmi les contraintes, des choix globaux faits par les auteurs du manuel.

Au niveau des techniques, même si elles ne sont pas mises en avant dans les programmes, elles apparaissent dans les classes mais de manière différente.

Au niveau des types de tâches, il semble que la centration institutionnelle (de plus en plus marquée avec le temps) sur les types de tâches lire/écrire et comparer ainsi que la moindre importance donnée aux décompositions/recompositions n'aient pas (encore du moins) une forte influence sur les choix des enseignants qui privilégient toujours les décompositions/recompositions qui leur permettent d'amener l'aspect positionnel de la numération. On les retrouve d'ailleurs au début des séquences des deux enseignants.

Concernant le type de tâche « nombre de », rappelons que celui-ci semblait avoir une place importante dans les programmes 2002 malgré une formulation un peu floue (il fallait lire les commentaires des programmes pour voir qu'il était fait référence à ce type de tâche à travers la formulation « valeur des chiffres en fonction de leur position ») mais qu'il avait disparu dans les programmes de 2007 en tant que type de tâche. Il n'apparaît ici dans aucun des deux projets des enseignants. C'est pourtant un type de tâche privilégié pour le travail sur l'aspect décimal de la numération.

Le lire/écrire apparaît, quant à lui, beaucoup dans les classes pour communiquer à l'oral avec les nombres. Cependant les activités spécifiques sur ce type de tâche ne sont pas si nombreuses (en particulier pour Marc).

On peut aussi remarquer que l'absence du type de tâche dénombrer (ainsi que peut-être l'influence de la taille des nombres) semble entraîner les enseignants à ne pas utiliser les nombres comme représentant des quantités de collections d'objets mais plutôt faisant référence à des valeurs ou bien des nombres abstraits.

Pour les deux enseignants la numération en unités sert à nommer les rangs dans l'écriture chiffrée conformément aux contraintes institutionnelles. Mais on a pu également la voir utilisée pour les décompositions/recompositions (chez les deux enseignants, ce qui semble

être lié à l'utilisation du guide ERMEL) ce qui lui confère un statut d'unité de mesure également. Elle est d'ailleurs aussi utilisée pour faire des conversions, comme ici par exemple « $800d=8000u$ donc $800d3u$ c'est $8000+3=8003$ » (classe de Sophie). On voit dans cet exemple le détour qui est fait pour ne pas mélanger les unités de la numération et le signe d'addition : les unités de la numération ne sont pas utilisées pour faire du calcul conformément à la contrainte de non mélange de la langue naturelle et des signes algébriques. Nous pouvons ajouter que la numération est utilisée notamment pour écrire des nombres à deux chiffres dans les décompositions/recompositions (par exemple « 25 dizaines 6 centaines 4 milliers » dans l'évaluation finale de Sophie), ce que nous n'avons pas vu avec les ostensifs nombre en ECPD ou en ECPDG.

Pour les autres contraintes, elles ne jouent pas de la même manière sur les deux enseignants. On peut remarquer que ces deux enseignants se démarquent des contraintes institutionnelles au niveau du type de tâche « nombre de » qui apparaissait dans les deux manuels et le programme 2002 (pour les suivants cela était moins explicite). Cela pourrait être lié à la formulation utilisée par le programme 2002 (« valeur des chiffres en fonction de leur position ») pour laquelle le lien avec ce type de tâche n'apparaît clairement que par la lecture du document d'application. Cela ne semble pas lié à l'influence des programmes récents (pour lesquels on n'a plus de trace explicite de ce type de tâche), d'après nos entretiens.

Nous allons maintenant faire un « zoom » sur certaines situations proposées par les enseignants susceptibles de faire apparaître le lien entre l'aspect décimal et positionnel de la numération pour étudier plus finement l'avancée du savoir dans la classe et l'action didactique du professeur.

III. Analyse de la mise en œuvre du projet dans la classe pour les deux enseignants

III.1 Méthodologie

a) Choix des situations

Le choix des situations sur lesquelles nous allons faire notre « zoom » a été guidé par le type de tâche travaillé dans les différentes situations afin que :

- celui-ci permette, selon le choix des variables, de mettre en jeu l'aspect décimal et l'aspect positionnel de la numération, ce qui nous permettra d'avoir une possibilité d'observer comment se fait ce lien dans la classe ;
- les situations observées soient mises en parallèle, ce qui nous a donc amené à choisir des types de tâches communs aux deux classes.

Notre choix s'est ainsi porté sur les situations mettant en jeu les décompositions et recompositions qui constituent les premières situations mises en place par les deux enseignants, pour introduire les nombres à quatre chiffres. Nous allons donc analyser l'introduction des nombres à quatre chiffres par ces enseignants à travers l'étude de ces situations.

b) Analyse en termes de situations

L'analyse a priori se fait sur une situation reconstruite à partir du déroulement. Nous commencerons donc par décrire le déroulement, en particulier, tout ce qui concerne la donnée de la consigne ainsi que le texte fourni aux élèves, ce qui nous permettra de définir la situation.

Nous commençons par définir l'enjeu de la situation en nous appuyant sur le choix des variables et sur ce que dit éventuellement l'enseignant.

Ensuite nous définissons le milieu de la situation. Là encore nous prenons en compte le déroulement car toutes les informations fournies par l'enseignant (oralement ou par écrit au tableau par exemple) font partie du milieu. Nous nous limitons au moment qui précède la mise au travail des élèves. Pour la classe de Sophie pendant la phase de recherche, les enfants sont en autonomie totale du fait de sa gestion du double niveau. Marc, qui reste davantage présent avec le groupe des CE2, organise des petites phases de recherches successives.

Nous indiquons les connaissances supposées disponibles des élèves (nous nous appuyons sur nos observations précédentes des classes sur les nombres à trois chiffres).

Nous pouvons alors commencer à envisager les actions possibles des élèves et les rétroactions que peut ou ne peut pas apporter le milieu et les interventions qu'on peut penser nécessaires de la part de l'enseignant.

Nous donnerons ensuite des éléments du déroulement pour décrire ce qui s'est passé dans la classe. Nous ferons une analyse a posteriori de ce déroulement pour voir les choix effectués par l'enseignant parmi les possibles pointés lors de l'analyse a priori.

Nous analyserons tout d'abord la phase d'action, à partir du déroulement de la phase de recherche des élèves, des régulations effectuées par l'enseignant. Nous décrirons si nécessaire les techniques utilisées par les élèves en nous appuyant sur nos notes d'observation et sur les interventions des élèves lors de la phase de mise en commun.

Nous analyserons également les phases de mise en commun (formulation et éventuellement validation) pour voir comment y apparaissent les techniques dans la classe : restent-elles invisibles, sont-elles formulées ? Justifiées ? Comment apparaissent alors les technologies ? Y a-t-il des institutionnalisations ? S'appuient-elles sur le milieu de la situation ?

Dans ces analyses nous porterons une attention particulière aux ostensifs utilisés.

III.2 La mise en œuvre du projet du premier enseignant (Marc)

a) Inscription de la séance dans le projet global

Cette séance est la première parmi les séances proposées sur les nombres à quatre chiffres. Les élèves ont déjà travaillé pendant la première période de l'année sur les nombres à trois chiffres.

La situation proposée lors de cette séance a d'ailleurs déjà été donnée avec des nombres à trois chiffres en début d'année (nous l'avons observée). Elle avait posé des difficultés aux élèves, en particulier pour un cas qui mettait en jeu l'aspect décimal de la numération.

Avant d'analyser la situation, nous allons tout d'abord revenir sur le moment de calcul mental qui a précédé pour voir comment le maître y introduit les nombres à quatre chiffres.

b) Le moment de calcul mental

Rappelons tout d'abord, comme nous l'avons vu dans l'analyse du projet global, que l'enseignant a choisi d'introduire des nombres à quatre chiffres dans l'activité de calcul mental de début de séance.

Déroulement :

Episode 1 : collectif (1 minute)

Cette séance commence comme d'habitude par un exercice de calcul mental sur ardoise. La consigne est donnée par le maître : « je vous mets une liste de nombres vous allez me chercher le résultat d'accord ? ».

Le maître écrit alors au tableau les calculs à effectuer. « Allez-y les CE2 ! »
Les calculs : 10×23 , 42×10 , 100×8 , 100×43 , 38×10 , 102×2 , $25+19$, $19+6$, $39+3$, $34+19$.

Episode 2 : individuel (4 minutes)

Les enfants cherchent individuellement et écrivent le résultat sur leur ardoise.
Pendant ce temps le maître corrige un exercice de calcul mental avec les CE1.

Episode 3 : collectif (5 minutes)

« Les CE2 on corrige ! ». Le maître interroge des élèves pour chaque calcul : il demande le nombre obtenu ainsi que la technique utilisée :

P : Lucie, dix fois vingt-trois ?

Lucie : deux cent trente

P : comment tu trouves ton résultat ?

Lucie : j'écris vingt trois et je rajoute le zéro du dix.

P : voilà.

De même pour les autres calculs. Pour le deuxième cas (42×10), le maître ne demande pas de technique, pour le troisième (100×8) il énonce lui-même la technique (« j'écris huit et je rajoute les deux zéros de cent »).

Pour le quatrième cas, l'élève interrogée ne sait pas lire le nombre (et elle a commis une erreur) :

P : cent fois quarante trois, Calista.

Calista : euh + quatre cent quarante ...

P : alors dis-moi le nombre. Alors qu'est-ce que j'écris ?

Calista : quatre

P : quatre. Après ?

Calista : quatre

P : j'écris un quatre encore ?

Calista : zéro

P : zéro

Calista : et zéro

P : vous êtes d'accord ?

Les e : non

P : Lucie.

Lucie : c'est un trois à la place du quatre.

P : alors comment on peut lire ce nombre alors. Parce qu'on n'a pas encore vraiment travaillé sur ces nombres là. Tu sais le lire Calista ?

Calista : non.

P : non ? Valentin.

Valentin : quatre mille trois cents.

P : voilà, ça se lit quatre mille trois cents, d'accord ? Tu écris quarante trois et tu rajoutes les deux zéros de cent, d'accord ?

Le maître introduit donc la lecture d'un nombre en faisant lire un élève sans s'attarder pour le moment. On peut penser que son objectif ici est de travailler l'algorithme de la multiplication par 10 et 100. Le maître passe ensuite corriger un exercice de calcul mental avec les CE1.

Episode 4 : collectif (1 minute)

Deuxième exercice de calcul mental sur ardoise.

« Allez ! Les doubles ! Vous êtes prêts les CE2 ? Le double de six cents. »

Le maître écrit tous les nombres au tableau (les seuls nombres à quatre chiffres sont les doubles de 500 et de 600).

Episode 5 : individuel (4 minutes)

Les enfants cherchent individuellement et écrivent le résultat sur leur ardoise.

Pendant la recherche, le maître précise : « Pour les grands nombres si vous avez fini avant les autres essayez de les lire dans votre tête pour qu'on puisse les lire après ensemble ».

Il ajoute donc une tâche de lecture de nombres à effectuer mentalement.

Le maître va ensuite corriger un exercice de calcul mental avec les CE1.

Episode 6 : collectif (2 minutes)

Correction collective de l'exercice. Le maître demande aux élèves leurs résultats. Pour les nombres à quatre chiffres il demande de donner le résultat chiffre par chiffre puis de lire le nombre obtenu.

Pour le premier (double de 600) :

P : Le double de six cents, Florian + alors comment tu fais ? Dis-moi les nombres + dis-moi les chiffres.

Florian : un, un deux, et deux zéros.

P : voilà six et six douze et je rajoute deux zéros. Comment on le lit ce nombre ? Tu sais Théo ?

Théo : mille deux cents

P : mille deux cents. Bien.

Pour le troisième (double de 500) :

P : le double de 500, Héloïse

Héloïse : un, zéro, zéro, zéro.

P : et comment tu le lis ce nombre ?

H : mille

P : voilà. Mille. Vous voyez que je fais un petit espace quand j'écris ce grand nombre, c'est fait exprès (il écrit au tableau « 1 000 »).

Commentaires

Il s'agit donc, au cours de ce moment de calcul mental, de faire appliquer aux élèves les techniques connues de multiplication par 10 ou 100 qui se prolongent ici naturellement au cas des nombres à quatre chiffres, en laissant invisibles les savoirs en jeu (il n'y a pas de lien entre 10 et 100 et les dizaines ou centaines). Comme le précise l'enseignant, il suffit de faire comme cela : « tu écris quarante-trois puis tu rajoutes les deux zéros de cent » (pour le premier exercice de calcul mental) ou bien « six et six, douze, et je rajoute deux zéros » (pour le deuxième exercice : double de 600).

Ces exercices amènent toutefois les élèves à lire des nombres à quatre chiffres, mais il n'y a pas de technique qui apparaît pour cette lecture.

Finalement ces deux premiers exercices auraient pu permettre un rappel des éléments technologiques de la numération des nombres à trois chiffres ou une première rencontre avec des éléments technologiques de la numération des nombres à quatre chiffres. Mais les techniques utilisées ici restent faibles, comme elles le sont certainement souvent dans ces courts moments de calcul mental de début d'heure.

c) Présentation de la situation

Les élèves vont devoir recomposer des nombres donnés en unités, avec les lettres c, d, u qui symbolisent les centaines, dizaines et unités. Voici la liste de nombres à recomposer :

8c 4d 3u
32d
13c
12c 8d 1u
14c 2u
12c 11d 2u

Le maître choisit de donner les nombres un à un : pour chaque nombre il laisse chercher individuellement les élèves, puis organise un moment collectif de correction.

Les élèves ont à leur disposition des étiquettes 1, 10, 100, qu'ils peuvent déplacer sur leur table. Ils en ont une quantité suffisante pour traiter tous les cas (ils ont par exemple 32 étiquettes 10).

Voilà comment s'est déroulée la présentation de la situation :

Episode 7 : collectif (10 minutes)

Le maître distribue les enveloppes contenant les étiquettes 1, 10 et 100 aux élèves.

Un problème pratique retarde la mise en route de la situation : il n'y a que trois étiquettes 10 dans chaque enveloppe au lieu de plus de 30 prévues. L'EVS (personnel de la mairie qui assiste le directeur dans ses tâches administratives) présente dans la classe s'affaire alors à découper des étiquettes. Pendant ce temps les élèves étalent les étiquettes sur la table en faisant un paquet pour chaque type d'étiquettes. Le maître, lui, est avec les CE1 (passation de consignes).

Le maître revient au bout de 3 minutes :

« Vous me préparez sur la table le nombre suivant + et vous me l'écrivez sur l'ardoise. Huit centaines, quatre dizaines et trois unités. Et ensuite sur votre ardoise vous écrivez le nombre que vous aurez trouvé » (le maître écrit au tableau : 8c 4d 3u → $\bar{c} \quad \bar{d} \quad \bar{u}$).

d) Analyse a priori de la situation :

L'enjeu d'enseignement :

Les principales variables de la tâche utilisées ici, sont la présence d'unités ou non à chaque rang et le nombre de chiffres pour chaque unité.

La première permet de travailler en particulier sur l'association entre les unités et le rang dans l'écriture chiffrée et ainsi d'utiliser le 0 comme marqueur de position. C'est alors l'aspect positionnel de la numération qui est en jeu (par exemple pour 13c il faut associer le 3 au chiffre des centaines, donc au troisième rang).

La deuxième variable permet de mettre en jeu les relations entre les unités (aspect décimal). Par exemple 13c c'est 1m3c car 10 centaines c'est 1 millier. Cependant dans ce cas les élèves peuvent se limiter à placer le 3 au rang des centaines et le 1 vient alors se situer naturellement au rang des milliers sans que les relations entre centaines et milliers apparaissent. C'est pourquoi nous considérons que c'est seulement quand l'unité pour laquelle on a un nombre à deux chiffres est suivie de son unité immédiatement supérieure avec un ou deux chiffres que la relation entre les unités est réellement nécessaire. C'est le cas uniquement pour le dernier cas de l'exercice 12c11d2u qui nécessite l'échange de 10 dizaines contre 1 centaine. Cependant il ne s'agit pas dans ce cas de relation avec les milliers, ce qui nous fait dire que pour les milliers ce qui est en jeu c'est principalement l'aspect positionnel de la numération. Nous pouvons aussi noter que ce savoir (aspect décimal) n'est pas nouveau pour les nombres

à trois chiffres car il a déjà fait l'objet d'un travail en début d'année. En effet dans la séance observée sur les nombres à trois chiffres les élèves avaient eu à traiter le cas 4c12d5u en fin de séance. Cela avait posé des difficultés devant lesquelles l'enseignant avait incité les élèves à utiliser une procédure de comptage. Nous n'avions alors pas vu apparaître l'aspect décimal. L'enjeu d'enseignement de cette situation pourrait alors être d'étendre la technique de recomposition au cas de nombres ayant un nombre de centaines à deux chiffres. Il s'agit donc d'une juxtaposition de chiffres pour tous les cas sauf le dernier qui nécessite un échange entre dizaines et centaines.

L'enseignant a fait une fiche de préparation sur laquelle il a indiqué les objectifs d'apprentissage suivants :

- « retrouver des nombres désignés sous différentes écritures
- passage des unités simples au mille »

Le premier objectif fait apparaître le type de tâche en jeu. Pour le second on peut penser qu'il fait référence au rang des milliers (vu ici comme la classe des mille), qui est bien le savoir nouveau en jeu, ou alors il s'agit de la lecture des nombres à quatre chiffres, ce qui justifierait l'utilisation du nom des classes.

Le milieu

Le milieu contient les nombres à recomposer, en particulier les écritures avec c, d, u et leur lecture par le maître en « centaines », « dizaines » et « unités ».

Sous le nombre à trouver le maître écrit également au tableau c, d, u avec un tiret au-dessus de chacune de ces lettres.

Le milieu comporte également les étiquettes 1, 10 et 100 avec lesquelles les élèves doivent donner une écriture du nombre. Ils doivent ensuite écrire ce nombre sur leur ardoise.

Les connaissances des élèves supposées disponibles sont les connaissances relatives à l'aspect positionnel de la numération pour les nombres à trois chiffres. Comme nous l'avons précisé, d'après nos observations précédentes il nous semble que l'aspect décimal de la numération n'a pas été travaillé (quand il était en jeu le comptage a permis de l'éviter).

Les rétroactions possibles du milieu, les interventions prévisibles de l'enseignant

Les deux premiers cas permettent aux élèves d'utiliser leurs connaissances sur les nombres à trois chiffres. Ils vont donc permettre au maître de faire la dévolution de la situation aux élèves. Va-t-il alors en profiter pour rappeler les techniques utilisées sur les nombres à trois chiffres ? Va-t-il également rappeler les règles d'échange entre les unités de la numération ?

Pour les trois cas suivants : 13c, 12c 8d 1u et 14c 1u, les élèves vont pouvoir associer les chiffres aux rangs correspondants. Le fait d'avoir un nombre de centaines à deux chiffres peut ne pas les pousser à utiliser les relations entre centaines et milliers (comme nous l'avons déjà précisé) mais seulement juxtaposer les deux chiffres de façon à ce que le deuxième soit situé au rang des centaines. Des erreurs possibles pourraient venir d'une non prise en compte de la position des centaines dans le nombre à trouver (par exemple écrire 13 ou 130 pour 13c). Une rétroaction possible pourrait venir alors de la lecture du nombre obtenu. Ou encore de la lecture du nombre de centaines de ce nombre (par exemple pour 13 il n'y a pas de centaine, alors qu'on avait 13 centaines au départ). Ce sont aussi des moyens que le maître a à sa disposition pour provoquer une rétroaction du milieu.

Cependant, le fait que le maître écrive au tableau c, d, u en dessous du nombre à trouver, avec des tirets correspondant à chacun des chiffres à écrire, a pour conséquence de laisser à la charge du milieu la prise en compte de l'association entre l'unité et le rang dans l'écriture. Finalement tant qu'il y a la présence de cet ostensif (que l'on peut considérer comme un tableau de numération), il s'agit pour les élèves uniquement d'associer c à c, d à d et u à u.

Finalement, les élèves n'ont pas besoin de faire le nombre avec les étiquettes, ce qui peut alors apparaître comme une tâche inutile. Si les élèves font d'abord le nombre avec les étiquettes (comme demandé par le maître), ils peuvent alors :

- utiliser le comptage de 1 en 1, 10 en 10 et 100 en 100
- effectuer l'échange 10 étiquettes de 100 contre 1 étiquette de 1000 (mais le milieu ne contient pas ce type d'étiquette, ce qui laisse présager que le maître ne va pas faire intervenir des équivalences). Les étiquettes pourraient pourtant servir à matérialiser l'équivalence entre 10 centaines et 1 unité de mille.

Par contre pour le dernier cas (12c11d2u), si les élèves utilisent la juxtaposition des chiffres, ils risquent d'obtenir les nombres :

- 12112 s'ils placent les chiffres les uns à la suite des autres,
- ou encore 1213 s'ils commencent par placer le 2 de 12 au rang des centaines ...

Les étiquettes sont alors un élément du milieu sur lequel le maître peut s'appuyer dans la phase de recherche ou de mise en commun pour invalider ces réponses :

- soit en faisant étaler les étiquettes pour chaque unité puis effectuer les échanges entre les différentes unités, mais cela demanderait aux élèves de connaître notamment l'équivalence entre 10 centaines et 1 unité de mille, ce qui peut nécessiter une intervention de l'enseignant. C'est en effet une convention que les élèves ne peuvent inventer : ils peuvent seulement supposer que ça fonctionne comme pour les unités déjà connues. Une autre intervention prévisible de l'enseignant, dans ce cas, est liée à l'absence d'étiquette 1000 : comment le maître va-t-il faire apparaître cette nouvelle unité ?
- soit en faisant compter de 100 en 100 puis de 10 en 10 et enfin de 1 en 1, mais se pose alors le problème du passage de « neuf cents » à « mille » puis le comptage au-delà de mille, qui n'a jamais été travaillé dans la classe. Cela pourrait nécessiter encore une intervention de l'enseignant.

Il semble donc que dans les deux cas une intervention du maître pour montrer un savoir nouveau en s'appuyant sur ce milieu est nécessaire pour valider les réponses des élèves. Il s'agit de deux savoirs différents. Quel choix le maître va-t-il alors effectuer?

Les techniques possibles :

Prenons l'exemple du dernier cas : 12c 11d 2u

Techniques utilisant les étiquettes :

$\overline{1}$: comptage : associer c à 100, d à 10 et u à 1 et chercher le nombre d'étiquettes de chaque sorte : 12 étiquettes 100, 11 étiquettes 10 et 2 étiquettes 1. Compter de 100 en 100 puis de 10 en 10 puis de 1 en 1 : cent, deux cents, ..., mille cent, mille deux cents, mille deux cent dix, ..., mille trois cent douze.

$\overline{2}$: calcul : associer c à 100, d à 10 et u à 1 et chercher le nombre d'étiquettes de chaque sorte : 12 étiquettes 100, 11 étiquettes 10 et 2 étiquettes 1. Trouver le nombre correspondant à chaque unité : 1200 (car 12×100), 110 (car 11×10) et 2 et additionner ces trois nombres : $1200 + 110 + 2 = 1312$ (calcul mental ou addition posée).

$\overline{3}$: groupements et échanges : associer c à 100, d à 10 et u à 1 et quand on a 10 étiquettes d'un certain ordre on les échange contre 1 étiquette de l'ordre immédiatement supérieur (si c'est possible) : 12 étiquettes 100, c'est 1 étiquette de 1000 (mais on n'en a pas ! Donc on considère que notre paquet de 10 étiquettes 100 c'est comme 1 étiquette 1000) et 2 étiquettes de 100, 11 étiquettes 10 c'est 1 étiquette de 100 et 1 étiquette de 10. Finalement on a donc 1

étiquette 1000 (du moins l'équivalent en étiquettes 100), 3 étiquettes 100, 1 étiquette de 10 et 2 étiquettes 1, soit 1312 (on associe l'étiquette au rang).

Techniques n'utilisant pas les étiquettes :

$\overline{4}$: règle positionnelle de calcul : écrire 11d2u dans les tirets : on obtient 112 puis ajouter 12c comme pour une addition en colonnes. On obtient 1312 (car $1+2 = 3$ au rang des centaines).

$\overline{5}$: faire tous les échanges nécessaires pour avoir un chiffre pour chaque unité : ici $12c = 1m$ 2c, $11d = 1c$ 1d, donc $12c$ 11d 2u = 1m 3c 1d 2u, soit 1312 (on associe l'unité de la numération à son rang dans l'écriture chiffrée).

Remarque : cette première étape consistant à faire tous les échanges nécessaires pour avoir un chiffre pour chaque unité, n'est nécessaire que pour le dernier cas. Dans les autres cas, les élèves peuvent écrire les chiffres les uns à côté des autres (par exemple : $12c$ 8d 1u = 1281).

Finalement on peut donc dire qu'il y aurait donc dans cette situation une possibilité de faire utiliser aux élèves les relations entre les unités (aspect décimal) : 2 chiffres pour le nombre de centaines, la présence des étiquettes. Mais l'absence d'étiquette 1000 dans le milieu nous questionne quant à la façon dont le maître va faire apparaître ces relations.

e) Description du déroulement

Episode 8 : individuel (2 minutes)

Les élèves travaillent individuellement.

Le maître circule pour valider individuellement les réponses des élèves : « Vous levez la main et je passe... Quand j'ai vérifié vous pouvez effacer ».

Episode 9 : collectif (1 minute)

Correction collective. Le maître interroge une élève qui donne la bonne réponse. Le maître prend en charge la validation.

Episode 10 : collectif (moins de 1 minute)

Le maître indique le nouveau nombre à décomposer : « maintenant vous me fabriquez sur votre table 32 dizaines + et après lorsque vous avez fait 32 dizaines sur la table, il faut écrire le nombre que vous avez trouvé sur l'ardoise ».

Le maître écrit au tableau : 32d →
 $\overline{c} \quad \overline{d} \quad \overline{u}$

Episode 11 : individuel (4 minutes)

Les élèves travaillent individuellement. Le maître circule pour valider individuellement les réponses des élèves. Il invite les élèves qui se trompent à faire les 32 dizaines avec les étiquettes.

Episode 12 : collectif (4 minutes)

Correction collective. Le maître interroge une élève qui donne la bonne réponse. Il lui demande ensuite de venir au tableau expliquer comment elle a fait : « là j'ai marqué trente-deux et j'ai rajouté un zéro, et y'a pas d'unité ». Le maître lui demande ensuite si elle a manipulé les étiquettes pour trouver ce résultat. Comme l'élève répond que c'est le cas le maître décide de présenter cette méthode : il dessine au tableau les trente-deux étiquettes de

dix puis compte de dix en dix jusqu'à cent et laisse un élève terminer le comptage de dix en dix jusqu'à trois cent vingt.

Episode 13 : collectif (moins de 1 minute)

Le maître donne le 3^{ème} nombre à décomposer : « Alors maintenant je vous demande treize centaines. Et je ne mets rien du tout. Trouvez-moi le nombre qui se cache derrière treize centaines. Je vous invite à manipuler ».

Il écrit alors au tableau 13c → (il n'écrit plus le c/d/u)

Episode 14 : individuel (2 minutes)

Les élèves travaillent individuellement. Dès le début de la recherche face à l'erreur d'un élève, le maître précise « je veux que tout le monde manipule. Manipulez, tu verras peut-être que tu as fait une erreur ». Le maître circule pour valider individuellement les réponses. Il ajoute pour un élève qui a trouvé très rapidement : « Florian, vérifie quand même en manipulant ».

Episode 15 : collectif (3 minutes)

Correction collective. Le maître fait passer une élève au tableau et lui demande de dessiner ce qu'elle a « manipulé ».

L'élève dessine les étiquettes comme ceci :

100	100	100
100	100	100
100	100	100
100	100	
100	100	

Il lui demande ensuite de compter. L'élève commence à compter « cent » puis s'arrête. Le maître fait intervenir un élève pour poursuivre : « deux cents ». L'élève au tableau continue mais s'arrête à neuf cents. Le maître continue : « mille ». Mais l'élève bloque encore. Le maître demande « combien ça fait ? Mille et on ajoute cent ». Un élève répond « mille cent ». L'élève continue alors jusqu'à « mille trois cents ». Le maître lui demande si elle saurait l'écrire « en chiffres », ce qu'elle fait correctement au tableau : « 1300 ».

Comme l'élève avait écrit sur son ardoise « 130 », le maître lui dit qu'il fallait un zéro de plus.

Il réécrit « 1 300 » en précisant qu'il laisse « un espace pour faciliter la lecture ».

Episode 16 : collectif (moins de 1 minute)

Le maître donne le 4^{ème} nombre à décomposer : « vous me représentez sur votre table douze centaines, huit dizaines et une unité ».

Il écrit au tableau 12c 8d 1u →

Vous manipulez sur votre table et après vous trouvez le nombre qui se cache derrière cette écriture.

Episode 17 : individuel (4 minutes)

Les élèves travaillent individuellement. Des élèves écrivent directement le nombre. D'autres commencent par travailler avec les étiquettes.

Episode 18 : collectif (3 minutes)

Correction collective. Le maître fait passer une élève au tableau et lui demande de dessiner « ce qu'elle a manipulé sur sa table ».

L'élève écrit :

100 10 1
 100 10
 100 10
 100 10
 100 10
 100 10
 100 10
 100 10
 100
 100
 100
 100

Le maître lui demande alors de compter. Elle compte « cent », « deux cents », ... jusqu'à « mille deux cents » (au moment du passage à « mille », l'enseignant répète bien fort : « neuf cents, mille »).

Elle écrit ce nombre au tableau : « 1200 » à la demande du maître.

Puis l'enseignant lui demande de compter les dizaines : elle efface alors le 0 (au rang des dizaines) de 1200 pour écrire « 1280 », puis fait de même pour les unités : « 1281 ».

Enfin le maître lui demande de lire ce nombre, ce qu'elle fait correctement.

Episode 19 : collectif (moins de 1 minute)

Le maître donne le 5^{ème} nombre à décomposer : « alors vous allez essayer celui-ci. Quatorze centaines et deux unités. Trouvez le nombre qui se cache derrière ».

Il écrit au tableau 14c 2u →

Episode 20 : individuel (3 minutes)

Les élèves travaillent individuellement. Des élèves travaillent avec les étiquettes, d'autres non.

Face à un élève qui a fait une erreur le maître l'invite « à manipuler ».

Le maître circule pour valider individuellement les réponses.

Au bout de 2 minutes, le maître précise : « en fait dans les nombres qu'on est en train de chercher là, on a mille, centaine, dizaine, unité ». Il écrit au tableau

en face de : 14c 2u →

\bar{c} \bar{d} \bar{u}

Episode 21 : collectif (3 minutes)

Correction collective. Le maître fait passer une élève au tableau « tu nous montres ce que tu as fait sur la table ».

L'élève dessine au tableau :

100 100 100 1 1
 100 100 100
 100 100 100
 100 100 100
 100 100

Le maître lui demande alors de compter. L'élève compte jusqu'à mille puis s'arrête. Le maître demande aux autres élèves : un élève dit « mille cent », ce qui permet à l'élève au tableau de poursuivre jusqu'à « mille quatre cents ».

Le maître lui demande alors de l'écrire dans les cases m/c/d/u (« après on rajoutera les deux unités »). Elle efface ensuite le 0 pour écrire les 2 unités.

Enfin le maître lui demande de lire le nombre.

Episode 22 : collectif (moins de 1 minute)

Le maître donne le dernier nombre à décomposer : « allez, un dernier pour vous titiller un petit peu l'esprit. Douze centaines, onze dizaines et deux unités. Trouver le nombre qui se cache derrière cette écriture ». Il écrit au tableau : $12c\ 11d\ 2u \rightarrow$

Episode 23 : individuel (4 minutes)

Les élèves travaillent individuellement. Des élèves travaillent avec les étiquettes, d'autres non.

Il invite un élève à manipuler « ça prend du temps mais il faut être courageux ! »

Puis devant les difficultés d'élèves il ajoute : « dessine sur l'ardoise tes billets de cent, tes billets de dix et de un et compte ».

Les élèves n'ont pas trouvé la bonne réponse. Ils trouvent ces nombres : 1212, 1213, 12112 ou encore 2512.

Episode 24 : collectif (15 minutes)

Correction collective. Le maître fait passer une élève au tableau : dessine ce que tu as manipulé ou dessiné sur ton ardoise.

Elle dessine :

100	100	10	10	1
100	100	10		1
100	100	10		
100	100	10		
100	100	10		
100	100	10		
		10		
		10		
		10		
		10		

Le maître sépare alors les colonnes d'unités différentes par des traits verticaux puis écrit au-dessus de chaque colonne : c d u.

Il demande alors à l'élève de compter, ce qu'elle fait malgré des hésitations arrivée à « mille ».

Le maître lui demande alors d'écrire ce nombre. Elle écrit « 1200 »

L'élève compte ensuite les dizaines jusqu'à « mille deux cent quatre-vingt-dix » où elle s'arrête. Le maître la fait aider par un autre élève qui poursuit ensuite : « mille trois cent dix ».

L'élève au tableau écrit alors : « 1312 » en effaçant les chiffres écrits précédemment.

Enfin le maître lui demande de le lire, et lui fait remarquer que ce n'est pas ce qu'elle avait trouvé comme nombre sur son ardoise : « entre ta façon de faire à ta table et ta façon de faire au tableau, t'as pas trouvé pareil ».

Il fait passer un autre élève au tableau : « Arthur, comment t'as fait toi ? »

L'élève dit qu'il a fait pareil, mais le maître lui demande quand même de montrer. L'élève dessine alors au tableau les étiquettes quasiment de la même manière que l'élève précédente.

Il compte alors de cent en cent (blocage arrivé à mille) puis écrit à la demande du maître le nombre obtenu : « 1200 »

Il compte alors de dix en dix à partir de « mille deux cents », jusqu'à mille trois cent dix. Puis il écrit « 1312 ».

Le maître fait alors remarquer à l'élève que ce qu'il a trouvé au tableau est différent du résultat écrit sur son ardoise (où il avait écrit « 12112 »).

Le maître demande alors aux autres élèves de dire qui l'a fait comme lui (en montrant l'ardoise où est écrit « 12112 ») en ajoutant que c'est peut-être juste.

P : « T'as manipulé au tableau, très bien, moi ce qui m'intéresse c'est de comprendre comment vous avez trouvé ça sur l'ardoise ».

Il fait alors revenir au tableau l'élève qui était venu juste avant. Elle écrit « 12112 ».

En fait trois élèves avaient trouvé ce nombre.

« D'après vous qui c'est qui a raison ? »

« Regardez ici là si on compte, cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cent, huit cent, neuf cent, mille, mille cent, mille deux cents, là on a mille deux cents ». Il montre la première colonne :

	c		d		u	
100	100	10	10	1		
100	100	10		1		
100	100	10				
100	100	10				
100	100	10				
100	100	10				
100	100	10				
		10				
		10				
		10				

Il écrit alors « 1200 » sous la colonne « c » et poursuit : « dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, cent, cent dix. Cent dix. Et on a deux unités »

Il écrit « 110 » sous la colonne « d » et 2 sous la colonne « u ».

P : « Alors qu'est-ce qu'on est obligé de faire ici ? On dépasse cent (il montre la colonne des dizaines).

Qu'est-ce qu'on est obligé de faire ?

Un é : une retenue.

P : Bah, oui, qu'est-ce qu'il faudrait faire ? Il faudrait ?

Un é : déplacer

P : oui il faudrait déplacer quoi ? Lucie.

Lucie : une centaine dans la dizaine

P : une centaine dans la dizaine ?

Lucie : non une dizaine dans la centaine

P : viens me montrer Lucie. Parce que là j'ai mille deux cents, là j'ai cent dix et là j'ai deux. C'est pas facile ça. Alors c'est vrai qu'en comptant de dix en dix comme a fait Maud on y arrive mais là ? Comment tu ferais là ?

Lucie : *inaudible*

P : On peut la rajouter cette dizaine ici ? (*il montre la colonne des centaines*) ++ Non regarde il faudrait enlever un paquet de dix. Ça fait combien un paquet de dix ? Ça ça fait combien ? Si j'enlève dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, cent. Si j'enlève ce paquet et que je le mets de ce côté ? (*il montre la colonne des centaines*)

Des é : dix

P : oui il reste dix. Mais là combien j'en ai enlevé ?

Un é : bah dix.

P : J'ai enlevé dix paquets de dix, ça fait combien dix fois dix ?

Un é : cent.

P : cent, et je peux le transférer dans les centaines, ça fait une centaine de plus. Mais sinon on peut compter de dix en dix comme a fait Arthur ... et Maud.

f) Analyse a posteriori

Le maître choisit de faire une correction collective entre chacun des cas, ce qui fait que le milieu s'agrandit au fur et à mesure de l'avancée de la séance. Le maître prend en charge la validation des réponses (quand c'est juste) en passant voir individuellement les élèves. Les corrections servent alors plutôt à montrer les procédures utilisées par les élèves.

1^{er} cas : épisodes 7 à 9 (8c 4d 3u)

Même si le maître demande aux élèves de « préparer sur leur table le nombre » avec les étiquettes, puis de l'écrire sur l'ardoise, l'association 8c 4d 3u →

$\bar{c} \quad \bar{d} \quad \bar{u}$

est si évidente que les élèves semblent placer leurs étiquettes sur la table principalement pour répondre aux attentes du maître.

Les étiquettes ne servent pas non plus lors de la validation (qui est prise en charge par le maître).

2^{ème} cas : épisodes 10 à 12 (32d)

Pendant la phase de recherche face aux difficultés de certains élèves, cette fois le maître invite les élèves à utiliser les étiquettes. Mais le comptage de dix en dix est ici long et les élèves cherchent pour leur premier essai à utiliser la procédure précédente et c'est seulement suite à une erreur et aux sollicitations du maître qu'ils se mettent à utiliser les étiquettes.

Le maître utilise également la lecture par l'élève du nombre de dizaines dans le nombre obtenu pour invalider des résultats (et les incite alors à utiliser les étiquettes) : il demande à une élève combien elle a de dizaines dans 32, et suite à l'élève qui lui répond « trois » il ajoute que lui il avait 32 dizaines.

Nous allons maintenant revenir plus en détail sur les échanges qui ont eu lieu lors de cette correction afin de mettre en évidence les techniques et technologies en jeu dans ce moment (qui seront dans le milieu pour les cas suivants) :

Lucie : là j'ai marqué trente-deux et j'ai rajouté un zéro, et y'a pas d'unité.

P : Et y'a pas d'unité. Qui c'est qu'a manipulé ? T'as manipulé pour le trouver ou t'as écrit comme ça ?

Lucie : j'ai manipulé

P : t'as manipulé combien de billets ? C'est des billets de cent, de dix, de un ?

Lucie : de dix.

P : combien t'en as pris en main ?

Lucie : trente deux

P : trente deux. Alors je vais les écrire au tableau. Ca va nous prendre un petit peu de temps mais je les écris au tableau parce que je vois que Valentin il les avait sur la table. Y'en a qui n'ont pas manipulé, Antonin il a écrit directement le nombre.

Des é : moi aussi !

P : Bien alors je vais les écrire. Pour que ce soit plus facile à compter je vais faire des paquets de combien ?

Les é : dix.

Le maître dessine les billets au tableau et fait une remarque pour recadrer le travail des CE1.

P : combien de paquets de dix il faut que je fasse ?

Des é : trente-deux

P : trente-deux paquets de dix ?

Il continue de dessiner les paquets de dix, par colonnes comme ceci :

10	10	10	10
10	10	10	10
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	
10	10	10	

P : je n'ai fait que trois paquets de dix, hein ?

Un é : non t'as pas fait trois paquets de dix.

P : un paquet de dix, un paquet de dix (montre les colonnes), trois paquets de dix, et non pas trente-deux paquets de dix sinon ça ferait trop. Alors on va compter.

P : dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, cent. Arthur tu comptes après.

Arthur : cent dix, cent vingt, cent trente, cent quarante, cent cinquante, cent soixante, cent soixante-dix, cent quatre-vingts, cent quatre-vingt-dix, deux cents.

P : Alors deux cents, Arthur.

Arthur : deux cent dix, deux cent vingt, deux cent trente, deux cent quarante, deux cent cinquante, deux cent soixante, deux cent soixante-dix, deux cent quatre-vingt, deux cent quatre-vingt-dix, trois cents, trois cent dix, trois cent vingt.

P : trois cent vingt. Alors donc on arrive à trois cent vingt, donc si on manipule. Donc trente deux dizaines et aucune unité donc on met un zéro. On continue.

On voit tout d'abord que la possibilité d'utiliser les étiquettes pour faire des échanges entre dizaines et centaines n'est pas utilisée. Le maître fait pourtant des paquets de 10 étiquettes de 10 mais c'est « pour que ce soit plus facile à compter ». La technique choisie est donc celle qui consiste à compter de 10 en 10.

Tout se passe ici comme si le maître voulait se servir de cette technique de comptage pour justifier le fait d'ajouter le zéro à droite de 32, alors qu'il s'agit en fait d'une deuxième technique (c'est peut-être l'intervention de l'élève qui dit qu'elle a ajouté un zéro puis ajoute qu'elle a manipulé qui l'amène à faire cela). Du coup il n'y a pas d'élément technologique qui apparaît justifiant le fait d'ajouter un zéro : la deuxième technique ne permet pas de justifier la première mais plutôt de vérifier le résultat : on peut parler de « vérification » plutôt que de « validation ».

Pour les cas suivants, il faut donc considérer que les élèves auront les corrections de ces deux premiers cas dans leur milieu, ce qui risque de les amener à utiliser des règles de calcul (comme ici ajouter un zéro) qui sont rapides ou bien les étiquettes plutôt par effet de contrat. Quand le maître parle de manipuler, on peut désormais penser qu'il s'agit de la procédure de comptage.

3^{ème} cas : épisodes 13 à 15 (13c)

C'est à partir de ce cas que l'enjeu d'enseignement est présent : l'introduction des nombres à 4 chiffres avec des nombres de centaines à deux chiffres.

Lors de la présentation de la situation, le maître n'écrit plus c, d, u (et les tirets) sous le nombre à obtenir, ce qui laisse donc à la charge de l'élève l'association du chiffre des centaines au 3^{ème} rang dans le nombre en chiffres.

Il « invite » tout d'abord les élèves à manipuler, puis leur demande à tous de le faire (devant une erreur d'un élève), ce qui constitue une demande d'utiliser le comptage (en tenant compte de ce qui s'est passé dans les épisodes précédents. En faisant ceci il modifie l'enjeu : il s'agit maintenant de compter de 100 en 100. Certains élèves continuent cependant d'écrire directement le résultat sans utiliser les étiquettes. Cette technique de comptage n'apparaît plus seulement comme un moyen de vérifier le résultat mais aussi de le trouver.

Lors de la correction d'ailleurs, le maître demande immédiatement de dessiner les étiquettes puis de compter. Il ne laisse plus de place pour d'autres procédures. Mais l'élève interrogée bloque sur le comptage à partir de « mille ». C'est le maître qui intervient alors pour prendre en charge la suite du comptage pour « mille » et « mille cent » puis l'élève continue jusqu'à « mille trois cents » (il suffit en fait de compter de cent en cent en intercalant le mot « mille »). L'écriture du nombre en chiffres (à partir du nombre dit oralement) est prise en charge par l'élève sans difficulté apparente. On peut remarquer que l'élève interrogée avait écrit 130 sur son ardoise : on peut penser qu'elle avait mis le 1 de 13c à la place des centaines (3^{ème} rang) puis écrit le 3 à côté et le 0 pour marquer la position. La gestion de cette erreur par le maître consiste à lui faire utiliser le comptage puis lui dire « qu'il fallait ajouter un zéro de plus ». Cela peut permettre à l'élève de constater que son résultat est erroné (mais en utilisant une procédure qui demande l'intervention du maître pour l'aider à compter) mais ne peut pas lui donner les moyens de comprendre l'origine de son erreur.

4^{ème} et 5^{ème} cas : épisodes 16 à 21 (12c8d1u et 14c2u)

Tout se passe comme pour le cas précédent : les élèves doivent représenter le nombre avec les étiquettes puis trouver l'écriture en chiffres.

Lors de la recherche du 5^{ème} cas (14c2u) le maître institutionnalise le nom du 4^{ème} rang : « en fait dans les nombres qu'on est en train de chercher là on a mille, centaine, dizaine, unité », qu'il écrit sous la forme m, c, d, u au tableau sous 4 tirets représentant les chiffres à placer :

14c 2u →
 m c d u

Il semble que cette intervention du maître fasse suite à des erreurs (juxtaposition du 14 et du 2 en 142). Cette modification du milieu devrait amener les élèves à chercher à associer les unités à la position dans l'écriture en chiffres et non à utiliser le comptage (ce qui vient contredire ses demandes précédentes).

6^{ème} cas : épisodes 22 à 24 (12c11d2u)

Comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori ce cas présente la particularité d'avoir un nombre de dizaines et de centaines à 2 chiffres (ce qui explique que le maître dit vouloir « titiller un peu l'esprit » de ses élèves). Cependant les corrections précédentes risquent d'amener les élèves à tenter une juxtaposition directement ou à utiliser les étiquettes pour faire du comptage.

C'est en effet ce qu'on observe dans la classe : les premiers trouvent 1212, 1213 ou encore 12112 (on peut voir ici qu'il s'agit de manipulations de chiffres qui ne sont pas guidées par les relations entre les unités) et une élève qui a essayé de compter trouve 2512. Aucun élève n'a trouvé la bonne réponse.

Le début de la correction se déroule comme pour les cas précédents : le maître fait compter avec les étiquettes de 100 en 100, 10 en 10 et 1 en 1 (avec plus ou moins de difficultés) et fait écrire en chiffres le nombre trouvé. Il fait ensuite remarquer que ce n'est pas la même chose que ce que l'élève a trouvé sur son ardoise, sans revenir sur sa procédure.

Le deuxième élève interrogé dit qu'il a fait pareil, ce qui est peu probable car il a trouvé 12112, ce qui correspond à une juxtaposition des chiffres. Le maître lui demande quand même de montrer lui aussi comment il a fait certainement pour que l'élève prenne conscience de son erreur.

Le maître laisse alors planer le doute quant à la validité de chacune de ces réponses (il montre l'ardoise où est écrit 12112 en disant que c'est peut-être juste) et ajoute : « moi ce qui m'intéresse c'est de comprendre comment vous avez trouvé ça sur l'ardoise ». Cela marque un changement d'enjeu dans la mise en commun : il s'agit maintenant d'expliquer la technique utilisée par certains élèves (qui ne fonctionne pas). C'est alors le maître qui prend la responsabilité de la validation : il trace des colonnes pour séparer les étiquettes 100, 10 et 1 en écrivant c, d, u au-dessus (comme dans un tableau de numération) tout en effectuant un comptage de 100 en 100, il obtient 1200, de 10 en 10, il obtient 110 puis de 1 en 1, il obtient 2. Soit 1200, 110 et 2.

Concernant le 110 il demande aux élèves ce qu'on est « obligé de faire ici » car « on dépasse 100 ».

Qu'est-ce qui fait que l'on est « obligé » ? Implicitement c'est le fait que dans une colonne on ne puisse avoir plus de 9 unités, mais cela n'apparaît pas dans le milieu car avec les étiquettes on peut en placer autant que l'on veut.

Du coup les élèves pensent qu'il faut déplacer des objets entre les colonnes : « une dizaine dans la centaine ». On voit là encore que la manipulation proposée par l'enseignant n'est guidée par aucune propriété mathématique car les connaissances des relations entre dizaines et centaines ne semblent pas être dans le milieu des élèves.

C'est donc le maître qui est encore obligé de prendre la responsabilité de l'explication de cette relation tout d'abord par un recours au comptage « dix, vingt, ... cent » qui lui permet d'obtenir l'équivalence entre 10 étiquettes 10 et 1 étiquette 100 pour justifier le passage dans la colonne des centaines.

Face aux difficultés des élèves à formuler cette équivalence, il reformule « dix paquets de dix » en « dix fois dix », ce qui semble alors s'appuyer sur une règle positionnelle de calcul ($10 \times 10 = 100$ car on ajoute un zéro). Il termine en disant qu'on peut les « transférer dans les centaines, ça fait une centaine de plus ». Il a donc ainsi utilisé la technique consistant à utiliser les étiquettes en effectuant les échanges entre les unités. Ce qui lui fournit une deuxième méthode pour vérifier le résultat mais on ne voit pas le lien avec la procédure utilisée par les élèves : comment se traduisent ces manipulations d'étiquettes en manipulations de chiffres ? Cela permettrait de donner des règles de manipulation des chiffres s'appuyant sur des propriétés mathématiques.

g) L'entretien post-séance : des compléments sur l'activité du professeur.

Voyons tout d'abord le bilan que fait l'enseignant de sa séance :

O : Qu'est-ce que t'en penses de ce qui s'est passé par rapport à ce que tu avais préparé ?

E : Ce qui s'est passé c'est par rapport à ... (*inaudible*). Donc là ils y sont arrivés parce que c'étaient des révisions (*il montre les cas 1 et 2*). Déjà trente-deux dizaines certains se sont ... (*inaudible*), d'autres avaient un petit peu oublié. Certains ont mis trente-deux donc en manipulant après certains ont vu qu'ils s'étaient trompés. Donc pour treize centaines donc ça s'est relativement bien passé. Le problème c'est de compter au-delà de mille. Ils sont pas encore habitués. Donc après là ça c'était à peu près bien réussi. Bon c'est le dernier qui a posé problème effectivement. Le problème d'une dizaine. Alors qu'en comptant de 1 en 1, de 10 en 10 tu vois ils sont arrivés à trouver le nombre, donc euh + Alors c'est pas facile il y a encore du travail à faire.

O : oui

E : donc après ce que je pense c'est qu'il faudra utiliser les compteurs.

O : oui

E : +++ (réfléchit) Bon parce que là ils ont écrit douze, onze, deux, ils ont cru que c'était comme ça mais bon là y'avait un problème, y'avait une centaine de plus parce qu'on dépassait cent.

Cela nous permet de confirmer que la technique de comptage sert bien à vérifier le résultat.

Le maître a identifié les erreurs des élèves (niveau - 1) : le comptage au-delà de mille (pour la technique de comptage) et la juxtaposition des chiffres (pour la technique utilisant directement les écritures en chiffres). Pour le passage aux milliers dans le comptage, il justifie cela par un manque d'entraînement (il nous dit ensuite qu'il va utiliser les compteurs pour justement travailler cet aspect), mais pour la juxtaposition des chiffres il se contente tout d'abord d'un « alors c'est pas facile il y a encore du travail à faire », puis précise « là y'avait un problème, y'avait une centaine de plus parce qu'on dépassait cent ». Il y a des moments de silence lors de l'entretien quand on évoque ce point, qui montre la réflexion de l'enseignant. Il a donc, à peu près, identifié le problème (les relations entre dizaines et centaines ne sont pas données explicitement) mais ne semble pas avoir de moyen de le traiter. Il semble assez démuni devant cette erreur.

On peut dire que son observation du travail des élèves est bien un milieu antagoniste pour l'action didactique du maître mais il ne provoque pas de rétroaction : il n'a pas d'incidence sur le projet de l'enseignant. Cela est peut-être lié au fait que son identification des erreurs (niveau - 1) ne vient pas en écho à son projet d'enseignement (niveaux +1 et +2).

Du coup, il se met ensuite à douter de l'intérêt de cet exercice :

E : J'aurais peut-être dû m'arrêter là (montre l'avant dernier cas), les lâcher mais bon.

O : on a toujours envie de savoir ...

E : eh bien voilà je voulais les titiller un peu. C'est ce que j'ai dit, alors bon. Mais n'empêche qu'en passant au tableau ils y sont arrivés. Les deux y sont arrivés alors qu'ils étaient 3 ou 4 à avoir écrit 12112.

Il s'agit donc d'un exercice pour aller plus loin selon lui et l'enjeu semble alors, de voir si les élèves en sont capables mais l'on n'insistera pas davantage. Ce n'est pas un enjeu au niveau du savoir mais au niveau de la réussite seulement (« Les deux y sont arrivés »).

On a finalement l'impression d'une absence du niveau technologique (dans la classe et dans l'entretien) et une prédominance du travail sur les techniques qui peut nous donner des indices sur la conception de l'enseignant vis-à-vis des mathématiques (niveau +3) : faire des mathématiques c'est appliquer des techniques.

La suite de l'entretien montre également une certaine conception de l'enseignement des mathématiques :

E : c'est comme les résolutions de problèmes avec les CE1, c'est un peu fastidieux (il parle des corrections au tableau) mais on essaie de voir différentes solutions, ce que les uns ou les autres ont trouvé. Donc on essaie de voir. Surtout lorsque tu veux leur faire découvrir une opération du genre multiplication, soustraction un moment donné dans l'année y'en a toujours un qui a l'idée de la multiplication. Tu vois l'autre jour on a pris le temps mais y'en a une qui a trouvé, une CE1. Le but c'est de les amener vers une solution experte. Elle a eu l'idée, elle. On essaie de voir à chaque fois la façon de procéder des uns ou des autres, ça prend un peu de temps mais bon voilà.

Il semble donc que ce soient les élèves qui doivent construire tous seuls des solutions « expertes ». Il n'évoque pas les conditions pour amener les élèves à utiliser ces solutions. C'est comme s'il fallait attendre que cette solution arrive un jour (« y'en a toujours un qui a l'idée »). Cela est peut-être lié à une certaine dérive d'une lecture superficielle du programme

de 2002 (qui est une référence forte pour cet enseignant), qui semble être ici interprété comme « il faut que l'élève construise lui-même ses connaissances ». Mais d'après la conception de l'enseignement des mathématiques que nous avons relevée, finalement cela revient à dire qu'« il faut que l'élève construise lui-même ses techniques ».

Dans le cas où la technique construite par l'élève ne fonctionnerait pas, comme dans la séance analysée, le maître interviendrait alors pour lui en donner une autre qui marche à tous les coups, même si elle ne permet pas de comprendre son erreur.

h) Conclusion :

On avait donc ici un milieu qui, a priori, permettait de faire apparaître le lien entre les centaines et milliers (avec quand même l'absence des étiquettes 1000) mais ces relations sont comme transparentes dans la classe car les élèves utilisent des juxtapositions de chiffres qui fonctionnent pour le rang du millier (quand on a un nombre de centaines à deux chiffres, le chiffre de gauche donne directement le chiffre des milliers) et le maître pour éviter qu'ils se trompent met en avant la procédure de comptage qui ne permet pas de contrôler ces manipulations faites sur les chiffres. Ce sont deux techniques différentes, qui utilisent des savoirs différents. Du coup les manipulations effectuées par les élèves sur l'écriture en chiffres ne sont pas justifiées par des propriétés mathématiques, ce qui explique notamment que pour le dernier essai la plupart des enfants effectuent une juxtaposition incorrecte des chiffres. Finalement, la relation entre les unités successives n'est ni formulée, ni utilisée.

Le maître voit les erreurs des élèves, mais est assez démuni devant leur traitement possible. Il ne semble pas avoir conscience que dans les recompositions demandées ce sont les relations entre les unités qui sont en jeu. Cela est peut-être une conséquence du fait qu'il n'a pas prévu dans son projet (niveaux +1 et +2) de traiter ces relations entre les unités, ce qui l'empêche peut-être de les voir. Ce serait alors une conséquence des contraintes institutionnelles relevées dans la partie C. Il semble également qu'une autre cause de ce phénomène peut être liée au fait que Marc semble avoir une conception des mathématiques (niveau +3) qui est centrée sur l'application de techniques. Les savoirs y ont peu de place. Il semble même qu'il attende de ses élèves qu'ils construisent la procédure « experte » par eux-mêmes, sans que l'on en voie les conditions dans ses propos lors de l'entretien.

Dans tous les cas, au niveau d'observation (-1) cela a pour conséquence de jeter comme un voile devant les yeux de l'enseignant, l'empêchant de comprendre les erreurs de ses élèves.

Même si le maître évoque le « passage » de dizaines dans les centaines lors d'un court moment au tableau, l'aspect décimal de la numération n'est pas un enjeu de savoir pour le maître. Nous pouvons en conclure que ce savoir n'est pas disponible chez le maître : il n'est pas reconnu comme un savoir fondamental de la numération.

III.3 La mise en œuvre du projet de la deuxième enseignante (Sophie)

La situation que nous analysons ci-dessous est extraite de la première séance. Elle va nous permettre d'analyser les choix de l'enseignante lors de l'introduction des nombres à quatre chiffres sur les décompositions et recompositions.

a) Inscription de la séance dans le projet global

Il s'agit de la séance d'introduction des nombres à quatre chiffres. Les élèves ont déjà travaillé pendant la première période de l'année sur les nombres à trois chiffres et ont rencontré quelques nombres à quatre chiffres en histoire sur une frise chronologique.

L'enjeu principal d'enseignement de la séance semble être d'apprendre à étendre les techniques connues de décomposition/recomposition (pour les nombres à trois chiffres) aux nombres à quatre chiffres.

Nous allons donc en particulier regarder comment se fait ce passage des techniques connues (pour les nombres à trois chiffres) aux techniques utilisant les nombres à quatre chiffres. Quels sont les objets nouveaux qui vont apparaître et comment ?

b) Présentation de la situation

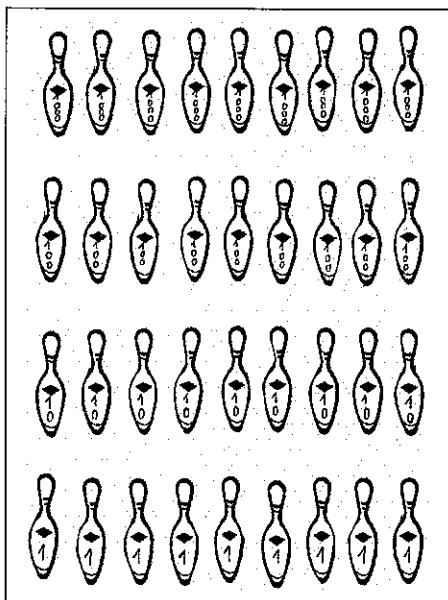
La situation est extraite de l'ouvrage ERMEL CE2 qui est le principal document utilisé par la maîtresse pour les mathématiques.

Le but du jeu est de renverser les quilles. On a des quilles de « 1 », des quilles de « 10 », des quilles de « 100 », des quilles de « 1000 ».

Quand on renverse des quilles on marque des points. La maîtresse a une feuille avec toutes les quilles représentées :

Les élèves doivent chercher le nombre de points marqués. Ils ont à leur disposition une feuille de recherche vierge (« fiche jaune »). Voici la fiche à compléter :

<p><u>Recherche /numération :</u></p> <p><u>Combien de points marqués avec :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • 4 quilles de 1000 ? _____ • 1 quille de 1000, 5 quilles de 100, 2 quilles de 10 et 3 quilles de 1 ? _____ • 3 quilles de 1 000, 7 quilles de 10 et 6 quilles de 1 ? _____ • 6 quilles de 1 000, 5 quilles de 100, 1 quille de 10 ? _____ • 8 quilles de 1000, 3 quilles de 1 ? _____



La présentation de la situation aux élèves s'est déroulée comme suit.

Episode 1 : collectif (5 minutes)

Dans cette présentation de la situation l'enseignante s'assure que les élèves connaissent le jeu de bowling. Au cours de cette présentation elle va nommer et faire nommer par les élèves les quilles de « 1000 ». Tout se passe comme si les élèves savaient déjà lire ce nombre.

P : vous connaissez le jeu du bowling ? Comment on fait pour jouer déjà ?
(l'enseignante montre les quilles qu'elle a apportées)

[...]

P : et le but du jeu ?

[...]

P : c'est de faire tomber les quilles, c'est de les renverser.

[...]

P : Dans notre jeu mathématique nous allons avoir des quilles de un ...

Un e : des quilles de dix, des quilles de cent, des quilles de mille.

P : des quilles de dix, des quilles de cent et des quilles de mille.

[...]

P : si vous renversez certaines quilles vous allez avoir un certain nombre de points. Bon eh bien voilà, vous allez avoir pour vous aider + Là j'ai tout ça en quilles dans mon jeu (montre la fiche où sont dessinées les quilles). Donc j'ai neuf quilles de un qui sont alignées, derrière j'ai neuf quilles de ?

Les e : dix

P : derrière j'ai neuf quilles de ?

Les e : cent

P : et derrière j'ai neuf quilles de ?

Les e : mille.

P : J'ai joué et je vous ai noté les quilles que j'ai renversées. La première fois j'ai renversé quatre quilles de mille. Ca va faire combien de points ? C'est ça votre activité de recherche. Deuxième fois, j'ai renversé une quille de mille, cinq quilles de cent, deux quilles de dix et trois quilles de un. Troisième fois j'ai renversé trois quilles de mille, sept quilles de dix et six quilles de un. Et ainsi de suite. J'ai fait en tout cinq parties. A vous de retrouver, par rapport à toutes mes quilles qui ont été renversées, le nombre de points à chaque fois [...] Alors bien sûr vous allez avoir la petite fiche de recherche où le nombre de quilles renversées est noté. D'accord ? [...] Pour vous aider [...] je vous donne une autre fiche jaune [...] pour calculer, pour écrire vos procédures si vous avez besoin d'écrire des choses, vous les notez sur l'autre feuille. Et là sur celle-ci sur le trait vous notez en tout le nombre de points qui correspond aux quilles renversées. Est-ce que ça va ?

Les élèves posent alors quelques questions puis l'enseignante fait reformuler la consigne par les élèves (en insistant en particulier sur le fait qu'il faut retrouver le nombre de points pour chaque partie et pas pour l'ensemble des parties).

c) Analyse a priori de la 1^{ère} situation :

L'enjeu d'enseignement :

Une variable didactique importante de la situation est la place et le nombre de zéros dans l'écriture en chiffres du nombre à obtenir : il n'y a en effet que des nombres à quatre chiffres mais avec 1, 2 ou 3 zéros, situés au rang des unités, dizaines ou centaines. On a d'abord 3 zéros, ce qui permet de mettre en évidence le rang des milliers, puis aucun ce qui demande de faire une simple juxtaposition des chiffres, puis un zéro ou deux zéros aux rangs des unités, dizaines ou centaines, ce qui demande alors de faire l'association de chaque unité au rang correspondant.

On peut ajouter également le fait que les unités soient toujours données dans l'ordre décroissant de leur valeur (toujours 1000 en premier puis 100 puis 10 et enfin 1) permet de simplifier le travail d'association unité/position dans l'écriture. On peut écrire le nombre en suivant le sens de lecture des différentes unités.

Enfin il n'y a que des nombres à un chiffre pour chaque type de quille (et aussi sur le dessin où chaque type de quille est représenté en neuf exemplaires), ce qui dispense d'avoir à utiliser les relations entre les unités de la numération. C'est donc uniquement l'aspect positionnel de la numération qui est en jeu.

L'enjeu d'enseignement est, par conséquent, en fait ici une traduction d'écriture. Le savoir nouveau visé est l'association entre l'ECPD 1000 et le rang dans le nombre en chiffres.

Le milieu

Le milieu contient la règle du jeu de bowling, l'affiche avec les quilles représentées, les différentes décompositions données avec le mot « quille » (« 4 quilles de 1000 », etc.), à l'écrit comme à l'oral (car la maîtresse lit les différentes décompositions). En particulier la maîtresse nomme « mille » les quilles de 1000, donc le milieu contient également le mot mille (associé à l'écriture 1000). Une autre façon de voir cela serait de dire qu'ils peuvent utiliser la position du 1 dans « 1000 » pour repérer le rang qui lui est associé (comme cela est le cas pour 100, 10 ou 1).

Il contient également « la feuille jaune », la fiche de recherche donnée aux élèves. Lors de la passation de consigne la maîtresse précise : « je vous donne une autre fiche jaune [...] pour calculer, pour écrire vos procédures si vous avez besoin d'écrire des choses ». Cette incitation peut avoir pour effet d'amener les élèves à écrire des calculs (l'utilisation du mot « calculer » n'est pas anodine) alors même qu'ils n'en auraient peut-être pas eu besoin.

Chez les élèves, on peut supposer disponibles les connaissances sur la numération des nombres à trois chiffres, qui ont été travaillées en début d'année. En particulier, les élèves savent déjà décomposer et recomposer des nombres à trois chiffres. Ils utilisent pour décomposer les écritures en ECPD et en ECPDG ($325 = 300 + 20 + 5$ ou $325 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5$).

Les rétroactions possibles du milieu, les interventions prévisibles de l'enseignant

Le savoir nouveau (associer 1000 au quatrième rang dans l'écriture chiffrée) est en jeu dès le premier cas à traiter. En effet, comme les élèves savent déjà recomposer des nombres à trois chiffres, ils pourront utiliser leurs connaissances anciennes pour traiter la partie « nombre à 3 chiffres » des recompositions. Mais ce premier cas ne leur permet justement pas de le faire puisqu'il ne contient que des unités de mille.

Ils peuvent alors essayer d'étendre les règles qu'ils connaissent sur les nombres à 3 chiffres : par exemple 4 quilles de 100 c'est 400 car « il faut ajouter deux zéros » (les deux zéros de 100), donc 4 quilles de 1000 c'est 4000 car « il faut ajouter trois zéros » (les trois zéros de 1000).

La situation peut alors apporter des rétroactions : si l'élève écrit un nombre qui a trois chiffres au plus, par lecture de ce nombre il peut prendre conscience d'une erreur. Par exemple, si l'élève trouve 400 (si par exemple il ne s'autorise pas à écrire plus de 3 chiffres pour un nombre) : en lisant « quatre cents » il peut prendre conscience que ce n'est pas « 4 quilles de 1000 » mais plutôt « 4 quilles de 100 ».

Par contre si l'élève écrit par exemple 41000 (en juxtaposant les deux nombres donnés dans l'énoncé), ses connaissances anciennes ne lui permettent pas d'invalider cette procédure car il ne peut pas utiliser la lecture du nombre cette fois.

En ce qui concerne les cas suivants, nous avons vu qu'une variable importante est le nombre et la place des zéros. Cela peut permettre de faire apparaître une procédure erronée chez les

élèves qui consisterait à écrire les chiffres les uns à la suite des autres sans tenir compte de la valeur des quilles.

Par exemple pour le 3^{ème} cas (3 quilles de 1000, 7 quilles de 10 et 6 quilles de 1) : si l'élève écrit les chiffres 3, 7, 6 les uns à la suite des autres (dans le même ordre que celui donné), il obtient un résultat faux. La situation peut renvoyer une rétroaction à condition encore que l'élève sache lire ce nombre à 3 chiffres (ce que l'on peut supposer) mais aussi qu'il décide de le lire (« trois cent soixante seize »). C'est là que la lecture par la maîtresse du nombre 1000 en « mille » peut l'aider à prendre conscience de son erreur, car il peut supposer que dans le nombre à obtenir, il faudra entendre « mille ».

Néanmoins, ce comportement de retour sur son résultat (pour essayer de le lire par exemple) est assez rare chez les élèves.

On peut par contre peut-être voir là une possibilité pour le maître d'intervenir sur le milieu en demandant à l'élève de lire le nombre trouvé (pendant la recherche des élèves ou la mise en commun).

Concernant le déroulement possible, la maîtresse pourrait choisir de corriger les cas au fur et à mesure, ces corrections faisant partie du milieu pour les cas suivants ou bien de laisser chercher les élèves et de faire une correction à la fin. Elle pourrait aussi traiter le premier cas, qui contient déjà le savoir nouveau, avec eux et ensuite les laisser chercher tous les autres.

Les élèves vont-ils utiliser leurs connaissances sur les nombres à trois chiffres ? Sinon comment l'enseignante va-t-elle amener ces connaissances dans le milieu des élèves ?

Les techniques possibles

Nous prendrons l'exemple du 3^{ème} cas : 3 quilles de 1000, 7 quilles de 10 et 6 quilles de 1.

τ_1 : associer la valeur de chaque ECPD à la position dans l'écriture chiffrée.

Par exemple : 3 quilles de 1000 c'est « 3 » au rang des unités de mille, 7 quilles de 10 c'est « 7 » au rang des dizaines et 6 quilles de 1, c'est « 6 » au rang des unités. Finalement on obtient le nombre 3076 (on écrit « 0 » au rang où il n'y a pas d'unité) ;

Cela peut se faire également en passant par le nombre en ECPDG : $3 \times 1000 + 7 \times 10 + 6$, c'est « 3 » au 4^{ème} rang, « 7 » au 2^{ème} rang et « 6 » au rang des unités, donc 3076.

τ_2 : réécrire la décomposition en ECPDG et utiliser des règles positionnelles de calcul.

Par exemple : 3 quilles de 1000, 7 quilles de 10 et 6 quilles de 1, c'est $3 \times 1000 + 7 \times 10 + 6$, soit $3000 + 70 + 6$ (pour multiplier par 1000 on ajoute trois 0, ...) donc 3076 (règle positionnelle d'addition).

τ_3 : réécrire la décomposition en ECPD et utiliser des règles positionnelles de calcul.

Par exemple : $3000 + 70 + 6 = 3076$ (en posant l'addition en colonnes ou en calculant en ligne) ou même $1000 + 1000 + 1000 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 6 = 3000 + 70 + 6$.

Il sera difficile de distinguer τ_1 de τ_2 dans la classe si les élèves utilisent les ECPDG, à moins qu'ils ne disent explicitement que pour multiplier par 1000 il faut ajouter trois zéros, c'est-à-dire s'ils donnent l'élément technologique utilisé.

Le savoir nouveau en jeu apparaît dans ces techniques de différentes manières : par une association de 1000 au 4^{ème} rang en s'appuyant sur le mot « mille » ou sur l'écriture en chiffres « 1000 » en les associant à une position (τ_1) ou sur une règle positionnelle de calcul : 3×1000 c'est 3000 car on ajoute trois 0 (τ_2) ou encore $1000 + 1000 + 1000 = 3000$ par une règle positionnelle d'addition (τ_3).

Dans tous les cas, comme nous l'avons déjà remarqué, les relations entre les unités ne sont pas en jeu.

Remarque : les élèves peuvent également s'appuyer sur la numération orale. Par exemple : 7 quilles de 10 c'est « soixante dix », 6 quilles de 1 c'est « six », donc « soixante seize », puis 3 quilles de 1000 c'est « trois mille », donc « trois mille soixante seize » que l'on écrit ensuite : 3076 (en associant le nom des unités à leur rang dans l'écriture chiffrée).

Mais on peut remarquer que cette technique utilise la lecture d'un nombre (lire 1000 par exemple) et réciproquement l'écriture en chiffres d'un nombre lu (passage de « trois mille soixante seize » à 3076). Ces connaissances n'ont pas encore été travaillées pour les nombres à 4 chiffres.

Comme nous l'avons déjà précisé, le fait d'avoir une fiche de recherche (la fiche jaune) où les élèves peuvent « calculer » peut amener les élèves à écrire des justifications de leurs techniques dès la phase de recherche, ce qui pourra ensuite servir de point d'appui pour la phase de mise en commun.

On peut alors se demander comment l'enseignante va faire apparaître ces techniques dans la mise en commun ? Seront-elles justifiées ? Validées ? Comment ? Comment va apparaître le savoir nouveau qui est la relation entre l'ECPD 1000 et le rang des milliers ?

d) Description du déroulement

Episode 2 : individuel (15 minutes)

Les élèves travaillent seuls (en complète autonomie). L'enseignante s'occupe des élèves de CE1. Certains élèves ont terminé avant le retour de la maîtresse : ils font un autre travail (« contrat de travail »).

Episode 3 : collectif (9 minutes)

Correction collective : la maîtresse demande aux élèves le nombre obtenu et « comment ils ont trouvé ». On peut remarquer que concernant cet aspect il s'agit en particulier de donner une écriture permettant de justifier le nombre obtenu. Elle passe en revue les différentes méthodes utilisées par les élèves. Par exemple pour le premier cas à traiter :

P : quatre quilles de mille ça me faisait quoi ? Raphaël.

Ra : quatre mille

P : comment tu as trouvé quatre mille alors ?

Ra : parce que + si euh tu + si comme si t'avais + euh mille plus mille plus mille plus mille

P : donc toi tu as fait ça (l'enseignante écrit au tableau : « $1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4000$ »). Donc toi tu as trouvé quatre mille. Marie.

Ma : j'ai fait quatre fois mille

P : et tu as trouvé donc ?

Ma : quatre mille (l'enseignante écrit au tableau « $(4 \times 1000) = 4000$ »)

P : d'accord. Vous êtes d'accord ? Est-ce que quelqu'un a trouvé autre chose ?

Un e : moi j'ai directement mis quatre mille parce que je le savais.

Des e : moi aussi, moi aussi

On retrouve dans les réponses des élèves les mêmes types de décomposition que sur les nombres à trois chiffres, mais tout se passe encore ici comme si la lecture du nombre 1000 ou

d'un nombre à quatre chiffres était un savoir ancien. On ne perçoit pas de difficulté d'ailleurs chez les élèves sur ce point.

Lors de la correction du deuxième cas (1 quille de 1000, 5 quilles de 100, 2 quilles de 10 et 3 quilles de 1) la maîtresse demande aux élèves une justification des procédures utilisées.

Pour la première procédure (utilisation des ECPDG), voici un extrait de l'échange avec les élèves :

Oc : j'ai fait une fois mille plus cinq fois cent plus deux fois dix plus trois fois un.
(la maîtresse écrit en même temps au tableau : « $(1 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1)$ »)

Oc : donc ça fait mille cinq cent vingt-trois.

P : alors une fois mille ça faisait ?

Oc : non parce qu'en fait j'ai mis le un avec le cinq le deux et le trois et ça faisait mille cinq cent vingt-trois.

P : d'accord. Mais bon y'a une explication pour mettre le un, le cinq, le deux et le trois quand même.

Oc : parce que le premier chiffre une fois mille j'ai mis le un, cinq fois cent j'ai mis le cinq, deux fois dix j'ai mis le deux et trois fois un j'ai mis le trois

P : d'accord, mais ça correspond à quoi finalement ça ? *L'enseignante montre au tableau le « 3 » de « 1523 ».* Ce trois c'est quoi ?

Oc : trois unités

L'enseignante montre alors le « 2 »

Oc : deux dizaines

L'enseignante montre alors le « 5 »

Oc : cinq centaines

L'enseignante montre alors le « 1 »

Oc : ... (ne dit rien)

P : et c'est quoi le un ?

Les e : les mille

P : là c'est les mille. On va les appeler les unités mais cette fois-ci les unités de mille. D'accord ? [...] Donc là vous avez le nombre des unités de mille et là les mille qui apparaissent.

(Elle écrit au tableau : « unités

de mille c d u

1 5 2 3 »)

un e : bah ils étaient déjà apparus l'an dernier.

P : oui ils sont déjà apparus un peu. Baptiste.

Ba : moi j'ai pas fait ça. J'ai directement dit que une quille de mille ça faisait mille, plus + après je savais que cinq fois cent ça faisait cinq cents, donc mille cinq cents.

Deux quilles, je savais que deux fois dix ça faisait vingt j'ai fait vingt et puis après + bah plus trois ça fait ++ mille cinq cent vingt trois

(l'enseignante écrit en même temps au tableau : « $1000 + 500 + 20 + 3 = 1523$ »)

un e : moi j'ai fait en colonnes

un autre e : moi aussi j'ai fait en colonnes

P : vous l'avez présenté comme ça. Mille, cinq, cent ; vingt, trois.

(l'enseignante écrit en même temps au tableau l'addition posée)

Un e : tu les as pas placés à leur place.

P : quoi ?

Même e : bah les nombres

Un autre e : c'est un petit peu tordu

P : ah oui oh la la la la ...

	1	0	0	0
+		5	0	0
+			2	0
+				3
	1	5	2	3

Autre e : bah c'est comme dans la leçon. C'est toi qui nous dis de le faire.

P : c'est vrai. C'est pas bien maîtresse.

Un e : le deux il est un peu sous le zéro

Autres e : c'est normal !

P : alors Marie.

Ma : j'ai fait comme ça sauf qu'à la place de une fois mille j'ai mis tout simplement mille.

P : d'accord. Mais oui mais c'est la même chose ce que vous avez fait avec Océane finalement. Sauf que Océane elle l'a écrit avec l'écriture + multiplicative et vous vous l'avez décomposé avec l'écriture ?

Ma : additive.

P : additive. D'accord ?

L'enseignante institutionnalise donc le nom du 4^{ème} rang dans l'écriture chiffrée : les unités de mille.

Pour la deuxième procédure utilisée (« moi j'ai fait en colonnes ») la maîtresse décide là aussi de ne pas se contenter de donner l'écriture en ligne mais pose l'addition en colonnes.

Elle termine en précisant que les deux procédures sont équivalentes mais que certains l'écrivent avec l'« écriture multiplicative » (en montrant au tableau 4×1000) et d'autres avec l'« écriture additive » (en montrant l'écriture « $1000 + 1000 + 1000 + 1000$ »).

Le déroulement pour les cas suivants est assez proche (mais sans nouvelle institutionnalisation). La maîtresse écrit systématiquement au tableau les deux types de « décompositions » utilisées (« multiplicative » et « additive ») et demande des explications sur le rôle du zéro dans l'écriture en chiffres obtenue. Par exemple dans le dernier cas :

P : huit mille trois, comment tu l'écris ?

E : bah 8, deux 0 et 3

P : pourquoi deux 0 ?

Autre E : parce que y'a pas de centaine et pas de dizaine

P : d'accord. Et si j'écris ça qu'est-ce que ça fait ? (elle écrit 83 au tableau)

Les E : quatre vingt-trois

e) Analyse a posteriori

Analyse de la phase d'action

Pendant le moment de recherche les élèves sont en complète autonomie (travail individuel et l'enseignante travaille avec les CE1). Elle choisit de corriger tous les cas après la recherche des élèves. Elle laisse donc les élèves se confronter au milieu sans intervenir sur ce milieu.

Nos observations des élèves (ainsi que les différentes interventions des élèves dans la phase de mise en commun) montrent que certains écrivent directement le résultat, d'autres utilisent (peut-être par effet de contrat) la fiche de recherche (la fiche jaune) pour écrire leur calcul ou les décompositions utilisées. Nous voyons en effet des additions posées et des décompositions en ECPDG (par exemple $(1 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1)$).

Les élèves semblent donc avoir prolongé les techniques connues pour les nombres à trois chiffres au cas de « 1000 » sans avoir rencontré de difficultés. Ces différentes écritures feront partie du milieu pour la phase suivante (mise en commun).

Nous relevons qu'un élève a fait une erreur. Il a écrit $6000 + 500 + 10 = 6060$. Comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori nous voyons ici que le milieu ne peut apporter de rétroactions car il faudrait à l'élève des connaissances sur la lecture des nombres à quatre

chiffres. Cet élève semble plutôt utiliser une règle positionnelle d'addition. Cette erreur n'est pas apparue dans la mise en commun.

Analyse de la mise en commun (formulation et validation)

Les questions qui vont guider cette analyse concernent les techniques qui vont être explicitées et la façon dont le savoir en jeu va apparaître (si c'est le cas). En particulier nous regarderons si la maîtresse s'appuie (ou non) sur le milieu pour formuler et éventuellement institutionnaliser ces savoirs et comment elle le fait.

Lors de la correction du premier exemple, les techniques suivantes apparaissent au tableau :

- $1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4000$ (règle positionnelle d'addition, τ_5) ;
- $4 \times 1000 = 4000$ (règle positionnelle de multiplication, τ_2).

Cependant on peut penser que les élèves qui disent avoir mis directement 4000 parce qu'ils le savaient ont utilisé la transcription de l'oral ou τ_4 :

- 4 quilles de 1000 (ou 4×1000 ou encore 4 « mille ») c'est 4 au quatrième rang

Comme nous l'avons déjà signalé dans l'analyse a priori il est difficile de différencier les techniques τ_4 et τ_2 quand les élèves utilisent les nombres en ECPDG.

L'enjeu pour ce premier cas semble donc être, du côté de l'enseignante, de s'assurer que les élèves prolongent bien les règles positionnelles de calcul aux nombres à quatre chiffres.

Les deux techniques qui sont formulées à ce moment dans la classe sont justement les techniques qui n'utilisent pas le savoir nouveau mais qui demandent aux élèves d'utiliser des règles positionnelles de calcul. L'enseignante ne cherche pas à vérifier que ces techniques positionnelles s'appliquent pour des nombres à quatre chiffres. Les techniques formulées restent faibles et la dernière (la transcription de l'oral ou τ_4) reste invisible dans la classe. Cela semble être lié au fait que la maîtresse attend des justifications et que ces justifications semblent devoir être associées à un calcul, comme nous le montre cet extrait

P : alors une fois mille ça faisait ?

Oc : non parce qu'en fait j'ai mis le un avec le cinq le deux et le trois et ça faisait mille cinq cent vingt-trois.

La maîtresse attend donc que l'élève calcule alors que celle-ci a utilisé l'association directe des coefficients 1, 5, 2 et 3 de l'écriture (1×1000) + (5×100) + (2×10) + (3×1) au rang dans l'écriture en chiffres du nombre. Face aux difficultés d'explicitation de l'élève, elle adapte sa demande de justification. Elle n'attend plus un calcul mais une justification relative aux rangs dans l'écriture chiffrée. Elle s'appuie alors sur les connaissances anciennes des élèves relatives au nom des rangs dans l'écriture en chiffres (pour les nombres à trois chiffres) pour montrer clairement ses attentes aux élèves (« d'accord, mais ça correspond à quoi finalement ça ? Ce trois c'est quoi ? »).

Ce passage nous montre que la maîtresse veut maintenant « une explication pour mettre le un, le cinq, le deux et le trois », alors que jusqu'à présent elle attendait seulement une formulation de la technique utilisée. L'enjeu devient alors de justifier la technique utilisée, donc de donner les éléments technologiques utilisés. L'enseignante produit ainsi l'« ignorance des élèves » (Assude, Mercier, Sensevy, 2007) en leur posant un problème. Cette demande de justification ne naît pas d'un besoin de la situation car il n'y a pas par exemple confrontation de différents résultats qui pourraient rendre nécessaire la validation. C'est donc bien pour répondre uniquement aux attentes de la maîtresse. Les élèves n'ont pas été confrontés à leur ignorance au cours de la recherche. C'est donc bien dans ce cours moment de justification qu'il y a un enjeu au niveau du savoir.

L'élève interrogée ne perçoit alors peut-être pas ce que veut exactement la maîtresse. Mais on peut aussi penser qu'il lui manque en particulier le fait de pouvoir « parler » de la position des

chiffres dans l'écriture (« j'ai mis le un avec le cinq le deux et le trois ») pour que sa technique qui est invisible devienne une technique faible voire forte. On retrouve peut-être là une limite de l'ostensif nombre en ECPDG qui ne permet pas cette description orale du lien entre la décomposition et l'écriture chiffrée. Cela nécessite l'utilisation des unités de la numération.

L'enseignante (peut-être consciente de cette difficulté) amène alors l'élève interrogée à nommer le 4^{ème} rang dans l'écriture en chiffres et elle institutionnalise alors le nom de ce nouveau rang : « les unités de mille ». C'est à ce moment là que le savoir en jeu apparaît dans la classe (à partir la demande de justification de la maîtresse).

Cette justification, ainsi que l'institutionnalisation, utilisent la numération en unités mais plus les nombres en ECPDG. La numération en unités permet ici de faire le lien entre le nombre en ECPDG et le nombre en chiffres. On peut reconstituer ce passage comme ceci :

Les étapes pour l'institutionnalisation	Ostensifs utilisés												
$(1 \times 1000) + (5 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1)$	<i>Nombre en ECPDG</i>												
c'est 1 unité de mille, 5 centaines, 2 dizaines, 3 unités donc :	<i>Nombre en unités</i>												
<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: right;"><i>unités de</i></td> <td style="text-align: center;"><i>c</i></td> <td style="text-align: center;"><i>d</i></td> <td style="text-align: center;"><i>u</i></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;"><i>mille</i></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right;"><i>1</i></td> <td style="text-align: center;"><i>5</i></td> <td style="text-align: center;"><i>2</i></td> <td style="text-align: center;"><i>3</i></td> </tr> </table>	<i>unités de</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>	<i>mille</i>				<i>1</i>	<i>5</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>Tableau de numération</i>
<i>unités de</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>u</i>										
<i>mille</i>													
<i>1</i>	<i>5</i>	<i>2</i>	<i>3</i>										

Le nombre en unités et le tableau de numération apparaissent comme des intermédiaires pour associer le nombre en ECPDG au nombre en chiffres.

On peut alors noter que la maîtresse n'utilise pas le contexte de la situation pour cette institutionnalisation : on ne voit pas apparaître le lien avec les quilles de 1000.

La deuxième technique (Baptiste) apparaît ici comme une « technique faible ». Elle est uniquement formulée (sans justification) par l'élève et l'enseignante écrit la décomposition associée au tableau : « $1000 + 500 + 20 + 3 = 1523$ ».

Cette fois l'enseignante ne demande pas de justification. On retrouve le déroulement habituel (le même que pour tous les autres cas) : l'élève dit comment il a fait et la maîtresse donne l'écriture mathématique au tableau.

C'est l'intervention d'un autre élève (« moi j'ai fait en colonnes ») qui va permettre d'avoir une justification de cette technique. Cette justification s'appuie sur une addition posée en faisant apparaître les colonnes des différentes unités de numération.

Pour cela on n'a plus besoin d'avoir recours à la numération en unités. Mais on peut remarquer que cette justification n'est pas formulée oralement mais seulement montrée par écrit : c'est l'addition posée en colonne qui fait office de justification. On peut donc dire que l'objet « addition posée » donne à la fois la technique et sa justification (technologie).

Mais on ne voit pas ici apparaître de savoir nouveau : la maîtresse ajoute tout naturellement une colonne (pour le rang des milliers) sans faire de commentaire.

Le traitement du deuxième cas a donc permis, du côté de l'enseignante, de faire justifier les techniques utilisées, d'institutionnaliser le savoir nouveau qu'est le nom du 4^{ème} rang dans l'écriture chiffrée mais aussi de légitimer l'utilisation de l'addition posée avec les nombres à quatre chiffres.

Pour le traitement des cas suivants la maîtresse demande toujours les deux types d'écriture (multiplicatives et additives) mais en interrogeant les élèves sur le rôle du 0, elle fait intervenir des savoirs sur le lien entre les ECPD et le rang dans le nombre en chiffres, en utilisant les unités de la numération pour faire ce lien.

Elle demande également comment se lit le nombre écrit avec les mêmes chiffres mais sans le ou les zéros (par exemple 83 au lieu de 8003), ce qui est une action sur le milieu permettant d'invalider d'éventuelles procédures d'élèves. Elle utilise ici les potentialités du milieu que nous avons évoquées dans l'analyse a priori, même s'il ne semble pas que des élèves aient fait cette erreur dans la classe. Cela lui permet d'amener les élèves à utiliser le savoir qui a été institutionnalisé juste avant : le nom des rangs dans l'écriture en chiffres :

P : huit mille trois, comment tu l'écris ?

E : bah 8, deux 0 et 3

P : pourquoi deux 0 ?

Autre E : parce que y'a pas de centaine et pas de dizaine

P : d'accord. Et si j'écris ça qu'est-ce que ça fait ? (elle écrit 83 au tableau)

Les E : quatre vingt-trois

Le 0 apparaît alors comme permettant de signaler l'absence d'unités d'un certain ordre (dans l'intervention de l'élève) mais aussi de marquer la position (dans l'intervention de l'enseignante). Il apparaît ainsi une double signification du zéro, même si ce savoir ne fait pas l'objet d'une institutionnalisation (c'est un savoir ancien).

e) L'entretien post-séance.

Dans l'entretien qui suit cette séance, Sophie nous fait part de sa satisfaction face à la réussite des élèves, qui dépasse même ce qu'elle avait imaginé. Elle estime que la décomposition n'a pas posé de problème aux élèves. Elle n'a semble-t-il pas souhaité en parler davantage.

f) Conclusion :

L'enjeu d'enseignement au départ est assez petit (associer les milliers au 4^{ème} rang dans le nombre en chiffres) et l'exercice proposé ne permet pas de travailler la conjonction des aspects positionnels et décimaux. L'analyse du déroulement montre, comme on pouvait alors s'y attendre, que cette conjonction n'est pas en jeu non plus dans les phases de mise en commun.

Concernant l'aspect positionnel, nous avons remarqué que l'utilisation des ostensifs nombre en ECPD ou en ECPG amènent l'enseignante à attendre des justifications qui relèvent du calcul, comme par exemple, celles de Raphaël (« mille plus mille plus mille plus mille ») ou de Marie (« quatre fois mille »). Pour ceux qui disent avoir fait « directement », la maîtresse ne cherche pas (du moins au début) à décrire cette procédure (elle le fera quand il s'agira d'institutionnaliser le nom du nouveau rang). Tout se passe donc comme s'il n'y avait que deux procédures (« écriture additive » et « écriture multiplicative »). La troisième procédure (« directement ») n'apparaîtra que lorsque l'enseignante amènera l'utilisation des unités de la numération.

Il semble que les élèves ont bien prolongé les techniques connues sur les nombres à trois chiffres mais qu'il a été nécessaire d'avoir une intervention de la maîtresse pour faire apparaître le savoir nouveau (aspect décimal pour le 4^{ème} rang). Il apparaît par l'association des milliers au 4^{ème} rang de l'écriture chiffrée (qui nécessite le recours à l'ostensif unités de la numération pour formuler ce lien). Concernant les règles positionnelles de calcul elles semblent justifiées par l'addition posée, mais on ne voit alors pas de savoir nouveau en jeu (il y a juste une colonne qui est ajoutée sans autre commentaire).

Cela nous fait dire que les techniques formulées au départ dans la mise en commun ($\overline{2}$ et $\overline{3}$ qui utilisent des règles positionnelles et que l'on peut considérer comme relevant de l'OMR moderne et de l'OMR moderne adaptée) ne sont pas celles qui ont en fait permis de faire apparaître le savoir nouveau. Il a en fait fallu un basculement sur la technique $\overline{4}$, relevant,

elle, plutôt de OMR classique ou de l'OMR moderne mais avec utilisation des unités de la numération comme intermédiaire entre nombre en ECPDG et tableau de numération. Cela a été possible grâce à l'intervention d'une élève (« non parce qu'en fait j'ai mis le un avec le cinq le deux et le trois et ça faisait mille cinq cent vingt-trois ») qui a permis à la maîtresse de faire apparaître le savoir nouveau. Même si la maîtresse n'a pas observé les procédures des élèves pendant la phase de recherche, elle prend appui sur la formulation de ces procédures par les élèves pendant la phase de mise en commun pour faire avancer son projet.

En poursuivant nos observations, nous avons pu observer des régularités dans la mise en œuvre des situations : l'enseignante laisse une part importante d'autonomie aux élèves dans les phases de recherche (individuelle ou en groupes), une fois la consigne comprise, et n'intervient alors plus sur le milieu de la situation. Cela l'empêche notamment d'avoir une position d'observation des élèves (niveau -1) pendant ces moments-là. Pour la situation analysée, c'est seulement au cours de la mise en commun qu'elle prendra des informations sur les procédures en interrogeant différents élèves. Cela semble être lié à une contrainte du fonctionnement de classe avec les deux niveaux.

Pendant la phase de mise en commun elle semble ne pas se heurter à des difficultés particulières rencontrées par les élèves, c'est alors elle qui va montrer des erreurs possibles et demander aux élèves de les invalider. Elle utilise alors ses connaissances des difficultés des élèves (par son expérience d'observation, niveau -1) et/ou son analyse de la situation proposée (niveau +1). Au cours de la suite de la séance, le nombre et la place des zéros ont été des éléments du milieu utilisé par la maîtresse pour amener ensuite les élèves à formuler les connaissances nouvellement institutionnalisées.

Elle demande aussi aux élèves de justifier leurs réponses (notamment pour le deuxième cas de la première situation), ce qui finalement ne semblait pas indispensable ici étant donné que les élèves étaient tous d'accord sur le résultat. Cela semble donc relever d'une volonté de faire apparaître les savoirs nouveaux (en lien avec son projet d'apprentissage prévu, niveaux +1 / +2) ou plus généralement à une conception de l'enseignement des mathématiques (niveau +3) selon laquelle les réponses doivent toujours être justifiées.

III.4 Conclusions sur la mise en œuvre dans les classes des projets des enseignants

Comme nous l'avons vu dans l'analyse des projets globaux des deux enseignants, l'aspect décimal est presque inexistant. Notre analyse de la mise en œuvre de ces projets en classe montre deux cas très différents. Pour le premier enseignant (Marc), la situation proposée par le maître devrait a priori s'appuyer sur ce savoir pour justifier les manipulations d'écritures, mais cela n'a pas été le cas. Les élèves en sont ou bien restés à ces manipulations sans avoir accès aux propriétés sous-jacentes ou bien ont utilisé un passage par la numération orale avec des procédures de comptage qui permettent de contourner ce savoir.

Nous avons alors fait l'hypothèse que l'aspect décimal de la numération n'est pas reconnu comme un savoir fondamental de la numération et il n'est pas disponible chez le maître. Du coup, même si le maître constate les difficultés rencontrées par ses élèves il n'est pas à même d'en expliquer l'origine ni d'avoir une intervention adaptée.

On peut ici faire un lien avec le constat fait par Margolinas, Coulange, Bessot (2005) qui ont observé que, même pour un enseignant, chez qui les conditions étaient présentes pour apprendre à partir de son observation des activités des élèves, cela pouvait ne pas être le cas si les productions des élèves n'étaient pas en accord avec son projet local ou global (niveaux +1 ou +2). En particulier ici ce projet était fortement influencé par le projet institutionnel (de l'algèbre pour le cas étudié). Il nous semble que l'on pourrait faire un parallèle avec le cas de Marc, concernant la prise en compte de l'aspect décimal de la numération qui ne fait pas partie de son projet. Comme nous l'avons relevé, cela peut-être une conséquence des

contraintes institutionnelles mais aussi, pour lui, d'une conception des mathématiques qui semble donner toute l'importance aux techniques (et peu de place aux savoirs).

En ce qui concerne la deuxième enseignante (Sophie), la situation proposée ne permettait pas a priori de mettre en jeu l'aspect décimal et comme on pouvait s'y attendre, celui-ci, n'apparaît donc pas dans la mise en œuvre.

Les décompositions/recompositions ne servent ici qu'à amener l'aspect positionnel de la numération. Ce savoir est ici institutionnalisé suite à une demande de justification de l'enseignante et donc à une volonté de « monter » dans le niveau technologique (ce qui n'est pas le cas pour Marc).

Il nous semble donc avoir montré deux conceptions de l'enseignement des mathématiques différentes :

- chez Marc, on a une prédominance du bloc pratique (travail centré sur l'apprentissage de techniques) ;
- chez Sophie, les activités laissent plus de place à la recherche individuelle des élèves (parfois aussi en groupes) et elle cherche à mettre en place des moments de validation dans les phases collectives afin de faire émerger les savoirs en jeu.

Cependant, dans les deux classes, sous l'influence des contraintes institutionnelles, l'aspect décimal de la numération n'est pas utilisé et ne semble pas être un savoir disponible chez les enseignants comme les entretiens tendent à le montrer.

Concernant l'aspect positionnel, nous avons vu que les deux enseignants utilisent les unités de la numération pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres. Ils écrivent m, c, d, u au-dessous ou au-dessus des chiffres ce qui revient à utiliser un tableau de numération. Cependant dans la classe de Marc cela fait partie du milieu matériel de la situation (la technique s'appuie sur cet ostensif) alors que dans la classe de Sophie il n'est utilisé que lors de l'institutionnalisation car dans les techniques, du fait de l'utilisation des ostensifs nombre en ECPD ou en ECPDG, on observe plutôt une utilisation de règles positionnelles de calcul.

PARTIE E : Conclusion et perspectives

a) Conclusion

Nous sommes partis du constat dans la partie A que pour l'étude des nombres à quatre chiffres se joue un enjeu important pour la compréhension du système de numération qui est la conjonction de l'aspect positionnel (relations entre les unités et la position des chiffres) et de l'aspect décimal (relations entre les unités) de la numération. Nous avons choisi d'étudier pour cela les nombres à quatre chiffres pour lesquels les relations entre les unités deviennent plus importantes avec en particulier une relation entre unités non successives (1 millier c'est 100 dizaines).

Notre étude des contraintes et libertés institutionnelles (partie C) a montré que certains types de tâches avaient une place importante dans les programmes et manuels : comparer et lire/écrire. On trouve également les types de tâches décomposer /recomposer et avancer/reculer mais seulement une petite place est donnée au « nombre de » et on a pu noter une quasi absence du dénombrement. Cela concourt à avoir une centration au niveau technologique sur l'aspect positionnel de la numération en laissant très peu de place à l'aspect décimal. La concision des derniers programmes officiels semble accentuer encore ce phénomène.

Nous avons montré (dans la partie B) que cela est également lié à l'utilisation des ostensifs ECPD (ou paquets de) et ECPDG pour lesquels les relations entre unités sont vues comme des règles positionnelles de calcul. La numération en unités qui permet d'exprimer ces relations (et de travailler avec ces relations) est principalement utilisée, dans les programmes et manuels, pour nommer les rangs dans l'écriture chiffrée. Du coup les unités de la numération perdent leur signification d'unité de mesure (de quantité) et ne semblent plus être liées aux activités de groupements et d'échanges (s'il y avait de telles activités on pourrait penser que ce seraient les expressions « paquets de » qui seraient alors utilisées).

L'analyse des pratiques des deux enseignants observés (partie D) montre des points communs dans les deux projets globaux qui nous semblent être des conséquences des contraintes institutionnelles citées. Mais de manière plus générale, nous avons observé une difficulté des enseignants à justifier leurs choix, à évoquer les liens entre les types de tâches travaillés, à parler des savoirs en jeu ou faire des liens avec d'autres thèmes du programme, comme le calcul en particulier. Ce phénomène est-il spécifique à l'étude de la numération ? Pour répondre à cette question il faudrait observer, chez les mêmes enseignants, l'étude d'autres thèmes du programme. Pour l'enseignante observée qui utilise un manuel (ou plutôt un guide destiné à l'enseignant), nous avons mis cela en lien avec les résultats de Margolinas et Wozniak (à paraître) qui ont montré les difficultés des enseignants liées au « contrôle épistémologique » de leur œuvre.

Concernant la numération, l'aspect décimal ne semble pas être identifié comme un savoir essentiel de l'étude de la numération, comme nous l'ont montré les entretiens réalisés. Il ne fait pas partie du projet global des enseignants : les relations entre la centaine et le millier ou même entre la dizaine et le millier n'apparaissent pas. Ce constat rejoint en quelque sorte ce qu'a observé Ma (1999) que nous avons reporté dans la partie A. Chez certains enseignants de son échantillon (qui ont une « conception procédurale »), le concept de « place value » réfère exclusivement à l'aspect positionnel de la numération et ils utilisent les mots dizaines, centaines pour référer uniquement à un rang dans le nombre en chiffres. Dans ce mémoire nous avons montré qu'une telle conception est fortement liée au traitement institutionnel de la numération (dans les programmes et manuels) qui conditionne les conceptions des

enseignants sur l'apprentissage de la numération (au moins pour les deux enseignants observés). Toutefois, une limite de notre travail tient au fait que nous n'avons observé que des séances de « numération » sans prendre en compte ce qui se passait dans d'autres thèmes mettant en jeu des connaissances de numération comme par exemple le calcul posé (où en particulier l'aspect décimal a une place importante). On peut également se demander si les conceptions des enseignants ne sont pas liées au fait qu'il s'agit d'un savoir qui est très naturalisé chez les enseignants et qui n'est peut être pas remis en question.

Ce phénomène de non prise en compte de l'aspect décimal comme un savoir essentiel de la numération a des conséquences au niveau de la mise en œuvre dans les classes. En effet, nous avons pu observer chez un enseignant (Marc) des difficultés à prendre en compte le travail des élèves pour trouver des aides adaptées ou faire émerger l'aspect décimal afin de donner du « sens » aux manipulations d'écritures effectuées par les élèves. Cela fait écho à un résultat de recherche sur les pratiques d'un enseignant dans le cas de l'algèbre que nous avons mentionné (Margolinas, Coulange, Bessot, 2005) : il s'agit de la difficulté pour un enseignant d'apprendre à partir de l'observation du travail des élèves (niveau - 1 de l'activité) quand ce qu'il observe n'est pas en accord avec son projet local ou global (niveau +1 ou +2 de l'activité).

Chez la deuxième enseignante (Sophie), l'aspect décimal n'a pas été travaillé dans les séances observées (il est cependant en jeu dans un exercice de recomposition dans l'évaluation finale). Cependant pour Sophie, l'aspect décimal avait été utilisé pour les nombres à trois chiffres à travers le type de tâche « nombre de », mais il semble qu'elle s'attende à ce que les élèves étendent naturellement les relations apprises sur ces nombres aux nombres à quatre chiffres (comme en atteste le fait que cela est en jeu dans un exercice de l'évaluation finale sans qu'il soit travaillé avec tous les élèves au cours de la séquence). Ce n'est pas le cas de Marc, pour qui, l'aspect décimal n'intervient jamais. Nos entretiens semblent montrer qu'éventuellement Sophie pourrait traiter l'aspect décimal plus tard, mais il s'agira alors d'aller plus loin. Mais, étant données les contraintes institutionnelles qui montrent que cet aspect ne paraît pas indispensable (on n'en a pas besoin pour comparer ni pour lire/écrire les nombres, etc.), on peut finalement se demander, si les enseignants ne font pas le choix de l'évitement afin d'aller à l'essentiel ... De plus, travailler sur cet aspect de la numération demande du temps et comme l'a montré Roditi (2008), selon « le principe d'efficacité pédagogique », les enseignants semblent ne pas aborder les « contenus mathématiques avec lesquels les élèves éprouvent des difficultés et qui ne sont pas 'indispensables' à la séquence ». Nous n'avons pas abordé cela lors de nos entretiens avec les enseignants.

Nous pouvons également faire un rapprochement avec les résultats obtenus par cet auteur dans le fait que les contenus mathématiques proposés par les deux enseignants sont assez proches mais que les différences commencent principalement à s'observer au niveau des choix de mise en œuvre des séances. Cela est toutefois à considérer ici avec précautions du fait du nombre très limité d'enseignants observés.

Cependant notre méthodologie d'analyse des contraintes institutionnelles (à travers l'étude des programmes et manuels en adoptant un point de vue épistémologique donné par l'OM de référence) a montré tout son intérêt pour interpréter ensuite les choix faits par les enseignants. Cette dimension permet par exemple de mieux comprendre certaines raisons pour lesquelles les enseignants ne considèrent pas l'aspect décimal comme essentiel dans leur projet.

L'articulation des cadres théoriques de la TAD et de la TSD nous semble également être une piste intéressante pour définir le projet global d'un enseignant car il permet de prendre en compte les différentes dimensions de l'activité mathématique prévue par l'enseignant. Cela pourrait être enrichi par l'étude de l'organisation didactique de ce projet. Il pourrait être également intéressant de mener des entretiens avec les enseignants avant la séquence pour construire a priori le projet global (et non a posteriori comme nous l'avons fait).

b) Perspectives

Suite à ce travail nous pouvons envisager quelques perspectives de recherche. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà dit, il serait intéressant de faire une étude à plus grande échelle pour enrichir ces premiers résultats sur les pratiques des enseignants sur la numération (pour les nombres à quatre chiffres). Cela pourrait permettre d'affiner ce constat d'influence forte des contraintes institutionnelles sur le projet global des enseignants mais également d'observer différentes marges de manœuvre investies par ces enseignants (en particulier au niveau de la mise en œuvre de leur projet). Ces marges de manœuvre peuvent alors être vues comme des « leviers » à utiliser pour la formation des enseignants : c'est le point de vue de Roditi (2008) qui les considère comme « un espace des possibles du développement professionnel ».

On peut également se demander s'il est possible d'agir sur les contraintes institutionnelles. Par exemple, nous avons pu noter le poids important sur les pratiques des enseignants de l'utilisation « faible » des unités de la numération (uniquement pour nommer les rangs dans l'écriture en chiffres). On pourrait alors imaginer une tentative de réintroduction de cet ostensif comme représentant des unités et permettant de vraiment travailler (faire des conversions, des calculs ...) et même plus généralement d'une OM locale de la numération relevant de l'OMR classique. Cela demanderait, en particulier, de s'autoriser à mêler le registre de la langue naturelle aux signes algébriques. Cette réintroduction présenterait un intérêt mathématique (comme l'a observé Chambris (2008) dans l'époque classique où elle permettait de travailler avec des besoins trophiques assez faibles) mais du côté des élèves permettrait-elle un apprentissage plus efficace ? Quelles nouvelles difficultés pourrait-elle faire apparaître ? A quelles conditions pourrait-elle s'implanter dans les classes ? A quelles conditions pourrait-elle permettre de faire apparaître l'aspect décimal de la numération ?

On pourrait également élargir le questionnement concernant la prise en compte de l'aspect décimal dans les projets des enseignants. Se posent alors des questions du point de vue de la formation des enseignants : une réelle prise en compte de cet aspect par les enseignants ordinaires est-elle possible ? Des formations peuvent-elles faire évoluer ces pratiques ? Des ressources ? Quels types de ressources ? Comment de tels dispositifs vont-ils se heurter au « principe d'efficacité pédagogique » de Roditi ?

L'utilisation d'ingénieries didactiques peut alors être un moyen de mieux comprendre les conditions de viabilité de situations créées par des chercheurs dans des classes ordinaires. Dans cette perspective, on pourrait envisager la création de situations amenant les maîtres à utiliser par exemple l'aspect décimal. Mais comme le montre notre mémoire cela semble devoir s'accompagner d'un travail sur le projet global afin d'outiller les maîtres dans leurs choix mathématiques, ce qui leur permettrait d'avoir un contrôle épistémologique de leur projet. Dans cette perspective, Margolinas et Wozniak (accepté) suggèrent l'idée d'un « traité » comme complément des manuels ou guides du maître pour « outiller le professeur par l'apport de savoirs mathématiques, didactiques et épistémologiques ». Il resterait à mesurer l'efficacité effective, en classe, de tels dispositifs, en particulier pour l'enseignement de la numération.

Bibliographie

1. Bibliographie générale

- Assude T., Mercier A., Sensevy G. (2007) L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, Recherches en didactique des mathématiques 27/2, éditions La Pensée Sauvage.
- Bacquet, Gueritte-Hess (1997) Le nombre et la numération, pratique de rééducation, éditions Papyrus.
- Bednarz N., Janvier B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, Grand N n°33, éditions IREM de Grenoble, pp.5-31
- Bezout, Reynaud (1821) ; Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud. ; consulté sur Internet le 29 mai 2009, <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table>
- Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, Recherches en didactique des mathématiques 19/1, éditions La Pensée Sauvage, pp.77-123
- Bosch, M., Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A., Margolinas, C. (eds.), Balises pour la didactique des mathématiques. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.107-122.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques, éditions La Pensée Sauvage.
- Chambris C. (2008). Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de l'université de Paris 7.
- Chevallard Y. (1991) La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, éditions La pensée sauvage.
- Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 12/1, éditions La pensée sauvage, pp.73-112.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique », Recherches en didactique des mathématiques, vol. 19/2, éditions La pensée sauvage, pp.221-266.
- Condorcet (1988) Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec facilité. ACL - Les éditions du Kangourou, 1^{ère} édition : 1799.
- Coulange L. (2006) Etude des pratiques de professeurs de mathématiques "néo-titulaires" dans des collèges de zones d'éducation prioritaire. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Edition IREM de Paris 7, ARDM.
- Duval R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique ? Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 16/3, éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.349-382.
- Duval R. (2005) Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. Actes du XXXIIe colloque COPIRELEM, IREM de Strasbourg, pp.67-89

- ERMEL (1978) Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, Tome 2 : CE, SERMAP OCDL.
- Ma L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*, éditions Lawrence Erlbaum Associates.
- Margolinas, C. (2002), Situations milieux, connaissances : Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*, éditions La pensée sauvage.
- Margolinas C., Coulange L., Bessot A. (2005), What can the teacher learn in the classroom ? *Educational Studies in Mathematics*, 59/1-2-3, ed. Kluwer, pp.205-234
- Margolinas C., Wozniak F (à paraître), Usage des manuels dans le travail du professeur : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, In *Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves*. Numéro spécial de la *Revue des Sciences de l'Éducation (Canada)*.
- Margolinas, C. & Wozniak, F. (accepté), Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire, In Trouche, L. & Guedet, G. (Eds). *Le travail documentaire des professeurs. Ouvrage collectif en cours*.
- Mercier A. (1997), La relation didactique et ses effets. In : Blanchard-Laville C. (sous la direction de) *Variations sur une leçon de mathématiques*, éditions L'harmattan, pp.259-312
- Noirfalise R. (2007), Calculer avec les grandeurs : l'usage des unités dans les calculs. *Repères IREM*, numéro 68, TOPIQUES éditions, pp.21-32
- Parouty V. (2005), Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres*. Foix mai 2004. *Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?* Commission Inter-IREM COPIRELEM ; IREM de Toulouse
- Perrin D. (2005), *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*, éditions Cassini.
- Perrin-Glorian, M.J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires, *Recherches en didactique des mathématiques* 23/2, éditions La pensée sauvage, pp.217-276.
- Robert A., Rogalski J. (2008), Cadrages théoriques (partie 0). In Vandebrouck F., *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, éditions Octarès.
- Roditi E. (2008), Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes, In Vandebrouck F., *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants*, éditions Octarès p.73-94.
- Serfati M. (2005), *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, éditions Pétra.
- Sinclair A., Tièche Christinat C., Garin A. (1994), Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres ? In : Artigues M., Gras R., Laborde C., Tavignot (Eds.) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, éditions La pensée sauvage, pp 243-249
- Thompson I., Bramald R. (2002), *An investigation of the relationship between young children's understanding of the concept of place value and their competence at mental addition*. (Report for the Nuffield Foundation). Newcastle upon Tyne : University of

Newcastle upon Tyne, consulté sur Internet le 29 mai 2009 :
<http://www.atm.org.uk/mt/archive/mt184files/ATM-MT184-14-15-Extra.pdf>

2. Manuels scolaires et textes officiels

Manuels scolaires :

Boucheny, Gaston ; Guérinet, André, 1930, L'arithmétique au cours élémentaire (1ère et 2ème année), CE, Librairie Larousse

Charnay R. Cap Maths CE2, manuel de l'élève, Hatier, 2007

Charnay R. Cap Maths CE2, guide de l'enseignant, Hatier, 2007

Brissiaud R. J'apprends les maths CE2, livre de l'élève, Retz, 2003

Brissiaud R. J'apprends les maths CE2, livre du maître, Retz, 2004

ERMEL Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE2, Hatier, 1995

Textes des programmes, documents d'applications et évaluations nationales :

Programmes de 2002 : BO Hors série n°1 du 14 février 2002

Documents d'application des programmes 2002 : Mathématiques, cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'enseignement scolaire, CNDP, 2002.

Documents d'application des programmes 2002 : Mathématiques, cycle des approfondissements (cycle 3), Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'enseignement scolaire, CNDP, 2002.

Programmes de 2007 : BO Hors série n° 5 du 12 avril 2007

Programmes de 2008 : BO Hors série n°3 du 19 juin 2008

Évaluations nationales CE2 et sixième de 2005, Ministère de l'Éducation nationale de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective, sous direction de l'évaluation.

Évaluation nationale des acquis des élèves de CM2, 2009, Ministère de l'Éducation nationale, Direction générale de l'enseignement scolaire.

ANNEXES

Annexes Partie B

Extrait du Traité de Reynaud 1821, paragraphe 2 intitulé « de la numération ».

(Repris des annexes de la thèse de C. Chambris)

a. Pour former les nombres, on part de l'unité; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé deux; celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé trois; et en ajoutant successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on obtient les nombres, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre dix; la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé dizaine; et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dizaine jusqu'à neuf dizaines; mais pour abrégier, au lieu des mots composés, une dizaine, deux dizaines, trois dizaines, quatre dizaines, cinq dizaines, six dizaines, sept dizaines, huit dizaines, neuf dizaines, on dit: dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix. On peut substituer aux trois derniers noms, les mots septante, octante, nonante, qui désignent mieux, sept dizaines, huit dizaines, neuf dizaines. Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dizaines consécutives, on énonce successivement les dizaines et les unités; ainsi, la collection de trois dizaines et de sept unités, se nomme trente-sept. Il faut excepter de ce système les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car au lieu des mots, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, on dit: onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize. La collection de neuf dizaines et de neuf unités, compose le nombre nonante-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne le nombre cent, composé de dix dizaines, et la réunion de dix dizaines se nomme centaine. On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour désigner les nonante-neuf nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, . . . , neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme quatre cent huit. On parvient ainsi au nombre neuf cent nonante-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines; cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité principale nommée mille; et de même qu'on avait compté par unités, dizaines et centaines d'unité, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dizaines et centaines de mille, depuis une unité de mille jusqu'à mille unités de mille, qu'on nomme million. Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de sept mille et de cinq cent sept unités, se nomme sept mille cinq cent sept. Le nombre, neuf cent no-

La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dizaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent il était utile de faire entièrement disparaître les lettres. Pour y parvenir, on classa les noms des unités, dizaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang de formation; les unités simples furent nommées unités du premier ordre; les dizaines, unités du deuxième ordre; les centaines, unités du troisième ordre; etc.; de sorte que le nombre neuf cent quarante-sept peut s'écrire:

9 unités du 3^e ordre, 4 unités du 2^e ordre, 7 unités du 1^{er} ordre.

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dizaines; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines; et ainsi de suite. D'après cette convention, le nombre, neuf cent quarante-sept, peut s'écrire ainsi, 947; car le chiffre 9 occupant la troisième place, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou neuf centaines, ou neuf cents; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités du deuxième ordre, ou quatre dizaines, ou quarante; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc neuf cent quarante-sept unités.

Plusieurs nombres échappent à ce système; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas toutes les unités des ordres inférieurs à ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre auxiliaire 0, nommé zéro, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, pour écrire en chiffres, le nombre neuf cent sept, com-

posé de neuf centaines et de sept unités, sans dizaines, on met un zéro entre 9 et 7, pour tenir la place des dizaines; ce qui donne 907.

En général: Pour mettre en chiffres un nombre énoncé; écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, les dizaines et les unités de chaque ordre ternaire (*), et remplacez par des zéros, les unités, dizaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit. Appliquons cette règle au nombre

dix-sept millions cinq cent deux unités.

Les plus hautes unités de ce nombre étant des millions, il devra renfermer trois tranches, savoir: celle des millions, celle des mille et celle des unités; posant donc à chacune de ces tranches, les centaines, dizaines et unités énoncées, et remplaçant celles qui manquent par des zéros, on écrira 17 000 502.

RÉCIPROQUEMENT: Pour énoncer un nombre quelconque écrit en chiffres; partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche; commençant ensuite par la gauche, énoncez chaque tranche significative comme si elle était seule et donnez-lui le nom des unités de cette tranche. Ainsi, les nombres 17 000 502, 1700, s'énoncent dix-sept millions-cinq cent deux, et mil sept cents; le second nombre étant composé de 17 centaines, s'énonce aussi dix-sept cents.

En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dizaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre, ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429

(*) Par unités des ordres ternaires, on entend les unités simples, les mille, les millions; les billions, etc.

unités, ou de 327⁴/₄ centaines et 29 unités, ou de 327⁴/₂ dizaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

nante-neuf mille, neuf cent nonante-neuf, augmenté d'an, donne une collection de mille mille, appelée *million*; mille millions forment un *billion*; et ainsi de suite.

On peut observer que d'après ce système, le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, *unité, mille, million, billion, etc.*; de sorte que l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dizaines et neuf centaines de chaque espèce.

La manière d'écrire tous les mots à l'aide des diverses combinaisons des lettres de l'alphabet, fit pressentir la possibilité de représenter tous les nombres par un petit nombre de signes; il était même facile de prévoir que ces derniers, nommés *chiffres*, seraient en moindre nombre que les lettres, car ils ne doivent servir qu'à désigner une très petite partie des mots exprimés par les lettres. Le but qu'on s'est proposé en inventant les chiffres étant d'abréger l'écriture des nombres, on dut suivre la route déjà tracée par l'invention des mots. Ainsi, de même qu'on avait adopté neuf noms simples pour les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des différentes unités avaient donné les noms de tous les nombres, on soumit les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dizaines, de centaines, etc. On représenta donc les neuf premiers nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,
par les chiffres,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ce qui fournit le moyen de simplifier l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, de dizaines et de centaines de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent. Ainsi, pour écrire le nombre *neuf cent quarante-sept unités*, on le décomposa en, *neuf* centaines, *quatre* dizaines et *sept* unités; ce qui conduisit à *9* centaines *4* dizaines *7* unités.

Annexes Partie C

Extraits du document d'application du programme 2002

Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels

– Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position.

La valeur des chiffres doit être constamment envisagée en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent. Les mots dizaines, centaines, milliers... sont employés comme synonymes et reformulés sous la forme de «paquets» de 10, de 100, de 1000... Ainsi:

– dans 5 324, le 3 signifie 3 paquets de 100, c'est-à-dire 300 ou encore 3 centaines (et non 3 unités) ;

– dans 8 926, il y a 89 paquets de 100 ou 892 paquets de 10.

Les formulations du type « Combien y a-t-il de paquets de 10 dans 8 926? » accompagnent celles comme « Quel est le nombre de dizaines dans 8926? ».

Dans cette perspective, il convient d'éviter les activités formelles et l'utilisation trop systématique du tableau de numération.

– Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000, etc.

– Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une décomposition utilisant 10, 100, 1000, etc.

Ces décompositions peuvent être du type suivant :

$$5324 = (5 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 4$$

$$5324 = (53 \times 100) + 24.$$

Mais aussi :

$$(3 \times 100) + (5 \times 1\ 000) + (6 \times 10) = 5\ 360$$

$$(3 \times 100) + (12 \times 10) + 8 + (5 \times 1000) = 5\ 428.$$

De telles égalités sont produites en référence à la valeur des chiffres en fonction de leur position plutôt qu'à l'utilisation du tableau de numération.

Elles peuvent également être contrôlées par un calcul. Les notations du type 10^2 , 10^3 ... ne sont pas utilisées à l'école primaire.

– Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre.

Il s'agit de mettre en évidence les régularités des suites de nombres écrits en chiffres (en liaison, par exemple, avec le fonctionnement d'un compteur) ainsi que les régularités et les accidents des suites de nombres dits oralement.

La production de suites de nombres (écrits en chiffres) de 10 en 10, 100 en 100... doit être mise en relation avec les effets d'ajouts successifs de 10 (ou d'une dizaine), de 100 (ou d'une centaine)...

À partir de ces activités, les élèves peuvent commencer à envisager le caractère infini de ces suites.

– Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres), pour des nombres jusqu'à la classe des millions.

Exemples:

– 56 246 789 se lit 56 millions 246 mille 789 ;

– cent sept millions cinquante-trois mille cent trente-quatre s'écrit 107 053 134.

L'intérêt du découpage en tranches de trois chiffres pour la lecture usuelle des nombres (fondée sur les classes : mille, millions, milliards...) est souligné et les difficultés

inhérentes à l'écriture en chiffres des nombres ayant un ou plusieurs zéros intermédiaires font l'objet d'une attention particulière.

L'étude se limite aux nombres de la classe des millions, mais des nombres plus grands peuvent être rencontrés.

Ordre sur les nombres entiers naturels

– Comparer deux entiers naturels, utiliser les signes $<$ et $>$ (lus «plus petit» et «plus grand»).

– Ranger des nombres en ordre croissant ou décroissant.

– Situer un nombre dans une série ordonnée de nombres.

La compréhension de l'ordre (savoir quel est le plus petit ou le plus grand nombre, savoir ranger des nombres) doit précéder l'utilisation des symboles $<$ ou $>$. Le vocabulaire « inférieur à, supérieur à » commence à être utilisé en même temps que « plus petit, plus grand ».

L'usage simultané des symboles « $=$ », « $<$ » et « $>$ » pour rendre compte de la comparaison d'écritures arithmétiques permet de renforcer la signification mathématique du symbole d'égalité. Au cours de l'apprentissage, les procédures de comparaison font l'objet d'une explicitation par les élèves.

– Écrire des encadrements d'entiers entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs...

Exemples:

– $650 < 658 < 660$,

mais aussi $600 < 658 < 700$;

– $4800 < 4\ 862 < 4\ 900$,

mais aussi $4\ 000 < 4\ 862 < 5\ 000$.

– Situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100...

Par exemple, sur une droite graduée de 100 en 100 :

– pour placer exactement 450, on peut utiliser le fait qu'il se situe à «mi-chemin» entre 400 et 500 ;

– pour placer approximativement 276, on peut utiliser le fait qu'il est plus près de 300 que de 200.

Le placement précis nécessite des compétences relatives à la proportionnalité : les distances entre deux nombres sont proportionnelles aux écarts (différences) entre les deux nombres.

Le placement approché permet de développer des compétences qui seront utiles pour le calcul approché (approximation des nombres).

L'utilisation d'une frise historique peut également être l'occasion d'activités de placement approché.

Programmation des compétences sur la « connaissance des nombres entiers naturels » sur les trois niveaux du cycle 3 (document d'application, cycle 3)

Légende

Pour les compétences générales, au cours de la période indiquée :

----- la compétence est mobilisable par les élèves dans le cadre d'un travail de groupe ou d'un travail collectif ;

..... la compétence est également mobilisable dans le cadre d'un travail individuel.

Pour les autres compétences, au cours de la période indiquée, les activités sont orientées vers :

— approche, préparation ;

==== construction(*), structuration ;

===== consolidation(*), utilisation.

Un trait prolongé au-delà de l'année 3 indique dans quelle perspective les activités sont proposées au début du cycle suivant.

(*) Pour certains élèves, la période de construction doit être poursuivie pendant la période de consolidation.

Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels

- Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position.
- Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1 000... et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition.
- Produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre.
- Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) pour des nombres jusqu'à la classe des millions.

Ordre sur les nombres entiers naturels

- Comparer des nombres, les ranger en ordre croissant ou décroissant, les encadrer entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs...
- Utiliser les signes < et > pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement.

Extraits de l'évaluation nationale CE2 de 2005

	Approche, préparation
	Construction, structuration
	Consolidation, utilisation

Connaissance des nombres entiers naturels	Proposition de programmation des apprentissages	Exercice	Items
		Désigner par écrit des nombres entiers naturels (inférieurs à 1000) : Associer les désignations chiffrées et orales des nombres de 1 à 999.	GS CP CE1
Comparer les nombres entiers naturels : Comparer, ranger, encadrer des nombres en particulier entre deux dizaines consécutives ou entre deux centaines consécutives.	GS CP CE1	12	47, 48
Comparer les nombres entiers naturels : Savoir des nombres (ou repérer une position par un nombre) sur une ligne graduée de 1 en 1, de 10 en 10, de 100 en 100.	GS CP CE1	13	49 à 53
Connaître des doubles : Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10.	GS CP CE1	18	61 à 63
Connaître des doubles : Connaître et utiliser les relations entre des nombres d'usage courant : entre 5 et 10 ; entre 25 et 50 ; entre 50 et 100 ; entre 15 et 30 ; entre 30 et 60 ; entre 12 et 24 ; doubles des dizaines entières inférieures à 100 ; moitiés de 2, 4, 6, 10, 20, 40, 60, 80.	GS CP CE1	19	64 à 70

Exercice 10

a	<input type="text"/>	$\begin{array}{r} 190 \\ 40 \\ \hline \end{array}$
b	<input type="text"/>	
c	<input type="text"/>	$\begin{array}{r} 190 \\ 41 \\ \hline \end{array}$
d	<input type="text"/>	$\begin{array}{r} 190 \\ 42 \\ \hline \end{array}$
e	<input type="text"/>	$\begin{array}{r} 190 \\ 43 \\ \hline \end{array}$
		$\begin{array}{r} 190 \\ 44 \\ \hline \end{array}$

Passation

Dire aux élèves :

« Je vais vous dicter des nombres. Écrivez ces nombres dans les cases. Mettez une croix quand vous ne savez pas répondre. »

Dicter chaque nombre deux fois.

Donner 10 secondes pour chaque nombre et faire écrire le nombre dans la case correspondante.

- case a : cinquante-six
- case b : seize
- case c : quatre-vingt onze
- case d : quatre cent neuf
- case e : six cent vingt et un

Exercice 12

a) Parmi les nombres suivants, entoure ceux qui sont compris entre 200 et 210.

109, 290, 209, 201, 219

1	3	5	9	0
47				

b) Parmi les nombres suivants, entoure ceux qui sont compris entre 300 et 400.

317, 290, 430, 340, 34, 395

1	3	5	9	0
48				

Dans les commentaires du livret destiné à l'enseignant on trouve un extrait du programme de cycle 2 :

« La compréhension de l'ordre (savoir quel est le plus petit ou le plus grand nombre, savoir ranger des nombres) précède l'utilisation des symboles < ou > dont la maîtrise n'est pas un objectif du cycle 2. Ces symboles peuvent cependant faire l'objet d'une première approche, leur usage conjoint avec celui du signe = pouvant aider à concevoir ce dernier comme signe d'une égalité entre deux écritures et pas seulement comme annonce d'un résultat.

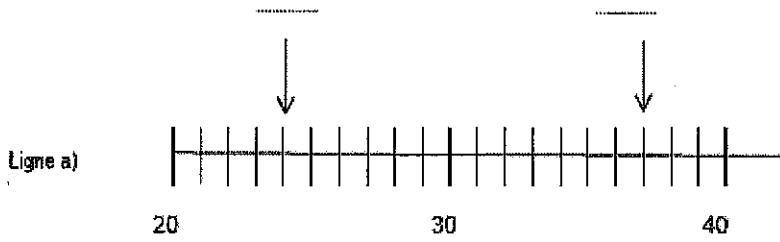
On s'attachera à mettre en relation comparaison des nombres et signification des écritures chiffrées : 54 est plus grand que 37 parce que dans 54, il y a 5 paquets de 10 et qu'il y en a seulement 3 dans 37. On fera également le lien avec la suite des nombres : dans un livre, la page 54 se trouve après la page 37, ou en avançant de 1 en 1 avec un compteur, on rencontre 37 avant de rencontrer 54.

Ces activités sont l'occasion d'une toute première approche de l'ordre de grandeur des nombres : 376 est situé entre 300 et 400, mais plus près de 400 que de 300. Cette compétence sera utile, au cycle 3, pour le travail sur le calcul approché. »

Exercice 13

Écris sur les pointillés les deux nombres repérés par les flèches.

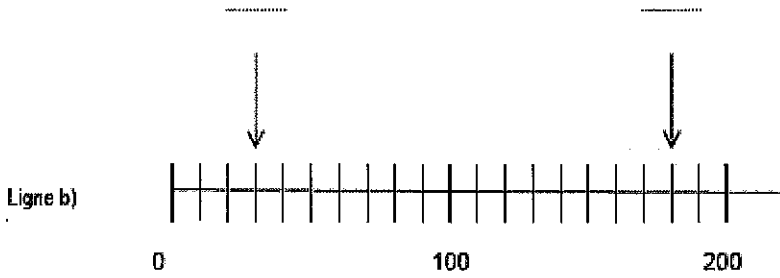
1 9 0
49



1 9 0
80

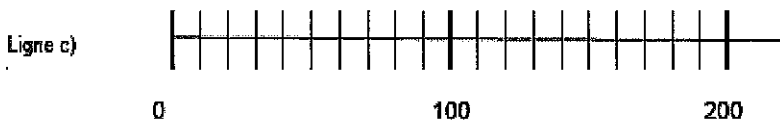
Écris sur les pointillés les deux nombres repérés par les flèches.

1 4 9 0
51



1 4 9 0
52

Indique par une flèche la position du nombre 70.



1 9 0
53

Extraits de l'évaluation nationale 6^{ème} 2005

		Proposition de programmation des apprentissages	Exercice	Items
Connaissance des nombres	Désigner par écrit des nombres entiers naturels : Associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) pour des nombres jusqu'à la classe des millions.	CE2 CM1 CM2	18	51 à 54
	Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : Connaître et utiliser les relations entre 5, 10, 25, 75, 100 ; entre 50, 100, 200, 250, 500, 750, 1 000 ; entre 5, 15, 30, 45, 60, 90	CE2 CM1 CM2	7	24 à 27
	Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, tiers, quadruple, quart.	CE2 CM1 CM2	19	55 à 59
	Utiliser et écrire des fractions : Utiliser et écrire, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée.	CE2 CM1 CM2	11	34 à 36
	Désigner par écrit et utiliser des nombres décimaux : Déterminer la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position.	CE2 CM1 CM2	15	41
	Désigner par écrit et utiliser des nombres décimaux : Passer pour un nombre décimal, d'une écriture fractionnaire (fractions décimales) à une écriture à virgule (et réciproquement).	CE2 CM1 CM2	13	39
	Comparer des nombres décimaux et utiliser les signes < et > : Comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule et utiliser les signes < et > pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement.	CE2 CM1 CM2	22	71
	Comparer des nombres décimaux et utiliser les signes < et > : Encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs.	CE2 CM1 CM2	29	88 à 90
	Connaître et utiliser des écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : Connaître et utiliser les relations entre 0,1 et 1/10 ; 0,01 et 1/100 ; 0,5 et 1/2 ; 0,25 et 1/4 ; 0,75 et 3/4.	CE2 CM1 CM2	35	101

Commentaire qui suit l'exercice sur la lecture des nombres.

Le travail sur la décomposition par tranche de trois chiffres de l'écriture chiffrée d'un entier peut être accompagné par un travail sur la décomposition de leur écriture littérale.

Ainsi lors de l'oralisation des quatre nombres utilisant les mots « mille », « vingt » et « trois », on peut s'exercer à placer une coupure qui ne sera pas au même endroit :

Vingt-trois mille , Mille vingt-trois .

Vingt mille trois , Trois mille vingt

Un tel travail peut permettre de reprendre les caractéristiques du système de numération avec des élèves maîtrisant insuffisamment la compétence évaluée par cet exercice et travailler directement le passage du nombre oralisé à des décompositions intermédiaires comme :

$$(1\ 000 \times 23) \quad (1\ 000 \times 1) + 23 \quad (1\ 000 \times 20) + 3 \quad (1\ 000 \times 3) + 20$$

Le changement dans une telle activité du mot « trois » par le mot « quatre » (ou « un ») peut permettre de mettre en avant les particularités de la langue française pour lire les nombres : « quatre-vingts » se dit tandis que « trois-vingts » ne se dit pas ; on ne dit pas « un mille » (mais on dit « un million »)

Extraits du programme de 2007

À la fin du cycle 3, les élèves doivent maîtriser la lecture et l'écriture des nombres entiers naturels. Ils doivent comprendre les principes de la numération décimale, en particulier que la valeur des chiffres dépend de leur position dans l'écriture des nombres, en relation avec les activités de groupements et d'échanges qui la sous-tendent.

Ils doivent également maîtriser la comparaison et le rangement de ces nombres et avoir travaillé sur le placement exact ou approché de nombres sur une droite graduée, en relation avec la proportionnalité.

Connaissances :

Désignations orales et écrites des nombres entiers naturels

Capacités :

- connaître la valeur de chacun des chiffres composant l'écriture d'un nombre entier en fonction de sa position.
- donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000..., et retrouver l'écriture d'un nombre à partir d'une telle décomposition ;
- produire des suites orales et écrites de 1 en 1, 10 en 10, 100 en 100, à partir de n'importe quel nombre ;
- associer la désignation orale et la désignation écrite (en chiffres) pour des nombres jusqu'à la classe des millions.

Connaissances :

Ordre sur les nombres entiers naturels

Capacités :

- connaître le sens des signes $<$ et $>$.
- comparer des nombres, les ranger en ordre croissant ou décroissant, les encadrer entre deux dizaines consécutives, deux centaines consécutives, deux milliers consécutifs ;
- utiliser les signes $<$ et $>$ pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement ;
- situer précisément ou approximativement des nombres sur une droite graduée de 10 en 10, de 100 en 100...

Extraits du Socle Commun 2007

Eléments du socle attendus en fin de cycle 3

Connaître les désignations orales et écrites des nombres entiers et décimaux.

Indications pour l'évaluation dans des situations simples

- lire, et écrire sous la dictée, en chiffres et en lettres, les nombres entiers jusqu'à la classe des millions et les nombres décimaux (3 chiffres après la virgule au plus) exprimés sous la forme ... unités et ... dixièmes, centièmes ou millièmes.
- connaître la valeur des chiffres d'un tel nombre, et le décomposer en utilisant 10, 100, ..., ou encore 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

Eléments du socle attendus en fin de cycle 3

Ordonner ou comparer des nombres entiers, des nombres décimaux.

Indications pour l'évaluation dans des situations simples

- comparer deux nombres entiers, ou deux nombres décimaux dont les parties décimales sont de même longueur.
- encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers consécutifs (les symboles < et > doivent être connus et utilisés).
- produire des suites écrites ou orales de nombres de 0,1 en 0,1, à partir d'un nombre donné, dans les deux sens.

Extraits du programme 2008

Pour le cycle 3 :

Les nombres entiers naturels :

- principes de la numération décimale de position : valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture des nombres ;
- désignation orale et écriture en chiffres et en lettres ;
- comparaison et rangement de nombres, repérage sur une droite graduée, utilisation des signes $>$ et $<$;

En particulier pour la classe de CE2 :

Les nombres entiers jusqu'au million

- Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million.
- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.
- Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier.

Extraits de l'évaluation nationale CM2 de 2009

- « - écrire et nommer les nombres entiers
- ordonner, encadrer, comparer des nombres. Les placer sur une droite graduée »

Item 64 :

Dire aux élèves :

« Écrivez en chiffres les nombres que je vais vous dicter, je répéterai chacun deux fois.

A- trois mille cinq cent soixante quatorze

B- trente quatre millions

C- six cent cinquante quatre mille douze

D- trois milliards cinq cents millions

Item 71 :

Dire aux élèves :

« Comparez les deux nombres placés sur chacune des lignes du tableau figurant dans le cahier en utilisant les symboles plus petit que, plus grand que ou égal à. »

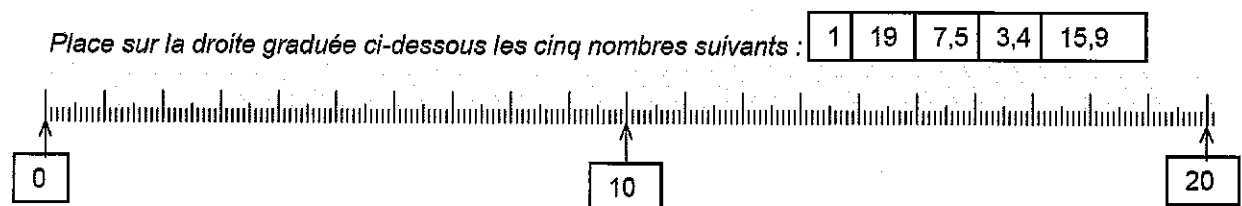
Compare les deux nombres placés sur chaque ligne en utilisant à chaque fois le symbole qui convient : $<$ (plus petit que) ; $>$ (plus grand que) ; $=$ (égal)

12 250	1 250
140,5	155
0,8	1,4

Item 73 :

Dire aux élèves :

« Sur votre cahier figure une droite graduée de 0 à 20. Placez correctement sur cette droite les cinq nombres qui vous sont donnés. »



Extraits du manuel « J'apprends les maths CE2 »

Nous donnons ici les pages du guide du maître de ce manuel concernant l'ensemble du travail sur l'étude des nombres à quatre chiffres. Dans ces pages figurent également les pages du manuel de l'élève correspondantes.

Nous donnons également des extraits du « dico maths » que nous avons utilisés pour nos analyses.

OBJECTIFS

On étend ici le champ d'étude de la numération décimale aux premiers nombres au-delà de 1000. Ce groupement joue un rôle de pivot dans la numération orale, car il va être explicitement traité comme une nouvelle grande unité qu'on comptera comme on comptait jusque-là les unités simples. C'est ainsi que l'algorithme verbal utilisé jusqu'à «neuf cent quatre-vingt-dix-neuf» pour dénombrer des «uns» va maintenant s'appliquer à des «mille». De ce fait, au CM, il sera facile de comprendre que, dans 634285 par ex., il y a «634 mille» ou «634 milliers».

Mais, de la même façon que l'oralisation de 130 ne dit pas que c'est 13 groupes de 10, l'oralisation de 1350 par ex. ne précise pas que c'est 13 groupes de 100 (sauf à dire «treize cent cinquante»), ni qu'il contient 135 groupes de 10. Or, sans cela, il n'y a pas de bonne compréhension des nombres à quatre chiffres. C'est pourquoi, dès la découverte des nombres au-delà de 999, qui fait événement pour les élèves, nous en faisons l'objectif principal de l'étude de ces nombres.

Pour cela, nous introduisons le nouveau groupement de 1000 à l'aide du matériel utilisé jusqu'ici, sous la forme d'une caisse dans laquelle Picbille range ses billes dès qu'il en a 1000. On amène les élèves à concevoir que ce groupe de 1000 contient 10 groupes de 100 représentés par 10 valises de 100 billes. On les amène aussi à se rappeler que chaque groupe de 100 est formé de 10 groupes de 10 pour établir que 1000, c'est aussi 100 groupes de 10. Les élèves disposent de grands autocollants qui permettent de symboliser le dernier de ces «emboîtements» successifs (les «uns» dans les «dix», les «dix» dans les «cents» et les cents dans les «mille») : quand le couvercle de la caisse est fermé, on ne voit plus ni les valises de 100 billes, ni les boîtes de 10 billes, mais le souvenir de l'action qui a conduit à les masquer permet de continuer à les concevoir à l'intérieur de la caisse. L'écriture chiffrée aide à concilier ces différents points de vue : sans négliger que le «1» de «1285» indique 1 groupement de 1000, les chiffres «12» aident à concevoir le nombre de groupes de 100 et les chiffres «28» celui des groupes de 10.

Comme lors de la découverte du groupement de 100, l'engendrement des écritures chiffrées unité après unité est éclairé par la formation des groupements successifs : après «1009» par ex., on peut former un nouveau groupe de 10, mais non un nouveau groupe de 1000 ou de 100, d'où l'écriture «1010» (et non «1100» ou «2000»).

74 Numération au-delà de 1000 (1) : 1000, c'est 10 groupes de 100

Table de 6, puis «6 fois 70»
Numération

10 x ... = 10 x ... = 10 x ... = 10 x ... =

1 Prends ton compteur en carton et complète.

Sur le compteur : Combien de fois 100? Combien de fois 10?

Picbille et Dédé ont 1 bille de plus. Quand ils ont 10 valises de 100 billes, ils les mettent dans une caisse de 1000 billes et ils ferment le couvercle. Colle les couvercles des valises et de la caisse et complète.

Sur le compteur : Combien de fois 100? Combien de fois 10?

Picbille et Dédé ont 1 bille de plus. Colle le couvercle de la caisse et complète.

Sur le compteur : Combien de fois 100? Combien de fois 10?

Affiche sur ton compteur les 2 nombres suivants et imagine les collections de billes correspondantes.

Table de 6, puis «6 fois 70» : selon sq 73. Numération décimale : selon sq 28, sur le fichier. On croise, par ex., avec 634, c'est 63 groupes de 10. 1 et 2 Introduction de la caisse de 1000 billes pour figurer l'apparition de ce nouveau groupe et d'un quatrième chiffre, après 1009 (actuellement 63). Il s'agit que des élèves affichent 2000 sur le compteur pour les aider, en dessinant au tableau les collections de billes correspondantes.

ACTIVITÉS

SÉQUENCE 74

Table de 6, puis «6 fois 70»

Même activité que sq 73.

Numération décimale

Même activité que sq 28. Il s'agit de réactiver le raisonnement qui amène à concevoir toutes les dizaines, «celles qu'on voit et celles qu'on ne voit pas». Là encore, il reste utile que l'enseignant feigne l'ignorance. S'il a représenté 630 avec 6 valises et 3 boîtes, par ex. : «Vous dites qu'il y a 63 dizaines, mais je n'en vois que 3!». On se limitera aux 4 interrogations du fichier.

1 et 2. «1000, c'est 10 groupes de 100»

Matériel

Les élèves sont munis de leur compteur, et l'enseignant utilise le compteur collectif qu'il a fabriqué pour l'animation de la sq 63. Il a également préparé, pour chaque élève, les 10 petits couvercles de valises autocollants nécessaires ainsi que les 3 grands autocollants qui représentent les caisses de 1000.

Activité préliminaire

Il est bon de réamorcer en deçà de 1000, à partir de «0975» par exemple, l'étude comparative des écritures chiffrées et des groupements correspondants. Lorsqu'on atteindra 998, on enchaînera avec l'activité 1 du fichier. On reprend donc un jeu du furet de 1 en 1

100 groupes de 10; 1100, c'est 11 groupes de 100 ou...

Imagine que Picbille et Dédé ont maintenant 1004 billes et ils ajoutent des billes une à une...
Fais la suite de nombres sur le compteur et décris les collections de billes.

Picbille et Dédé ont 1 bille de plus... Colle le couvercle de la caisse et complète.

Sur le compteur : Combien de fois 100? Combien de fois 10?

Sur le compteur : Combien de fois 100? Combien de fois 10?

Imagine que Picbille et Dédé ont déjà 1097 billes... et qu'ils ajoutent des billes une à une.
Pour chaque nombre, écris-le sur le compteur, dans la collection de billes et dis combien il y a de centaines et combien de dizaines.

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1196 billes...

Fais de même en imaginant que Picbille et Dédé ont déjà 1998 billes...

Quand Picbille a 1285 billes, il ne voit plus les 12 centaines, mais, avec les chiffres, on continue à les voir : 1285. Il ne voit plus les 128 dizaines, mais... 1285.

J'ai appris : 1000, c'est 10 groupes de 100, c'est aussi 100 groupes de 10.

Prends le jeu de boîtes pour apprendre à compter. Dans la numération orale, 1100, 1200, etc. se disent le plus souvent « mille cent », « mille deux cents », etc. et non « onze cents », « douze cents », etc. On met toujours un zéro sur ces derniers décennaires car la situation de masquage aide à les concevoir et elles peuvent être retrouvées dans l'écriture chiffrée.

avec le compteur (cf. sq 63). Pour le passage de «0979» à «0980», en vue de valider le changement de notation, l'enseignant schématise la collection organisée correspondant à 979 billes, soit 9 valises, 7 boîtes et 9 billes, qu'il dispose comme sur le fichier (les 5 premières valises forment une rangée, les 4 autres sont alignées en dessous). Il fait formuler qu'en ajoutant une unité, on forme un nouveau groupe de 10 et effectue cette transformation (les 9 billes sont effacées et une nouvelle boîte est dessinée). On poursuit ainsi jusqu'à 998 en faisant correspondre à chaque incrémentation du compteur l'ajout d'une nouvelle bille. Arrivé à «0998», on anticipe qu'on approche du moment où l'on formera un nouveau groupe de 10 et qu'on aura aussi un nouveau groupe de 100, ce qui fera 10 groupes de 100! Comment écrira-t-on ce nombre?...

Activité 1 sur le fichier

On fait observer et décrire la collection : il y a 9 groupes de 100, 9 groupes de 10 et 9 unités isolées. Ce nombre est affiché sur les compteurs individuels et le compteur collectif. On nous dit que c'est 9 groupes de 100 (on les voit tous) et on nous demande aussi combien c'est de groupes de 10. Il y a les 9 qu'on voit et les 90 qu'on ne voit plus parce qu'ils sont rangés dans les 9 valises, c'est 99 groupes de 10! Bientôt 100 groupes de 10! L'enseignant fait lire le commentaire qui précède l'illustration suivante : « Quand ils ont 10 valises de 100 billes... ». Il écrit 1000 (et « mille ») au tableau. Il fait interpréter la situation : pour une fois, les valises ne sont pas encore fermées et on voit tous les groupes de 10. Combien en voit-on? Avant d'enfermer les valises dans

la caisse, il faut d'abord fermer les valises en collant leur couvercle. Il distribue les couvercles des valises, puis, quand ceux-ci sont collés, ceux des caisses (les élèves collent l'un de ces derniers). Le résultat obtenu finalement et les étapes pour y parvenir sont formulés : on voyait tous les groupes de 10, il y en avait 100; on les a groupés dans des valises de 100, il y en avait 10; on a groupé ces 10 groupes de 100 dans une caisse de 1000. On revient aux compteurs en interprétant les transformations successives qu'implique le passage de «0999» à «1000» à l'aide du schéma au tableau : une unité de plus amène à tourner la roue correspondante et à faire apparaître un zéro, mais on a formé ainsi un groupe de 10 de plus (on dessine une boîte à la place des 9 billes), etc. Au tableau, on dessine un grand rectangle autour des 10 valises et on efface celles-ci. On résume finalement : 1000, c'est 1 groupe de 1000 unités, mais c'est aussi... Sur l'écriture chiffrée, on voit les 10 groupes de 100 et même les 100 groupes de 10. Pour le passage de «1000» à «1001» (les élèves collent un nouveau couvercle de caisse), on remarque que l'on recommence à compter des « uns » à côté du groupe de 1000. On poursuit l'incréméntation sur les compteurs et sur la collection dessinée au tableau jusqu'à 1004, moment où l'activité reprend sur le fichier.

Activité 2

Nous avons repris la situation de masquage sur le fichier pour le passage de 1009 à 1010, car il arrive que des élèves soient tentés d'afficher 1100, voire 2000. L'enseignant demande d'afficher le nombre après 1009. Pour valider l'écriture 1010, on se ramène d'abord à la collection représentée au tableau : on forme un nouveau groupe de 10 (mais pas de nouveau groupe de 100, ni de nouveau groupe de 1000). Cette transformation est déjà réalisée sur le fichier; on colle le couvercle de la caisse, on voit bien 1 groupe de 1000 et 1 groupe de 10, mais on sait qu'il y a aussi 10 groupes de 100 (on vient de les cacher) et 101 groupes de 10. On franchit ainsi 1011 et il est bon de poursuivre jusqu'à 1021 pour récupérer un algorithme connu. L'ajout de 1 en 1 se fait sur l'écriture chiffrée d'abord, sur la collection dessinée au tableau ensuite.

3. « 1 100, c'est 11 groupes de 100,... »

On traite les cas où il y a plus de 10 groupes de 100. Plutôt que de le faire en continu, sur le fichier, on parcourt les segments 1097-1103 et 1196-1202, puis 1998-2003 qui contient l'apparition d'un nouveau millier. Mais il est bon de commencer un peu avant et de terminer un peu après. On met toujours en parallèle l'engendrement des écritures chiffrées et les transformations des quantités représentées au tableau, et on interroge à chaque fois sur le nombre de groupes de 100 et celui des groupes de 10. Là encore, l'enseignant feint l'ignorance. Pour 1200 par ex. : « Vous dites qu'il y a 12 groupes de 100, mais je n'en vois que 2! ». L'apparition d'un nouveau millier à 2000 est anticipée dès le premier nombre affiché sur le fichier (1998). On suscite les mêmes formulations que lors de la formation du premier millier. Là encore, on interroge sur le nombre de centaines et de dizaines. La lecture du *J'ai appris* pourra servir de conclusion.

OBJECTIFS

Dans la sq 74, les élèves ont découvert les nombres à 4 chiffres jusqu'à 2000 environ. Plutôt que d'insister sur les décompositions portées par le langage (« deux mille trois cents » par ex.), on a cherché à favoriser la compréhension du fait que 2.300, c'est 23 centaines ou encore 230 dizaines. On s'est appuyé pour cela sur un scénario de masquage.

Dans la sq 77, avec l'activité 1, les élèves sont amenés à généraliser ces connaissances sur des plus grands nombres. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur le souvenir de ces actions (les « emboîtements » des dizaines dans les centaines et des centaines dans les milliers) pour déterminer le nombre d'unités, celui des centaines et celui des dizaines dans des nombres comme 3850. Outre les 8 centaines qu'on voit, il faut prendre en compte les 30 qui sont « cachées » dans les 3 milliers; outre les 5 dizaines qu'on voit, il faut prendre en compte les 380 qui sont cachées dans les centaines (et doublement cachées, lorsqu'il s'agit de celles qui composent les 3 milliers).

Dans l'activité 2, on se concentre sur la décomposition en centaines et on cherche à donner à ces connaissances un caractère général : 3250, c'est 32 centaines, qu'il s'agisse de centaines de billes, de centaines de trombones ou de centaines d'euros.

Dans la sq 83, les élèves pourront exprimer ces connaissances à l'aide de la multiplication par 10 et par 100.

ACTIVITÉS

SÉQUENCE 77

Table de 7, puis « 7 fois 60 »

Même activité que sq 76.

1. Dans 3850, il y a 38 centaines, il y a 385 dizaines

Remarque préalable

Dans les séquences suivantes, cette activité est reprise dans le fichier. Mais nous conseillons à l'enseignant de la pratiquer aussi de façon complémentaire, en l'animant ainsi : il dessine au tableau 4 caisses, 6 valises et 2 boîtes et demande combien il y a de billes en tout, combien il y a de centaines de billes et combien il y a de dizaines de billes. Après la réponse «... 46 centaines», nous recommandons à l'enseignant de feindre la surprise : « Mais je n'en vois que 6 ! » (il joue alors le rôle de l'écureuil dans le début de l'activité 1). De même, après la réponse «... 462 dizaines » : « Mais je n'en vois que 2 ! ». Les raisons qui nous amènent à recommander ce type de dialogue sont déjà développées dans la présentation d'une activité similaire au début de la sq 11. Ici encore, on cherche à éviter que les élèves ne répondent en utilisant des règles superficielles liées aux

77 Numération au-delà de 1000 (2) : 2300, c'est 23 fois 100, c'est...

Table de 7
plus « 7 fois 60 »

1 Qui a raison, Picbille ou l'écureuil ?

Il y a 3800 unités.
C'est 38 groupes de 100 et 0 groupes de 10.
C'est aussi 380 groupes de 10.

Tu se trompes, Picbille !
Moi, je ne vois que 8 groupes de 100 !
Et je ne vois que 8 groupes de 10 !

Complète.

Combien de billes en tout ?
Combien de fois 100 ?
Combien de fois 10 ?

Combien d'unités en tout ?
Combien de groupes de 100 ?
Combien de groupes de 10 ?

Table de 7, puis « 7 fois 60 » : dans sq 76.
Celle activité pourra aussi être reprise régulièrement : l'enseignant dessine au tableau 2 caisses, 6 valises et 2 boîtes, par exemple et demande combien il y a d'unités en tout, puis combien de groupes de 100, et enfin combien de groupes de 10. Lorsque les élèves ont répondu respectivement 2500 unités, 25 groupes de 100, 254 groupes de 10, il est bon que l'enseignant feigne la surprise.

écritures. L'exclamation étonnée de l'enseignant vise à provoquer l'évocation des groupements « cachés ».

Activité sur le fichier

On reconnaît ici le scénario qui a déjà été utilisé dans la sq 11 pour amener les élèves à se souvenir des actions réalisées lors de la formation des groupements de 100. L'écureuil reste prisonnier de ce qu'il voit (en fait de ce qu'on entend, puisque la figuration du nombre correspond à la décomposition mise en relief par l'oral : « 3 mille 8 cents...). Picbille affirme qu'il y a 38 centaines et qu'il y a aussi 385 dizaines. Il s'agit évidemment de solliciter des arguments de ce type : dans le premier millier, il y a 10 centaines, de même dans les deux autres, ce qui fait 30 centaines qu'on ne voit plus... Quant aux dizaines, il faut prendre en compte les 80 qui sont dans les 8 centaines « visibles » et celles qui sont dans les 30 centaines qu'on ne voit plus. Les élèves font individuellement la suite de l'activité. A la fin, il est bon que l'enseignant « joue l'écureuil » sur quelques cas : « Mais je ne vois que n groupes de 100 !... que n groupes de 10 ! ».

2. « 3 200, c'est 32 groupes de 100 »

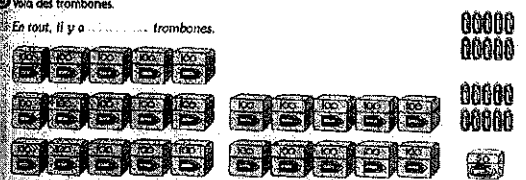
Erratum édition 2003

Pour le problème des trombones, la 2^e question devrait être : « Combien de groupes de 100 trombones y a-t-il ? ». Pour le problème des billets de 100 euros, la 2^e question devrait être : « Combien de billets de 100 € y a-t-il ? ». Nous recommandons à l'enseignant de corriger ces deux questions avant la séquence. Le fac-similé ci-dessus est correct.

10 fois 10... (contextes divers)

Voilà des trombones.


En tout, il y a trombones.



Combien de groupes de 100 trombones y a-t-il?

Avec cet argent, M. Talbot va acheter une voiture d'occasion.

En tout, il y a €.

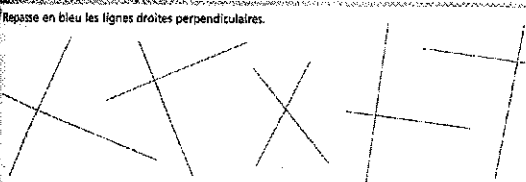


Combien de billets de 100 € y a-t-il?

Pose et calcule ces soustractions.

608 - 439 = 725 - 387 = 528 - 73 = 875 - 468 =

Repasse en bleu les lignes droites perpendiculaires.

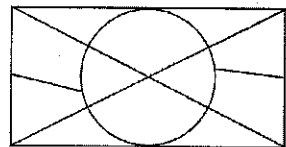


1. Ne se agit que 5 groupes de 100 et 4 groupes de 10.
2. Le fait est que les élèves ne raisonnent pas seulement à l'aide d'une règle superflue posée sur les dixitres défilés.

3. Les élèves peuvent raisonner ici sous la forme « 25 groupes de 100, c'est 2 500 ». La multiplication n° 10 sera utilisée pour des problèmes similaires dans la sq 83.
Après la résolution de chaque problème, on peut faire évoluer les groupes de 100.

➤ Suite de la présentation de la sq 76

croisement des traits AG et KE», l'enseignant peut tracer un cercle plus petit que celui du modèle et demander si cela convient... De même ensuite, pour les traits qui partent de L et de F, si les élèves ont dit qu'il faut tracer deux traits qui partent de L et de F, l'enseignant peut les tracer ainsi :



Les élèves sont ainsi conduits à préciser la consigne en utilisant un langage approprié (plusieurs formulations sont possibles ici). La consigne améliorée est écrite, le tracé correspondant est effectué.

Activités sur le fichier

On demande aux enfants de vérifier préalablement si un tracé qui suit les consignes de Victor permettra d'aboutir à une reproduction exacte. Cela aidera les élèves tout à la fois à réaliser la reproduction demandée et à rédiger ensuite le plan de construction de l'activité 2. On devra alors expliquer le mot « intersection ».

Au cours du travail sur la seconde construction, l'enseignant apportera une aide individualisée :

- Par quoi faut-il commencer ?
- Où est le centre de l'arc de cercle ?
- Quel est son rayon ?
- Où faut-il poser la règle pour tracer le trait qui part de C ? Etc.

Avant la tâche de rédaction, l'enseignant amènera les élèves à prendre conscience qu'ils peuvent utiliser le texte de Victor comme exemple (ils y trouvent des phrases qu'ils peuvent reprendre presque entièrement).

L'enseignant trouvera page 171 un autre exemple possible pour une activité complémentaire.

Conduite des activités

Les deux activités (contexte des trombones et contexte des euros) sont similaires : dans chacune, on demande d'abord le nombre total d'unités, puis on interroge sur le nombre de groupes de 100. Si, pour la première question, les élèves ont compté les unités de 100 en 100 (100, 200, 300, ... 1 000, 1 100, 1 200, etc.), avec la seconde question, portant sur le nombre de groupes de 100, on cherche à ce qu'ils prennent conscience qu'ils pouvaient raisonner plus directement ainsi : compter les groupes de 100 (1, 2, 3, ... 25) et se ramener à 25 groupes de 100, 2 500.

Cette prise de conscience après le problème des trombones doit conduire la plupart des élèves à utiliser cette stratégie pour répondre à la question sur le nombre d'euros.

Les trombones

Pour la 1^{re} question (nombre de trombones), des élèves sont tentés de compter de 100 en 100 (100, 200, 300, etc.). D'autres exploitent la disposition par rangées de 500, d'autres encore « voient » rapidement les deux groupes de 1 000. Il est enfin possible que des élèves utilisent d'emblée la stratégie de comptage 1 à 1 des groupes de 100. L'enseignant n'intervient pas dans ce moment et laisse les élèves poursuivre leur procédure jusqu'au bout. Dès que les élèves ont répondu à la deuxième question, et après avoir vérifié la cohérence des résultats (2 573 trombones et 25 groupes de 100), on organise aussitôt un échange sur les stratégies. Le fait qu'on pouvait compter les groupes de 100 à 1 est relié à « 10 fois 100, c'est 1 000 ». L'enseignant

demande d'entourer ces 2 groupes de 1 000 trombones sur le fichier (on peut imaginer qu'on met ces boîtes de 100 dans des cartons de 1 000). On résume : 10 fois 100, 1 000, 20 fois 100, 2 000, 25 fois 100, 2 500.

Les euros

L'enseignant fait prendre conscience que ce problème est similaire ; va-t-on compter de 100 en 100 : 100, 200, 300, ... ? À la fin de l'activité, on fait entourer les 3 groupes de 1 000 euros (on peut imaginer qu'on va faire des piles de 1 000 euros) et on reprend le raisonnement utilisé pour les trombones : 10 fois 100, 1 000, 20 fois 100, 2 000, 30 fois 100, 3 000, 32 fois 100, 3 200. On pourra conclure que 25 fois 100, c'est 2 500, 32 fois 100, c'est 3 200, qu'il s'agisse de groupes de 100 billes, de groupes de 100 trombones ou de centaines d'euros. Il est bon alors d'interroger sur quelques cas énoncés directement « n fois 100... », en commençant par exemple à « 9 fois 100... » et en augmentant progressivement la taille du premier nombre : 10, 12, 15, 18, 20, 23, 27, 30, 34, 40, etc.

OBJECTIFS

Les élèves vont approfondir ici l'apprentissage des nombres à 4 chiffres. Ceux-ci sont analysés à travers un nouveau contexte de numération décimale, celui des unités de longueur : si l'on considère le mm comme l'unité, le cm constitue donc une dizaine de mm, le dm est la centaine et le m apparaît comme le millier. Le mode d'organisation des longueurs attaché au personnage de M. Millimètre permet de mettre en scène ces différents groupements : lorsqu'il a 10 dm (ou 10 centaines de mm), il trace un « ressort » de 1 m. En laissant apparaître les unités (on voit tous les mm), en marquant à l'aide d'une graduation spécifique les cm et en individualisant les dm, ce mode d'organisation facilite la coordination des divers groupements au sein du nouveau groupement de 1000 : 1000 mm ou 1 m, c'est 10 groupes de 100 mm ou 10 dm, c'est 100 groupes de 10 mm ou 100 cm. Les élèves peuvent alors s'appuyer sur ces équivalences pour exprimer une même longueur (2386 mm par exemple) dans les différentes unités :

- c'est évidemment 2 m et 386 mm ou 2 fois 1000 mm et 386 mm (décomposition portée par le langage);
 - mais c'est aussi 23 dm et 86 mm (10 dm dans le premier millier de mm, encore 10 dans le second et 3 dm isolés); autrement dit, 2386 mm, c'est 23 fois 100 mm et 86 mm;
 - et c'est enfin 238 cm (100 cm dans le premier millier de mm, encore 100 dans le second, 30 dans les 3 dm isolés et les 8 qu'on voit à la fin de la ligne brisée); autrement dit, 2386 mm, c'est 238 fois 10 mm et 6 mm.
- Ces équivalences sont utilisées pour faire des comparaisons entre longueurs exprimées dans des unités différentes (activité 2). Cette approche est préférable à l'usage d'un tableau de conversion (voir remarque page 171). Notons enfin que, dans la sq 80, quand on reverra ces équivalences, on s'attachera aussi à développer une bonne intuition des longueurs de 1 m, 2 m, 3 m, etc.

ACTIVITES

SÉQUENCE 78

Table de 7, puis « 7 fois 60 »

Même activité que sq 76.

Multiple de 25 ou non ?

Même activité que sq 39.

1. Le mètre, groupement de 1000 mm

Avant l'activité sur le fichier, l'enseignant fait d'abord rappeler le système de M. Millimètre. Par exemple : comment tracerait-il des longueurs de 35 mm (3 traits de

78 Numération au-delà de 1000 (3) : 2300, c'est 23 fois 100, c'est

Table de 7, puis « 7 fois 60 »	Oui, ... = 25 x ...	Oui, ... = 25 x ...
Multiple de 25 ou non ?	Non	Non

1. Quand M. Millimètre a 10 dm, il trace un « ressort » de 1 mètre (1 m).

• Cette ligne brisée mesure ... mm. • C'est aussi ... dm et ... mm.
 • C'est aussi ... m et ... mm. • C'est aussi ... cm et ... mm.

Sur ton cahier, trace, comme M. Millimètre, une ligne brisée de 2386 mm.

- Exprime cette longueur en m et mm : 2386 mm = ... m et ... mm
- Exprime-la en dm et mm : 2386 mm = ... dm et ... mm
- Exprime-la en cm et mm : 2386 mm = ... cm et ... mm

J'ai appris : Pour tracer une ligne de 3000 mm, M. Millimètre trace 3 grands « ressorts » de 1 mètre (1 m) ou 1 millier de mm.
 1 m = 10 dm 1 m = 100 cm 1 m = 1000 mm

2. Imagine que M. Millimètre trace des traits aux longueurs suivantes. Compare ces longueurs en utilisant les signes « > », « < » ou « = ».

1980 mm	2 m	1 m	102 cm	9 m	9000 mm
2 m	20 dm	350 cm	4 m	31 dm	3050 mm
98 cm	1 m	5 m	40 dm	1400 cm	14 m

Table de 7, puis « 7 fois 60 » : voir sq 76. Multiple de 25 ou non ? voir sq 39. 1 et 2 : Le groupement de 1000 dans le contexte des unités de longueur : 1000 mm, c'est 1 m. La section au recto explicite les décompositions en centaines, d'une part (10 dm ou 10 groupes de 100 mm, etc.

1 cm et 1 trait de 5 mm), 429 mm (4 traits de 1 dm, 2 traits de 1 cm et 1 trait de 9 mm), 999 mm... On peut même faire tracer la ligne brisée de 429 mm. Pour 999 mm, on imagine ce qui se passerait si on ajoutait 1 mm : certes, on aurait alors 1000 mm, mais comment serait tracée la ligne brisée correspondante ? Il y aurait une dizaine de mm de plus, soit 1 cm, ce qui permettrait de former un dm de plus, mais comme il y en a déjà 9, on devrait tracer une ligne brisée formée de 10 dm.

Les élèves ouvrent leur fichier et découvrent la grande ligne brisée tracée par M. Millimètre. Celle-ci est analysée : on voit deux ressorts formés avec des dm. Combien y a-t-il de dm dans chaque ressort ? Combien de mm dans chaque ressort ? Les voit-on ? Et combien de cm ? Les voit-on ? On comprend qu'avec 10 dm ou 10 centaines de mm, M. Millimètre forme 1 ressort de 1000 mm, et que 1000 mm, c'est 1 mètre. Toutes ces équivalences sont écrites au tableau :

1 m = 10 dm 1 m = 100 cm 1 m = 1000 mm

Sur le mètre collectif, l'enseignant demande à des élèves de montrer entre deux doigts 500 mm, 6 dm, 70 cm, 980 mm, 98 cm, 1000 mm, 100 cm. Si les élèves disposent de mètres à ruban, cette tâche peut être réalisée par groupes, voire individuellement. Les élèves anticipent ou remarquent que certaines longueurs exprimées de deux façons sont égales. On fait alors exprimer de plusieurs façons une longueur de 1248 mm, par exemple : en m et mm, en dm et mm, en cm et mm.

Lorsque les élèves ont déterminé la longueur de la ligne brisée du fichier et traité les 4 conversions

10 fois 10... (contexte des unités de longueur)

Complète.

Combien de billes en tout? ...
Combien de fois 100? ...
Combien de fois 10? ...

Combien d'unités en tout? ...
Combien de groupes de 100? ...
Combien de groupes de 10? ...

Combien d'unités en tout? ...
Combien de centaines? ...
Combien de dizaines? ...

6) Jeu du portrait

- Deux de ses côtés sont perpendiculaires.
- Un de ses côtés mesure 43 mm.
- Ce n'est pas un triangle.

10 mm et en dizaines, d'après son 013 cm ou 213 groupes de 10 mm, c'est 2130 mm. Les élèves peuvent ainsi effectuer des comparaisons sans transporter opérées dans des unités différentes. On approfondit l'histoire des longueurs de 1 m, 2 m... dans la sq 76.

guez exprimées par les diverses unités qui va lui permettre de dégager progressivement les premières équivalences (1 dm = 10 cm, 1 dm = 100 mm, 1 m = 1000 mm, etc.). L'élève peut en effet raisonner ainsi : 1 dm c'est 10 cm parce que c'est la même longueur. C'est au CM qu'il sera conduit à comprendre le système métrique (les unités sont systématiquement organisées dans un rapport décimal) et à utiliser d'autres procédures fondées sur ces relations décimales.

C'est pourquoi nous proposons ici des comparaisons dans des cas où chaque longueur exprimée reste dans une zone contrôlable par l'intuition. Et c'est aussi la raison pour laquelle nous incitons les élèves à utiliser un support figuratif : l'organisation des lignes brisées comme M. Millimètre. Son évocation pour se représenter chacune des longueurs comparées est à ce moment un moyen privilégié pour effectuer ces comparaisons et construire ainsi progressivement les premières équivalences.

Activité sur le fichier

Pour effectuer les comparaisons demandées, les élèves peuvent utiliser diverses méthodes. Pour un cas comme « 5 m ... 40 dm », on peut procéder de deux façons : - 1 m, c'est 10 dm, 5 m c'est 5 fois 10 dm, 50 dm ; - 40 dm, c'est 4 fois 10 dm, c'est-à-dire 4 fois 1 m. Mais, quelle que soit la stratégie employée, comme nous venons de le dire, c'est le support de la ligne brisée tracée sur le fichier qui constituera le moyen que les élèves emploieront le plus souvent pour appuyer ces raisonnements. Et c'est à cette organisation, qui rend visible toutes les unités utilisées dans les comparaisons, qu'il convient de se référer en cas de difficulté ou de doute : pour la comparaison « 98 cm ... 1 m » par exemple, de nombreux élèves n'auront pas encore construit l'équivalence abstraite 1 m = 100 cm et auront besoin de revenir au « ressort » de 1 m pour chercher combien il contient de cm. De même, lors de la validation, on s'appuiera sur la façon dont les lignes brisées correspondantes seraient tracées par M. Millimètre.

demandées, une reprise collective permet de valider ces diverses façons d'exprimer 2 386 mm. La suite de l'activité est individuelle. Pour le tracé de la ligne de 2 386 mm, on recommande aux élèves d'utiliser leur page de cahier dans le sens « paysage ». Bien entendu, ils n'ont pas à faire apparaître les mm, ni les cm quand ils sont groupés dans les dm. On prévoira un échange en conclusion pour valider les conversions demandées sur le fichier. Ce sera aussi l'occasion de relier les décompositions obtenues au langage plus général de la numération décimale :

- 2 386 mm = 23 dm et 86 mm, parce que 2 386 mm, c'est 23 centaines de mm et 86 mm ;
- 2 386 mm = 238 cm et 6 mm, parce que 2 386 mm, c'est 238 dizaines de mm et 6 mm.

2. Comparaisons de longueurs

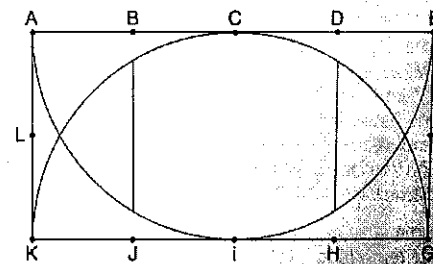
Remarque préliminaire

Les élèves vont devoir comparer 1900 mm et 2 m, 2 m et 20 dm, 98 cm et 1 m, etc. Il ne s'agit pas de mettre à leur disposition des procédures systématiques pour effectuer les conversions qui permettent de trancher, quelles que soient les longueurs comparées : ce sera un enjeu important du CM. Mais au CE2, un objectif crucial (et préalable) est que les élèves se familiarisent avec chaque unité et se donnent une bonne intuition des longueurs qui s'expriment avec ces unités. À la fin de l'année, un élève de CE2 doit pouvoir répondre à des questions telles que : « c'est grand comment 1 mm, 5 mm, 10 mm, 50 mm ? » ; « c'est grand comment 1 m, 5 m, 10 m, 50 m ? », etc. Et c'est cette intuition des lon-

Activités complémentaires

Reproduire une construction

Voici un autre exemple de modèle à reproduire dans le même cadre comportant des repères que celui qui a été utilisé dans la sq 76.



Extraits du manuel « Cap Maths CE2 »

Nous donnons ici quelques pages du guide du maître de ce manuel concernant l'étude des nombres à quatre chiffres. Dans ces pages figurent également des extraits du manuel de l'élève. Nous avons choisi de présenter les 3 premières séances (unité 7) ainsi que la dernière (unité 12) puisqu'elles mettent en jeu l'aspect décimal de la numération.

Le nombre mille

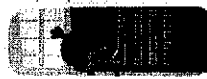
Connaître le nombre 1 000 et ses relations avec d'autres nombres.

Chercher manuel p. 62 questions 1 à 5

Les élèves répondent à différentes questions qui permettent d'envisager l'écriture en chiffres de mille et ses relations avec d'autres nombres, notamment avec 10 et 100 et avec 25, 50, 250 et 500.

Chercher Mille

- Écris mille en chiffres.
- Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste avant mille.
- Écris en chiffres et en lettres le nombre qui vient juste après mille.
- Mais dessine des colonnes de dix cartes. Combien doit-elle dessiner de colonnes pour obtenir mille carrés ?
- Sur une grande feuille, trace avec un crayon une ligne brisée de mille millimètres.



Mille, son écriture, ses « voisins »

- Demander aux élèves une réponse individuelle et rapide aux questions 1, 2 et 3.
- Recenser et faire valider les réponses. Il y a plusieurs manières de trouver les nombres qui précèdent et suivent 1 000 :
 - en observant la numérotation des pages d'un livre de plus de 1 000 pages (un dictionnaire par exemple) ;
 - en utilisant deux compteurs en carton, mis bout à bout, et en prolongeant aux nombres de 4 chiffres le fonctionnement connu pour les nombres de 3 chiffres ;
 - en retranchant ou en ajoutant 1 au nombre 1 000, avec une calculatrice.

Comme le nombre 100, le nombre 1 000 joue un rôle important dans la compréhension du système de numération écrite (découpage en classes de trois chiffres), ainsi que dans celle du système de désignation orale où mille joue un rôle clef. Plusieurs « petites » activités permettent ici une première familiarisation avec le nombre 1 000, avant d'entreprendre une étude plus structurée du système d'écriture des nombres « de plus de 3 chiffres ».

Mille petits carrés

- Demander une réponse, par deux, à la question 4.
- Après une mise en commun des procédures, garder une trace écrite collective des procédures les plus caractéristiques :
 - $1\ 000 = 10 \times 100$ (il faut dessiner 100 rangées de 10 carrés), avec éventuellement utilisation de la règle des 0 ;
 - comptage de 10 en 10, puis de 100 en 100...

Une ligne de mille millimètres

- Demander une réponse, par deux, à la question 5.
- Recenser les procédures. Certaines peuvent être laborieuses comme par exemple le dénombrement des millimètres du double décimètre avec report ; d'autres peuvent utiliser ce qui a été travaillé précédemment, comme par exemple les équivalences entre 1 cm et 10 mm et entre 1 m et 100 cm.

On laissera chaque groupe d'élèves choisir sa procédure, sans provoquer de mise en commun trop rapide.

Les erreurs peuvent provenir d'une mauvaise utilisation des équivalences entre unités. Le retour à leur signification sur le double décimètre peut aider certains élèves.

Entraînement manuel p. 62 exercices 6 à 10

Exercice 6

- Dans une école, lorsque tous les enfants lèvent tous leurs doigts, cela fait mille doigts, levez. Combien y a-t-il d'enfants dans l'école ?
- Un siècle, c'est 100 ans. Combien faut-il de siècles pour faire un millénaire ?
- Dans mille :
 - combien de fois y a-t-il 100 ?
 - combien de fois y a-t-il 50 ?
 - combien de fois y a-t-il 25 ?
- Combien faut-il de lettres pour écrire mille chaussures ?
- Trouve les calculs qui ont pour résultat le nombre mille. Avec les lettres de ces cases, écris un mot que tu connais.

A 50 x 4	C 100 x 8	E 200 x 2	G 4 x 250
F 350 x 2	H 100 x 10	I 300 x 3	J 5 x 200
K 25 x 20	L 200 x 4	M 10 x 100	N 100 x 8
O 20 x 30	P 25 x 4	Q 25 x 10	R 10 x 20

Les élèves traitent certains de ces exercices, soit librement selon le temps dont ils disposent, soit en fonction des indications de l'enseignant.

Exercice 6 Il peut être rapproché de la question 4 et revient à se demander combien il y a de fois 10 dans 1 000.

Exercice 7 Résoudre cet exercice revient à se demander combien il y a de fois 100 dans 1 000 ?

Exercice 8 Certaines procédures peuvent s'appuyer sur des relations connues, comme le fait que 25, 50 et 200 sont respectivement le quart, la moitié et le double de 100.

Exercice 9 On peut faire préciser que, dans chaque boîte, il y a 2 chaussures.

Exercice 10 Le mot « mille » peut être écrit avec les lettres sélectionnées mises en ordre.

Nombres supérieurs à 1 000 (1)

- Comprendre les écritures de nombres au-delà de 1 000 et pouvoir les comparer.
- Exprimer ces nombres à l'aide de décompositions du type : $2\ 540 = 2 \times 1\ 000 + 5 \times 100 + 4 \times 10$.

Chercher manuel p. 62, question 1 et règle du jeu

Les élèves doivent essayer de marquer le maximum de points en choisissant un nombre de cartes, fixé par un jet de dé, parmi des cartes rapportant 1 point, 10 points, 100 points, 1 000 points, 10 000 points.

Chercher : Au-delà de 1 000

1. Fais une première partie de jeu avec 2 ou 3 de tes camarades. Vous pourrez ensuite faire d'autres parties.

Le plus grand total

Matériel

- 1 paquet de 5 cartes de 1 point
- 1 paquet de 10 cartes de 10 points
- 1 paquet de 5 cartes de 100 points
- 1 paquet de 5 cartes de 1 000 points
- 1 dé
- une feuille de jeu par joueur

Jeux :

On jette le dé sur un tapis. À tour de rôle, les joueurs lèvent le dé et prennent, dans un paquet choisi de cartes qu'ils aident à poser sur le tapis. Attention ! Pas prendre les cartes dans le même paquet. Le joueur choisit les cartes et complète sa feuille de jeu. Le gagnant est celui qui a le plus grand total de points.

ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

Phase de jeu : première partie

- Demander aux élèves de prendre connaissance de la **question** et de la **règle du jeu**.
- Faire reformuler la règle en même temps qu'est mis en place un début de partie avec trois élèves qui remplissent chacun leur feuille de jeu, mais sans aller jusqu'au calcul des points (deux tours par exemple), en précisant bien les éléments de la règle :
 - si le dé jeté par le joueur marque 4, celui-ci peut prendre 4 cartes d'une même sorte (il doit donc trouver un paquet dans lequel il y a encore 4 cartes, par exemple 4 cartes marquées « 1 000 points ») ;
 - il garde les cartes et remplit alors sa feuille de jeu en inscrivant 4 dans la colonne « dé » et « 1 000 » dans la colonne « carte » ;
 - à la fin de la partie, il faudra calculer ce que représente toutes les cartes gagnées, soit à l'aide des cartes, soit à l'aide de la feuille de jeu.
- Demander à chaque équipe de jouer une partie complète en n'oubliant pas de remplir la feuille de jeu. Pendant cette phase, n'intervenir que pour aider dans le déroulement du jeu.

Au cours de cette activité, les élèves vont se familiariser avec les écritures chiffrées de nombres supérieurs à 1 000 et être amenés à les comparer. Pour cela, ils peuvent s'appuyer sur leur connaissance des nombres de 3 chiffres, en prolongeant à ces nouveaux nombres.

Dans un premier temps, pour familiariser les élèves avec le jeu, on peut n'utiliser que les cartons 1, 10, 100 et 1 000 pour rester dans un domaine déjà connu des élèves.

COLLECTIF / ORAL

Mise en commun

- À partir de feuilles de jeu d'une même équipe, dont certaines peuvent comporter des erreurs dans l'évaluation du total des points, faire expliciter :
 - les **procédés de calcul des points** en les mettant en relation : la valeur de 4 cartes de 1 000 peut être obtenu à l'aide de $4 \times 1\ 000 = 4\ 000$ ou de $1\ 000 + 1\ 000 + 1\ 000 + 1\ 000 = 4\ 000$, ou encore en considérant que c'est 4 milliers ;
 - les **procédés de comparaison des scores**, ce qui peut déboucher sur un rangement de tous les nombres apparus dans la classe : les règles de comparaison déjà énoncées précédemment devraient être mobilisées, en référence à la valeur des chiffres dans l'écriture des nombres (selon leur position) ;
 - les **erreurs** : oubli du fait que la valeur de la carte est prise autant de fois qu'il y a de points sur le dé, erreurs dans les types de calcul ou dans les calculs eux-mêmes, confusion entre nombre de points total sur les 4 dés « gagnés » et valeur des cartes gagnées...

COLLECTIF ET ÉQUIPES DE 3 OU 4 / ORAL

Synthèse sur les nombres > 1 000

- La synthèse peut prendre la forme d'un tableau de numération proposé par l'enseignant (il est peu probable qu'il soit suggéré par un élève) :

Écriture

10 000	1 000	100	10	1
dizaine de mille	millier	centaine	dizaine	unité
4	0	5	2	6

Ce nombre écrit 40 526, l'espace est utilisé pour rendre plus facilement lue chaque chiffre. Il contient 4 dizaines de mille, 5 centaines, 2 dizaines et 6 unités. Il se décompose en $4 \times 10\ 000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 6$ ou sous forme d'addition du type : $10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + 100 + 200$, ce qui correspond à différentes méthodes de calcul possibles.

Lecture
40 526 se lit : quarante mille cinq cent vingt-six. Les tranches de 3 chiffres à partir de la droite sont lues aide à la lecture.

Comparaison
Il faut regarder le nombre de chiffres et, s'il est identique, s'intéresser aux chiffres de plus grande valeur, en partant de la gauche.

- Les élèves sont en particulier invités à consulter leur dico-maths pour y trouver, avec l'aide de l'enseignant, comment s'écrivent, se lisent et se comparent les nombres supérieurs à 1 000.
- À partir de là, de nouvelles parties sont jouées, avec une autre mise en commun (si nécessaire) ou, plutôt, une incitation à s'auto-contrôler dans chaque groupe, avec l'aide éventuelle de l'enseignant.

Au début, les calculs sont laissés à l'initiative des élèves. Certains peuvent poser des additions du type $10\ 000 + 10\ 000 + 10\ 000 + \dots$ (ce qui est assez fréquent), calculer des produits comme $4 \times 10\ 000$ (en prolongeant la règle des 0) ou répondre directement 40 000.

On laissera se développer ces différentes pratiques et ce n'est qu'au cours de la séance qu'est introduit le tableau de numération qui permet de trouver rapidement l'écriture du total des points. Mais il ne serait pas opportun de systématiser son utilisation, ce qui risquerait de conduire les élèves à ne plus réfléchir à la valeur des chiffres dans l'écriture du nombre.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement manuel p. 63

Exercices

1. Voici les feuilles de jeu de Tim et Méli. Combien chacun a-t-il marqué de points ? Qui a gagné la partie ?

Tim	de	carte	Méli	de	carte
1 ^{er} tour	2	1 000	1 ^{er} tour	3	100
2 ^e tour	4	10	2 ^e tour	6	1 000
3 ^e tour	1	10 000	3 ^e tour	5	1
4 ^e tour	6	1	4 ^e tour	6	10

2. Anis a marqué 54 023 points. Combien de cartes de chaque sorte a-t-elle gagnées ?

3. Léo a déjà 40 047 points. Quelles cartes doit-il gagner pour avoir 43 047 points ?

Exercice 2 : Il est très proche de l'activité rencontrée au cours du jeu. Au moment de la correction, le tableau de numération peut être un support utile à condition de ne pas être systématisé.

Exercice 3 : C'est la tâche inverse, il faut interpréter la valeur de chaque chiffre en fonction du rang qu'il occupe. Là aussi, le tableau de numération peut être utile à condition de ne pas le systématiser.

Exercice 4 : Il suffit de remarquer que seul le chiffre des milliers est modifié.

Réponse : Il doit donc gagner 3 cartes « 1 000 ».

UNITÉ 7

Nombres supérieurs à 1 000 (2)

- Associer les écritures littérales et chiffrées des nombres au-delà de 1 000.
- Exprimer ces nombres à l'aide de décompositions du type : $2\,540 = 2 \times 1\,000 + 5 \times 100 + 4 \times 10$.
- Connaître et utiliser la règle d'engendrement de la suite des nombres (de 1 en 1).

Chercher

Chercher Au-delà de 1 000

1 Avec ces mots, réalise chacun de ces nombres, écris-les en chiffres et en lettres :

a. 423	f. quatre dizaines de mille et trois centaines
b. 3 180	g. trois dizaines de mille, quatre mille et deux dizaines
c. 34 100	h. $(4 \times 1\,000) + (3 \times 100) + (2 \times 10)$
d. 1 334	i. $(3 \times 100\,000) + (2 \times 10\,000) + 4$
e. 324 000	j. $(8 \times 10\,000) + (3 \times 100) + (3 \times 10)$

2 Écris les 20 nombres qui suivent deux fois :

2 095 2 096 2 097

3 Écris les 20 nombres qui sont écrits deux fois :

6 905 6 906 6 907

Nombres en lettres et en chiffres

- Remettre le lot de huit étiquettes à chaque élève. Faire lire la consigne, puis préciser la consigne pour le nombre a afin de familiariser les élèves avec la tâche proposée :
- ➔ Avec les étiquettes, vous devez réaliser ce nombre (423 n'est pas dit, mais écrit au tableau en chiffres), puis l'écrire chacun sur votre cahier de brouillon. Vous pourrez ensuite comparer vos réponses par deux et vous mettre d'accord.

- Faire une correction rapide.
- Demander de répondre de la même manière pour les autres nombres, en précisant aux élèves que, en cas de désaccord, ils pourront porter leur différend devant la classe, lors de la mise en commun.
- En se référant éventuellement au dico-maths pour se renseigner sur la lecture des nombres, préciser à nouveau :
 - la façon dont se lisent les nombres de plus de 3 chiffres (à partir d'un découpage en tranches de 3 chiffres) ;
 - les différentes décompositions utilisant les puissances de 10 (en lien avec le tableau de numération et le matériel de la séance précédente) ainsi que le vocabulaire « unité, dizaine, centaine, millier... ».

Cette activité a pour but de commencer à familiariser les élèves avec les différentes désignations des nombres supérieurs à 1 000. Il s'agit d'exercices d'apprentissage : les hésitations et les désaccords entre élèves sont donc « normaux ». La confrontation lors de la mise en commun, le recours au matériel utilisé lors de la séance précédente (pour obtenir une décomposition des nombres), l'utilisation du tableau de numération (sans que ce soit systématisé) sont des moyens utiles pour aider à surmonter les difficultés.

Dans le dico-maths, à propos de la lecture des nombres, on peut identifier ceux qui nécessitent l'utilisation du mot « et » (ou du tiret) pour les écritures littérales.

Suite de nombres

- Demander aux élèves de répondre individuellement aux questions.
 - Faire comparer les réponses et expliciter les procédures utilisées.
 - Conclure en mettant en évidence que l'algorithme de production de la suite des nombres est le même que pour les nombres inférieurs à 1 000. Celui-ci peut être illustré de deux façons :
 - avec le fonctionnement des roues du compteur ;
 - avec le matériel « cartons » pour représenter les échanges possibles : 2 099 c'est 2 cartons « 1 000 », 9 cartons « 10 » et 9 cartons « 1 » ; avancer de 1, c'est ajouter un carton « 1 » ; on a alors 10 cartons « 1 » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 10 » ; on a alors 10 cartons « dix » qui peuvent être remplacés par 1 carton « 100 ».
- La réponse peut également être obtenue en s'appuyant sur la suite orale des nombres : après deux mille quatre-vingt-dix-neuf, on s'attend à entendre deux mille cent.

Entraînement

Exercices

1 Écris en chiffres :

a. mille deux cent trente-cinq	f. cent mille sept cents
b. six mille	
c. mille six cents	
d. cinq mille soixante-dix	
e. quarante-dix mille	

2 Écris en lettres :

a. 15 000	c. 1 435
b. 6 060	d. 20 032

3 Avec 0 7 5 4 9 écris :

a. le plus petit nombre possible
b. le plus grand nombre possible

Ces exercices sont proposés au choix de l'enseignant.

Exercices classiques demandant d'associer écritures littérales et écritures chiffrées. On s'attardera sur les erreurs classiques du type 61 000 pour six mille, ou 610 000 ou 701 000 pour soixante-dix mille.

Exercice 6 : Une difficulté peut venir du fait que pour écrire le plus petit, il faut mettre le 0 en 2^e position et non en 1^{re} position à partir de la gauche).

Réponse : 40 579 ; 97 540.

Nombre de parts

- Trouver combien il y a de fois 10, 100... dans un nombre donné.

Chercher manuel p. 108 questions 1, 2 et 3

Les élèves doivent trouver combien de rubans de 2 cm, de 10 cm, de 100 cm ils peuvent découper dans une bande de longueur donnée.

Chercher Problèmes

Pour préparer la fête de l'école, la classe a reçu de longues bandes de tissu. Plume découpe des rubans de 2 cm de long, Miska des rubans de 10 cm de long et Tim des rubans de 100 cm de long.

1. Anais donne :
 - une bande de 26 cm de long à Plume ;
 - une bande de 70 cm de long à Miska ;
 - une bande de 200 cm de long à Tim.
 Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?

2. Anais donne ensuite à chacun une bande de 640 cm.
 Combien chacun pourra-t-il découper de rubans dans sa bande ?

3. Si Anais donnait à chacun une très longue bande de 2 416 cm
 combien chacun pourra-t-il découper de rubans ?

La présence de rubans de 10 cm et 100 cm est destinée à souligner la spécificité des nombres 10 et 100 dans ce problème. Avec eux, une « lecture directe » du résultat sur le nombre donné est possible, ce qui n'est pas le cas avec le nombre 2.

La question 1 est très simple, pour favoriser une entrée de tous dans le problème. Les erreurs peuvent provenir d'une mauvaise compréhension de la situation (confusion entre nombre de rubans et longueur de la bande, par exemple) ou d'une difficulté à mener à bien la procédure envisagée. La discussion autour des réponses erronées peut conduire à utiliser la multiplication pour déterminer la longueur de bande nécessaire pour une réponse donnée.

INDIVIDUEL / ECRIT

■ Dans une bande de 26 cm, de 70 cm, de 200 cm

- Demander aux élèves de prendre connaissance de l'énoncé et de la question. Montrer éventuellement une bande de 26 cm et commencer le découpage en rubans de 2 cm. Préciser que chacun cherche à obtenir le plus possible de rubans.
- Faire un bilan des réponses pour chaque personnage, puis faire expliciter et commenter les différentes procédures utilisées :
 - dessin ou schéma servant de support à un découpage réel ou fictif ;
 - addition ou soustraction itérée ;
 - multiplication ;
 - division (par exemple, prendre la moitié de 26) ;
 - utilisation de la numération : dans 70 cm, il y a 7 fois 10 cm ou 7 dizaines de cm... ; dans 200 cm, il y a 2 fois 100 cm ou 2 centaines de centimètres.

EQUIPES DE 2 / ECRIT

■ Dans une bande de 640 cm

- Demander de répondre à la question 2.
- Indiquer aux élèves que, après avoir trouvé une réponse, ils doivent vérifier si elle correspond bien à la longueur de bande attribuée, soit 640 cm.
- Organiser une mise en commun, au cours de laquelle plusieurs procédures sont examinées, mais en mettant particulièrement en évidence celles qui sont plus efficaces :
 - prendre la moitié (pour les rubans de 2 cm) ;
 - utiliser la multiplication par 10 ou par 100 (pour les deux autres) ou utiliser le fait que dans 640 il y a 64 dizaines ou 6 centaines, reconnues comme plus rapides et efficaces que d'autres procédures par ajouts ou retrais successifs.
- Insister sur la validation par un calcul multiplicatif : $640 = 320 \times 2$; $640 = 64 \times 10$; $640 = (6 \times 100) + 40$ et sur l'existence du reste non nul pour le découpage par 100.

Dans la question 2, les nombres sont plus grands, ce qui peut conduire à ne pas recourir à des schémas, à l'addition ou à la soustraction itérée. Mais la présence d'un « 0 » comme chiffre des unités peut aider à voir l'intérêt d'utiliser la multiplication par 10. Le fait que le nombre de centaines soit à un seul chiffre apporte également une aide pour la recherche du nombre de rubans de 100 cm.

L'existence d'un reste (pour les rubans de 100 cm) peut faire difficulté ; pour certains le recours à un schéma peut aider à la compréhension.

ÉQUIPES DE 2 / ÉCRIT

■ Dans une bande de 2 416 cm

- Le déroulement et l'exploitation de la question 3 sont identiques.
- Les résultats trouvés peuvent être exprimés à l'aide d'égalités du type : $2\ 416 = (24 \times 100) + 16$, ce qui amène à conclure qu'il y a 24 centaines dans 2 416 (ce qui correspond également à une procédure qui a pu être utilisée).
- Faire remarquer que le reste n'est égal à 0 que pour le découpage en rubans de 2 cm.

Dans la question 3, aucune des « facilitations » précédentes n'est présente, mais les élèves peuvent utiliser les procédures déjà rencontrées. Les problèmes traités préparent le travail sur la division qui sera repris de façon plus intensive en fin d'année.

INDIVIDUEL / ÉCRIT

Entraînement

Exercices

4. Anne a une bande de 250 cm. Elle veut découper le plus possible de rubans de 10 cm de long. Combien peut-elle en découper ?

5. Dans une bande de 507 cm de long, combien peux-tu découper de rubans de 10 cm de long ?

Exercices 4 et 5 Ils sont du même type que ceux traités au moment de la recherche, mais limités aux rubans de 10 cm. Dans l'exercice 4 le reste est égal à 0, alors que dans l'exercice 5 il est égal à 7.

Réponse : 4. 25 rubans ; 5. 50 rubans (la réponse peut être obtenue en considérant que 500 est le double de 250).

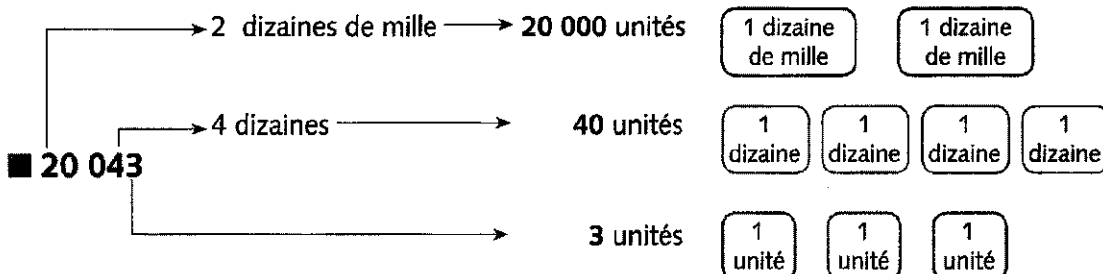
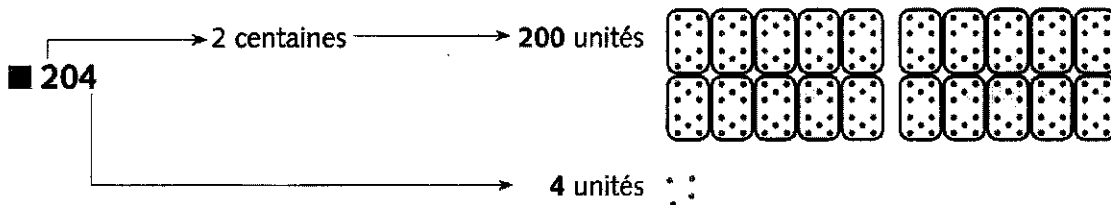
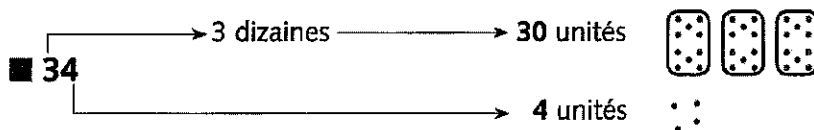
Connaître la valeur des chiffres

Pour comprendre ce que vaut un chiffre dans un nombre

Regarde la place qu'il occupe.



20 043

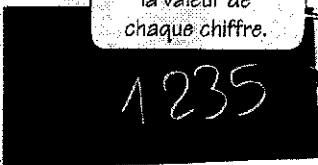


Si tu as oublié la valeur d'un chiffre, tu peux écrire le nombre dans un tableau comme celui-ci :

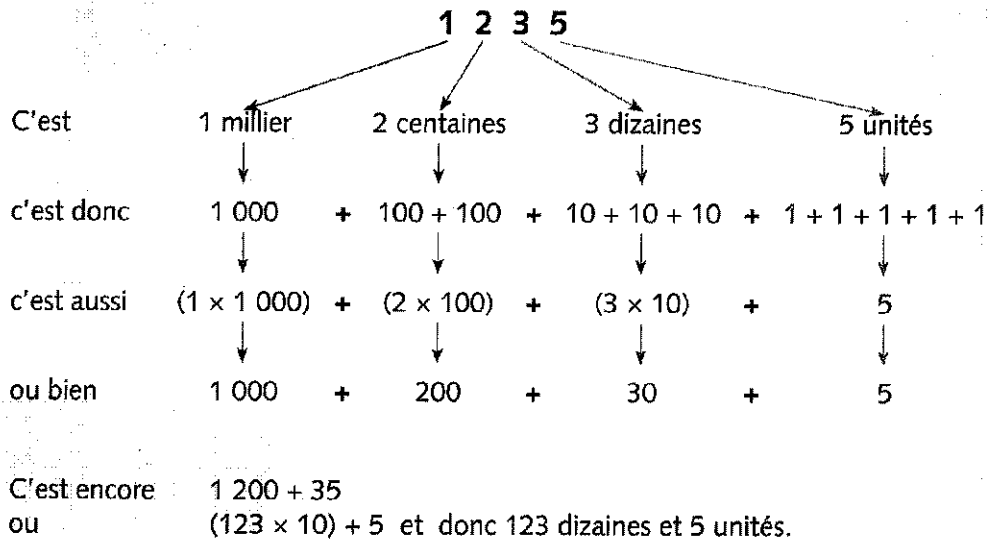
centaines de mille	dizaines de mille	milliers	centaines	dizaines	unités
100 000	10 000	1 000	100	10	1
				3	4
			2	0	4
	2	0	0	4	3

Pour décomposer un nombre à l'aide de 10, 100, 1 000...

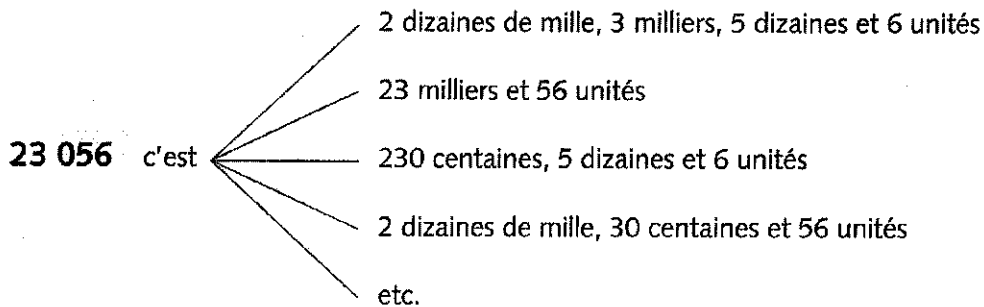
Il faut connaître la valeur de chaque chiffre.



■ Décomposer le nombre 1 235



■ Décomposer le nombre 23 056



Dizaine : groupement de 10 unités	1 dizaine = 10 unités
Centaine : groupement de 100 unités	1 centaine = 100 unités
Une centaine, c'est aussi un groupement de 10 dizaines.	1 centaine = 10 dizaines
Millier : groupement de 1 000 unités	1 millier = 1 000 unités
Un millier, c'est aussi un groupement de 100 dizaines.	1 millier = 100 dizaines
Un millier, c'est aussi un groupement de 10 centaines.	1 millier = 10 centaines

Annexes Partie D

Cahiers d'élèves de la classe de Marc

Le 18/11/08

nom: Dumaine

CE2

prénom: Lucie

Numération

date: 18/11/08

B

objectif → retrouver des nombres désignés sous différentes écritures

consigne → Retrouve les nombres suivants.

$\boxed{100}$ $\boxed{100}$

$\boxed{100}$ $\boxed{100}$

$\boxed{100}$

$\boxed{10}$ $\boxed{10}$

①

→ $\underset{m}{1}$ $\underset{c}{2}$ $\underset{d}{3}$ $\underset{u}{2}$

$\boxed{100}$

$\boxed{100}$

$\boxed{100}$

$\boxed{10}$

②

$\boxed{100}$ $\boxed{100}$

$\boxed{100}$ $\boxed{100}$

260

26 d → $\underset{m}{2}$ $\underset{c}{6}$ $\underset{d}{0}$ $\underset{u}{0}$

3m 4c 2d 1u → $\underset{m}{3}$ $\underset{c}{4}$ $\underset{d}{2}$ $\underset{u}{1}$

2u 23d 1m → $\underset{m}{1}$ $\underset{c}{2}$ $\underset{d}{3}$ $\underset{u}{2}$

trois mille deux cent quarante-cinq → $\underset{m}{3}$ $\underset{c}{2}$ $\underset{d}{4}$ $\underset{u}{5}$

2000 + 300 + 10 + 8 → $\underset{m}{2}$ $\underset{c}{0}$ $\underset{d}{1}$ $\underset{u}{8}$

(4 x 1000) + (2 x 100) + (3 x 10) + 1 → $\underset{m}{4}$ $\underset{c}{2}$ $\underset{d}{3}$ $\underset{u}{1}$

Le 22/11/08

nom: Dumaine
prénom: Lucie

Numération

CE

date: 21/11/08

TB

objectif → par rapport à un nombre donné, trouver le nombre juste avant et le nombre juste après (encodement numérique)

consigne: Preuve le nombre juste avant et le nombre juste après par rapport au nombre donné (aide - le du compteur,

422 - 423 - 424

698 - 699 - 700

799 - 800 - 801

1422 - 1423 - 1424

1698 - 1699 - 1700

1799 - 1800 - 1801

1202 - 1203 - 1204

1600 - 1601 - 1602

1498 - 1499 - 1500

1099 - 1100 - 1101

Le 22/01/09

Maude 22 janvier 2009

DATE

TB Numération

Encadre le nombre donné avec
le nombre juste avant et le nombre
juste après.

498 < 499 < 800

127 < 1228 < 1229

3694 < 3695 < 3696

5999 < 6000 < 6001

4339 < 4340 < 4341

7452 < 7453 < 7454

2678 < 2679 < 2680

4998 < 4999 < 5000

Le 23/01/09

23 janvier 2009

TB Numération

Encadre le nombre donné avec le
nombre juste avant et le nombre
juste après.

$$489 < 490 < 491$$

$$499 < 800 < 801$$

$$999 < 1000 < 1001$$

$$4999 < 2000 < 2001$$

$$5999 < 6000 < 6001$$

$$4998 < 4999 < 5000$$

$$1227 < 1228 < 1229$$

$$3007 < 3008 < 3009$$

$$2246 < 2247 < 2248$$

Le 13/02/09

nom: Humaine

CE₂

prénom: Lucie

date: 13/02/09

Numération

B.

Écrive les nombres suivants.

$$(4 \times 1000) + (2 \times 100) + (3 \times 10) + 1 = \underline{4231}$$

$$(9 \times 10) + (9 \times 1000) + (3 \times 100) + 8 = \underline{9398}$$

$$22 \text{ d} \rightarrow \underline{220}$$

$$1 \text{ c } 2 \text{ m } 9 \text{ d } 4 \text{ u} \rightarrow \underline{2494}$$

$$\text{deux mille trois cent neuf} \rightarrow \underline{2309}$$

$$(9 \times 10) + (3 \times 1000) + 8 \rightarrow \underline{3098}$$

$$12 \text{ c} \rightarrow \underline{(120) 1200}$$

$$11 \text{ c } 9 \text{ d } 3 \text{ u} \rightarrow \underline{4493}$$

$$3 \text{ m } 9 \text{ d } 4 \text{ u} \rightarrow \underline{3094}$$

$$8 \text{ m } 12 \text{ d } 1 \text{ u} \rightarrow \underline{8424}$$

$$4000 + 900 + 50 + 8 \rightarrow \underline{4958}$$

$$300 + 5000 + 9 \rightarrow \underline{5309}$$

2 en chiffres les nombres suivants.

six cent vingt 620

neuf mille sept cent deux 9702

sept mille 7000

sept mille sept cent sept 7707

neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf 9999

Lucie
IB

2) Écris le nombre qui vient juste avant et le nombre qui vient juste après.

1599 1500 1501

3452 3453 3454

8999 9000 9001

2608 2609 2609

4998 4999 5000

3698 3699 3700

999 1000 1001

4999 5000 5001

3) Écris les nombres suivants du plus petit au plus grand.

~~7850~~ - ~~1004~~ - ~~2859~~ - ~~4609~~ - ~~9000~~

1001 - 2859 - 4609 - 7850 - 9000

4) Complète.

$$7259 = (7 \times 1000) + (2 \times 100) + (5 \times 10) + 9$$

$$\underline{4406} = (4 \times 1000) + (4 \times 100) + 6$$

$$6251 = (6 \times 1000) + (2 \times 100) + (5 \times 10) + 1$$

$$9209 = (9 \times 1000) + (2 \times 100) + 9$$

Le 10/03/09

Maude

10 mars - 2009 -

TB Numération

Encadre les nombres donnés avec le nombre juste avant et le nombre juste après.

1488 - 1489 - 1490

2899 - 2900 - 2901

2999 - 3000 - 3001

6228 - 6229 - 6230

2498 - 2499 - 2500

② Strucure de 100 en 100.

889 - 989 - 1089 - 1189 - 1289 - 1389 - 1489

- 1589 - 1689 - 1789 - 1889 - 1989 - 2089 -

2189 - 2289 - 2389 - 2489 - 2589 - 2689 -

2789 - 2889 - 2989

Le 24/03/09

deux

le 24 Mars 2009

Course des nombres suivants.

25c \rightarrow 2500

1c 2m 4d \rightarrow 2140

12u \rightarrow 12

28d \rightarrow 280

1u 32d \rightarrow 321

13c 2u \rightarrow 1302

J'ai le nombre 328. J'avance de 12 u
puis je recule de 3 d.

J'arrive à quel nombre? 310

Le 27/03/09

Mae de -

002

~~20~~

27 mars 2009

B Numération

Encadre chaque nombre donné avec la dizaine juste avant et la dizaine juste après.

1320 - 1328 - 1330

820 - 828 - 830

3802 - 3802 - 3810

4990 - 4992 - 5000

6000 - 6005 - 6010

9430 - 9434 - 9440

2490 - 2494 - (2500) 2500

3000 - 3001 - 3010

400 - 404 - 410

nom: Dumaine
 prénom: Loïc

date: 14/04/09

Mathématiques

note $\frac{19,5}{20}$

CE₂

Bilan intermédiaire

① Range ces nombres dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

$$\begin{array}{l} 1 \quad 3 \overline{283} - \overline{678} - \overline{5682} - \overline{8399} - \overline{1588} \\ 1 \quad \overline{648} - \overline{1598} - \overline{9263} - \overline{5682} - \overline{8399} \end{array}$$

② Range ces nombres dans l'ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

$$\begin{array}{l} 1 \quad \overline{4298} - \overline{5333} - \overline{7001} - \overline{999} - \overline{6032} \\ 1 \quad \overline{4001} - \overline{6032} - \overline{5993} - \overline{4298} - \overline{999} \end{array}$$

③ Dictée de nombres.

$$\begin{array}{l} 2 \\ 2 \quad \overline{6038}, \overline{45}, \overline{522}, \overline{380}, \overline{292}, \overline{428} \end{array}$$

④ Lecture de nombres.

$$\begin{array}{l} 2 \\ 2 \quad \underline{\underline{8099}} \qquad \underline{\underline{41009}} \\ \underline{\underline{329231}} \qquad \underline{\underline{4179}} \end{array}$$

⑤ Décompose ces nombres de deux façons différentes.

$$\frac{2}{2} \quad 2328 = (2 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 8$$

$$2328 = 2000 + 300 + 20 + 8$$

$$4108 = \underline{4000} + \underline{100} + \underline{8}$$

$$4108 = (\underline{4 \times 1000}) + (\underline{1 \times 100}) + \underline{8}$$

$$3039 = (\underline{3 \times 1000}) + (\underline{0 \times 100}) + (\underline{3 \times 10}) + \underline{9}$$

$$3039 = \underline{3000} + \underline{30} + \underline{9}$$

⑥ Écris le nombre qui précède et le nombre qui suit le nombre donné.

644	678 - 678	4208 - 4299 - 4300	2031 - 2032 - 2033
898	899 - 900	3998 - 3999 - 4000	3332 - 3333 - 3334
1322	1323 - 1324	6999 - 7000 - 7001	4999 - 5000 - 5001

Reculé de 1000 en 1000.

159 938 - 8938 - 4938 - 6938 - 5938 - 4938 - 3938 - 2938 - 1938
- 938

⑧ Avance de 100 en 100.

0175328 - 428 - 528 - 628 - 728 - 828 - 928 - 1028 - 1128 - 1228 - 1328 - 1428

⑨ Avance de 10 en 10.

01753323 - 3433 - 3443 - 3453 - 3463 - 3473 - 3483 - 3493 - 3503 - 3513 - 3523 - 3533 - 3543 - 3553 - 3563 - 3573 - 3583 - 3593 - 3603

⑩ Quel nombre se cache derrière cette écriture ?

22 D → 220

3 C 2 D 1 U → 321

4 M 4 D 1 U → 4041

$(3 \times 1000) + (2 \times 100) + (3 \times 10) + 8 \rightarrow$ 3238

1 U 2 C 3 M → 3201

100 + 3000 + 8 → 3108

12 C → 1200

22 U → 22

Le 14/05/09

nom
nom: le lolo

date: 14/05/09

numération

CE₂

B

1) Avance de 1 en 1.

281 - 3 282 - 3283 - 3284 - 3285 - 3286 -
 3287 - 3288 - 3289 - 3 290 - 3 291 - 3 292 - 3293 - 3294 -
 3 295 - 3 296 - 3297 - 3298 - 3299 - 3300 - 3301 - 3302 - 3303
 3304 - 3305 - 3306 - 3307 - 3308 - 3309 - 3 310

2) Reculé de 10 en 10.

366 - 4 356 - 4346 - 4336 - 4326 - 4316 - 4306 -
 4296 - 4 286 - 4276 - 4266 - 4256 - 4 256

3) Avance de 50 en 50.

1 350 - 1 400 - 1 450 - 1 500 - 1 550 - 1 600 - 1650 - 17 00
 1750 - 1800 - 1850 - 1900 - 1950 - 2000 - 2150 -

 _____ 2 100 - 2 150

4) Reculé de 1 000 en 1 000.

8 218 - 17 218 - 16 218 - 15 218 - 14 218 - 13 218
 12 218 - 11 218 - 10 218 - 9 218 - 8 218 - 7 218 - 218

5) Avance de 20 en 20.

6218 - 5 218 - 4 218 - 3 218 - 2218
 900 - 820 - 840 - 860 - 880 - 900 - 920 - 940 - 960 - 980 -
~~1000~~ - 1200 - 1000 - 1020 - 1040 - 1060 - 1080 -
 1100 - 1 120 - 1 140 - 1 160 - 1 180

 _____ - 1 200

6) Encadre le nombre donné avec le nombre juste avant et le nombre juste après.

827 - 828 - 829
299 - 300 - 301
 699 - 700 - 701

⇒

$$\underline{1299} - 1300 - \underline{1301}$$

$$\underline{5999} - 6000 - \underline{6001}$$

$$\underline{11998} - 11999 - \underline{12000}$$

$$\underline{19999} - 20000 - \underline{20001}$$

$$\underline{6000} - 6001 - \underline{6002}$$

⑦ Encadre le nombre donné avec la dizaine juste avant et la dizaine juste après.

$$3260 - 3268 - 3270$$

$$\underline{190} - 198 - \underline{200}$$

$$\underline{700} - 702 - \underline{710}$$

$$\underline{3220} - 3224 - \underline{3230}$$

$$\underline{6000} - 6002 - \underline{6010}$$

$$\underline{7290} - 7291 - \underline{7300}$$

$$\underline{6990} - 6998 - \underline{7000}$$

⑧ Retrouve les nombres suivants.

$$12 \text{ d} \rightarrow \underline{120}$$

$$3 \text{ c } 1 \text{ u } 2 \text{ d} \rightarrow \underline{321}$$

$$42 \text{ c} \rightarrow \underline{4200}$$

$$2 \text{ c } 1 \text{ m } 4 \text{ u} \rightarrow \underline{12042}$$

$$(2 \times 100) + (2 \times 10\,000) + (3 \times 100) + 2 \rightarrow \overset{20\,502}{\underline{2322}}$$

$$128 \text{ u} \rightarrow \underline{128}$$

$$900 + 20 + 20\,000 + 3\,000 + 8 \rightarrow \underline{23928}$$

Le 20/05/09

Arthur

20/05/09

TB

Numération

Encadre le nombre donné avec la dizaine
juste avant et la dizaine juste après.

$$1230 < 1238 < 1240$$

$$6000 < 6005 < 6010$$

$$9220 < 9224 < 9230$$

$$650 < 658 < 660$$

$$90 < 91 < 100$$

$$32410 < 32418 < 32420$$

$$8990 < 8996 < 9000$$

$$4070 < 4078 < 4080$$

Cahiers d'élèves de la classe de Sophie

Le 24/11/08

Activité 2 - Le nombre 1000

Recherche / Numération

Combien de points marqués avec ...

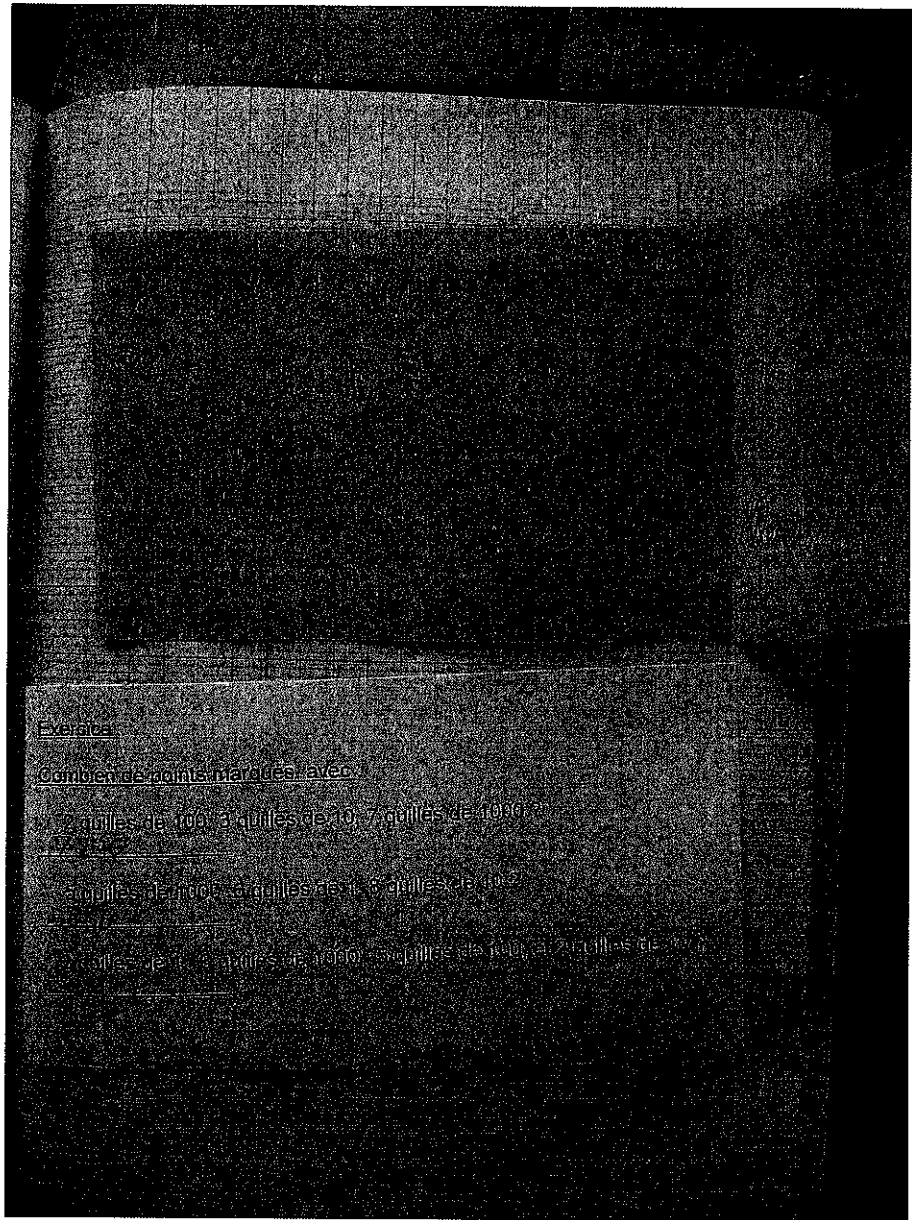
4 guilles de 1000 ?

1 guille de 1000, 3 guilles de 100, 2 guilles de 10 et 5 guilles de 1

2 guilles de 1000, 7 guilles de 100, 1 guille de 10 et 1 guille de 1

6 guilles de 1000, 2 guilles de 100, 1 guille de 10 et 1 guille de 1

3 guilles de 1000, 3 guilles de 100



Exercices

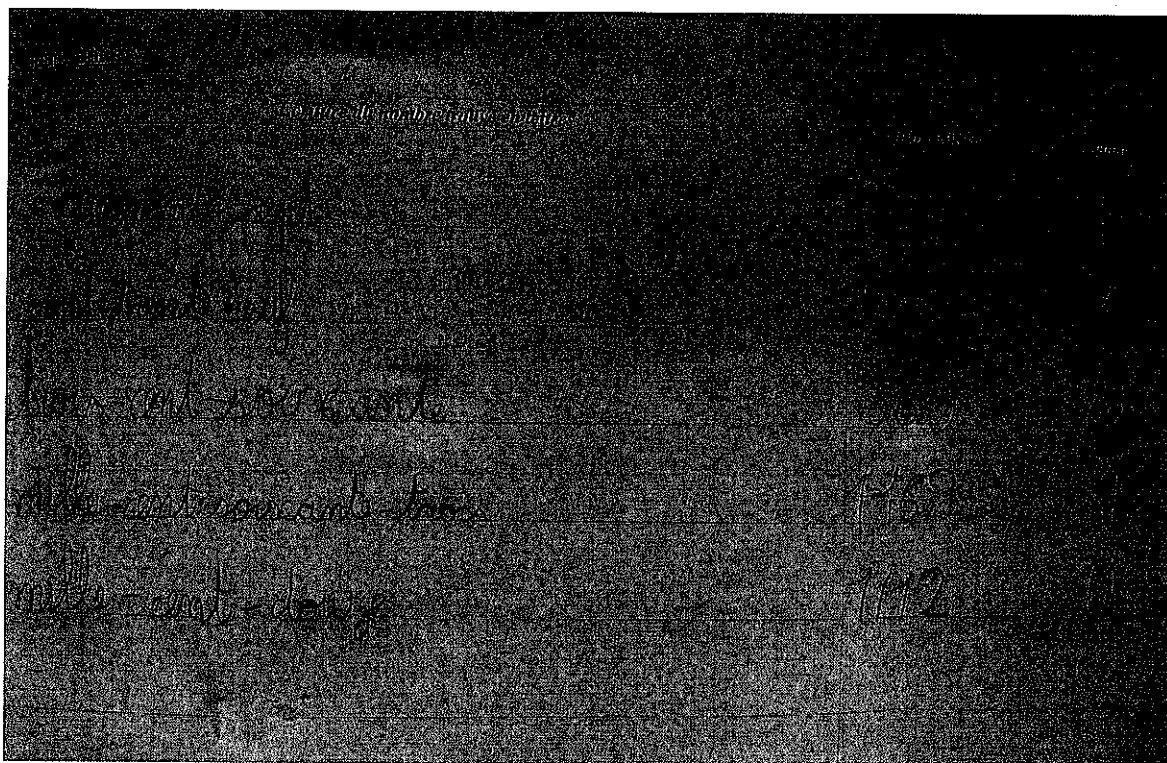
Combien de points marqués avec :

1. 20 quilles de 1000, 3 quilles de 10, 7 quilles de 1000

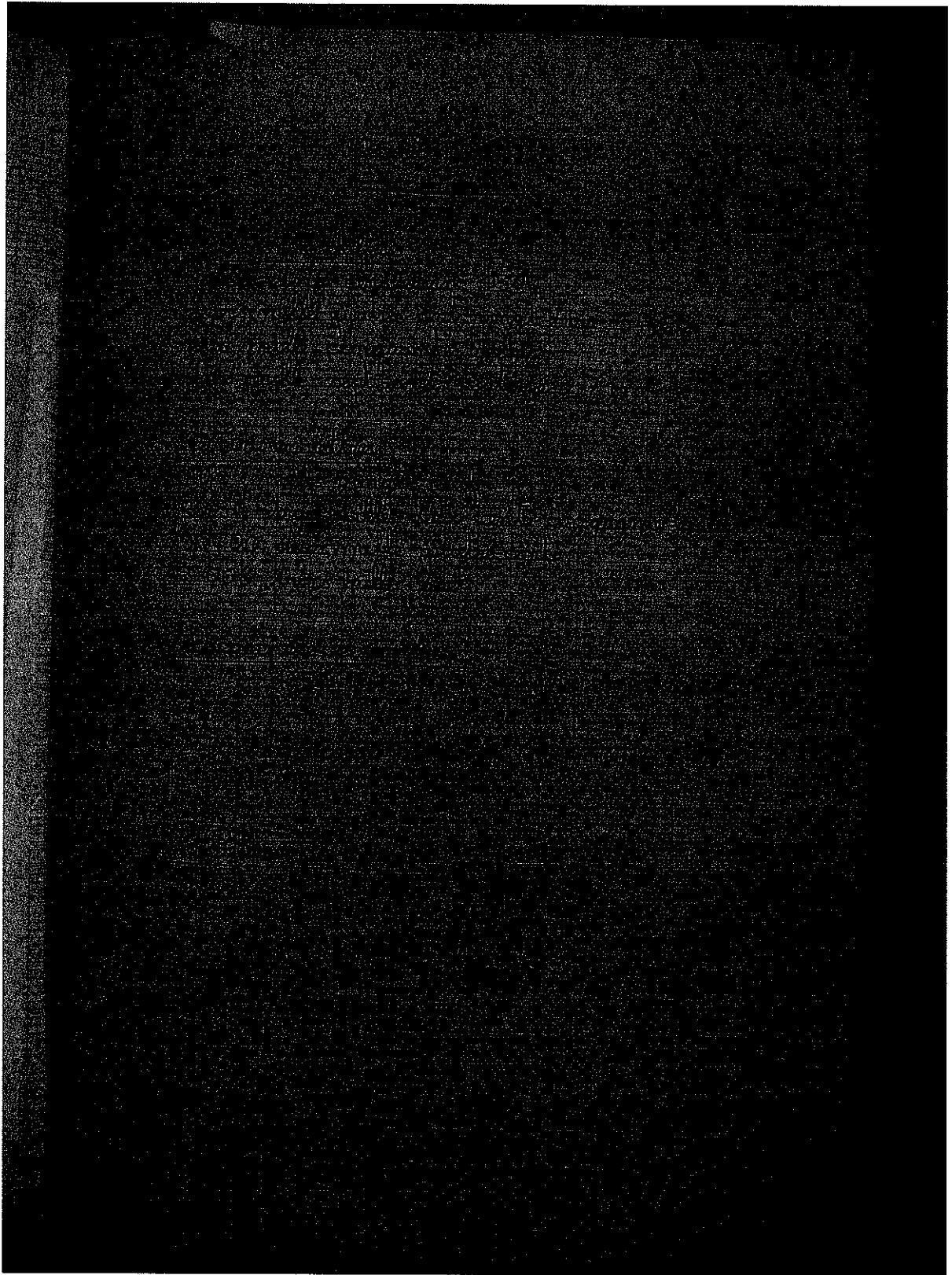
2. 10 quilles de 1000, 4 quilles de 10, 6 quilles de 1000

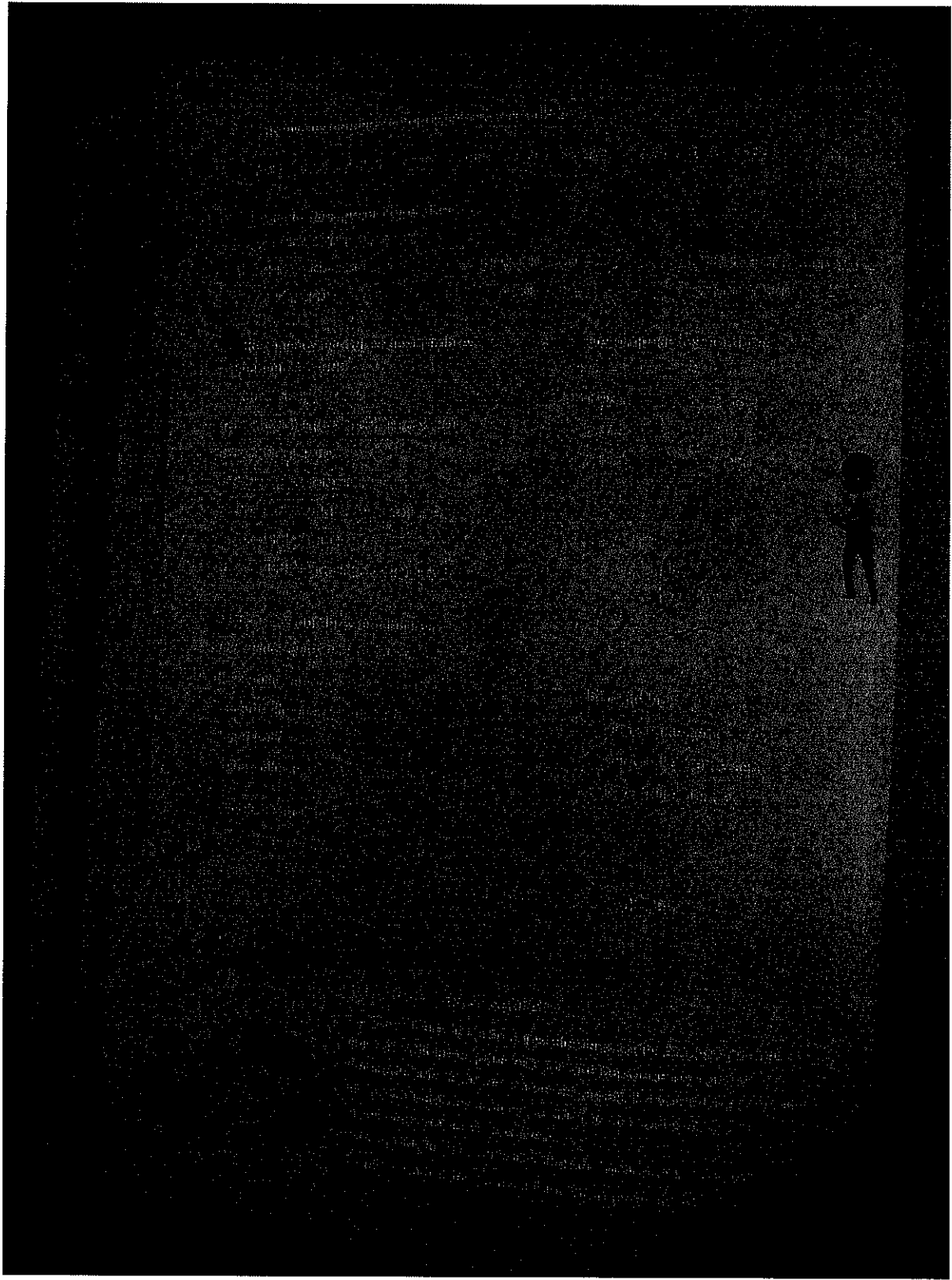
3. 10 quilles de 1000, 5 quilles de 10, 5 quilles de 1000

Le 28/11/08

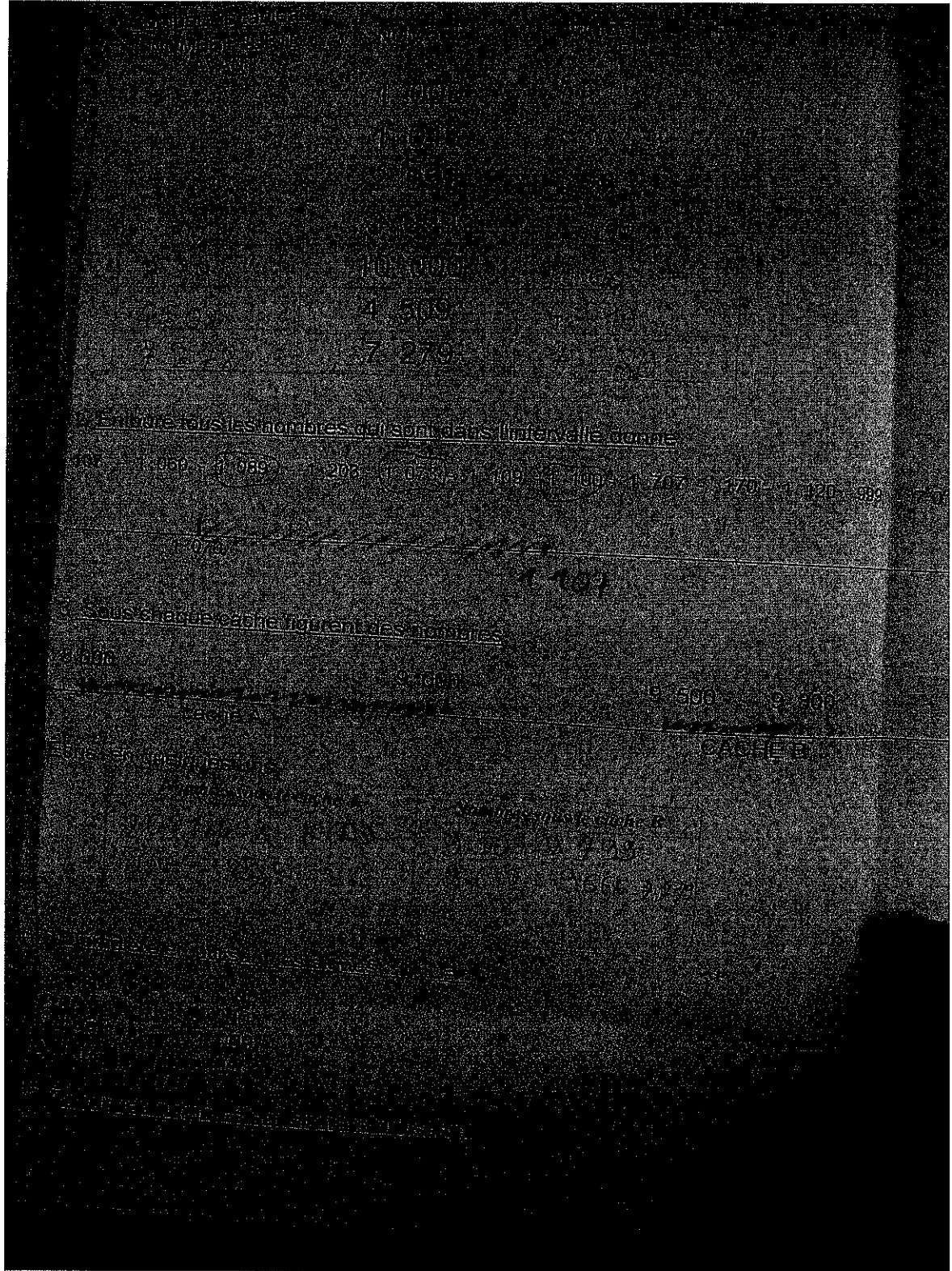


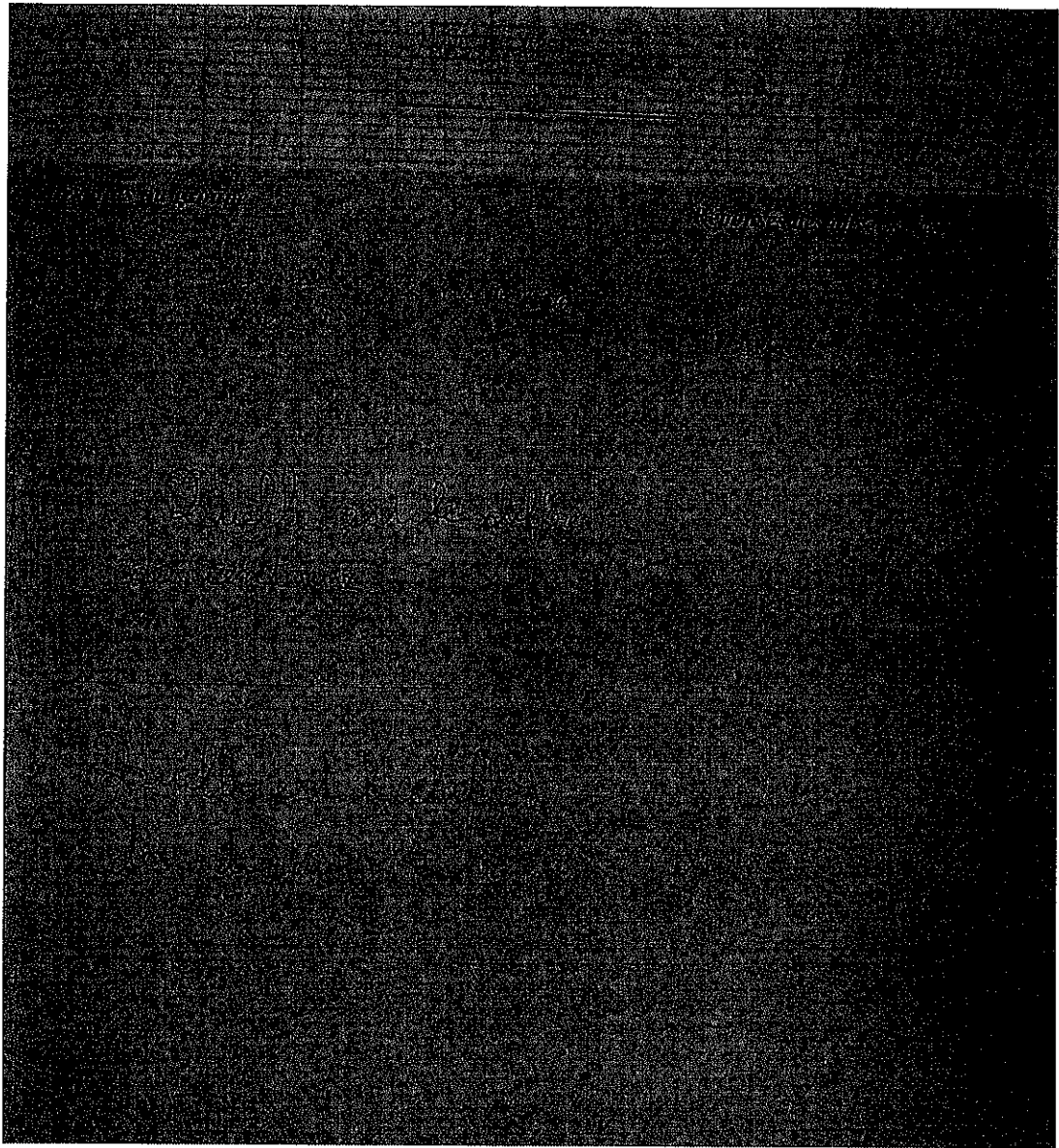
Le 01/12/08





Le 09/12/08





Evaluation (12/12/08)

Prénom : Geane

date : 12/12/08

EVALUATION MATHÉMATIQUES CE2 / période 2

connaissances : connaître et maîtriser les nombres jusqu'à 9 999.
Utiliser les signes < >

Capacités :
Savoir lire, écrire en chiffres et en lettres, et décomposer les nombres jusqu'à 9 999.
savoir situer des nombres les uns par rapport aux autres dans un intervalle donné.
savoir comparer et ranger des nombres.

Ecris le nombre correspondant aux écritures :

5 000 + 600 + 3 : 5 603 (2x1 000) + (5x 10) : 2 050
 (4 x 1 000) + 9 : 4 009 67c 8d 9u : 6 789
 9 m 8 d : ? 9 080 6 000 + 80 + 1 : 6 081 ?
 12 centaines, 3 milliers : 3 120 4 200 25 dizaines, 6 centaines, 4 milliers : 4 625 4 850

Trouve une autre écriture pour ces nombres et écris-les en lettres :

2 699 : 2 000 + 600 + 90 + 9 / Deux mille six cent quatre-vingt-dix-neuf
 5 009 : 5 000 + 9 / Cinq mille-neuf
 4 081 : 4 000 + 80 + 1 / quatre mille quatre-vingt-un
 2 375 : 2 000 + 300 + 70 + 5 / Deux mille trois cent soixante-quinze

Colorie de la même couleur les écritures d'un même nombre

(2x 1 000) + (3x100) + (5x10) + 8
 68 centaines et 4 dizaines
 5 000 + 600 + 80 + 1
 58 unités et 23 centaines
 2 000 + 300 + 50 + 8

(2x1 000) + (3x100) + (5x10) + 8
 (5x1 000) + (6x100) + (8x10) + 1
 5 milliers 6 dizaines
 (6x1 000) + (8x100) + (9x10) + 4
 6 centaines, 5 milliers, 81 unités

Utilise le signe qui convient < > = :

1 296 > 500 + 30 + 9
 8 457 < 8 741
 2 000 + 300 + 7 < (9x1 000) + (5x10)
 7 003 < 7 300
 9 017 > 9 000 + 10 + 7
 6 071 < 6 701

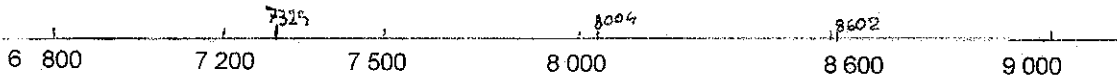
Range ces nombres dans l'ordre décroissant

659 - 7 002 - 4 799 - 358 - 1 101 - 2 399 - 4 789 - 1 001 - 2 390
4 789 > 7 002 > 4 799 > 2 399 > 2 390 > 1 101 > 1 001 > 659 > 358

Complète comme l'exemple:

2 800 < 2 885 < 2 900
7 000 < 7 324 < 8 000
3 000 < 3 952 < 4 000
4 000 < 4 571 < 5 000
8 000 < 8 002 < 8 001

Range ces nombres au bon endroit : 5 808 7 325 8 004 8 602 9 245



TITRE :

L'enseignement de la numération décimale de position au CE2 : étude des relations entre contraintes et libertés institutionnelles et pratiques des enseignants.

AUTEUR/S :

Tempier Frédérick

RESUME :

Ce travail de mémoire de Master porte sur l'enseignement de la numération décimale de position en 3^{ème} primaire (classe de CE2, élèves de 8-9ans) lors de l'introduction des nombres à quatre chiffres. Nous suivons deux enseignants en prenant en compte les contraintes et libertés institutionnelles qui pèsent sur leurs pratiques.

Nous étudions d'abord l'organisation mathématique à enseigner (à travers deux manuels couramment utilisés dans les classes, les instructions officielles et les évaluations nationales) pour déterminer ces contraintes et libertés. Afin d'avoir un point de vue épistémologique pour cette étude, nous construisons une organisation mathématique dite « de référence » en nous appuyant sur l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du 20^{ème} siècle (Chambris, 2008) et sur certains ouvrages plus anciens (18^{ème} et 19^{ème} siècle).

Nous mettons ainsi en évidence que l'institution actuelle privilégie un unique aspect de la numération (que nous appelons *aspect positionnel*) : le lien entre les unités de la numération et la position des chiffres dans l'écriture du nombre. Or il existe un autre aspect essentiel de la numération que nous appelons *aspect décimal* et qui recouvre les relations entre les unités de la numération : par exemple 1 millier c'est 1000 unités, mais c'est aussi 10 centaines ou 100 dizaines. Cet aspect reste implicite dans les recommandations des programmes et est peu pris en compte dans l'un des deux manuels étudiés. Il n'intervient pas dans les tâches proposées dans les évaluations nationales. Par contre le deuxième manuel traite de cet aspect là, ce qui nous montre qu'il existe des espaces de libertés possibles pour les enseignants.

Pour étudier l'influence des contraintes et libertés institutionnelles sur les pratiques, nous utilisons le modèle des différents niveaux de l'activité de l'enseignant développé par Margolinas (2002) et montrons que ces contraintes influent à la fois sur la préparation des séances (projet global) et sur les déroulements en classe. D'une part, notre analyse des projets globaux des deux enseignants montre que l'aspect décimal n'est pas considéré comme un savoir essentiel de la numération. Les entretiens réalisés confirment ce phénomène et la difficulté de ces enseignants à contrôler épistémologiquement leur projet.

D'autre part, notre analyse des déroulements en classe, en appui sur la théorie des situations didactiques, nous permet de montrer, pour un des deux enseignants, que même si la situation proposée met en jeu a priori l'aspect décimal de la numération, il ne le prend pas en compte car cela ne fait pas partie de son projet d'enseignement (ce qui, pour nous, est une conséquence des contraintes institutionnelles) ; il interprète alors les difficultés rencontrées par les élèves à l'intérieur de son projet, ce qui ne lui permet pas d'avoir une analyse mathématique adaptée. Dans les perspectives liées à ces constats, nous nous demandons comment il serait possible de faire évoluer les pratiques des enseignants vers une prise en compte des deux aspects de la numération.

MOTS CLES :

Numération décimale, aspect décimal, aspect positionnel, contraintes et libertés institutionnelles, transposition didactique, pratiques des enseignants, organisation mathématique, OM de référence, OM à enseigner, OM enseignée, manuels, analyse a priori, milieu, niveaux d'activité, didactique, ostensifs.