HAL open science

Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique.

Alain Kuzniak, Bernard Parzysz, Laurent Vivier

To cite this version:

Alain Kuzniak, Bernard Parzysz, Laurent Vivier. Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique.. IREM de Paris. IREM de Paris, 58, 2008, Cahier de DIDIREM, Christophe Hache, 2-86612-301-8. hal-02146689

HAL Id: hal-02146689

https://hal.science/hal-02146689v1

Submitted on 4 Jun 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

IREM PARIS 7

N° 58
septembre 2008

Ldar
Laboratoire de didactique André Revuz
Mathématiques • Physique • Chimie

Cahiers de didirem

Du monde réel au monde mathématique

Un parcours bibliographique et didactique

Coordonné par A. Kuzniak, B. Parsyzs et L. Vivier

Caroline Bulf, Christine Chambris, Jacques Colomb, Bernadette Denys, Catherine Houdement, Alain Kuzniak, Ana Mesquita, Cécile Ouvrier-Buffet, Bernard Parzysz, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, François Pluvinage, André Pressiat, Avenilde Romo-Vasquez, Laurent Vivier

ISSN : 2102-4871

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

Du monde réel au monde mathématique

Un parcours bibliographique et didactique

Coordonné par A. Kuzniak, B. Parzysz et L. Vivier

Caroline Bulf
Christine Chambris
Jacques Colomb
Bernadette Denys
Catherine Houdement
Alain Kuzniak
Ana Mesquita
Cécile Ouvrier-Buffet
Bernard Parzysz
Marie-Jeanne Perrin-Glorian
François Pluvinage
André Pressiat
Avenilde Romo-Vázquez
Laurent Vivier

INTRODUCTION GENERALE

1. La question de base

Au moment de la mise en place des mathématiques modernes, au début des années soixante-dix, une forte interrogation voire même une forte critique de cette conception des mathématiques enseignées a vu le jour chez certains mathématiciens. Une des plus célèbres invectives contre les mathématiques modernes fut celle de R. Thom (1970) dans un article qui a connu un large écho et qui s'intitulait « Les mathématiques modernes : une erreur éducative et philosophique ? » Dans cet article, Thom fustigeait l'approche structuraliste et décontextualisée des mathématiques en insistant sur l'importance de l'intuition :

> *C'est l'intuition qui est « l'ultima ratio » de notre confiance dans la réalité d'un théorème. Et suivant une étymologie maintenant oubliée, un théorème est avant tout l'objet d'une vision.*

Un courant philosophique, celui de l'empirisme, retrouve alors de la vigueur sous l'impulsion de Lakatos qui définit une approche quasi-empiriste dans son article « A renaissance of empirism » (1965). Lakatos oppose la vision qu'il qualifie d'« euclidienne » des mathématiques à celle qu'il propose. Dans le premier cas, c'est le système d'axiomes qui fonde la vérité à partir des connaissances qui découlent de manière déductive des axiomes. En revanche, les théories empiriques prennent naissance alors que leur sujet est encore indéterminé. Elles peuvent varier et leur but est de saisir les principes de base. Elles sont faillibles alors que les premières, par essence, ne l'étaient pas. Elles ne procèdent pas par descente de la vérité d'un ensemble de principes mais plutôt par une montée à partir de principes qui résistent à l'erreur et à l'expérience. Les bases des mathématiques sont quasi-empiriques et les résultats proviennent de l'observation ou de l'expérience.

Dans le même temps, la psychologie constructiviste connaît son apogée en posant en principe que le travail sur les représentations mentales internes est nécessaire pour construire la relation du sujet aux mathématiques. Cela va donner naissance dans le monde anglo-saxon à l'idée de paradoxe de l'apprentissage (*Learning Paradox*), idée exprimée de manière explicite par Cobb (1992) :

> *Comment alors, si les étudiants peuvent seulement donner du sens au monde grâce à leurs représentations internes, leur est-il possible de reconnaître des propriétés mathématiques qui sont en avance sur le développement de leurs propres représentations internes.*[1]

Une première réponse à cette question va être apportée par Freudenthal (1973) en 1973. Pour lui, les mathématiques sont une activité humaine qui consiste à résoudre et à chercher des problèmes à l'aide d'un processus de mathématisation. Dans l'enseignement, il s'agira alors de reproduire ce processus en l'appuyant sur le monde réel.

2. Articuler une certaine réalité et un monde extérieur avec les mathématiques

La vision quasi-empiriste des mathématiques se trouve pleinement prise en compte dans cette conception éducative qui met au premier plan la relation entre mathématiques et monde extérieur. Mais comment réaliser effectivement ce projet ? Un certain nombre de courants didactiques étrangers ont abordé le problème et l'un des buts de ce parcours bibliographique est de présenter les problématiques et les travaux des auteurs pour qui l'enseignement des mathématiques doit être fortement inscrit dans un contexte réel.

---

[1] *How then, if students can only make sense of their worlds in terms of their internal representation, is it possible for them to recognize mathematical relationships that are developmentally more advanced than their internal representations?* (Cobb et ali 1992 p.5)

Nous avons organisé ces différentes approches en **trois grands groupes** : l'approche des Domaines Didactiques d'Expérience (DDE) proposant un enseignement contextualisé des mathématiques, l'approche de la *Realistic Mathematics Education* (RME) développée par l'Ecole hollandaise et une troisième partie présentant des théories fondées sur l'*embodiment* ou l'apprentissage situé. Les niveaux d'homogénéité sont variés, car si les deux premiers sont des courants didactiques parfaitement identifiés et revendiqués par leurs auteurs, nous avons regroupé dans la troisième partie des auteurs qui n'appartiennent pas au même courant et qui ont parfois sur certains points des positions différentes, voire antagonistes.
Chaque partie est organisée selon le même schéma :

- un rappel des articles étudiés
- une introduction au thème de la partie
- les notions-clés de la partie qui sont expliquées dans le glossaire en fin de brochure
- les articles (entre 3 et 5 selon les parties) ; les premiers articles d'une partie sont en général des articles d'application, plus simple à lire, alors que les derniers sont plus théoriques.
- les références utiles pour chaque article de la section.

Les sections de lecture d'article débutent par une courte présentation, avec parfois un avertissement pour éviter toute ambiguïté, avant de commencer le compte rendu de l'article. Une section de discussion, où l'auteur qui a en charge la fiche donne son avis sur l'article en question, clôt la présentation.

2.1 Un enseignement contextualisé des mathématiques

Cette première partie, partie A, est consacrée à l'approche « italienne ». Elle rassemble les trois articles suivants dédiés aux Domaines Didactiques d'Expériences (DDE) :

1. Bartolini-Bussi, M. & Boero, P. (1998), Teaching and Learning Geometry in Contexts, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. ICMI study. Ed. Kluwer (Dordrecht, NL),* 52-62
2. Douek, N. (1999), Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 89-110.
3. Dapuento, C. & Parenti, L. (1999), Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 1-21.

Ces articles sont référencés respectivement A1, A2 et A3.

2.2 L'approche de la *Realistic Mathematics Education*

La deuxième partie, partie B, rassemble les cinq articles suivants du courant de la *Realistic Mathematics Education* (RME) :

1. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003), The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 9-35.
2. Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C. & Underwood, D. (2003), Didactising : continuing the work of Leen Streefland, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 101–126.
3. Linchevski, L. & Williams, J. (1999), Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 131-147.
4. Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999), Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 111-129.
5. Van Amerom, B. A. (2003), Focusing on informal strategies when linking Arithmetic to early Algebra, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 63-75.

Ces articles sont référencés respectivement B1, B2, B3, B4 et B5.

2.3 De l'apprentissage situé à l'*embodiment*

Contrairement aux deux autres parties, les quatre articles proposés ici ne sont pas affiliés à une même théorie, même si la référence aux travaux de Lave est très présente. Ils forment néanmoins une partie cohérente car les préoccupations des auteurs sont très proches : il s'agit d'expliquer l'apprentissage des mathématiques pour un individu, vu sous un angle biologique ou culturel selon les articles, plongé dans un monde. Ce terme de *monde* est, comme on le comprend à la lecture des articles, problématique : il peut s'agir du monde socio-culturel pour deux systèmes éducatifs différents, du monde du travail et des loisirs, du monde constitué des expériences biologiques ou des trois mondes de Tall. La liste n'est pas exhaustive, elle reprend les thèmes, dans l'ordre, des quatre articles suivants qui constituent la dernière partie :

1. Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. & Ursini, S. (1999) Mathematical modelling : the interaction of culture and practice, *Educational Studies in Mathematics* **39,** 167-183.
2. Wedege, T. (1999) To know or not to know-mathematics, that is a question of context, *Educational Studies in Mathematics* **39,** 205-227.
3. Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (2003) Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **39,** 9-35.
4. Tall, D. (2006), A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 195-215.

Ces articles sont référencés respectivement C1, C2, C3 et C4.

3. Annexes

On trouvera en Annexe 1 un texte écrit par François Pluvinage sur la notion de modèle, notamment pour éclairer les articles de la section B. L'Annexe 2 est un glossaire consacré aux « mots phares » utilisés dans les différentes sections. Il ne s'agit pas d'étudier complètement le mot retenu, mais plus simplement d'en définir l'utilisation particulière qu'en font les auteurs des articles et d'en proposer une traduction en français. Ce glossaire est organisé en référence aux trois parties de façon à permettre un retour facile aux résumés des articles. Les entrées principales sont les traductions en français des termes originaux. Ces derniers, en anglais, font l'objet d'une liste qui renvoie aux termes traduits. Les termes du glossaire sont indiqués dans la brochure par un astérisque *. Enfin l'Annexe 3 établit la liste de tous les articles étudiés.

Bibliographie de l'introduction générale

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992), A constructivist alternative to the representational view in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education* 23 (1), 2-33.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task,* Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Lakatos, I. (1965), A renaissance of empirism in the recent philosophy of mathematics in *Philosophical Papers Volume 2,* 1978, 24-41, Cambridge University Press.

Thom, R. (1970), Les mathématiques modernes : une erreur éducative et philosophique ? *L'âge de la science* 3, 225-256.

Caroline Bulf
Jacques Colomb
Bernard Parzysz

PARTIE A - Un enseignement contextualisé des mathématiques

Articles étudiés

1. Bartolini-Bussi, M. & Boero, P. (1998), Teaching and Learning Geometry in Contexts, *ICMI study Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century,* 52-62. Ed. Kluwer (Dordrecht, NL).
2. Douek, N. (1999) Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school, *Educational Studies in Mathematics* 39, 89-110.
3. Dapuento, C. & Parenti, L. (1999), Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge, *Educational Studies in Mathematics* 39, 1-21.

Introduction

Un certain nombre de recherches actuelles portent sur la conceptualisation en mathématiques et notamment sur l'articulation d'une certaine réalité* avec les mathématiques, articulation que l'on nommera aussi mathématisation horizontale*. Aussi, dans le but de décrire ce courant de recherche, nous avons procédé à la lecture de ces trois articles qui ont la particularité d'expliciter l'approche italienne concernant cette problématique de mathématisation horizontale, impulsée par Paolo Boero à l'Université de Gênes. Pour cela, il introduit alors la notion de *Domaine Didactique d'Expérience* (DDE*). En particulier, les auteurs présentés ici questionnent les potentialités de différents « contextes réels » pour faire émerger des concepts mathématiques. Les recherches menées au sein du cadre théorique développé par l'équipe de Boero ont leurs fondements théoriques chez Vygotski (rôle fondamental de la communication intersubjective, zone de développement proximal) et dans l'école française de didactique, notamment Douady (dialectique outil/objet), Vergnaud (champ conceptuel, théorème-en-acte) et Chevallard (transposition didactique).
L'un des principaux commentaires que l'on retrouve autour de ces trois articles concerne l'activité mathématique et la question naturelle qui vient est « à quel moment l'élève fait-il des mathématiques ? » Il apparaît que d'autres disciplines se retrouvent dans ces situations dites contextualisées et notamment la physique. De plus, la trop forte référence familière de certaines situations peut inhiber l'abstraction visée. L'on pourrait exiger une approche sémiotique plus fine pour repérer les différentes étapes de ce passage de la réalité vers les mathématiques.

L'article de Mariolina Bartolini-Bussi et Paolo Boero pointe la nécessité d'établir des liens entre l'école et la vie quotidienne en exploitant certains contextes réels dans le but d'apprendre la géométrie. Les auteurs décrivent alors les spécificités des méthodes de recherche du groupe génois, en présentant plusieurs recherches terminées et les questions qu'elles suscitent. Les auteurs précisent ainsi ce qui caractérise les « champs d'expérience » et l'intérêt de mener une recherche dans ce cadre. Apparaissent alors les principes de ce cadre théorique de recherche.

L'article de Nadia Douek se concentre sur la recherche menée sur les ombres du soleil à l'école élémentaire. L'intérêt de ce travail, qui s'inscrit directement dans le travail de thèse de l'auteur, porte alors sur la dialectique conceptualisation/argumentation dans le cadre d'un « *Domaine Didactique d'Expérience* » (DDE*). Le but de cette situation est de faire émerger du « concept

quotidien » d'inclinaison (des rayons du soleil) le concept mathématique d'angle, à travers l'activité d'argumentation.

L'article de Carlo Dapueto et Laura Parenti se distingue des deux précédents en étant plus théorique. En effet, il formalise les notions de « contexte* », « réalité* », « modèles* » ou « champ d'expériences » qui sont décrites de manière plus pragmatique dans les précédents articles.

Notions-clés

Argumentation ; Contexte* ; Domaine Didactique d'Expérience (DDE*) ; Expérience ; Modélisation*.

Bernard Parzysz
Lecture de l'article

A1 - Teaching and Learning Geometry in Contexts

Bartolini-Bussi, M. & Boero, P. (1998)
ICMI study *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century,* 52-62
Ed. Kluwer (Dordrecht, NL)

Introduction

Cet article est paru dans les actes de l'étude ICMI sur la géométrie qui s'est tenue à Catane (Sicile) en 1998, dont le but était de « *mettre en lumière les principales tendances pour améliorer l'apprentissage de la géométrie dans le futur, comme elles ressortent de la recherche internationale et de la pratique effective en classe* » (V. Villani, Introduction p. 5). Ses auteurs, Paolo Boero et Mariolina Bartolini-Bussi, sont des figures importantes de la didactique italienne qui ont beaucoup travaillé sur l'enseignement / apprentissage des mathématiques – et notamment de la géométrie – à partir de contextes « réels ».

Avertissement : Dans cet article, le mot « géométrie » désigne aussi bien le contenu géométrique ordinaire des manuels de tous niveaux (de l'enseignement obligatoire jusqu'à l'université) que le contenu géométrique d'activités non mathématiques, lié à la conceptualisation géométrique.

Résumé de l'article

1. Contextes réels et géométrie

Les auteurs commencent par pointer l'omniprésence de contextes "réels" dans l'enseignement de la géométrie, avec pour justifications la motivation des élèves, la nécessité d'établir des liens entre l'école et la vie quotidienne, la conceptualisation de la géométrie comme « langage pour décrire et interpréter la réalité ».
Mais, selon eux, les chercheurs ne se sont pas encore penchés sur les potentialités et limites de différents « contextes réels » pour l'enseignement de la géométrie, ni sur les relations entre l'activité géométrique de la classe et celle qui a lieu dans des « contextes réels ».
Le cadre théorique de référence est, d'une part celui de Vygotsky, d'autre part celui de l'école française de didactique (notamment la dialectique outil/objet et la transposition didactique). Boero a introduit la notion de Domaine Didactique d'Expérience (DDE), relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre le contexte personnel de l'élève, celui de l'enseignant et le contexte externe (c'est-à-dire les signes, objets, contraintes objectives d'un champ donné). Cette notion permet en principe de traiter tous les contextes de façon unitaire, qu'ils soient scolaires ou extra-scolaires, et même les contextes dans lesquels ils sont entrelacés (comme par ex. la cartographie).

La relation entre la géométrie et les DDE peut s'analyser de deux points de vue complémentaires :
- celui de l'évolution du contexte personnel de l'élève à travers l'activité mise en jeu dans un champ d'expérience, sous la guidance de l'enseignant ;
- celui de la qualité de l'activité géométrique au sein de différents DDE.

La culture quotidienne comprend des pratiques sociales ainsi que des outils qui sont riches de potentialités géométriques. Le professeur peut introduire des pratiques extra-scolaires par le biais d'outils et d'expressions langagières qui relient l'activité en classe aux expériences extra-scolaires des élèves. Les travaux des auteurs ont montré que ceci peut non seulement permettre aux élèves

d'élaborer des savoir-faire, mais aussi de faire émerger des théorèmes en acte et de favoriser des processus cognitifs (anticipation, raisonnement hypothétique, mise en œuvre d'hypothèses et de stratégies...). Mais si l'on veut que ces connaissances soient transférables à d'autres champs d'expérience, il est indispensable que le professeur guide le processus d'explicitation de la connaissance construite comme outil afin d'en faire un objet géométrique. Le problème fondamental est, selon les auteurs, celui de l'identification et du traitement adéquat des différences entre les connaissances géométriques scolaires et les connaissances géométriques liées aux pratiques sociales.

Les travaux de Boero mettent en évidence :

- l'importance des conceptions et des principes généraux élaborés par les élèves ;
- l'importance des systèmes de signes proposés par l'enseignant dans le but de permettre la transition vers une conception scientifique des phénomènes ;

Les problèmes de recherche concernent :

- la nature et l'origine des conceptions et des principes des élèves ;
- le rapport de l'enseignant avec ces conceptions et principes ;
- les situations et les moyens qu'il peut choisir.

Les résultats ont fait apparaître que :

- la référence explicite à des problèmes historiques favorise la prise de distance des élèves et la synthétisation de leurs résultats ;
- la comparaison des textes produits par les élèves avec des textes géométriques standard a tendance à les pousser à des reformulations ayant pour but de les rendre semblables (dans un sens ou dans l'autre).

Les problèmes de recherche qui se posent alors sont :

- Jusqu'où peut aller le professeur, et quand peut-il commencer à proposer des modèles culturels non familiers ?
- Quels sont les mécanismes cognitifs mis en jeu dans l'utilisation de sources historiques ?
- Quelles situations imaginer pour permettre aux obstacles épistémologiques d'apparaître ?

2. Exemples de DDE

Dans l'enseignement obligatoire, les différents types de relation possibles entre géométrie et culture peuvent être reliés, parfois au sein d'un même DDE*. Par exemple, dans le DDE de l'« ombre au soleil », les élèves peuvent dépasser leurs conceptions naïves pour parvenir à une schématisation géométrique, qui peut être utilisée pour appréhender des problèmes concrets du même champ d'expérience (par exemple, déterminer une hauteur inaccessible, cf. article A2 de N. Douek). Certains DDE offrent des ressources pour développer un « jeu d'hypothèses » initial qui permettra progressivement à l'élève de maîtriser le champ et de résoudre des problèmes plus complexes et plus difficiles, dans le même champ d'expérience ou dans d'autres.
L'histoire montre que le passage de la rationalisation d'une connaissance pratique à l'expérience géométrique requiert la production intermédiaire d'un réseau d'artefacts culturels, c'est-à-dire d'outils géométriques qui seront transformés en objets géométriques. Ceci peut être reproduit au sein d'une classe par le biais de la constitution de deux champs d'expérience :

- la représentation du monde visible au moyen du dessin en perspective ;
- les machines mathématiques [c'est-à-dire « *linkage* » (= transmission par tringlerie, du type pantographe ou inverseur) et géométrie dynamique].

2.1 Dessin en perspective

L'expérience d'enseignement s'est déroulée sur une période de 3 ans dans plusieurs classes à partir du CE2, et jusqu'en 5ème. Le DDE est caractérisé par la présence systématique de plusieurs modes d'action : dessin, discours (ou écriture), analyse d'images, lecture de documents historiques, utilisation de matériel mécanique ou optique (perspectographe et appareil photo), discussion. L'introduction systématique et explicite de la discussion a pour objet de créer une culture de construction sociale de la connaissance permettant l'appropriation active de la connaissance en jeu. Ce processus part de la rationalisation de la connaissance pratique (ombre), passe par la nécessité de produire une image « illusionniste » du monde visible et aboutit à l'élaboration d'outils géométriques.

2.2 Machines mathématiques

Cette expérience s'est déroulée de la 3ème à la terminale dans un lycée scientifique, et elle a aussi eu lieu en formation continue. Le DDE présente deux particularités :

- présence de documents historiques, destinés à être lus avec l'aide du professeur ;
- présence de machines mathématiques de grande dimension (statiques ou dynamiques).

Les élèves utilisent les machines disponibles au laboratoire de mathématiques jusqu'à l'énoncé de théorèmes et la mise en œuvre de démonstrations complexes en géométrie de l'espace. Les documents historiques se réfèrent à la naissance de l'approche projective au XVIIème siècle et le passage de l'étude des homologies aux « linkages » au XIXème siècle.
Concernant l'approche de la démonstration, les auteurs donnent deux exemples :

Premier exemple : découverte et justification d'une propriété de la représentation en perspective : l'image du centre d'une table rectangulaire se situe à l'intersection des diagonales de l'image de son dessus. Avec l'aide du professeur, les élèves passent de l'observation empirique de photos à la justification théorique de la propriété, en l'incluant dans un système théorique embryonnaire où « les droites sont représentées par des droites ».

Second exemple : à propos de l'ombre au soleil, on demande aux élèves d'énoncer (puis de prouver) une conjecture à propos du problème suivant : « Nous savons que deux piquets verticaux produisent des ombres parallèles. Que se passe-t-il pour deux piquets dont l'un est vertical et l'autre non ? Leurs ombres sont-elles parallèles ? Toujours ? Jamais ? Quand ? ». Du fait de leur étude précédente de l'ombre au soleil, les élèves réussissent à élaborer diverses stratégies, et le raisonnement correspondant les aide à construire une preuve au moyen d'un raisonnement général. Dans ce cas, les élèves reconstruisent le pas crucial de traiter une configuration générique au moyen d'une exploration dynamique du problème, qui permet de détecter le cas particulier du parallélisme [mais ils ne précisent pas ce qui bouge].

3. Conclusion

En conclusion, les auteurs proposent des réponses à deux questions :

- Quels contenus, méthodes, savoir-faire géométriques choisir ?
- Quel type de transposition didactique imaginer pour mettre en œuvre la connaissance géométrique en jeu ?

Pour la première question, les auteurs pensent que le choix du DDE est plutôt déterminé par des critères relatifs à son importance culturelle, intrinsèque et extrinsèque. Pour la seconde question, ils affirment que le recours aux DDE conduit à une recontextualisation des connaissances géométriques en un réseau d'outils qui est ensuite transformé en réseau d'objets, lequel pourra lui-même être réinvesti ailleurs. Les recherches menées montrent que conjecturer et prouver peuvent être considérés par les élèves, d'une part comme un moyen efficace de résolution de problèmes issus de la réalité*, et d'autre part comme une activité spécialisée du mathématicien.

Discussion

La notion de contexte*, qui intervient dans la définition du DDE, est considérée par les auteurs comme allant de soi ; le contexte peut être externe (lié aux connaissances en jeu et à la situation) ou interne (représentations internes de l'élève et du professeur), mais cette pluralité de sens possibles n'en fait-elle pas un mot passe-partout qu'il s'agirait de préciser ?
Il serait également intéressant de préciser les rapports du DDE avec des notions issues de la didactique française, comme celles de champ conceptuel, de milieu et de situation fondamentale.
La conception de la géométrie comme « langage pour décrire et interpréter la réalité » paraît quelque peu restrictive, car elle ne prend pas en compte son intérêt pour la résolution de problèmes spatiaux, la géométrie étant alors considérée comme une modélisation* de l'espace physique.
Une idée fondamentale pour les auteurs est qu'un choix judicieux du DDE est à même de favoriser le passage du domaine empirique à divers niveaux de formalisation allant jusqu'à la théorie, grâce en particulier à la dialectique outil/objet (le rôle des jeux de cadres semble lui aussi important).
Les exemples choisis (perspective à partir des ombres, machines mathématiques) se prêtent bien à cette démarche de modélisation à partir d'un « contexte réel », mais plusieurs questions se posent, et notamment :

- Quels sont les éléments cruciaux du DDE qui vont permettre à l'élève d'évoluer dans sa démarche de conceptualisation ? Comment les repérer ?
- Quelles sont les possibilités d'extension de la démarche ici décrite à d'autres domaines, notamment à l'algèbre et à l'analyse ?
- A quelles conditions les connaissances rencontrées pourront-elles être transférées (ce qui renvoie à la question de l'institutionnalisation) ?

Caroline Bulf
Lecture de l'article

A2 - Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school

Douek, N. (1999)
Educational Studies in Mathematics **39,** 89-110

Introduction

L'auteur, Nadia Douek est un chercheur français dont la thèse, intitulée *Les rapports entre l'argumentation et la conceptualisation dans les domaines d'expérience*, a été co-dirigée par Vergnaud et Boero. Le présent article a été publié dans ESM n°39 de 1999 dans le numéro spécial dirigé par Boero : *Teaching and learning mathematics in context.* Il s'inscrit directement dans le travail de thèse de l'auteur, et suit le courant des recherches actuelles sur argumentation/conceptualisation, un des axes de recherche du laboratoire de Gênes autour du travail de Boero et de son cadre du Domaine Didactique d'Expérience (DDE*). L'article se compose de cinq parties : une introduction où l'auteur nous présente sa question de recherche. Puis, elle explicite ce qu'elle entend derrière ses principaux mots-clés : argumentation, concept, contexte*, modélisation* et précise brièvement ses références théoriques. La 3ème partie, la plus longue concerne l'analyse de son corpus. Enfin, elle expose quelques résultats de ses analyses et conclut par une discussion.

Résumé de l'article

1. Objectifs

1.1 La situation initiale : les ombres au soleil

Nadia Douek s'intéresse à des élèves qui sont engagés dans un travail sur les ombres au soleil depuis plusieurs mois. Elle propose à des élèves de grade IV (CM1) de commenter l'erreur d'un de leurs camarades, Stefano, à propos des ombres au soleil :

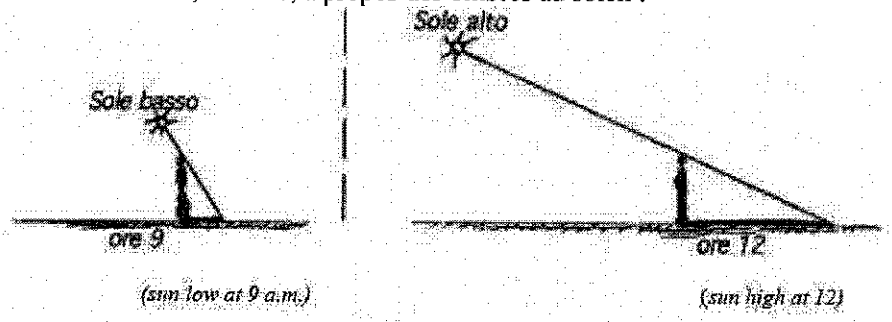


FIG.1

Il pense que « plus le soleil est haut et fort, plus l'ombre associée va être longue ». A travers cette tâche, elle espère observer l'argumentation des élèves et comment celle-ci va influencer et faire évoluer la signification de termes comme « haut », ainsi que le concept « d'inclinaison » d'une ligne droite par rapport à un plan jusqu'au modèle géométrique de l'angle.
Comment un tel contexte va-t-il nourrir l'argumentation de l'élève et supporter le processus de conceptualisation et de modélisation ? Elle fait notamment référence au travail de Vygotsky et au rôle de l'argumentation dans le développement des concepts scientifiques à partir des concepts quotidiens.

1.2 L'argumentation et le processus de modélisation

L'auteur entend par argumentation « *un discours cohérent à propos d'un sujet (arguments verbaux, données numériques, dessins) qui mettent en œuvre des raisonnements du type déductif, inductif, ou par analogie* ». Elle va s'inspirer de la notion de « corpus de référence » de Duval pour développer la notion de « connaissance de référence » : « *connaissance qui peut être utilisée sous différentes formes (graphique, verbale) et validée par la classe* ». Elle fait notamment l'hypothèse que l'argumentation est nourrie par l'**expérience** (ce qui va être notre «situation » ou « contexte* »), d'où le choix du cadre du DDE de Boero. Cette activité expérimentale entraîne donc un processus de **modélisation*** : « dialectique entre la situation observée et ses représentations à travers différentes étapes d'interprétations (schémas) ». En ce qui concerne le mot **concept,** Nadia Douek se réfère à la définition de Vergnaud : (S, I, s), avec S pour Situations de références, I pour Invariants opératoires qui sont justement effectifs dans un domaine d'expérience, et s pour Signifiant langagier.

Le but de cette étude est donc de détecter les liens entre l'argumentation liée à un tel contexte, et les processus de modélisation mathématique et de conceptualisation (le concept ici est l'inclinaison d'une droite par rapport à un plan) mis en jeu.

2. L'expérimentation

La situation des ombres est justement travaillée par les élèves depuis quelques mois afin de développer leurs capacités argumentatives et leurs conceptions géométriques (les éventails des ombres d'un clou à différentes heures et à différents moments de l'année). L'auteur a suivi pendant un mois les activités d'une classe de 18 élèves de grade IV (CM1) à ce propos. L'une des particularités didactiques de la classe est de ne pas s'engager dans une phase d'institutionnalisation finale. Le professeur guide les interactions et les synthèses orales ou écrites dans la classe sont plutôt de la forme « Maria dit que... ». Cela donne l'opportunité aux élèves d'interagir et à Nadia Douek d'observer les transformations des connaissances propres aux élèves sans énoncer des grandes et indiscutables vérités.

2.1 Le travail des élèves

Le travail avec les élèves s'effectue en quatre temps. Dans un premier temps, les élèves doivent produire un texte – nommé texte 1 – relatant leurs commentaires sur la réalisation de Stefano. Une première discussion suit – nommée discussion 1 – où le professeur confronte certains arguments relevés dans le texte 1. Il veut leur faire comprendre le rôle crucial de « l'inclinaison » des rayons du soleil et l'ambiguïté de la notion de « hauteur ».
Le troisième temps est un nouveau moment de production où les élèves doivent résumer ce qu'ils ont appris pendant la discussion. A partir de leurs nouvelles productions – le Texte 2 – suit une dernière étape de discussion – la discussion 2 – qui constitue une synthèse finale et où en particulier le professeur tente de les amener à la connexion entre « inclinaison » et « angle ».

Les élèves disposaient de 100 min pour le texte 1 et de 45 min pour le texte 2. Les discussions durent environ 75 min. Nadia Douek obtient ainsi son corpus et dispose alors des productions des textes 1 et 2, des vidéos des séances, et des notes prises durant les discussions.

2.2 Les résultats

Le texte 1 permet à l'auteur d'identifier certaines « connaissances de référence » : le soleil donne la direction de la droite « rayon solaire » et se situe à l'extrémité de cette droite. Cette droite est liée à la hauteur de l'objet, à la longueur de l'ombre et à l'angle du rayon solaire avec l'ombre horizontale. D'autres variables sont considérées comme la distance du soleil au sommet de l'objet considéré.

Certaines propositions semblent partagées par tous les élèves :
- Plus le soleil est haut, plus l'ombre est courte. (1)
- A midi, l'ombre est plus courte.

Quelques élèves présentent d'autres variantes :
- Plus le soleil est haut, plus les rayons sont inclinés
- Plus l'ombre est courte, plus les rayons sont inclinés.

Nadia Douek a ainsi distingué 4 types d'argumentaires :
- ceux qui exploitent le registre graphique de Stefano (cf. Figure 2, le cas de Steven pour la distinction hauteur/inclinaison) ;
- ceux qui se réfèrent aux expériences précédentes, notamment l'éventail des ombres ;
- ceux qui énoncent des propositions de références du type (1) dans un raisonnement connecté et logique ;
- ceux qui expriment une vision dynamique (cf. Figure 3, le cas de Lorena).

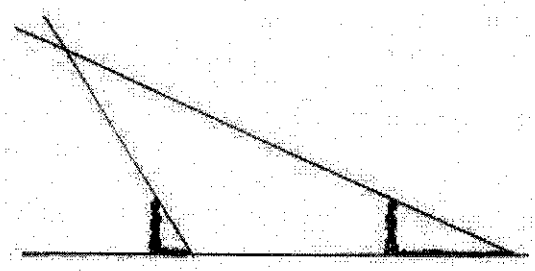


Figure 2. Steven

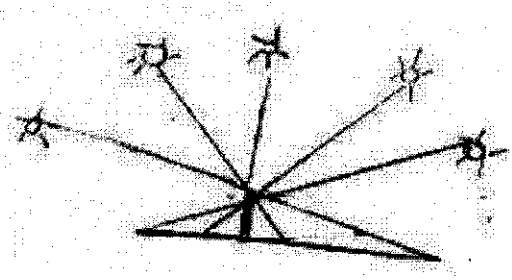


Figure 3. Lorena

Lors des discussions les conceptions des élèves vont évoluer. Ils questionnent certaines propositions de référence mentionnées au départ : « si je change la position du soleil, la longueur de l'ombre change aussi », ou « le bras est plus incliné quand il est haut ». Notamment le concept d'inclinaison évolue. On est parti de la direction du bras puis, au fur et à mesure de l'argumentation, ils ont été amenés à considérer les faits « nouveaux » suivants :
- la position du soleil sur le schéma le long du rayon solaire n'influencera pas la longueur de l'ombre représentée ;
- l'inclinaison des rayons du soleil ne dépend pas de la hauteur dans le schéma ;
- la distance du soleil à l'objet considéré est une fausse variable et la variable pertinente est l'inclinaison.

Apparaissent alors des connexions entre inclinaison et angle qui conduisent à distinguer ainsi l'inclinaison et la hauteur.

Discussion

Pourquoi est-il si difficile pour les élèves de faire la connexion entre inclinaison et angle ? Seulement un élève l'a fait. Dans l'histoire des mathématiques, Euclide fait référence au concept d'inclinaison par rapport à un plan horizontal pour décrire un angle. Ici, dans cette expérience, le concept d'inclinaison semble évoluer indépendamment du concept d'angle. Dans l'exploitation d'un corpus de référence, la question de la signification, de l'extension ou de la validité d'un proposition ou d'un outil se pose. Tester la production de Stefano révèle une recherche de rigueur notamment dans la recherche de contre-exemple, démarche importante en mathématique. Ce travail a notamment révélé des connexions entre l'aspect de l'activité argumentaire et l'aspect lié à l'activité mathématique bien que les activités considérées ne soient pas purement mathématiques.

Jacques Colomb
Lecture de l'article

A3 - Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge

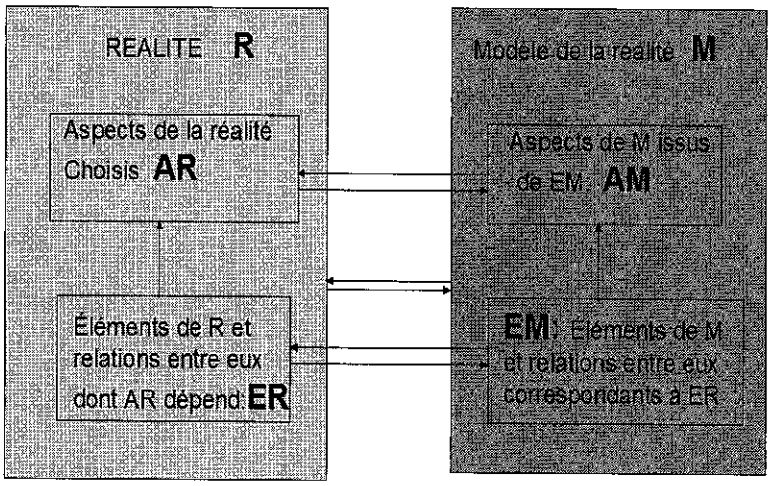
Dapueto, C. & Parenti, L. (1999)
Educational Studies in Mathematics 39, 1-21

Introduction

Au cours de ces vingt dernières années, à la suite des problèmes engendrés par les "mathématiques modernes" et à des facteurs liés au développement cognitif, se sont développés des travaux visant à articuler l'approche curriculaire des mathématiques avec l'étude de la formation des concepts. Le Groupe de Gènes dirigé et animé par Paolo Boero s'est attaché au travail sur la question de l'enseignement, avec et dans les contextes* considérés, comme un élément essentiel de la relation entre "mathématique" et "culture".
Dans ce texte, on s'intéresse aux connexions entre mathématiques et concepts, aux aspects normatifs et descriptifs de la mathématisation*, aux dangers de la prégnance du point de vue mathématique, aux processus de contrôle du sens et autres problèmes.

Résumé de l'article

Le schéma général présenté ci-après présente l'organisation épistémologique du concept de modèle* et celle didactique de champ d'expérience.



1. Enseignement en contexte : perspectives générales

1.1. Modèles

Le terme de modèle est utilisé usuellement pour caractériser une forme de métaphore c'est à dire un glissement entre deux espaces sémantiques non disjoints. Il est envisagé ici comme une représentation simplifiée d'une portion de la réalité* (intéressante pour un certain problème). Son utilisation permet, entre autres, une "visualisation" de quelques aspects de la réalité, une généralisation de propriétés (règles de grammaire) ainsi que des possibilités de comparaison. Par exemple, de ce point de vue, la théorie des groupes est un modèle pour la structure de tous les nombres.

Exemple :
R = champ rectangulaire, AR = étendue du champ, ER = dimensions des côtés du champ
ER : (a,b), (ER = éléments de R et relations entre eux)
AR : a.b, (AR = aspects de la réalité), c'est-à-dire AM (AM = aspects de M issus de ER)
M est le modèle de la multiplication (où S = a.b est une écriture formelle du modèle).

La phase préliminaire de la modélisation* est une focalisation sur les aspects essentiels du problème (délimitation de AR), ensuite intervient le choix de ER et finalement son association à EM. Ainsi le passage R → M est complet et le modèle M peut être utilisé, par exemple pour effectuer des calculs sur a.b.
La ré-interprétation M → R permet la définition de différents types de modélisation possibles de la réalité R et leur utilisation.
Le modèle "diagramme" du schéma précédent est lui-même un modèle. Il résume et illustre quelques aspects des relations entre les situations et leurs représentations.

1.2. Contextes

Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (objets, signes, etc., ordinateur, " ", histogramme, couleurs, ...) ou des artefacts formels (multiplication, fréquence, ...) qui sont eux-mêmes des modèles.
La réalité R n'est pas nécessairement un objet matériel ou un phénomène naturel ou social, elle peut se présenter comme une situation sous une forme modélisée (comme un graphique pour un certain phénomène) ou une réalité construite à partir d'un ensemble de modèles.
L'utilisation de modèles comme artefacts pour construire d'autres modèles, suivie de l'élaboration de modélisations des modèles (c'est-à-dire l'existence de méta-niveaux de représentation) caractérise des formes de raisonnements élaborés de hauts nivaux.

Les processus de modélisation à différents niveaux d'abstraction sont majoritairement organisés en disciplines. Les mathématiques sont une exception car elles ne sont pas caractérisées (sauf exceptions) par leur domaine d'application mais par le type d'artefacts qu'elles utilisent. Dans la modélisation mathématique (c'est à dire quand les artefacts sont des objets mathématiques, le processus ER → EM est appelé mathématisation.
Le processus de mathématisation ER → EM est très fortement dépendant des choix faits pour ER et EM liés à des suppositions, perceptions, intentions, intuitions, qui se situent dans une perspective interdisciplinaire.

Dans une action de modélisation, R est le contexte de AR, c'est à dire l'ensemble des conditions qui légitiment le choix des aspects de R. Le contexte de modélisation inclut les raisons du choix de AR et les artefacts disponibles pour construire M.

Il est intéressant de prendre en compte, dans les processus de mathématisation, les liens avec la résolution de problèmes (*problem solving*) et la théorie des champs conceptuels qui permettent le développement de perspectives particulièrement intéressantes.

1.3. Enseignement contextualisé

Parmi les arguments en faveur de l'utilisation de situations de la réalité et des activités de modélisation dans l'enseignement des mathématiques nous pouvons distinguer celles qui sont centrées sur :

- la formation critique, sociale et culturelle des élèves ;
- la construction de concepts mathématiques.

Dans l'enseignement contextualisé, l'enseignement est construit sur l'activité de modélisation dans laquelle le concept est introduit (comme modèle M ou comme artefact pour construire M) contrairement à l'enseignement traditionnel construit sur la présentation des concepts.
Le développement des capacités de gestion des interactions entre différents niveaux linguistiques et sémantiques dans lesquels les connaissances sont organisées et appliquées est à la base de ce type d'enseignement.
Les processus de transformation des problèmes en une situation d'un niveau de formalisation plus élevé constituent une étape essentielle dans cette perspective.
Le choix du contexte et de sa gestion didactique jouent un rôle central dans ce processus. De même, l'exploitation du potentiel de ressources cognitives en travaillant, pendant une longue période, dans une situation non pré-construite constitue un élément tout à fait central dans cette approche.

Les intérêts de cette approche sont multiples et permettent divers types d'échanges pendant l'apprentissage :

- la cohabitation, l'interaction et la contribution d'élèves ayant des styles d'exploration, de compréhension et d'usage de différents niveaux entraînent le développement de la gestion de l'hétérogénéité ;
- la mise en œuvre d'un meilleur équilibre entre l'apprentissage réflexif et l'apprentissage expérimental ;
- la focalisation sur le rôle et le processus de formalisation en minimisant la place des aspects *hard* (mécanisation, évaluation ...) au profit des aspects *soft* (créativité, esprit critique, ...) ;
- la facilitation de la construction et de la restructuration des schèmes qui organisent la connaissance.

1.4. Champs d'expérience

L'approche des théories de l'éducation du groupe de Gênes ne se situe pas dans une perspective rigide mais dans une perspective où ces théories sont considérées comme des modèles. Ils ont ainsi adopté quelques concepts de l'approche de l'école française de didactique des mathématiques, comme par exemple le "contrat didactique" et la "dialectique outil/objet", sans négliger la perspective constructiviste de Piaget.

Le modèle est construit sur le concept de « champ d'expérience » (Boero et al, 1995), conçu comme un domaine de la culture que l'enseignant et les élèves peuvent reconnaître comme suffisamment unitaire et homogène du point de vue de leurs schèmes de connaissances.

On peut identifier trois composantes principales d'un champ d'expérience dans des situations d'enseignement et d'apprentissage :

- une composante externe : portion de réalité objet de réflexion, discussion et analyse ;
- une composante interne à l'élève: ensemble de ses schèmes, représentations, émotions, attentes, etc.
- une composante interne à l'enseignant : ensemble de ses buts d'apprentissage, représentations, émotions, attentes, etc.

Les champs d'expérience peuvent être reliés à différents contextes ou ils peuvent être seulement évoqués. Un champ d'expérience peut être construit graduellement en utilisant différents contextes.

1.5. Exemples d'utilisation de champs d'expérience

A l'école, la monnaie et le calendrier constituent des champs d'expérience pour les nombres. Les ombres constituent à l'école et au début du collège un champ d'expérience pour la géométrie ou l'astronomie.
Le développement corporel constitue un problème très signifiant pour des adolescents et un champ d'expérience pour une modélisation qui permet, au niveau collège/lycée, de rationaliser, dépersonnaliser et socialiser cette question et contribuer à la construction des statistiques et probabilités.

Remarques :

- Le choix de contextes très ouverts (scolaires ou non-scolaires) est justifié par des raisons cognitives mais aussi pour l'aide au développement de l'idée de mathématisation de phénomènes liés aux activités de résolution de problèmes.
- Les composantes externes sont reliées aux composantes internes ce qui met en interaction les connaissances des élèves (problèmes d'adolescence,...) et les buts d'apprentissage choisis par les enseignants (statistiques, ...).
- Du primaire au secondaire on passe d'une approche interdisciplinaire contextualisée à une approche curriculaire mathématique intégrée.
- Les champs d'expérience dans les mathématiques ainsi construits sont graduellement utilisés comme contextes. Par exemple, la construction de la modélisation "monnaie → nombres" sert pour la construction de l'arithmétique.

2. Quelques aspects de l'enseignement incorporé

2.1. Mathématiques incorporée dans des contextes

En choisissant un concept non-mathématique dans lequel un concept mathématique doit être introduit, quels aspects du concept mathématique sont incorporés dans le contexte de réalité et/ou ont un rôle significatif dans sa compréhension ? Ceci est valable pour les contextes mathématiques *mutatis mutandis*.
Les mathématiques sont incorporées dans des objets quotidiens (monnaies, calendriers, diagrammes,...) mais aussi dans les relations sociales inhérentes à ces objets. La gestion de leur interaction constitue un point de passage très important et délicat à gérer par l'enseignant.
Les élèves explicitent et comparent leurs stratégies pour leur permettre de construire des prototypes qui leur serviront de support à un raisonnement mathématique abstrait. La transition du contexte à l'abstraction passe par la capacité des élèves à rendre leurs idées explicites et compréhensibles.
Les connexions entre les composantes (externe et interne) changent suivant la nature du champ d'expérience concerné.

2.2. Aspects normatifs et descriptifs

Dans les situations où les mathématiques sont incorporées il y a intersection entre aspects normatifs (mathématiques utilisées pour construire l'objet) et aspects descriptifs (mathématiques utilisées pour décrire l'objet). Cette intersection est (plus ou moins) présente dans tous les champs d'expérience.
Ainsi dans le projet *automation* (de machines programmées à machines programmables) l'interaction avec le champ mathématique d'expérience est particulière et présente de multiples facettes. Ici, la relation entre les deux aspects crée un contexte d'apprentissage mobilisable à des niveaux très différents (dessin, logique, langage,...).

2.3. Quelques difficultés de l'enseignement contextualisé

Deux objections les plus communément rencontrées :

- la référence à des contextes réels nécessite l'usage d'autres disciplines d'où des interférences dans les buts, les conceptions, le langage, etc. qui sont difficiles à gérer ;
- la référence à des situations particulières inhibe le passage à l'abstraction, le détourne ou empêche le transfert du raisonnement abstrait à d'autres contextes.

La démarcation entre travail mathématique et non-mathématique est difficile pour les élèves et les enseignants.
Le choix de ER et l'association ER→ EM constituent des points délicats à gérer. Le processus de mathématisation est souvent "trivialisé" par les enseignants dans un excès de formalisme.
L'interaction et la confusion avec la physique est inévitable dans de nombreux contextes tant pour l'usage que pour l'introduction.
Le problème du transfert se pose dans l'enseignement contextualisé comme dans tout type d'enseignement non nécessairement expérimental. Il nécessite la prise en compte des relations entre mathématiques et situations d'usage et le contrôle des interférences entre les registres linguistiques, comme par exemple avec les registres mathématique et naturel qui peut mener de « $2x = 0$ » à « $x = -2$ ».

La relation mathématiques/réalité est souvent médiatisée par d'autres disciplines.

3. Conclusion : quelles perspectives de développements ?

La recherche curriculaire basée sur les contextes a un rôle vital car elle permet un débat sur les objectifs des mathématiques et leurs évolutions.

La prise en compte de la formation historique des concepts comme source, et limitation, de contextes a une forte potentialité pour une modification des rôles respectifs des élèves et de l'enseignant par rapport à l'enseignement traditionnel (Blum, Boero, Sierpinska) :

- élèves et enseignant doivent abandonner leurs références familières pour de nouveaux objectifs ;
- les enseignants doivent assumer une responsabilité éducationnelle beaucoup plus importante, en conflit avec la vision conventionnelle de l'éducation scolaire.

Discussion

L'article a pour objectif principal la présentation d'une synthèse de travaux sur la contribution à l'introduction et à l'utilisation de contextes dans l'enseignement des mathématiques ainsi que des obstacles rencontrés lors de cette utilisation.
Les différents passages entre réalité* et modèles* très clairement résumée permet une très intéressante analyse de la notion de contexte*, d'enseignement contextualisé ainsi que de champ d'expériences. Ces différentes notions sont soigneusement présentées et "mises en scène" dans différents exemples.
Enfin, dans une dernière partie, est introduite la conception de l'enseignement incorporé avec ses différents aspects normatifs et déclaratifs illustrés par quelques résumés de quelques difficultés auxquelles sont confrontés les élèves dans la mise en oeuvre de cette approche dont l'intérêt nous apparaît incontestable.

Références de la partie A

Références pour l'article A1

Bartolini-Bussi, M. & Pergola, M. (1996), 'History in the Mathematics Classroom: Linkages and Kinematic Geometry', in Jahnke H.N., Knoche, N. & Otte, M. (eds), *Geschichte der Mathematik in der Lehre*, Vandenhoeck & Ruprecht, 39-67.

Bartolini-Bussi, M. (1996), 'Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School', *Educational Studies in Mathematics* 31, 11-41.

Boero, P. (1989), 'Semantic Fields suggested by History: Their Function in the Acquisition of Mathematical Concepts', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 20*, 128-133.

Boero, P. (1992), 'The crucial Role of semantic Fields in the Development of Problem Solving Skills', in Ponte, J.P. et al. (eds), *Mathematical problem solving and new information technologies*, Springer, 77-91.

Boero, P. (1993), 'Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergences et divergences dans les perspectives de recherche, in Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., Tavignot, P. (éds), *Actes du colloque international « Vingt ans de didactique des mathématiques en France »*, La Pensée Sauvage, 17-50.

Boero, P. & Garuti, R. (1994), 'Approaching Rational Geometry : from physical Relationship to conditional Statements', *Proceedings of XVIII PME Conference (Lisboa)*, vol. 2, 96-103.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. & Mariotti, M.A. (1996), 'Challenging the traditional School Approach to Theorems: a Hypothesis about the cognitive Unity of Theorems', *Proceedings of XX PME Conference (Valencia)*, vol. 2, 121-128.

Mariotti, M.A., Bartolini-Bussi, M. Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997), 'Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition', *Proceedings of XXI PME Conference (Lähti)*, 180-195.

Scali, E. (1996), 'Le rôle du dessin dans la modélisation géométrique élémentaire des phénomènes astronomiques', *Proceedings of the 46th CIEAEM Conference*, IREM de Toulouse, 168-176.

Références pour l'article A2

Boero, P. (1994), 'Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11', in Bazzini, L. & Steiner, H.G. (eds.), *Proceedings of the second Italian German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics,* 45-62, IDM Bielefeld.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. & Scali, E. (1995), 'Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school', *Proceedings of PME-XIX,* vol. 1, Recife, pp.151-156.

Duval, R. (1991), 'Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration', *Educational Studies in Mathematics* 22, 223-261.

Vergnaud, G. (1990), 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10, 133-170.

Vygotsky, L.S. (1985), *Pensée et langage,* Editions Sociales, Paris.

Vygotsky, L.S. (1978), *Mind in Society,* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Références pour l'article A3

Boero, P., et al., (1995), "Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school", Proceedings of PME-XIX, Recife, Vol. 1, pp. 151-166.

Boero, P., Dapueto, C., Parenti, L., (1996), "Research in mathematics education and teacher training" , in Bishop et al. (1996), pp. 1097-1121.

Norman, D.A., (1993), Things that Mahe us Smart, Welsey Publishing Company, Addison.

Gruppo Didacttico MaCoSa, (1997), Matematica per Conoscere per Sapere, Editrice Maggi, Ceranesi.

Sierpinska, A., (1997), "Whither mathematics education ?", Proceedings of ICME 8, Seville.

Christine Chambris
Alain Kuzniak
Ana Mesquita
François Pluvinage
André Pressiat

PARTIE B - L'approche de la *Realistic Mathematics Education* (RME)

Articles étudiés

1. Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003), The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage, *Educational Studies in Mathematics* 54, 9-35.
2. Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C. Underwood, D. (2003), Didactising: continuing the work of Leen Streefland, *Educational Studies in Mathematics* 54, 101–126.
3. Linchevski, L. & Williams, J. (1999), Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, *Educational Studies in Mathematics* 39, 131-147.
4. Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999), Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example, *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129.
5. Van Amerom, B. A. (2003), Focusing on informal strategies when linking Arithmetic to early Algebra, *Educational Studies in Mathematics* 54, 63 – 75.

Introduction

Les articles présentés dans cette partie s'inscrivent tous, avec plus ou moins de conviction, dans l'approche de la *Realistic Mathematics Education* (RME*). Ce courant aujourd'hui très influent s'est constitué en Hollande à la fin des années 70 autour de la forte personnalité de Hans Freudenthal. RME est présentée par ces concepteurs comme une théorie spécifique à l'enseignement et destinée plus particulièrement à celui des mathématiques (*a domain-specific instruction theory for mathematics education,* Van den Heuvel-Panhuizen (2003) p. 9).
Elle a été construite en réaction aux mathématiques modernes en privilégiant une approche dite *bottom up* par opposition à l'approche *top down* traditionnelle dans l'enseignement des mathématiques.
Une ambiguïté inhérente à la désignation de ce groupe porte sur le sens du terme *Realistic* qui évoque le monde réel* auquel se réfèrent un grand nombre des situations proposées par les membres de l'équipe, notamment dans le cadre des « *mathematics in context* ». En fait, *realistic* est une traduction du verbe néerlandais « *zich realiseren* » qui semble plus proche de des verbes français « se représenter » ou « s'imaginer ».
Une autre particularité de l'approche RME est son emploi étendu du mot « modèle »* et de l'utilisation de cette forme étendue comme point d'appui pour progresser dans l'appropriation des concepts mathématiques. De fait, le terme de « modèle » semble référer à une grande variété de signifiants susceptibles de construire un signifié en phase avec la notion mathématique visée. Ceci apparaît notamment dans la dynamique enclenchée par Streefland avec la notion de *model of** et de *model for** (voir les résumés d'articles et aussi le glossaire au mot modèle). Plus récemment encore, Gravemeijer, un autre membre du groupe, a inscrit cette dynamique dans la construction

du sens sur des chaînes de significations (Yackel). Ce modèle n'est pas sans rappeler l'approche de Peirce utilisée en didactique par Presmeg.
Enfin, il faut noter que la méthode de conception des situations d'apprentissage s'appuie sur l'approche phénoménologique de Freudenthal. Il s'agit de concevoir un enseignement des notions permettant un passage graduel des connaissances naturelles des élèves à des connaissances élaborées en s'appuyant sur une analyse de la création des objets mathématiques qui peut utiliser l'histoire ou la réflexion sur la genèse des objets.

L'article de Marja Van den Heuvel-Panhuizen constitue une très bonne introduction au cadre général illustré par un exemple d'enseignement de la notion de pourcentage au début du collège qui montre bien le principe de la mathématisation horizontale* appuyée sur un modèle (le *bar-model*) conçu et introduit par les enseignants.

L'article de Erna Yackel, Michelle Stephan, Chris Rasmussen et Diana Underwood poursuit la présentation du cadre théorique de RME en précisant la notion de chaîne de significations appuyée sur la dynamique des *models of* et *models for* en relation avec la notion de *pre-image* et d'*after-image*. L'article est illustré par trois exemples d'enseignement universitaire autour de l'algèbre et des équations différentielles. L'article vise aussi à montrer comment s'élabore le cadre théorique de la RME.

L'article de Liora Linchevski et Julian Williams illustre la notion de modèle pour introduire la notion de nombres relatifs en sixième année de l'enseignement. Un double abaque sert de modèle de l'emploi des nombres dans la vie quotidienne (*model of*) et elle sert de préparation aux nombres relatifs (*model for*).

Co-écrit par un des théoriciens actuels les plus actifs du groupe (Gravemeijer), l'article de Koeno Gravemeijer et Michiel Doorman donne un exemple de la méthode suivie dans le cadre de l'enseignement de l'analyse. Il permet notamment de mieux comprendre comment sont élaborées et choisies les situations de problème en situation* (*context problem**). Dans ce cas, il s'agit d'une référence à l'histoire des mathématiques.

Dans l'article de Barbara A .Van Amerom, la référence à RME est moins visible et dépend plus de l'appartenance de l'auteur à ce groupe dans lequel elle a fait sa thèse sur l'algèbre. Mais là encore, il s'agit d'articuler le passage à une forme plus élaborée de savoir en s'appuyant sur des situations imaginables par les élèves et issues de l'arithmétique.

Le lecteur intéressé par cette approche pourra se rendre sur le site de l'institut Freudenthal (http://www.fi.uu.nl/fisme/en/) où sont disponibles gratuitement un certain nombre d'applications qui y ont été développées ; le site est en anglais.

Notions-clés

Chaînes de signification* ; Enseignement Réaliste des Mathématiques (RME*) ; Mathématisation* ; Mathématisation verticale* et horizontale* ; Modèle* ; Modélisation* ; Monde reel* ; Problème en situation* (*Context Problem**).

Alain Kuzniak
Lecture de l'article

B1 - The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003)
Educational Studies in Mathematics **54,** 9-35

Introduction

L'auteur, membre de l'Institut Freudenthal à Utrecht, expose le modèle* RME* (*Realistic Mathematics Education*) en donnant d'abord le cadre théorique général de ce mouvement puis en présentant un exemple de la méthode suivie.

Résumé de l'article

1. Le cadre théorique

Après avoir mis en garde sur les interprétations trompeuses du mot *realistic* qui ne se résume pas aux seules situations réalistes mais à toutes celles qu'on peut imaginer, l'auteur se propose de dégager le sens et l'emploi particulier des modèles dans l'approche RME : il s'agit de préciser l'usage didactique des modèles.

La présentation du cadre théorique se fait en cinq points qui épousent le développement historique du courant.

1.1 Les mathématiques en tant que mathématisation

Ce concept de base a été introduit dès 1971 par Freudenthal pour qui les mathématiques ne sont pas un corps de connaissances mais une activité humaine qui consiste à résoudre et chercher des problèmes et plus généralement à organiser un domaine issu de la réalité* ou le domaine mathématique, ce processus est désigné sous le nom de mathématisation*.
Freudenthal affirme en 1973 qu'« il n'y a pas de mathématiques sans mathématisation. » ([Freudenthal, 1973, p. 134). Cette conception a des répercussions dans l'enseignement, qui doit prendre en compte ce processus et aussi ne pas l'envisager simplement en partant des mathématiques vers le réel (*top down**) mais aussi et surtout en partant du monde réel* (*bottom up**). Il y a une opposition farouche à la mise en place de curricula de type mathématiques modernes.

1.2 Mathématisations horizontale et verticale

A partir de 1978, Treffers insiste sur les deux façons de mathématiser en distinguant mathématisation « horizontale »* qui part du monde de la vie pour arriver au monde des symboles et mathématisation « verticale »* qui se déplace à l'intérieur de ce monde des symboles. L'approche empiriste se polarise uniquement sur la dimension horizontale alors que l'approche structuraliste ne se préoccupe que de la dimension verticale.

1.3 Les niveaux de compréhension

Dans la conception didactique de la mathématisation est introduit le principe des niveaux de compréhension issus des travaux de Van Hiele (1986) qui décrit différents niveaux allant de la simple représentation à une vision abstraite. Cette mise en place progressive de la mathématisation va aboutir à l'emploi de modèles supports dans un sens très large.

1.4 Notion de modèle « étendu »

Les modèles* sont vus comme des représentations de situations problèmes qui reflètent certains aspects essentiels du problème mais qui peuvent revêtir plusieurs formes. Des supports très variés peuvent servir de modèle dans cette conception axée sur l'apprentissage : Matériel, dessins, situations exemplaires, schémas, diagrammes et même symboles. Pour être adaptés à des situations d'apprentissage, les modèles doivent remplir deux conditions : ils doivent prendre naissance dans des contextes* réalistes ou imaginables et ils doivent aussi être suffisamment flexibles pour être adaptés à une progression vers un niveau plus abstrait. Ils doivent donc permettre la mise en place d'une mathématisation verticale. Ces modèles doivent aussi être susceptibles d'être réinventés par les élèves.

1.5 Les « modèle de » et « modèle pour »

A partir des années 1985, Streefland a théorisé le passage de ces niveaux informels à des niveaux formels en introduisant les notions de modèle de* (*model of**) et de modèle pour* (*model for**). Au départ d'un processus d'apprentissage d'une notion, le modèle se constitue en étroite liaison avec une situation donnée et ensuite dans un second temps, il se généralise dans un ensemble de situations et il peut alors devenir utile comme modèle pour résoudre d'autres problèmes et raisonner mathématiquement. Dans cette deuxième phase, les stratégies utilisées ne se réfèrent plus à une situation mais adoptent un point de vue plus général. De post-image (*after-image*), le modèle peut devenir une pré-image (*pre-image*)[2]. Le but du didacticien est alors de trouver ce type de modèle et le type de situations qui va avec, ils doivent permettre ce travail de glissement (*shifting*).
Cette relation entre ces différentes notions avait été anticipée par Freudenthal en 1975 :

> *Les modèles de quelque chose sont les post-images d'une partie de la réalité, les modèles pour quelque chose sont les pré-images pour une partie de la réalité en création.*

Gravemeijer a développé cette idée dans une perspective didactique en introduisant un niveau intermédiaire entre le niveau de la situation et le niveau formel dans la résolution d'un problème, décomposé en niveau référentiel et niveau général. L'idée est ici de parvenir à un niveau abstrait de mathématique sans être obligé d'utiliser la démarche descendante* (*top-down**) mais plutôt une démarche ascendante* (*bottom-up**).

Pour découvrir des bons modèles avec leurs activités associées, les chercheurs hollandais privilégient des analyses didactiques de type phénoménologique. Le but est de trouver comment les connaissances et les concepts mathématiques peuvent apparaître aux élèves. Pour cela, il est possible de constituer une première image de la situation en discutant entre collègues ou en imaginant des expériences de pensée mais la part la plus importante de l'analyse s'appuie sur le travail avec les élèves.

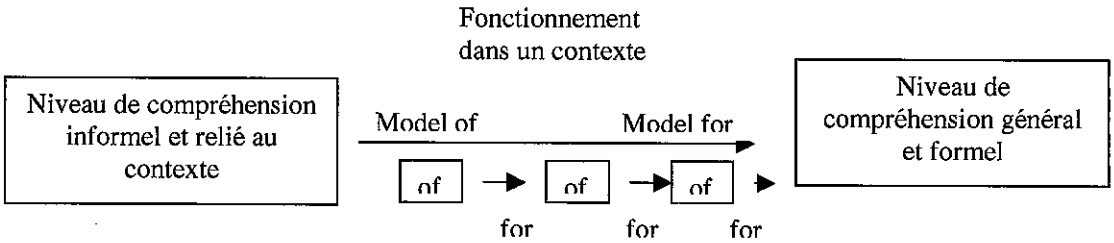
---

[2] NDT : La terminologie anglo-saxonne n'est pas cohérente, c'est soit *pre/post*, soit *before/after*. Nous avons donc opté pour les termes pré-image et post-image pour la traduction de *pre-image* et *after-image*.

2. Le cas du *bar-model*

L'article se termine par une illustration de la méthode suivie avec l'utilisation du modèle en barre (*bar-model*) pour développer un enseignement des pourcentages. Cette ingénierie a été développée dans le cadre d'un projet avec une équipe américaine autour d'une action dite mathématiques en contexte (*mathematics in context*). Le modèle en barre se bâtit d'abord sur une situation très concrète et proche du vécu des élèves (proportion de siéges occupés dans la salle de spectacle de l'établissement). Petit à petit, il est décontextualisé pour servir d'outil de calcul sur les pourcentages dans un ensemble plus vaste de situations. Enfin, ses limites sont montrées pour permettre le passage à un modèle plus mathématique.

L'auteur insiste sur le fait que dans la démarche RME, le plus important n'est pas de donner des modèles tout faits aux élèves mais de forcer l'activité d'élaboration de ces modèles. À partir d'activités bien situées dans la réalité, un déplacement s'effectue pour créer une nouvelle réalité. L'ensemble peut être schématisé par une série de modèles qui décrivent une trajectoire menant à un niveau général.



Il s'agit donc d'une action didactique basée sur une conception évolutive des modèles par glissement dans une chaîne de significations.

Discussion

La présentation de l'approche suivie par les auteurs pour développer une situation d'apprentissage d'une notion mathématique est particulièrement claire et intéressante mais les élèves et les professeurs sont singulièrement absents de cet ensemble.
L'analyse préalable pour la conception des situations se réfère exclusivement à la genèse mathématique de la notion et à sa place éventuelle dans des contextes* sociaux familiers aux élèves. Elle laisse de côté (au moins de manière explicite) tout ce qui relève des compétences et des connaissances des élèves. Plus gênant dans une approche didactique, il n'y a aucune analyse *a posteriori* de la situation et aucune information donnée sur la réalisation de la séance. En fait, à partir d'informations que nous a données directement l'auteur, il semble que ces situations soient mises au point par les chercheurs de l'Institut mais qu'ils n'ont pas pu suivre la réalisation effective aux Etats-Unis.

Christine Chambris
Lecture de l'article

B2 - Didactising: Continuing the Work of Leen Streefland

Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C. & Underwood, D. (2003)
Educational Studies in Mathematics 54, 101–126

Introduction

L'article participe de la présentation du cadre théorique de la RME* et il peut être vu comme une illustration de la méthodologie de travail dans ce cadre. Dans cet article, il est à la fois question de l'utilisation du cadre théorique pour concevoir des ingénieries (didactisation horizontale) et de l'élaboration même du cadre théorique (didactisation verticale). En effet, la mise en œuvre d'une ingénierie conçue dans le cadre de la RME, en utilisant des pré-images (*pre-images*), permet de repérer, *a posteriori*, des éléments pertinents pour la conception d'autres ingénieries : les post-images (*post-images*)[3] sont des outils à ajouter au cadre théorique. L'article est organisé autour de la présentation de trois exemples. Le premier illustre la didactisation horizontale avec l'utilisation des deux pré-images : chaîne de signification* et modèle*. Les deuxième et troisième exemples relèvent de la didactisation verticale : on élabore des outils théoriques du cadre, deux post-images, argumentation et écoute générative. Les exemples sont respectivement dus à D. Underwood, à M. Stephan et C. Rasmussen.

Résumé de l'article

1. Le premier exemple : les deux pré-images, *modèle* et *chaîne de signification*

On évoque une ingénierie pour l'étude des équations linéaires dans laquelle les expressions symboliques, les représentations graphiques et le taux d'accroissement se développent conjointement. C'est un cours de remédiation en algèbre à l'université. Il s'agit notamment de favoriser l'émergence du symbolisme algébrique conventionnel. Le symbolisme doit être tiré de la façon dont les étudiants re-présentent et notent leurs raisonnements dans les cas d'évolution linéaire.

La situation d'empilement de cubes (*Stacking Cubes*) commence avec l'histoire d'ouvriers qui doivent construire des tours de hauteurs variées. On demande aux étudiants de déterminer les hauteurs de diverses tours dans une suite de tours dont la hauteur suit une progression arithmétique.

Pour concevoir l'ingénierie, les chercheurs ont utilisé deux post-images comme pré-images : *chaîne de signification* et *modèle de* / *modèle pour** (p104-105).

Dans l'approche de la RME, les *modèles* ne sont pas vus comme des entités qui sont extérieures à l'étudiant mais qui sont engendrées cognitivement à partir des significations que les étudiants créent eux-mêmes. Le but de l'enseignement est donc de fournir aux apprenants des opportunités pour qu'ils développent par eux-mêmes des *modèles d'*une situation qui pourront plus tard évoluer en *modèles pour* leurs raisonnements mathématiques à un niveau plus formel. En d'autres termes, quand les étudiants résolvent des problèmes posés dans un contexte* concret et en discutent avec leurs pairs, ils développent des *modèles de* la situation concrète. Dans le cas des empilements, ils peuvent faire des dessins de tours, d'abord comme *modèles de* la hauteur. Quand la leçon avance, leur activité devient progressivement indépendante de la situation initiale - la métaphore de

[3] Il faut noter que le sens donné ici à ces notions de pré-image et post-image n'est pas le sens habituel en RME.

construction des tours. Le but est que l'étudiant réifie son *modèle de* la suite de tours de façon à ce que son activité graphique se transforme spontanément en un *modèle pour* le raisonnement sur la croissance linéaire.

Par contraste, dans l'approche traditionnelle des graphiques de fonctions linéaires, on demande aux étudiants d'utiliser le graphique pour résoudre un problème sur les quantités (le graphique est donc censé constituer un *modèle pour*) alors que la représentation graphique n'est, en elle-même, un *modèle de* rien du tout (*model of anything*).

De plus, on considère qu'il y a une relation dialectique entre l'utilisation de symboles et le raisonnement mathématique, en ceci que c'est à travers le processus d'écriture de sa propre pensée que la pensée de quelqu'un évolue (Meira, 1995). L'étude des représentations sémiotiques qui interviennent dans une situation apparaît comme essentielle dans la RME. C'est ainsi qu'intervient l'autre pré-image : la *chaîne de signification* (p.106).

Une façon de décrire les formes variées que peut prendre un modèle est de décrire l'évolution des significations partagées associées aux outils et symboles utilisés. Gravemeijer (1999) et Cobb *et al.* (1997) ont suggéré de documenter ce processus évolutif en décrivant l'émergence d'une *chaîne de signification*. Une *chaîne de signification* (Walkerdine, 1988) est une succession de signes imbriqués d'une certaine façon. Un signe 1 est constitué par un signifié 1 et un signifiant 1, mais on crée un nouveau signe 2 quand l'étudiant devient capable de prendre le signe 1 comme signifié 2 pour un signifiant 2 plus élaboré (fig. 3). Il s'agit de faire en sorte que les étudiants créent des liens entre les différents signes, entre deux représentations successives. En l'occurrence, on propose aux étudiants les graphiques de la figure 2 en espérant qu'ils construiront les liens de la figure 3.

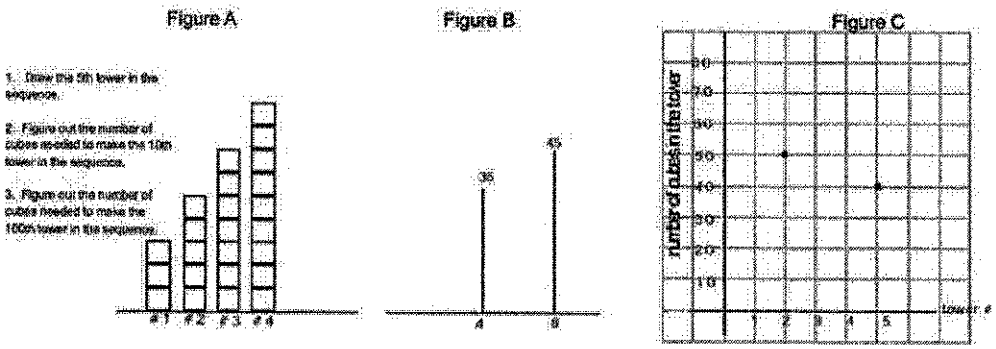


Figure 2. Various symbolizations supporting students' evolving reasoning.

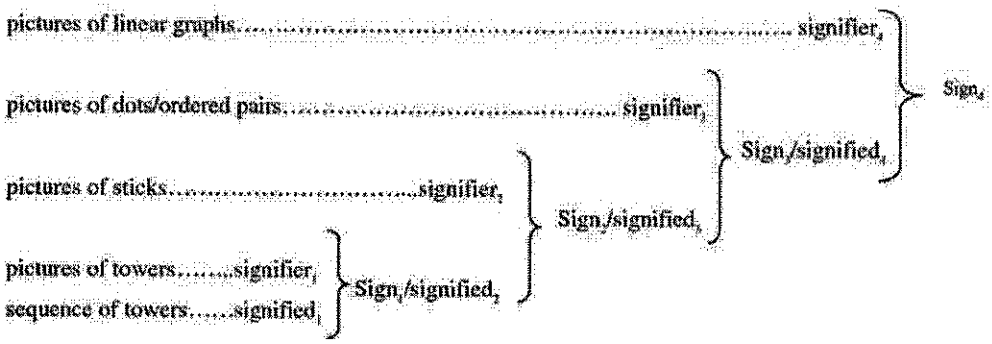


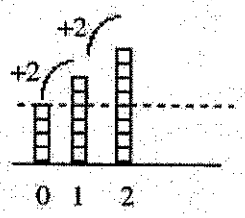
Figure 3. The proposed chain of signification for the Stacking Cubes instructional sequence.

2. Le deuxième exemple : l'élaboration de l'*argumentation* comme *post-image*

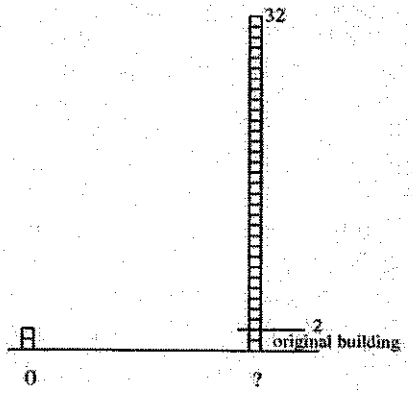
Il s'agit d'une analyse *a posteriori* de la mise en œuvre de la séquence sur les empilements de cubes. On analyse un extrait de dialogue à propos de l'élaboration d'une formule pour déterminer le nombre de cubes en fonction du numéro de l'empilement. Cet extrait est analysé avec le modèle de Toulmin (1969) pour l'argumentation, modèle qui distingue quatre parties pour un argument : des données, une affirmation, une justification, une sorte de validation – appelée retour (*backing*). Un élève donne une formule : 2P+1, il explique comment il l'a trouvée : « J'ai essayé de trouver combien de blocs aurait la tour 0. On enlève 2 à chaque fois, ce qui donne 1 pour le rang 0. (...) Comme à chaque fois, on augmente de 2, on multiplie par 2 et on ajoute 1 ». Un élève produit un *retour* en vérifiant que la formule fonctionne sur les trois exemples donnés.

Même quand les étudiants progressent, les chercheurs observent que c'est toujours ce type de *retour*, relatif aux premiers éléments de la suite, qui est formulé. Ils estiment qu'il serait nécessaire qu'à terme les *retours* expriment la généralité, ce qui signifie que les étudiants utilisent le taux d'accroissement. Par suite, ils décident de modifier la séquence de façon à valoriser, dans les tâches prescrites, l'utilisation du taux, en tant que tel. Par exemple, d'une numérotation des empilements où l'empilement n+1 a k étages de plus que l'empilement n, on passe au nombre d'étages dont la tour augmente chaque jour (le taux devient k étages/jour). Au niveau sémiotique, on introduit explicitement le taux : sur le dessin des tours on indique l'accroissement, dans le texte on parle de n étages par jour.

Task 1: Show students a picture of a building pattern that increases by 2 floors per day and starts at 4 floors. Only show the first three days. On which day will you have 14 more floors than the original?



Task 2: Some construction workers get paid by the day but the foreman lost the record of how many days the company has worked since they started building onto the original. He knows that the current building is 32 floors tall at the end of the day and that they've been putting 3 floors on per day from the original building that was two floors tall. How many days has the crew been working?



C'est ainsi qu'on considère que l'*argumentation* constitue une post-image car elle peut être considérée comme un outil pour l'analyse *a posteriori* dans le but de faire évoluer une ingénierie.

3. Le troisième exemple : l'élaboration de l'*écoute générative* comme *post-image* et l'évolution des *points de départ réalistes*

3.1 L'écoute générative

Le problème est le suivant : il s'agit, pour les chercheurs, de construire un outil pour repérer ce que pourraient être des *points de départ réalistes* pour l'étude des mathématiques avancées. L'*écoute générative* va constituer un tel outil.
Il existe plusieurs modèles de l'écoute en sciences humaines. Deux modèles sont présentés : celui de Seidman (1991) est une méthodologie d'interview pour des recherches qualitatives ; celui de Davis (1997) provient d'une étude sur l'enseignement. Les deux modèles distinguent plusieurs niveaux d'analyse de l'écoute. Le plus souvent, dans une situation d'écoute (interview, leçon), l'interviewer, le professeur, cherche à repérer ce qu'il sait déjà dans ce que dit l'interviewé, l'élève : cela permet notamment de repérer si l'interviewé comprend les questions ou encore ce que sait l'interviewé (visées interprétative et évaluative de l'interview). Davis identifie un autre type d'écoute : l'*écoute herméneutique*. Il s'agit de repérer dans ce que dit l'interviewé des choses que l'interviewer n'a pas prévues, ce qui consiste, pour une situation d'enseignement, à identifier un savoir que l'interviewé aurait construit dans la situation, presque à l'insu du maître. Ce savoir est nécessairement local : il n'a, au moment de l'interview, de signification que dans le contexte de l'interview (individus engagés, environnement de l'interview). Les chercheurs de la RME s'emparent de l'écoute herméneutique mais l'appellent *écoute générative* car ils se placent dans une perspective de conception d'ingénierie.

3.2 Un cours sur les équations différentielles

Il s'agit d'apprendre ce qu'est un espace de solutions pour une équation différentielle. Le *point de départ réaliste* retenu par les concepteurs de l'ingénierie est l'étude de l'évolution d'une population en fonction du temps. À la suite du cours, dans une visée évaluative, on interviewe une étudiante et on lui demande comment sa conception de la notion de fonction s'est modifiée. Elle explique que c'est « plutôt comme un mouvement, comme une sorte de changement (...) Je parle de cette bille qui part de là et qui va là et de comment elle y va », alors qu'auparavant elle voyait la fonction comme une formule. Plus tard, dans une large étude rétrospective des données, l'*écoute générative* de ce que les étudiants ont dit pendant ces leçons va conduire les chercheurs à modifier leur point de vue sur les *points de départ réalistes* possibles pour cet apprentissage. Le concepteur de l'ingénierie va suspendre son jugement et considérer que la conception exprimée pourrait être le *point de départ* possible pour une séquence d'apprentissage sur les équations différentielles. Plus précisément, les chercheurs ont réfléchi à la façon dont « le mouvement, qui part de là et qui va là » provenait de la conceptualisation du taux de variation et comment les « fonctions solutions » pourraient, pour les étudiants, se développer grâce à leurs expériences mentales et kinesthésiques du taux de variation. Le concept mathématique de « taux de variation » pourrait ainsi servir de *point de départ quasi-réel*.
Une nouvelle ingénierie a été conçue : dans un premier temps, on demande aux étudiants de prédire quelle peut être la forme de la courbe d'évolution de la population d'une espèce en fonction du temps qui se reproduit continûment et qui a des ressources illimitées (on ne fournit pas d'équation différentielle aux étudiants). On propose des courbes aux étudiants.

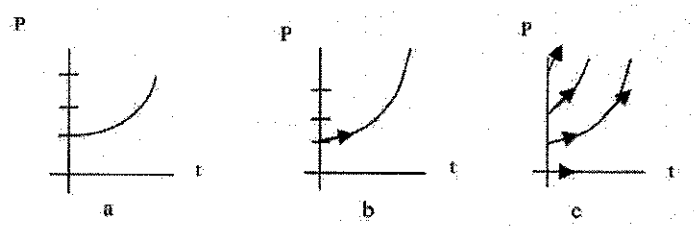
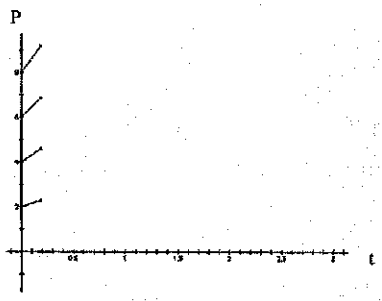


Figure 6. Population versus time graphs.

Le cas où la tangente à la courbe est horizontale à $t = 0$ est examiné. Les étudiants concluent que la pente doit être positive car l'espèce existe déjà. Les raisonnements peuvent être notés avec un vecteur tangent à la courbe. Ensuite, les étudiants comparent spontanément le taux de variation à différents endroits de la courbe. A la suite de cela, quand on demande aux étudiants ce que serait un taux raisonnable pour l'équation de la courbe décrivant la figure 6c, ils raisonnent sur le fait que dP/dt devrait dépendre explicitement de P et non de t, voire être proportionnel à la population. Cette formulation est reliée à une formulation précédente selon laquelle plus le nombre d'individu est grand, plus le taux d'accroissement est élevé.

La tâche suivante s'appuie sur la figure 6c comme *point de départ quasi-réel.*

Task: For an initial fish population of 1 (think of this as scaled for, say 1000 or 10,000 fish), figure out a way to sketch a fairly accurate population versus time graph knowing that the rate of change in the population is dP/dt = 0.8P. Be prepared to share your ideas with the rest of class.



Dans le traitement de cette tâche, les raisonnements et travaux sont divers et reflètent en partie différentes façons de conceptualiser le taux : certains étudiants reproduisent des colonnes de vecteurs selon l'axe t (ils réinventent ainsi le champ de vecteurs tangents), il s'agit ici du taux vu plutôt comme une quantité que comme un rapport. D'autres étudiants construisent une courbe affine par morceaux en maintenant un pas constant pour l'incrémentation du temps.

L'*écoute générative* permet aux chercheurs de repérer dans l'analyse *a posteriori* de situations mises en œuvre, des idées mathématiques des étudiants qui sont *quasi-réelles* et qui peuvent donc servir de *point de départ.*

Discussion

Cet article montre comment se développe le cadre théorique de la RME. Il y apparaît d'ailleurs tentaculaire. Néanmoins, et cela n'en facilite pas la lecture, les présupposés du cadre théorique ne sont pas dégagés clairement et restent implicites.

La nouveauté théorique de l'article réside dans la notion de « didactisation » qui semble liée à la figure de Leen Streefland auquel l'article rend hommage. Sans que ce soit explicité, les auteurs développent la notion de « didactisation » par analogie avec celle de « mathématisation »* qui est à la base de la RME. Ainsi, ils parlent de didactisations horizontale et verticale ; de pré-image et post-image dans une acception différente des autres textes. A la fin, on ne sait pas bien le statut réel que l'on doit accorder à tous ces outils et si le travail de théorisation des auteurs sera poursuivi ou bien si l'on en restera au stade de l'hommage à Streefland.

Ana Mesquita
Lecture d'article

B3 - Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers

Linchevski, L. & Williams, J. (1999)
Educational Studies in Mathematics **39**, 131-147

Introduction

Dans cet article, les auteurs, Liora Linchevski (Jérusalem, Israël) et Julian Williams (Manchester, Royaume-Uni), utilisent le cadre théorique des *Realistic Mathematics Education* (RME*), développé par Freudenthal et par les membres de l'Institut qu'il a fondé. Une ingénierie didactique (*instructional methods*) y est présentée, destinée à faciliter le dépassement des lacunes – habituellement identifiées dans la littérature sur les nombres négatifs – qui peuvent apparaître lors de l'introduction de ces nombres. Ces lacunes doivent être surmontées par les enfants, à travers les activités de modélisation* proposées, auxquelles sont associées des activités sémiotiques, concernant l'introduction et l'utilisation de signes mathématiques. Les auteurs souhaitent analyser les effets de deux modèles* proposés à des élèves de 6e année, au Royaume-Uni et en Israël.

Les modèles développés visent à éviter le paradoxe *d'apprentissage* (*learning paradox*) suivant, amplement cité dans la littérature sur les négatifs : le travail avec les nombres négatifs, tant du point de vue de l'épistémologie que du point de vue de l'apprentissage, exige des mathématiciens (ou des élèves) qu'ils manipulent les nombres comme des objets mathématiques avant qu'ils ne soient capables de le faire.

Résumé de l'article

1. Les modèles

Les auteurs souhaitent aider les élèves à organiser des phénomènes qui se présentent dans des contextes* familiers, en leur suggérant des outils et des modèles, et en introduisant des signes mathématiques, ce qui permet, selon eux, la structuration des conceptions quotidiennes.
Le langage mathématique y jouerait un rôle important. En effet, les modèles ainsi que le langage mathématique déjà disponibles chez les élèves vont servir d'outils de médiation (*mediation tools*), pour que les élèves comprennent l'activité menée en classe. Par la suite, ces modèles seront utilisés comme des outils pour des actions de médiation sur les signes mathématiques, introduits pendant l'expérimentation. Dans cette dernière phase, le modèle et les nouvelles connaissances deviennent l'objet d'action consciente au sens de Leontiev (1981), non développé dans le texte. C'est dans ce sens que les modèles constituent des maillons de la chaîne de signification* entre les connaissances intuitives et les nouvelles connaissances mathématiques.

Une condition considérée comme importante dans le choix des modèles est celle de la congruence essentielle (*essential congruence*), où des intuitions productives (*productives intuitions*) seraient transformées d'une façon appropriée en connaissances transférables, à travers la pratique de classe. Pour les auteurs, dans la tradition de l'école de Vygotsky et des théoriciens socio-culturels tels que Leontiev, l'activité en classe doit être comprise dans le contexte du système social dans lequel elle s'insère.

2. Les expérimentations

Les auteurs présentent et décrivent les deux expérimentations, dans lesquelles deux modèles sont proposés à des élèves de 6e année, avant tout enseignement sur les négatifs. Sur la méthodologie du travail, les indications sont rares, faisant penser qu'il s'agit d'une étude de cas, avec quelques groupes d'élèves, où cinq séances d'une heure ont eu lieu, pour la première expérimentation en Israël seulement et pour la seconde au Royaume-Uni également, par des chercheurs qui sont aussi les enseignants et qui ont mené des entretiens.

La première expérimentation est basée sur un dispositif qui doit permettre aux élèves de modéliser les nombres négatifs à partir d'une situation extra-mathématique, par le biais de l'enregistrement des entrées et des sorties des personnes d'une salle ayant plusieurs portes et d'en déduire le nombre de présents dans cette salle. Le contexte suggéré est celui d'une discothèque, avec les entrées et sorties des danseurs. Chaque élève dispose d'un double abaque, avec deux fils et des perles de deux couleurs, pour pouvoir marquer le nombre d'entrants et de sortants (par exemple, +3 sur l'abaque est représenté par 5 perles bleues et 2 perles jaunes). Les auteurs notent que ce dispositif permet l'utilisation de l'addition d'entiers, mais la soustraction (néanmoins utilisée par des élèves, dans des stratégies de calcul dues à la limitation du nombre de perles) reste peu concrète et difficile à expliquer.

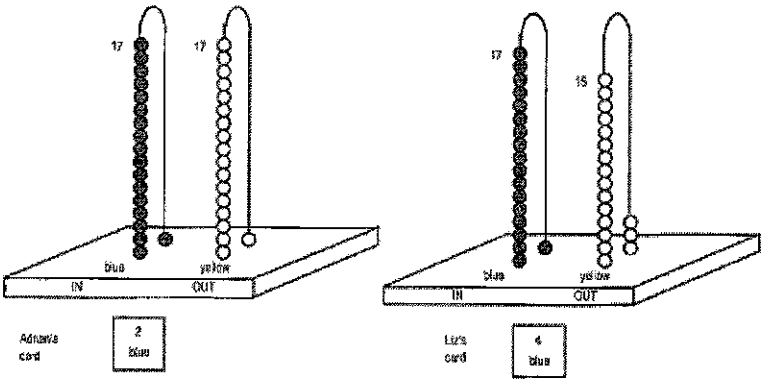


Figure 2. Adrian's and Liz' abacus both run out of blue beads.

Figure 1 : le double abaque (p. 138)

D'où la seconde expérimentation, qui vise à modéliser les nombres négatifs et à introduire les opérations d'addition et de soustraction, à partir d'un jeu de dés. Deux variantes ont été étudiées, la seconde liée à l'introduction d'une « soustraction concrète ». Pour cela, en complément du double abaque, des paires de dés de deux couleurs différentes ont été utilisées pour désigner les groupes de joueurs. Dans la première variante, les valeurs issues de dés de deux couleurs devaient être enregistrées sur les doubles abaques ; dans la deuxième, un troisième dé avec des faces marquées 'ADD' ou 'SUB', respectivement pour additionner et soustraire, a été introduit.

A titre de commentaire, nous pouvons remarquer que l'analyse fine fait par exemple par G. Glaeser (1981), cité dans les références bibliographiques, sur les distinctions subtiles entre les signes positionnels affectant les nombres et les signes opératoires associés aux opérations d'addition et soustraction, a peu d'importance dans cette étude, se réduisant à la « négociation des deux sens du signe moins ». La soustraction « concrète » est suggérée ici par le dé, sans qu'aucun lien soit fait avec la situation. Peut-être est-elle concrète car « visible » sur le dé ? La question reste posée.

3. Les résultats

Un peu décevants, même du point de vue des auteurs : la grande force de ces modèles est leur lien au quotidien : « *La force intuitive de la correction dans les jeux était accessible pour les élèves, puisque la structure sociale des « jeux » était revécue en classe* ».

Lorsque les auteurs comparent les deux expérimentations, ils notent que le second modèle semble avoir introduit la lacune intuitive plus précocement, au moment de l'apparition, arbitraire, des signes tandis que dans la première expérimentation une lacune apparaît au moment de l'introduction de la soustraction. « Finalement, nous sommes d'accord avec Fischbein (1987) pour lequel il n'y a pas de modèles qui puissent simultanément être intuitifs et aider à la compréhension ».

Néanmoins, l'utilisation du double abaque à la fois comme un outil pédagogique et comme un modèle semble importante. Initialement, le double abaque a permis de relier la situation intuitive à la tâche scolaire. Par la suite, il a facilité la modélisation* : les manipulations des signes mathématiques, possibles grâce à la médiation de l'abaque, sont modélisées et incorporées en mathématiques. C'est dans ce sens que « *l'abaque est un lien dans la chaîne de signification entre les phénomènes à organiser et leur transformation en règles mathématiques* ».

Discussion

Nous pouvons voir dans le paradoxe d'apprentissage relatif aux nombres négatifs un parallèle avec la dialectique outil-objet (R. Douady) ; les auteurs parlent en effet de lien entre les conceptions des processus et des objets (*linking of process and object conceptions*).
En résumé, et à titre de commentaire final, nous pourrions dire que s'il n y a pas de bons modèles* « horizontaux » pour introduire les nombres négatifs, le double abaque s'est avéré important dans la transformation des mathématiques. Serait-il alors, en utilisant une terminologie en vigueur dans RME* (cf. l'article de M. Van den Heuven) un bon modèle* « vertical » ?

François Pluvinage
Lecture de l'article

B4 - Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999)
Educational Studies in Mathematics **39**, 111-129

Introduction

L'article propose une application de la RME* au premier enseignement de l'analyse. Pour ce faire, les auteurs prennent appui sur l'épistémologie : l'histoire montre notamment que les fonctions discrètes ont tenu un rôle moteur dans les problèmes étudiés depuis le *Merton College* d'Oxford au XIVème siècle jusqu'à Galilée, en tant qu'intermédiaire entre les situations envisagées et l'analyse formalisée. L'application de la RME vise à faire émerger une mathématique formalisée plutôt qu'à établir une passerelle entre la connaissance formelle et l'informelle.

Résumé de l'article

1. L'enseignement des fonctions

L'approche traditionnelle de l'analyse consiste en une présentation de la dérivée d'une fonction f en un point comme la limite du rapport $(f(x + h) - f(x))/h$ quand h tend vers 0, ce qui conduit le concept de limite à précéder celui de dérivée dans l'enseignement. Or le concept de limite n'a, aux yeux des étudiants, pas de raison d'être au moment où il est introduit. Ensuite un gros problème d'apprentissage va être de passer à la vision de $f'(x)$ comme fonction dont les valeurs décrivent le gradient du graphe de f.

Le problème d'apprentissage pointé par Tall est la transition pour passer de discussions fondées sur des apparences visuelles au raisonnement mathématique formel. Pour les auteurs, l'exploration visuelle de phénomènes réels instituée par Tall a uniquement un rôle introductif ; ensuite la partie principale de l'étude se situe dans le monde purement mathématique. Kaput, pour sa part, développe davantage la relation entre le système des symboles mathématiques et la réalité* de tous les jours. Ainsi une question posée aux étudiants est reprise de Tucker : « *Toutes les fonctions rencontrées dans la réalité sont-elles données par des formules algébriques ? Ou seulement certaines d'entre elles ?* » Un logiciel, *Math Cars*, a été créé afin de connecter des expériences courantes de déplacement dans un véhicule à des représentations graphiques.

D'autres chercheurs ont tenté d'aider les étudiants à réinventer ou à développer eux-mêmes la représentation symbolique, tels DiSessa *et al.* utilisant une programmation de tortue du type Logo. De la sorte, l'expression mathématique pourra émerger d'une manière naturelle, accompagnée d'un développement du sens. Un pas en avant supplémentaire est proposé par Meira, avec l'introduction d'une relation dialectique entre les notations utilisées d'une part et ce qui fait sens du point de vue mathématique d'autre part. C'est dans cette direction que se situe l'objectif poursuivi par RME.

Les auteurs rappellent alors quelques principes énoncés par Freudenthal : la mathématique comme activité et non comme système tout prêt à l'emploi, la réinvention guidée. Ils font référence à Sfard, dont le point de vue est davantage macroscopique que celui de Freudenthal et qui illustre

précisément dans le cas des fonctions le fonctionnement du processus de réification, avec des points d'appui sur le développement historique. Cela les amène à présenter la manière dont ils prennent en compte la modélisation* dans l'enseignement, non comme une simple illustration de concepts mathématiques, mais comme une voie d'accès au raisonnement mathématique.

2. L'apport historique

L'approche historique amène à considérer les études de mouvements menées au *Merton College* et la façon d'établir la règle dite de Merton : *On suppose que la vitesse d'un mobile s'accroît régulièrement lors d'intervalles de temps égaux.* (Nous dirions aujourd'hui que le mobile est animé d'un mouvement uniformément accéléré.) *La distance parcourue par le mobile, depuis son départ avec une vitesse nulle jusqu'à ce qu'il atteigne une vitesse v au bout du temps t, est la moitié de celle que parcourrait dans le même temps un mobile animé d'un mouvement uniforme de vitesse v.* Un peu plus tard, Oresme notait que la représentation par des suites de rectangles, discrétisant le phénomène, s'approchait de l'aire du triangle compris entre l'axe des abscisses et la courbe représentative des vitesses (une droite dans le cas envisagé). Puis, Galilée en expérimentant la chute libre, a conjecturé que celle-ci correspond à un mouvement uniformément accéléré. On constate qu'une base d'une analyse formalisée est constituée par l'étude de graphes d'abord discrets (en escaliers) puis continus. Ainsi, les fonctions discrètes se situent-elles en premier plan d'une modélisation de situations qui conduit à des développements sous forme de modèles* mathématiques.

3. L'expérimentation au lycée

Ces réflexions ont abouti à l'élaboration d'un programme d'enseignement expérimenté auprès de lycéens de 16-17 ans. Dans ce programme, on commence par envisager les relations entre des séries, leurs sommes et les incréments. Cela conduit à l'introduction de symboles tels que celui de la sommation. Jusqu'à la fin du cours, la notion de limite n'apparaît que d'une manière intuitive. Dans le mode de fonctionnement de l'enseignement, il s'agit de maintenir un écart réduit entre le point où en sont les élèves et ce qu'il s'agit d'introduire ; c'est d'abord l'affaire de ceux qui ont la charge d'élaborer les activités, puis l'interaction entre enseignants et élèves permet un ajustage.

Le scénario d'enseignement comporte la présentation aux élèves de l'histoire de Galilée, avec la conjecture que la chute libre donne lieu à un mouvement uniformément accéléré. A la suite de quoi, la question de la distance parcourue est posée. Après une résolution par une étude discrète, le lien est établi avec l'aire du triangle obtenu à partir du graphe continu de la fonction $s(t) = (t \times 10t)/2 = 5t^2$. Avec ce calcul se trouve accompli le premier pas vers un processus où l'attention glisse de la description d'un mouvement vers un calcul de primitives. Dans les activités suivantes, que l'article ne décrit pas, le modèle permet de raisonner d'une part sur l'intégration/différentiation de fonctions arbitraires, d'autre part sur les fonctions algébriques usuelles.

L'approche RME tente de dépasser la dichotomie entre la connaissance informelle et la connaissance formalisée, en construisant une trajectoire théorique d'apprentissage au cours de laquelle l'étudiant peut réinventer les mathématiques formalisées. Celles-ci doivent émerger de l'activité mathématique qui s'appuie sur des problèmes contextualisés. En conclusion, les auteurs estiment pertinentes de ce point de vue les études qui relient vitesses et distances.

Discussion

Le thème abordé

Le sujet considéré par les auteurs se situe dans l'acquisition des compétences à mobiliser les fonctions. En m'autorisant ici une remarque personnelle, je m'avancerai à dire que si la notion de compétence peut être envisagée du point vue didactique (c'est oui à mon avis, mais au terme d'une discussion qui déborderait notre présent propos), elle mérite de s'appliquer à quelques niveaux majeurs d'acquisition ou paliers : les opérations sur les entiers naturels, la proportionnalité et le raisonnement rationnel, l'algébrisation et enfin l'emploi des fonctions qui nous intéresse ici. En analogie avec le terme anglais *literacy*, dont le français usuel n'exprime pour sa part que la carence avec le terme *illettrisme*, nous pourrions dire : *numeracy, rationacy, algebracy, functionacy*.

La tradition française désigne tout enseignement des fonctions sous le vocable d'*analyse*. Dans le monde anglo-saxon, il n'en va pas tout à fait de même. Schématiquement, disons qu'il est usuel de distinguer par le terme de *calculus* les traitements fonctionnels dans lesquels la dérivation et l'intégration apparaissent comme des opérateurs linéaires inverses l'un de l'autre, et par celui d'*analysis* les études qui s'appuient sur limites et convergence, autrement dit qui mobilisent des considérations topologiques. Bien évidemment la séparation ne peut pas être aussi radicale et par exemple des résultats comme le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences apparaissent dans des leçons de *calculus*. Il est donc légitime de considérer que la formalisation rigoureuse du *calculus* est le point de départ de l'analyse.

De telles considérations ne sont pas sans peser didactiquement sur les formes d'enseignement pratiquées. L'optique ci-dessus favorise une première approche du type RME, n'ayant que des soucis de rigueur mathématique restreints, par exemple ne soulevant pas de questions sur les nombres réels et leurs propriétés (les complexes n'étant de toute façon pas en jeu à ce niveau d'étude). On peut raisonnablement espérer que des étudiants soient mis en mesure de réinventer le *calculus*, ce qui serait beaucoup plus problématique pour la reconstruction d'ensemble de l'analyse.

Les points d'appui

Où les auteurs trouvent-ils une situation proposable dans l'enseignement et comment vont-ils élaborer un scénario didactique exploitant cette proposition ? Le qualificatif *realistic* présent dans RME* aurait pu induire les auteurs à se pencher sur l'usage concret qui est fait aujourd'hui de notions telles que celles de taux (de croissance, d'inflation, d'intérêt, etc.) ou d'optimum (processus de décision ou de fabrication, problèmes d'isopérimètre ou recherche des mensurations d'un emballage de forme donnée ayant une contenance maximale), mais c'est la référence à l'histoire qui, du moins dans cet article, leur a fourni leurs points d'appui. La substantifique moelle de l'étude proposée apparaît dans le paragraphe 4, intitulé *A Historical Sketch*, le paragraphe 5 présentant ensuite son exploitation sous une forme que l'on peut considérer comme un guide d'application dans l'enseignement.

Le choix arrêté est l'étude du mouvement uniformément accéléré. Le principe de choix adopté par les auteurs peut certainement être discuté sur la base de considérations sociales ou culturelles par exemple. Sans toutefois le remettre en cause, on peut formuler une critique sur la façon dont ce principe a été appliqué, c'est-à-dire sur l'examen limité de l'histoire qui a été effectué. En effet, à côté des études de Galilée, celles de Kepler qui s'est intéressé à des problèmes d'extremums et en particulier (tonneaux de Kepler) à l'évolution caractéristique d'une variable dépendante au voisinage d'un extremum, puis un peu plus tard l'introduction générale des fonctions par Euler,

marquent dans l'histoire des mathématiques des développements incontestables. Faute de les avoir considérés, les auteurs sont conduits dans leur scénario d'enseignement à proposer un saut cognitif brutal par l'introduction de tout un lot de symboles (indices, sommation Σ, différenciation Δ) et le recours aux limites, même s'il est seulement intuitif à ce niveau comme ils l'indiquent. Or on connaît toutes les difficultés auxquelles l'enseignement de ces sujets se trouve confronté. Ma conviction est que le scénario proposé n'aplanit pas ces difficultés.

Conclusion

L'intention de l'article était, si l'on peut dire, de prouver le mouvement en marchant : illustrer la validité de la démarche pédagogique RME à un niveau mathématique déjà évolué. Cela dispensait-il de s'appuyer sur l'observation de comportements d'étudiants et du déroulement effectif de l'enseignement proposé ? Une lecture rapide de l'article peut donner l'impression que ce point est totalement délaissé par les auteurs. On ne trouve en effet dans l'article ni données quantitatives sur les résultats obtenus, ni citations d'échanges d'étudiants entre eux ou avec des enseignants durant les cours. Cependant, ce qui a pu se passer transparaît de ça de là : *la symbolisation des vitesses instantanées par des segments peut être donnée aux étudiants s'ils ne l'ont pas trouvée* (p. 124), *notre description anticipe sur des révisions de ce qui a été proposé* (note 3). L'article présente incontestablement une approche qui méritait d'être expérimentée, mais l'expérience conduite est en définitive à considérer comme une pré-expérimentation, plus que comme une étude achevée dont les résultats seraient reproductibles.

André Pressiat
Lecture de l'article

B5 - Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra

Van Amerom, B. A. (2003)
Educational Studies in Mathematics **54**, 63 - 75

Introduction

L'article décrit les résultats les plus importants d'une recherche intitulée « Réinvention de l'algèbre » développée à partir de 1995 à l'institut Freudenthal à Utrecht. Cette recherche, qui a débouché sur le travail de thèse de l'auteur en 2002, décrit deux voies d'approche possibles pour faire face aux difficultés rencontrées par les élèves dans la transition de l'Arithmétique vers les débuts de l'Algèbre :

- partir des stratégies informelles des élèves pour construire à partir d'elles des stratégies plus formelles (approche fortement influencée par les travaux de Streefland sur les productions personnelles des élèves) ;
- employer en classe des apports de l'histoire des mathématiques.

L'article développe particulièrement la manière dont la première approche a été mise en place : dans le but de rendre disponibles chez les élèves les capacités et les outils nécessaires à la manipulation des équations, ils ont été stimulés et guidés pour développer un langage algébrique, des notations et un raisonnement adaptés. On peut résumer de la manière suivante les résultats obtenus : le raisonnement et la symbolisation se développent chez les élèves comme des capacités indépendantes. Par exemple, des élèves de 12-13 ans peuvent résoudre des équations aussi bien au niveau formel qu'au niveau informel, alors que la symbolisation formelle constitue pour eux un obstacle majeur.

Après avoir rappelé rapidement les ressemblances et différences entre l'Arithmétique et l'Algèbre : les différents statuts de la lettre chez les élèves (Booth, 1988, Kieran, 1989, 1992, Sfard, 1991) ; le double aspect « procédural / structural » d'une expression algébrique (Kieran, 1989, 1992, Sfard, 1991, 1995), l'auteur souligne le travail de Sfard (1995) qui met en relation ces difficultés des élèves avec le développement historique de l'algèbre : le double aspect « procédural / structural » renvoyant à la dichotomie « algèbre syncopée / algèbre symbolique ». Enfin, elle rappelle que la rupture entre Arithmétique et Algèbre est présente dès l'approche de la résolution du problème.
La présentation de la recherche est faite en deux temps :

- l'enchaînement de l'enseignement proposé ;
- deux exemples en classe : symbolisation et signification des lettres ; symbolisation versus raisonnement.

Résumé de l'article

1. L'enchaînement de l'enseignement proposé

Le but de l'étude est de savoir si l'approche ascendante* (*bottom-up**) qui a été proposée va permettre de réduire la différence entre arithmétique et algèbre.
Pour l'école primaire (Grades 5 et 6 ; 10-12 ans), le thème principal de la série de leçons est la reconnaissance et la description des relations entre grandeurs en utilisant différentes

représentations : tables, sommes, descriptions rhétoriques, équations avec des mots. Les contenus mathématiques des travaux proposés aux élèves sont les suivants :

- comparer des quantités et les égaliser de différentes manières ;
- discuter les conflits de notations et les différentes significations des symboles ;
- employer les opérations (+, –, ×, ÷) et inverser les opérations ;
- résolution de problèmes en raisonnant avec plusieurs conditions ;
- raisonnement sur les expressions (substitution, inversion, et interprétation globale).

Pour l'école secondaire (Grade 7 ; 12-13 ans), ces contenus ont fait l'objet d'une reprise condensée et ont été étendus à la résolution de systèmes d'équations.

Durant la progression, les élèves ont été invités à résoudre des problèmes « pré-algébriques » pour la plupart inspirés de l'histoire. Ce sont des problèmes d'origine babylonienne, égyptienne ou chinoise, concernant des problèmes de la vie de tous les jours : problèmes d'échanges, d'argent, ... La préférence pour les méthodes de résolution arithmétique sert de base à la première moitié de la progression, durant laquelle les stratégies informelles des élèves seront prises en compte. Le transfert vers une approche algébrique plus formelle est favorisé par un développement guidé de la notation algébrique, plus spécialement le passage d'une notation rhétorique à une notation syncopée, ainsi que l'évolution vers un mode de pensée plus algébrique.

Un autre accès possible est fondé sur l'usage des notations, en comparant l'évolution historique dans la symbolisation et la schématisation avec celle des élèves. Le problème d'échange suivant, tiré de l'ouvrage chinois « Neuf chapitres de l'art du calcul » a été utilisé :

En vendant 2 buffles et 5 béliers et en achetant 13 porcs, il reste 1000 quians. On peut acheter 9 béliers en vendant 3 buffles et 3 porcs. En vendant 6 béliers et 8 porcs, on peut acheter 5 buffles, mais il manque 600 quians. Combien coûte un buffle ? Un bélier ? Un porc ? Et mis en relation avec la formulation moderne suivante pour travailler les systèmes d'équations :

$$(1) \qquad 2b + 5w = 13p + 1000$$
$$(2) \qquad 3b + 3p = 9w$$
$$(3) \qquad 6w + 8p + 600 = 5b$$

où b, w et p désignent respectivement le prix d'un buffle, d'un bélier, d'un porc.

L'auteur, dans une perspective phénoménologique, pose un certain nombre de questions concernant l'origine, la signification et l'objet d'un système d'équations. L'exemple donné ci-dessus est intéressant à plusieurs titres :

- Dans l'équation (2), aucun nombre de *quian* n'est présent, et les lettres b, w et p peuvent représenter les nombres d'animaux au lieu de leur valeur monétaire.
- De ce fait, l'introduction dans (1) et (3) d'un nombre isolé modifie non seulement le milieu de l'équation, mais également la signification des inconnues (en passant d'une relation aux objets à une relation à une qualité des objets).

Selon Streefland, les élèves doivent être avertis du changement de signification des lettres, et alors leur niveau de pensée mathématique évolue. Par exemple, ils posent des questions sur la signification du signe « égal », qui peut vouloir dire « coûte autant que » aussi bien que le classique « est égal à » : de telles considérations témoignent des pas accomplis dans le développement conceptuel de la notion de variable.

Enfin, la recherche a permis d'étudier la relation entre la notation et l'abstraction. Quand on regarde le développement de l'algèbre d'un point de vue socio-culturel, l'algèbre syncopée n'apparaît pas comme un stade intermédiaire de maturation, mais plutôt comme une question technique : les limitations de l'écriture et le manque de livres imprimés a naturellement conduit aux abréviations et contractions de mots. Il est possible que les élèves aient des besoins identiques d'efficacité lorsqu'ils développent leur propre système de notations, sans que cela coïncide avec le développement conceptuel de l'usage des lettres.

2. Exemples en classe

La première expérimentation d'une série de leçons a eu lieu dans deux classes du primaire de 30 élèves chacune, âgés de 10 à 12 ans. La deuxième a eu lieu dans trois classes du primaire et deux classes du secondaire (élèves de 12-13 ans), les supports des séances ayant été modifiés suite à la première expérimentation. Les données collectées sont diverses : observations de leçons, recueil de notes prises par les élèves, post-tests, questionnaires proposés aux élèves et aux professeurs.

2.1 Premier cas : symbolisation et signification des lettres

L'évocation de notations abrégées est l'un des points forts de la progression. Le contexte* est un jeu de cartes, les élèves notant le score à chaque tour. Quatre types de représentation apparaissent : une description de ce qui se passe à chaque tour ; les scores de chacun des joueurs en points ; une description d'une relation entre les scores (par exemple : Petra a 5 points de plus que Jacqueline) ; une formule avec mots exprimant une certaine relation (par exemple : points Petra = points Jacqueline + 5).
Le dialogue reproduit ci-dessous montre comment un élève conduit la tâche d'abréviation des notations de manière trop vigoureuse :

> Robert : Points Petra plus Anton égal Jacqueline
> Professeur : Il y a quelque chose qui n'est pas correct ici ... Bien, le calcul est peut-être juste.
> Tim : Points Petra plus points Anton.
> Professeur : En effet ! Tu as trop abrégé. Cela concerne seulement les points de ces personnes. Tu ne peux pas ajouter des personnes aux points qu'elles obtiennent, c'est impossible !
> (Rires dans la classe)
> Professeur : C'est le nombre de points qui nous intéresse : le nombre de points obtenus par Petra plus le nombre de points obtenus par Anton est le nombre de points obtenus par Jacqueline.
> Renske : C'est ce que j'ai dit !
> Professeur : Oui, nous avons un peu parlé de cela hier. Ce n'est pas faux ce que tu dis, Robert, mais ce n'est pas clair quand c'est aussi bref. Il est important que tu le dises clairement.

L'auteur signale qu'un compromis doit être trouvé entre des notations précises et non ambiguës d'une part, et des productions intuitives (probablement inconsistantes) d'autre part.
Puis elle raconte un épisode où le professeur a laissé passer une bonne occasion. Dans une des leçons, les élèves se sont prononcés sur la signification de l'expression « $pA = 3 \times pJ$ ».
La lettre p signifie « nombre de points appartenant à », et la majuscule désigne l'initiale du prénom (A pour Annelies, J pour Joeren). Dans le dialogue ci-dessous, le professeur demande d'illustrer par un exemple ce que signifie la relation « 3 fois autant que » entre les variables pA et pJ :

> Professeur : Si on pense aux points, que peut-il se passer ? Vous devez l'écrire d'une manière pratique, comme dans *Argent de Poche*, quels nombres sont possibles ?
> Yvette : 3 et 9
> Professeur : Qui a 3 et qui a 9 ?
> Yvette : Annelies en a 3.
> Professeur : Comment voudrais-tu l'écrire ? Pourquoi ne nous le montrerais-tu pas au tableau ?
> Yvette écrit : A – 9 p j – 3 p
> Sanne : Tu aurais dû écrire un signe égal au lieu du trait.

L'auteur pointe trois occasions manquées : Yvette utilise la majuscule A et une minuscule j ; elle utilise la lettre p comme une unité, alors que c'est une partie d'une variable (pA, pJ) ; la suggestion de Sanne à la fin. Elle commente la deuxième en signalant le choix fait dans les classes : « Il fut décidé que si les élèves manifestent une tendance naturelle à utiliser la lettre p comme unité, elle n'apparaîtrait pas dans les expressions ou formules. »

2.2 Deuxième cas : symbolisation versus *raisonnement*

La tâche proposée (dans un test écrit) est la suivante :

> *10 roses et 5 phlox pour 15,75, et 5 roses et 10 phlox pour 14,25, cela fait 30 florins en tout, SVP ! Quel est le prix d'une rose ? d'un phlox ? Montre tes calculs.*

L'un des résultats de l'expérimentation est que la résolution algébrique des équations ne se développe pas nécessairement de manière synchrone avec la symbolisation algébrique.

- Certains élèves établissent correctement le système, mais résolvent le problème de manière incorrecte, ou avec une stratégie de plus bas niveau, ou procèdent de manière rhétorique pour le résoudre correctement, comme dans l'exemple suivant :

  5 roses de plus et 5 phlox de moins, la différence est de 1,50. Donc : 1 rose de plus et 1 phlox de moins, cela fait une différence de 0,30. Donc 15 roses coûtent 17,25 florins. Une rose coûte donc 1,15 florin. Donc 10 roses coûtent 11,50 f ; donc 5 phlox coûtent 4,25 ; donc 1 phlox coûte 0,85 florin.
- Malgré le niveau apparemment élevé du point de vue des représentations symboliques, l'élève en question n'opère pas sur les équations.
- Même si les lettres ont pu l'aider à structurer le problème, elles n'interviennent pas dans le processus de résolution.

Il y a ici un parallèle avec le développement historique de la symbolisation : dans les stades « rhétorique » et « syncopé » de l'algèbre, l'inconnue n'était mentionnée qu'au début et à la fin du problème.

Inversement, le niveau de raisonnement peut être plus élevé que le niveau de symbolisation. Ayant à résoudre le système formé par les deux équations :

$$2 \times h + 2 \times k = 66 \text{ et } 3 \times h + 4 \times k = 114,$$

l'élève n'écrit que des opérations accompagnées de quelques mots, qui permettent de reconstituer son raisonnement :

> L'élève double la première équation et soustrait la seconde au résultat obtenu. Au 2e membre, il trouve 18. Ses calculs montrent comment il multiplie les termes avec des inconnues. Puis il écrit, l'énoncé dit "$3h$", donc 18 c'est 1 h. Puis il substitue 18 à h pour trouver k.

Cet élève applique avec succès une stratégie algébrique formelle d'élimination d'une des inconnues en opérant sur les équations, alors que ces symbolisations sont encore à un niveau très informel. L'inconnue n'est que partiellement présente dans la procédure ; elle apparaît seulement quand c'est nécessaire.

3. Conclusion

L'auteur affirme que les difficultés d'apprentissage de l'algèbre ne reposent pas seulement sur les différences ontologiques entre arithmétique et algèbre. Revenant sur l'usage de méthodes informelles et pré-algébriques de raisonnement et de symbolisation, elle pointe que ces notations informelles ne respectent pas la syntaxe algébrique (usage inconséquent de lettres, et pseudo-absence des inconnues dans la résolution de systèmes), ce qui fournit de nouvelles considérations pour l'enseignement : comment combler le fossé entre les notations intuitives et pleines de sens des élèves et le niveau plus formel du symbolisme conventionnel ? Le fait que les compétences de raisonnement et de symbolisation se développent indépendamment l'une de l'autre a, selon l'auteur, des conséquences pédagogiques importantes : elle affirme que la résolution d'équation ne dépend pas d'une perception structurale des équations, et n'est pas non plus reliée à une manipulation correcte de l'équation. Elle termine en soulignant que la connaissance du développement historique de l'algèbre lui a permis de faire une analyse plus fine du travail des élèves et de découvrir des parallèles entre certaines méthodes contemporaines et historiques de symbolisation.

Discussion

Cet article complète opportunément les travaux de recherche sur l'algèbre diffusés en France.
Deux remarques cependant :

- On peut regretter l'absence d'une symbolisation dans le cadre des grandeurs, alors que les problèmes posés le sollicite. Dans le problème tiré de l'ouvrage chinois, la distinction entre un animal et son prix est prise en compte (« b, w et p peuvent représenter les nombres d'animaux au lieu de leur valeur monétaire » ; « passage d'une relation aux objets à une relation à une qualité des objets »). En revanche, dans le premier « exemple en classe », pour traduire que « A a 3 fois autant de points que J », le conflit entre les formulations « $pA = 3 \times pJ$ » et « $A - 9p$, $J - 3p$ » a été géré avec la convention suivante : « Il fut décidé que si les élèves manifestent une tendance naturelle à utiliser la lettre p comme unité, elle n'apparaîtrait pas dans les expressions ou formules. ». Une autre manière de faire est possible : on peut garder la lettre p pour désigner l'unité (le point), à condition de trouver une autre dénomination pour le nombre de points de A :
  • A ne convient pas (on confondrait alors A avec une qualité concernant A : son score)
  • pA ne convient pas non plus (la lettre p ne peut pas à la fois désigner l'unité et une « partie de la variable pA »).
  En désignant par exemple par sA (ou s_A) le score de A, on peut écrire à la fois : $sA = 3 \times sJ$ d'une part et $sA = 9$ p, $sJ = 3$ p d'autre part. L'emploi de la lettre s (comme « score ») permet de préciser la grandeur à laquelle on s'intéresse, sans la confondre avec sa mesure (en choisissant p comme unité). On peut faire l'hypothèse que les grandeurs ont une place et un rôle à jouer pour « combler le fossé entre les notations intuitives et pleines de sens des élèves et le niveau plus formel du symbolisme conventionnel », ce dernier réduisant souvent les grandeurs à leurs mesures.

- Le fait que la résolution d'équation ne dépend pas d'une perception structurale des équations, et n'est pas non plus reliée à une manipulation correcte de l'équation est présenté comme une conséquence du résultat principal de l'article (les compétences de raisonnement et de symbolisation se développent indépendamment l'une de l'autre). Cette affirmation forte mérite sans doute d'être tempérée ou argumentée d'une manière plus détaillée.

Références de la partie B

Références de l'article B1

Freudenthal, H.(1968), Why to teach mathematics so as to be useful?, *Educational Studies in Mathematics* **1**, *3–8.*

Freudenthal, H. (1971), Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics* **3**, 413–435.

Freudenthal, H. (1973), *Mathematics as an Educational Task,* Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Riedel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

Gravemeijer, K.P.E. (1994), *Developing Realistic Mathematics Education*, CD-ß Press /Freudenthal Institute, Utrecht, The Netherlands.

Gravemeijer, K.P.E. (1994), Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(5)**, 443–471.

Gravemeijer, K. & Doorman, D. (1999), Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics* **39**,111–129.

Streefland, L. (1993), The design of a mathematics course. A theoretical reflection, *Educational Studies in Mathematics* **25(1-2)**, 109–135.

L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands.

Van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight – A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Inc.

Références pour l'article B2

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997), Symbolizing and mathematizing: The emergence of chains of signification, in one first-grade classroom, Kirshner, D. & Whitson, J.A. (eds.), *Situated Cognition Theory: Social, Semiotic, and Neurological Perspectives*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 151–233.

Davis, B. (1997), Listening for differences: An evolving conception of mathematics teaching, *Journal for Research in Mathematics Education* **28**, 355–376.

Gravemeijer, K. (1999), How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning* **2**, 155–177.

Meira, L. (1995), The microevolution of mathematical representations in children's activity, *Cognition and Instruction* **13**, 269–313.

Seidman, I.E. (1991), *Interviewing as qualitative research*, Teachers College Press, New York, NY.

Toulmin, S. (1969), *The uses of argument*, Cambridge University Press, Cambridge.

Walkerdine, V. (1988), *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, Routledge, London.

Les références pour l'article B3

Sur la RME* :

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gravemeijer, K. (1994), Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education* **25(5)**, 443–471.

Treffers, A. (1987), *Three dimensions: a model of goal and theory description in math-ematics instruction – the Wiskobas Project*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, D. Reidel, Dordrecht, The Netherlands.

Glaeser, G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **2(3)**, 303–346.

Leontiev, A. N. (1981), The problem of activity in soviet psychology, in J. V. Wertsch (trans. and ed.), *The concept of activity in soviet psychology*, M. E. Sharpe, Armonk, N.Y., 37–71.

Les références pour l'article B5

Streefland, L. (1996), *Learning from History for Teaching in the Future*, Freudenthal Institute, Utrecht, The Nerverlands.

Streefland, L. & Van Amerom A. (1996), Didactical phenomenology of equations, in J. Giménez, R. Campos & Gómez, B. (eds), *Arithmetics and Algebra Education : Searching for the Future*, Computer Enginiering Department, Universitat Rovira I Virgili, Tarragona, pp. 120-131.

Van Amerom, B. A. (2002), *Reinvention of Early Algebra*, CD β-Press/Freudenthal Institute, Utrecht, The Nerverlands.

Bernadette Denys
Catherine Houdement
Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Avenilde Romo-Vázquez
Laurent Vivier

PARTIE C - De l'apprentissage situé à l'*embodiment*

Articles étudiés

1. Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. & Ursini, S. (1999), Mathematical modelling: the interaction of culture and practice, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 167-183.
2. Wedege, T. (1999), To know or not to know-mathematics, that is a question of context, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 205-227.
3. Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (2003), Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 9-35.
4. Tall, D. (2006), A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 195-215.

Introduction

Nous présentons ici quatre articles qui ne présentent pas une unité théorique comme dans les sections précédentes. Les différents auteurs ont des préoccupations communes mais leurs perspectives sont différentes. Avant de rentrer dans le détail de ces articles, exposons rapidement ci-dessous en quoi ils se ressemblent et diffèrent par la confrontation des questions et des réponses apportées.

Par une référence commune aux travaux de Lave, les trois premiers articles constatent que l'apprentissage situé* est insuffisant pour expliquer les phénomènes cognitifs – l'insuffisance n'est pas explicite dans l'article de Molyneux *et al.* Toutefois, leurs constats ne portent pas sur les mêmes points et les moyens envisagés pour combler les lacunes de l'apprentissage situé sont donc différents. Leurs perspectives se distinguent nettement et, schématiquement, Núñez *et al.* utilisent les neurosciences et se positionnent en amont de l'apprentissage situé alors que l'article de Molyneux *et al.* et celui de Wedege se positionnent en aval.
Plus spécifiquement, Wedege utilise la sociologie en se basant sur les travaux du sociologue Pierre Bourdieu pour une étude portant sur un adulte – sa mère – pour qui l'école est un vieux souvenir et Molyneux *et al.* utilisent une approche socio-culturelle en se basant sur les travaux de Vygotsky pour une étude dans un cadre scolaire. Ces deux derniers articles se complètent tant dans leurs approches que dans leurs thématiques de recherche.
De leur côté, Núñez *et al.* utilisent le concept d'*énaction*, nouveau champ de recherche en neurosciences initié par Varela dans les années 1980, qui postule l'origine de la cognition dans le fonctionnement biologique de l'être humain et plus spécifiquement du cerveau. Cet article, relativement dense, se base sur de nombreuses références issues de différents champs disciplinaires pour définir un nouveau cadre de recherche sur l'apprentissage des mathématiques. Ce cadre est ensuite utilisé pour analyser une notion mathématique.
En revanche, Wedege a une approche plus pragmatique et montre sur un exemple comment le concept d'*habitus*, défini dans les années 1980 par Bourdieu, permet de compléter l'apprentissage situé lorsque le sujet apprenant est un adulte.

L'article de Tall, tout comme celui de Núñez *et al.*, se propose lui aussi d'exposer un cadre théorique pour analyser les phénomènes d'apprentissage des mathématiques. Tall tente de trouver les bases de sa construction théorique dans le fonctionnement du cerveau, mais il ne semble pas que ce soit là pour lui l'essentiel. La confrontation des deux articles trouve plutôt son intérêt dans l'utilisation du terme *embodiment*. Bien entendu la référence à une expérience du corps est commune, mais elle ne se situe pas au même moment. L'emploi de ce terme est différent dans les deux articles et nous proposons deux traductions distinctes pour rendre compte de cette différence.
Pour Tall, la construction d'un concept mathématique passe d'abord par une expérience liée à la perception et aux sens. Il se situe dans la perspective d'un apprentissage, au début de la construction d'un concept.
Núñez *et al.* ont une position différente. En se fondant sur la cognition incarnée* (*embodied* cognition*) et l'énaction, ils recherchent dans les expériences du corps des primitives et des structures qui vont conditionner notre appréhension et notre compréhension du monde. Ils se situent temporellement très tôt dans la vie d'un être humain, souvent dans la très petite enfance, et avant tout apprentissage institutionnel des concepts mathématiques.

L'apprentissage des mathématiques est ainsi expliqué par une socialisation des individus (Wedege), par une incorporation* (*embodiment**) des concepts (Tall) ou par une incarnation* (*embodiment**) biologique d'où émergent les concepts (Núñez *et al.*).

Notions-clés

Apprentissage situé* ; Contexte* ; Déjà-là* et Déjà-vu* ; Incorporation et Incarnation* (*Embodiment*) ; Métaphore conceptuelle ; Les trois Mondes* ; Structures Inferentielles* ; Procept*.

Bernadette Denys
Lecture de l'article

C1 - Mathematical modelling: the interaction of culture and practice

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R., Ursini, S. (1999)
Educational Studies in Mathematics **39,** 167-183

Introduction

Les auteurs analysent les résultats d'un projet Mexique/Grande Bretagne portant sur :

- l'utilisation des mathématiques dans la pratique d'une classe de sciences ;
- le rôle de la feuille de calcul sur ordinateur comme outil mathématique de modélisation*.

L'étude a été menée auprès d'étudiants de 16-18 ans de classes scientifiques pré-universitaires. Elle est basée sur la constatation que les trois disciplines, biologie, physique et chimie utilisent toutes des techniques mathématiques pour modéliser des situations et résoudre des problèmes.
L'objectif principal est de voir comment, dans des contextes d'éducation différents, fonctionne la modélisation mathématique dans l'enseignement scientifique[4].
Un deuxième objectif est d'étudier, dans chacun des deux contextes, l'évolution de cette modélisation en fonction de l'utilisation du tableur.
Peu d'études ont été menées jusqu'alors sur l'utilisation des mathématiques dans les pratiques scolaires scientifiques ; or, pour élaborer un point de vue culturel sur l'éducation, il n'est pas nécessaire de disposer constamment d'une comparaison culturelle (Bruner, 1996).

Avertissement : Cette étude n'est pas une étude comparative, mais elle est une étude parallèle, dans deux systèmes d'éducation différents, de l'utilisation des mathématiques en classe scientifique.

Résumé de l'article

1. Cadre de l'étude

1.1 Les références et les questions

C'est à partir de la notion de ressource structurante (*structuring resource*) (Lave, 1988) qui est la référence centrale de l'étude que se posent les questions suivantes :

- Quelles ressources les étudiants choisissent-ils pour résoudre un problème particulier ?
- Comment ces ressources structurent-elles une situation de résolution de problèmes ?

Ces ressources peuvent être de trois types :

- des ressources sociales
- des ressources sémiotiques (langage, graphique, algèbre, table)
- des ressources physiques (calculatrices)

Une *approche socio-culturelle* prenant en compte les relations entre les processus mentaux et leurs cadres culturel, historique et institutionnel est employée (Vygotsky, 1978 ; Wertsch, 1991). Plus spécifiquement, la question traitée dans cette étude est la suivante : Quelles sont les ressources mobilisées par l'étudiant quand, dans le cadre d'une discipline scientifique en environnement papier-crayon ou tableur, il résout un problème mathématique ?

[4] L'enseignement scientifique concerne la formation dans les disciplines dites scientifiques proposée au sein de la société ou de l'école donnée : sciences de la vie et de la terre, physique et chimie.

1.2 La méthode de recherche

Au Mexique, les élèves ont un cursus très varié comprenant notamment des activités artistiques. Ceux qui ont participé au projet étudiaient aussi physique, chimie, biologie et mathématiques.
Dans le système éducatif britannique, la tradition est d'étudier un nombre limité de matières après l'examen national à 16 ans (au moment de l'étude) : les élèves choisissent deux à quatre matières qu'ils étudient pendant deux ans avant un nouvel examen national. Les élèves qui ont participé au projet étudiaient trois sujets, choisis majoritairement parmi la biologie, la chimie, la physique et les mathématiques.
Les deux systèmes éducatifs favorisent chez leurs étudiants la liberté de pensée et d'action.
De manière à permettre le recueil de données variées, le projet s'est déroulé en deux phases : la première en environnement papier-crayon, la deuxième avec le tableur comme outil de modélisation. Des entretiens individuels ont complété l'expérimentation.

2. Les cultures scolaires : observations Mexique/Grande Bretagne

Cette étude est menée dans le contexte des *cultures scolaires en mathématiques et en sciences* dans les deux pays. Des observations de classe dans chacun des deux pays ont précédé l'expérimentation elle-même dans les écoles choisies.

Les observations avaient les objectifs suivants :

- découvrir comment les concepts et méthodes mathématiques sont présents dans l'enseignement des sciences
- comprendre comment les étudiants utilisent les mathématiques dans des situations de liées à l'enseignement des sciences.

2.1 Constats dans les classes de sciences

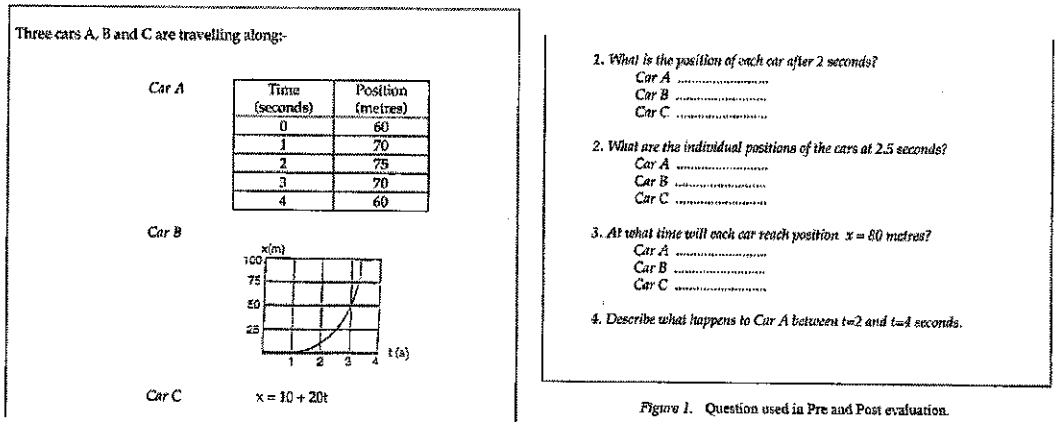
Les contrastes sont évidents en termes d'approches pédagogiques et d'influences sur les pratiques mathématiques.
Dans l'établissement mexicain concerné par l'étude, l'approche pédagogique, qualifiée de descendante* (*top-down**), consiste à proposer des règles générales qui sont appliquées ensuite dans les cas particuliers. Les manuels ne sont pas habituellement utilisés dans les classes.
Dans l'établissement britannique concerné, l'approche pédagogique, qualifiée d'ascendante* (*bottom-up**), consiste au contraire à partir d'exemples particuliers pour induire les théories générales. Les manuels sont très utilisés en physique et en chimie.
Dans l'établissement mexicain, l'activité scientifique pratique est séparée du travail de classe usuel et les enseignants sont différents. Dans l'établissement britannique, le travail expérimental fait partie intégrante de l'enseignement des sciences.

2.2 Constats dans les classes de mathématiques

Les auteurs font référence à des observations antérieures (Rojano *et al.*, 1996) où l'on retrouve les approches respectives descendante et ascendante dans les deux pays (même si les auteurs mettent en garde contre une généralisation hâtive).

3. Les pratiques mathématiques dans l'enseignement des sciences : pré-évaluation

Un présupposé des auteurs : il est essentiel que les élèves développent une aisance dans *l'établissement de liens entre une représentation mathématique et une situation physique*.
La pré-évaluation a porté en particulier sur l'établissement de ces liens (cf. Figure 1).



Three cars A, B and C are travelling along:-

Car A

Time (seconds)	Position (metres)
0	60
1	70
2	75
3	70
4	60

Car B

Car C $x = 10 + 20t$

1. *What is the position of each car after 2 seconds?*
   Car A .....
   Car B .....
   Car C .....

2. *What are the individual positions of the cars at 2.5 seconds?*
   Car A .....
   Car B .....
   Car C .....

3. *At what time will each car reach position $x = 80$ metres?*
   Car A .....
   Car B .....
   Car C .....

4. *Describe what happens to Car A between t=2 and t=4 seconds.*

Figure 1. Question used in Pre and Post evaluation.

Les différences d'approche observées entre les deux groupes d'élèves peuvent s'expliquer par les précédentes observations sur leurs cultures scolaires. L'utilisation plus dynamique d'une équation par les élèves anglais est à mettre en relation avec l'accent mis sur les fonctions et graphiques dans le curriculum mathématique britannique. Pour les élèves mexicains, l'algèbre est un moyen de résoudre des équations.
Le choix des ressources par les élèves est influencé par leur désir de précision dans l'estimation selon le type d'enseignement reçu.

L'analyse de la pré-évaluation, complétée par les observations de pratiques de classe et par les entretiens a montré de nettes différences entre les deux groupes d'élèves dans leurs réponses aux problèmes en environnement papier-crayon.
De fortes ressemblances ont été observées à l'intérieur de chacun des groupes d'élèves :

- pour les élèves mexicains, des réponses exactes déconnectées de la situation scientifique représentée ;
- pour les élèves britanniques, des réponses approchées, par exemple à l'aide d'une estimation visuelle.

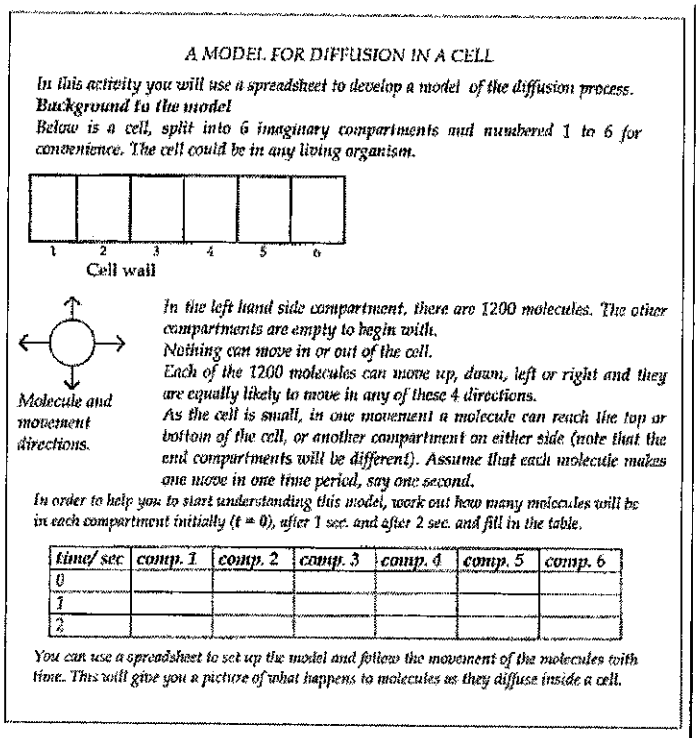
4. Modélisation mathématique avec feuilles de calcul

L'une des motivations de la mise en œuvre d'un projet sur la modélisation mathématique avec tableur était de combler le fossé entre la classe de mathématiques et la classe de sciences. Les différents registres de représentation en mathématiques tels que graphiques, tables numériques et formules, permettent une étude des différents aspects d'un phénomène et le tableur peut faciliter l'analyse de problèmes scientifiques avec la nécessité pour l'élève d'établir des liens entre les différentes représentations.

L'expression *modélisation mathématique* implique un mouvement entre une situation physique en cours de modélisation et des représentations de ce modèle* (Mason et Davis, 1991). Ogborn considère la modélisation comme « *la transformation de la pensée d'une chose en termes artificiels plus simples* » (Ogborn, 1994) : il définit un modèle comme un monde artificiel dont toutes les composantes sont connues.

Dans ce projet, la majorité des activités de modélisation étaient exploratoires : la totalité ou une partie des composantes du modèle étaient présentées aux élèves de manière à ce qu'ils puissent explorer avec le tableur différents aspects du phénomène ou de la situation à modéliser.
Les élèves mexicains et britanniques ont bénéficié de séances d'entraînement à l'utilisation du tableur avant l'expérimentation.

La situation de modélisation (cf. Figure 2) a été utilisée avec les deux groupes d'élèves. Il s'agissait de les engager dans l'étude d'une situation physique, de les aider à découvrir le modèle mathématique proposé et à produire la formule générale sous-jacente.



A MODEL FOR DIFFUSION IN A CELL

In this activity you will use a spreadsheet to develop a model of the diffusion process.
Background to the model
Below is a cell, split into 6 imaginary compartments and numbered 1 to 6 for convenience. The cell could be in any living organism.

1 2 3 4 5 6
Cell wall

Molecule and movement directions.

In the left hand side compartment, there are 1200 molecules. The other compartments are empty to begin with.
Nothing can move in or out of the cell.
Each of the 1200 molecules can move up, down, left or right and they are equally likely to move in any of these 4 directions.
As the cell is small, in one movement a molecule can reach the top or bottom of the cell, or another compartment on either side (note that the end compartments will be different). Assume that each molecule makes one move in one time period, say one second.

In order to help you to start understanding this model, work out how many molecules will be in each compartment initially (t = 0), after 1 sec. and after 2 sec. and fill in the table.

time/ sec	comp. 1	comp. 2	comp. 3	comp. 4	comp. 5	comp. 6
0						
1						
2						

You can use a spreadsheet to set up the model and follow the movement of the molecules with time. This will give you a picture of what happens to molecules as they diffuse inside a cell.

Figure 2. Front page of the Diffusion Model activity.

Les résultats montrent que, si les activités ont été proposées de manière similaire ou identique dans les deux pays (quoiqu'en anglais et en espagnol), la culture scolaire[5] mathématique a influencé le travail cognitif des étudiants dans l'utilisation des différentes ressources pour représenter et interpréter les situations physiques.

[5] La culture scolaire au sein d'une société donnée et de son école est constituée de deux éléments : le système scolaire en vigueur, hérité et actualisé dans la société considérée et l'activité de culture et de développement des facultés intellectuelles des élèves au sein de l'école considérée.

5. Conclusion

Cette étude met en évidence, à travers les différences d'approche des élèves mexicains et britanniques, le lien entre l'enseignement scientifique et la culture mathématique. Il apparaît aussi que les représentations privilégiées par un enseignant sont influencées par le type d'enseignement.
- Un enseignement plus formel semble susciter des réponses plus précises, favorisées par des représentations algébriques.
- Un enseignement plus exploratoire semble susciter des réponses approchées, liées aux représentations graphiques.

Les résultats de l'étude montrent que, pour la résolution de problèmes scientifiques, aucune approche n'est suffisamment riche pour assurer une étude complète des différents aspects d'un phénomène. Le fait de disposer d'un large éventail de représentations graphiques, algébriques et numériques est une aide puissante pour les étudiants.

L'étude montre aussi que les pratiques mathématiques dans le cadre de la classe de sciences peuvent être influencées par l'utilisation d'une approche modélisante intégrée dans un environnement informatique comme le tableur.
Le tableur a aidé les élèves mexicains à apprécier et à utiliser les représentations graphiques et numériques ; dans le même temps, le tableur a aidé les étudiants anglais à donner du sens aux représentations algébriques.
De telles approches de modélisation avec le tableur devraient faciliter une utilisation plus large des représentations.

Les relations entre cognition et culture ont été mises en évidence par Bruner (1996) et Wertsch (1991) : elles ont sous-tendu cette étude. Cette perspective met en évidence le fait que l'esprit ne peut se développer sans culture - culture médiatisée par le langage et les autres systèmes sémiotiques.

Discussion

L'utilisation de deux contextes éducatifs différents favorise l'observation et l'identification du processus de modélisation*.
Les limites de l'étude sont celles de la spécification de la culture scolaire dans chacune des deux populations concernées, compte tenu des caractéristiques de chaque système scolaire et du choix de l'école.

Catherine Houdement
Lecture de l'article

C2 - To know or not to know-mathematics, that is a question of context

Wedege, T. (1999)
Educational Studies in Mathematics **39**, 205-227

Introduction

L'article est assez anecdotique, ce qui explique ce résumé court. Il se place dans la perspective de l'apprentissage situé* (*situated learning**) dont la définition est issue de *Situated learning* de Jean Lave (Lave 1988), socio-anthropologue dont la plupart des recherches s'intéressent à l'apprentissage en termes de pratiques sociales. Il faut ajouter que Lave et Wenger (1991) ont étudié « l'apprentissage sur le tas » comme processus d'acquisition de connaissances.

Résumé de l'article

1. Les composantes cognitive et sociale

Dans ce cadre, l'apprentissage possède deux composantes : une composante cognitive ET une composante sociale.
La composante sociale est ainsi décrite : l'apprentissage passerait par des formes de participation qui se modifient et se construisent pour un accès à la pratique. Apprendre, pour des adultes, serait ainsi un processus partant d'une participation « périphérique légitime » (*Legitimate Peripherical Participation*, ou LPP) pour atteindre une participation complète (*full participation*) à une communauté de pratique : « périphérique » a plutôt le sens de centripète, il signifie une responsabilité et un engagement progressifs ; « légitime » est ici pris au sens où l'adulte est accepté comme participant à la communauté.
D'après Lave le concept de LPP permettrait de distinguer l'apprentissage de l'enseignement orienté vers un but. Ce point de vue est influencé par le public étudié par Lave, des adultes engagés dans des activités socio-culturelles.
Wedege écrit :

> *De ce point de vue, la signification n'est pas créée par des intentions individuelles, mais s'appuie sur une mise en relation, et l'analyse de la situation immédiate ne peut rendre compte ni des relations précises ni du sens de l'activité* [6].

Ceci serait une critique de l'approche structurale et phénoménologique de Bourdieu disant que l'activité sociale est son propre contexte*.

2. L'activité mathématique

L'article se base sur l'hypothèse que les mathématiques sont une activité influencée par le contexte : contexte de tâche* (*task-context**), évoquant souvent la réalité*, sans être conforme à la réalité (par exemple le problème suivant, « combien y a-t-il de jambon chez le boucher s'il en a déjà 26 kg et en commande encore 10 ? » n'est pas celui du boucher qui ne recommande du jambon que s'il n'en a plus) ; mais aussi contexte de situation* (*situation-context**) : par exemple la vie de tous les jours ou l'environnement scolaire.

---

[6] *"From this point of view meaning is not created through individual intentions but has a relational character, and the analysis of the immediate situation cannot account for the concreted connectedness and meaning of the activity"* (Wedege, 1999, p.210).

L'auteur étudie donc, d'un point de vue social, des adultes sachant et apprenant des mathématiques dans différents contextes de situations. Il montre que les contextes de situations influent sur la conscience de l'individu de savoir des mathématiques et soulève la question de la nécessité d'une « nouvelle » décontextualisation, relative à la situation, pour prendre conscience qu'on sait des mathématiques – elle se distingue de la décontextualisation nécessaire par rapport à la tâche pour construire des mathématiques.

3. L'exemple de Ruth

Elle prend comme exemple sa mère Ruth qui est restée convaincue qu'elle n'était pas douée pour les mathématiques, alors qu'au cours de sa vie sociale (pratique du bridge, organisation de tournoi de bridge) et professionnelle (bonnes aptitudes à la comptabilité) elle a montré de solides compétences arithmétiques.
Elle suppose que cet état d'esprit vient du fait que d'une part, mathématiques et arithmétique étaient séparées dans la prime scolarité de sa mère, donc celle-ci n'a pas eu l'occasion de considérer l'arithmétique comme un domaine des mathématiques ; d'autre part, elle était alors signalée comme mauvaise en mathématiques. Sa mère ne sait pas que ce qu'elle a réussi fait partie des mathématiques, parce qu'elle est convaincue que les mathématiques ne sont faites que pour les ingénieurs et qu'elle n'est pas « faite » pour les mathématiques.
Wedege propose de fonder le rapport aux mathématiques de sa mère sur le concept d'*habitus* (Bourdieu) qu'elle décrit comme un système de dispositions ancrées et durables qui pilote les pratiques et les représentations de ces pratiques.

4. Conclusion

Elle conclut sur le fait que :

- les mathématiques n'existent pas en soi pour les individus, mais qu'une décontextualisation, au sens de décontextualisation de la situation, est nécessaire pour que les individus les identifient comme mathématiques, les connaissent comme telles ;
- le concept d'habitus (« dispositions acquises et manières durables d'être ou de faire » (Bourdieu, P. (1984), *Questions de sociologie*, Ed. de Minuit p. 29) peut expliquer la difficulté à changer d'attitude face à l'apprentissage des mathématiques ;
- les concepts de LPP et d'habitus se complètent pour analyser l'évolution du rapport aux mathématiques d'adultes.

Discussion

L'article souligne l'importance et l'influence des communautés où se pratiquent les mathématiques pour les apprentissages mathématiques individuels.
Le lecteur intéressé par les communautés de pratique pourra constater dans la version française de *La Théorie des Communautés de Pratiques* de E. Wenger (Presses de l'Université Laval 2005, traduction F. Gervais) que ce thème fait l'objet d'une théorisation très poussée.

Avenilde Romo-Vázquez
Lecture de l'article

Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education

Núñez, R.E., Edwards, L.D. & Matos, J.F. (2003)
Educational Studies in Mathematics **39**, 9-35

Introduction

La recherche exposée dans cet article se situe dans une approche cognitive de la didactique, c'est-à-dire une approche qui se donne pour but de comprendre le fonctionnement cognitif de l'individu lorsqu'il apprend ou fait des mathématiques. L'article présente d'abord un bref historique de ces approches en distinguant trois grandes familles : l'approche cognitive classique, l'approche de la cognition située et, finalement, l'approche de la cognition incarnée* (*embodied* cognition*). En particulier, les auteurs développent cette dernière et montrent leurs outils d'analyse : les schémas d'image* (*image-schemata**) et les métaphores conceptuelles* (*conceptual metaphors**), lesquelles sont utilisées pour produire une analyse cognitive de la notion de continuité des fonctions.

Résumé de l'article

1. Bref historique des approches cognitives

1.1 Approche classique : le cognitivisme des années 1970

Concernant l'approche classique, les auteurs mettent l'accent sur les caractéristiques suivantes :

- L'apprentissage est vu comme un processus du raisonnement individuel, susceptible d'être expliqué le plus souvent en termes de traitement de l'information souvent expliqué quantitativement.
- La réalité* est vue comme quelque chose d'objectif existant en dehors de l'individu et ne supposant pas l'existence même d'individus, comme par exemple le théorème de Pythagore.

Les limites de cette approche se situent dans la difficulté à prendre compte de nombreux phénomènes cognitifs : sens commun, sens de l'humour et compréhension du langage naturel. Et en didactique des mathématiques, l'adéquation des modèles* avec les observations de classe et les résolutions effectives de problèmes reste faible.

1.2 Approche cognitive située

L'approche cognitive située prend en compte les facteurs linguistiques, sociaux et interactifs dans l'enseignement et l'apprentissage de façon générale et donc en mathématiques, y compris l'enseignement mathématique. Les auteurs signalent la caractéristique principale de cette approche par la citation suivante de Greeno, qui est généralement considéré comme un des initiateurs de cette approche :

> *On considère les processus d'interaction comme basiques et on explique la cognition individuelle et d'autres comportements par leurs contributions à des systèmes interactifs.* [7] *[Greeno, 1997]*

[7] *One considers processes of interactions as basic and explains individual cognitions and other behaviours in terms of their contributions to interactive systems.*

Dans cette approche, l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ne sont pas seulement des activités purement intellectuelles (Lave, 1988 ; Collins *et al.*, 1989 ; Cobb, 1994 ; Confrey, 1995), le contexte* social détermine les classes de connaissances et les pratiques qui sont construites.

Les auteurs font une transition de cette dernière approche vers la cognition incarnée :

- La cognition située reste centrée sur l'individu et les processus internes et intègre le contexte social principalement à travers des processus inter-individuels.
- La cognition incarnée partage avec la cognition située le principe que la connaissance et la cognition existent dans cet émergent de scénarios spécifiques qui sont sociaux, mais en re-questionne les systèmes explicatifs.

Prendre l'idée d'incarnation* sérieusement en compte impose selon les auteurs de re-conceptualiser la nature de la cognition en mathématiques et des mathématiques elles-mêmes. Les mathématiques ne sont pas des vérités absolues, et il faut chercher l'explication de leur stabilité et de leur efficacité dans les systèmes conceptuels situés et incarnés dont elles émanent.
Il convient de tirer les conséquences de ces explications pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

1.3 Approche de l'embodied cognition

La cognition incarnée intègre les facteurs biologiques et l'expérience physique, son objectif est de montrer que la connaissance humaine est physiquement fondée, c'est-à-dire matérialisée dans un contexte biologique et physique partagé et montre comment ceci aide à déterminer la nature de la compréhension mathématique et de la pensée.

Cette approche est fondée sur les travaux de Varela et Maturana (1987), Lakoff et Johnson, (1980, 1988) et Lakoff et Núñez (1997, 2000). La cognition incarnée considère qu'il existe un rapport très proche entre la cognition, le cerveau et l'expérience physique. La connaissance et le connaisseur sont co-déterminés. La cognition est en rapport avec tout ce qui produit un comportement adaptatif et efficace.

2 Incarnation et analyse de structures conceptuelles

L'incarnation cherche à élucider la compréhension profonde de l'ontogenèse des idées mathématiques et de leur organisation dans des systèmes conceptuels basés sur la réalité physique vécue.

Johnson (1987) montre à travers l'exemple de la notion d'équilibre (*balance*) comment une expérience physique est la base d'une connaissance abstraite. L'expérience de l'équilibre fait partie de notre vie quotidienne, on la vit dès son très jeune âge sans en être conscient. La sensation physique de l'équilibre est fondamentale pour les êtres humains et même si elle s'étend ensuite à d'autres domaines, sa source première est physique.

Elle s'exprime culturellement à travers différents langages, en art, en danse, en sciences, ce qui en fait une notion <u>socialement construite et située.</u>

2.1 Schémas-image

Ce sont des structures de schémas-image (*image-schemata*) qui rendent compte d'expériences physiques comme celle d'équilibre, cohérentes et signifiantes pour nous, et permettent leur extension conceptuelle.

Les schémas-image sont des primitives qui permettent l'organisation des expériences, en prenant en compte les rapports spatiaux qui leur sont associés : le schéma du contenant (*container-schema*) soutenant des concepts comme « dedans » et « dehors » (*IN and OUT*), le schéma source-chemin-but (*source–path-goal schema*), le schéma du contact (*contact-schema*), le schéma de la verticalité (*verticality-schema*).
Equilibrer ('*balancing*') les couleurs d'un dessin, équilibrer ('*balancing*') un compte en banque ou équilibrer ('*balancing*') un système d'équations sont ainsi vu comme des extensions conceptuelles du schéma d'image engagé dans l'expérience physique de l'équilibre ('*balance*'). Ces extensions utilisent le mécanisme important des métaphores conceptuelles* (*conceptual metaphors**).

2.2 Métaphores conceptuelles

Les métaphores conceptuelles sont des projections d'un domaine source à un domaine cible qui préservent une partie des Structures Inférentielles (*Inferential Structures*). Ce domaine cible va se comprendre en fonction des rapports existant dans le domaine source, processus presque toujours inconscient. Pour illustrer ce qui précède, les auteurs se servent de l'exemple suivant : la logique booléenne est une extension de la logique des contenants ; cette dernière est le domaine source, les structures inférentielles sont : dedans, dehors, la transitivité, développées par l'expérience physique avec des contenants dans la réalité.
Les projections métaphoriques ne sont pas arbitraires, parce qu'elles sont motivées par l'expérience quotidienne ; elles ne sont pas isolées. Elles font partie de systèmes hautement organisés et elles sont combinées de manière complexe.

2.3 Incarnation et cognition située

L'incarnation permet d'expliquer les liens qui existent entre cognition et expérience et donc fonde la connaissance et l'apprentissage situé. La cognition est certes liée au contexte, elle n'est ni individuelle, ni isolée ; le sens commun dépend aussi de schemas-images de conceptions et de pratiques partagés. Le sens est, par bien des aspects, une construction sociale, mais il n'est pas arbitraire.
La cognition est incarnée c'est-à-dire fondée biologiquement dans les individus, lesquels interagissent avec les autres ; d'où sa nature également sociale et culturelle

3. Etude de cas : la continuité

3.1 Les deux continuités

Dans le cadre de la cognition incarnée les auteurs font une analyse cognitive de la notion de continuité des fonctions. Du point de vue de la didactique usuelle cette notion présente une opposition entre le sens quotidien et le sens mathématique.
Cette opposition est illustrée à partir de la définition de la continuité qui apparaît dans un manuel « typique » d'analyse (Simmons, 1985, p. 58). L'introduction du concept au sens quotidien comme « processus continu sans trou ni saut », traduit ensuite en langage fonctionnel par « de petites variations de x entraînent de petites variations de $f(x)$ ». Puis, dans ce même manuel, suit la définition « rigoureuse »[8] de la continuité, au sens de Cauchy-Weierstrass par l'existence de la

[8] Note de traduction : les auteurs utilisent l'adjectif *rigorous* entre guillemets.

limite en a d'une fonction f définie sur un intervalle ouvert contenant a, la valeur de cette limite devant être égale à $f(a)$. La « définition en ε et δ » de la limite en un point a d'une fonction est ensuite donnée.

L'analyse développée montre que ces deux notions de continuité « naturelle » et de « Cauchy-Weierstrass » sont basées sur des métaphores différentes. De plus,

- les deux apparaissent au fil de l'histoire ;
- les deux sont mathématiquement productives ;
- les deux se retrouvent dans le discours (informel) des mathématiciens actuels ;
- les deux sont légitimes.

La continuité naturelle n'est pas une mauvaise conception à éradiquer au profit de l'autre. Il faut être conscient que ces deux conceptions sont portées par des métaphores différentes. La définition informelle d'un processus continu exprime que c'est un processus sans trou, interruption ou changement brusque. Cette définition a été utilisée par Newton et Leibniz au XVIIème siècle et Euler parle de courbe continue comme décrite librement guidée par la main.

3.2 La continuité naturelle

La continuité naturelle est décrite de la manière suivante :

a) la fonction continue relève de l'idée de mouvement, lequel se déroule dans le temps
b) il y a une idée de direction dans la fonction
c) la continuité émerge du mouvement
d) puisqu'il y a mouvement, il y a une entité en mouvement (la main pour Euler)
e) le mouvement produit une courbe statique (*static line*) sans saut
f) la courbe statique qui en résulte n'a pas de direction.

La source des termes tels que : « mouvement, statique et direction » selon cette approche est la métaphore de : « mouvement fictif » (Talmy, 1988) laquelle est résumée comme : « La Courbe EST la Structure Inférentielle* du Mouvement d'un Voyageur en train de tracer cette courbe »[9].

Des exemples de cette métaphore sont nombreux dans le langage naturel comme dans « l'autoroute 80 *va* à Sacramento » ou « après *avoir atteint* la baie, l'autoroute 80 *arrive* à San Francisco ... ». On peut conceptualiser la route par une courbe statique le long de laquelle le voyageur se déplace. Les termes : « *en mouvement, en croissant, en oscillant, en approchant de valeurs et en arrivant aux limites* » utilisés en mathématiques pour parler d'une fonction, correspondent au même mécanisme cognitif qui conceptualise la route comme une courbe et c'est le même mécanisme qui constitue la conceptualisation naturelle de la fonction continue. Bien entendu, formellement la fonction ne bouge pas, mais cognitivement il y a mouvement.

[9] *A Line IS The Motion of a Traveler tracing that line.*
Notes de traduction : la traduction de *line* par courbe, au lieu de ligne, est justifiée par la nécessaire précision mathématique. La traduction du terme *IS* en EST ne rend pas intégralement compte du jeu de mots anglais : le *IS* fait référence aux Structures Inférentielles (*Inferential Structures)*, mais il fait aussi référence au verbe être qui permet une identification entre le sujet *the line* et le complément *The Motion*.

3.3 La continuité « Cauchy-Weierstrass »

La notion de continuité au sens de Cauchy-Weierstrass peut être décomposée en au moins trois métaphores conceptuelles distinctes qui combinent leurs structures inférentielles de manière systémique.

Première métaphore :

- La Courbe EST la Structure Inférentielle d'un Ensemble de Points

La conception classique d'une courbe dit que les points sont localisés sur celle-ci et que la ligne est une entité distincte de ses points. La conception SI (Structure Inférentielle) de la droite considère que « chaque point est une entité qui contribue à constituer la droite ».

Deuxième métaphore :

- La Continuité Naturelle EST la Structure Inférentielle de l'Absence de Trou.

Cette métaphore s'oppose à la continuité « naturelle » définie ci-dessus puisque ici un segment de droite est conceptualisé comme un ensemble de points, dont la SI est l'absence de trou.

Troisième métaphore :

- La Convergence vers la Limite EST la Structure Inférentielle de la Conservation de la Proximité au Voisinage d'un Point

Dans cette métaphore, la définition de limite s'oppose aux termes « mouvement, temps et approche ». En prenant l'idée de la conservation de la proximité au voisinage d'un point, « L'absence de trous d'un ensemble de nombres réels dans un intervalle ouvert correspond à la définition de Cauchy-Weierstrass ».

4. Conclusion

La question de la nature et du développement des connaissances mathématiques fait aussi partie de la recherche en didactique. Notre conception de ce que sont les mathématiques, réalité objective et externe, « découverte » par l'homme ou produit de l'activité humaine, basée sur le langage mais aussi les expériences corporelles, influence notre conception de la didactique des mathématiques.
Les auteurs font l'hypothèse que notre conception ancienne des mathématiques engendre des problèmes d'enseignement. La stabilité acquise des mathématiques vient d'un usage commun de nos structures neuronales et corporelles qui ont construit des concepts mathématiques, mais aussi de l'intégration d'expériences quotidiennes de mouvements, relations spatiales, temporelles... La notion d'incarnation prend en compte ce point de vue.

Il importe donc de s'appuyer sur une refondation des apprentissages mathématiques : comment les étudiants construisent du sens, comment des expériences usuelles peuvent fonder, initialiser des connaissances mathématiques ou comment des connaissances peuvent émerger de la réorganisation de cartes conceptuelles, grâce à l'utilisation d'outils analytiques des sciences cognitives situées. L'étude épistémologique des errements de la construction des mathématiques, notamment des controverses historiques, contribue à cette refondation.

La cognition incarnée est une approche cognitive qui met en place des éléments théoriques pour remettre en valeur le rôle de l'intuition et des expériences physiques dans le processus d'abstraction. Elle enrichit le modèle* de la cognition située.

Discussion

A moins de faire référence à une âme transcendantale, le principe de base ne pose aucun problème : la cognition est contenue dans le biologique. En revanche, le fonctionnement de ce principe nous semble parfois un peu forcé. Par exemple trouver l'origine de l'équilibre des équations dans l'équilibre physique du petit enfant peut sembler n'être qu'une juxtaposition de deux mots identiques. Une étude linguistique qui prend appui sur des cultures différentes serait intéressante pour voir si la similitude est la règle ou non, ce qui accréditerait, ou mettrait en défaut, la thèse des auteurs.

L'étude de la continuité est intéressante, même si on peut la mener sans le principe au sens fort des auteurs : on peut très bien se limiter à une explication de concepts mathématiques par les métaphores conceptuelles* sans en situer les origines dans le biologique. De plus, le point de vue des auteurs est unilatéral car ils se focalisent, à cause de leur principe de base, sur le sens métaphore → concept. Or, le sens contraire peut être envisagé pour la recherche de représentation d'un concept abstrait. C'est ainsi que l'on peut comprendre le mouvement de la main d'Euler comme un besoin de se représenter un concept mathématique dont il sent la nécessité.

Le manuel analysé est dit « typique » ce qui mériterait, à nos yeux, une explication. Car précisément ce manuel met en opposition les deux continuités dont les auteurs de l'article veulent discuter. Ce manuel fait également reposer la définition mathématique de la continuité sur celle de limite d'une fonction, ce qui n'est pas une obligation. Ainsi, leur troisième métaphore conceptuelle repose essentiellement sur une certaine présentation des notions mathématiques.

Enfin, affirmer qu'il n'y a pas de mouvement dans la définition de « Cauchy-Weierstrass » nous paraît excessif. Dans le cadre des fonctions numériques d'une variable réelle il y a équivalence entre la continuité et la continuité séquentielle. Or, cette *métaphore* séquentielle est un mouvement, souvent monotone ; elle est en outre très présente dans le travail des mathématiciens.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian
Lecture de l'article

C4 - A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof

Tall, D. (2006)
Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 11, 195-215

Introduction

Cet article a été écrit dans le cadre de la conférence *Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood.* Il se compose de deux parties : la première présente un cadre théorique du développement cognitif sur le long terme ; la seconde utilise cette théorie pour aborder les questions à discuter dans la conférence.

Avertissement : l'article fait 18 pages hors bibliographie ; il est clair mais difficile à résumer parce qu'il est très synthétique. On commence par rendre compte de l'article de façon aussi fidèle possible : on suit le plan en deux parties en traduisant les titres et en restant aussi proche que possible du texte, jusqu'à la traduction de certains passages ; cependant, certains éléments de la deuxième partie sont omis car jugés plus loin de la problématique générale.

Résumé de l'article

1. Développement cognitif de la pensée mathématique de l'enfant à l'adulte

1.1. Le cadre théorique d'ensemble

Pour étudier l'apprentissage mathématique de la prime enfance à l'âge adulte, Tall utilise deux cadres théoriques très différents : la cohérence et la structure des mathématiques et le développement biologique de l'esprit humain. Le cerveau présente beaucoup d'aspects essentiels qui nous permettent de construire une pensée mathématique sophistiquée. Il a une structure complexe, avec des traitements en parallèle, qui mène beaucoup de routines de manière subconsciente et n'a besoin de se centrer que sur un petit nombre d'items conscients pour pouvoir prendre des décisions cohérentes. Ce fonctionnement repose sur deux aspects complémentaires :

- la compression d'idées importantes en concepts "pensables" sur lesquels on peut maintenir l'attention,
- des connexions entre de tels concepts qui peuvent être construites dans des schémas d'action *(action-schemas)* dynamiques qui connectent des actions successives et des schémas de savoir *(knowledge schemas)* plus généraux qui relient les idées dans des réseaux de relations.

La compression peut se produire de différentes manières :

- automatisation des schémas d'action par leur pratique ;
- compression de processus en concepts pensables souvent par l'utilisation d'un symbole qui réfère à la fois au processus et au concept (ex : 2+3 comme addition ou somme), ce qu'il a appelé *procept** ;
- catégorisation de concepts avec un nom pour désigner des classes auxquelles on peut référer en tant que concepts pensables (quadrilatère, nombre premier...) ;
- expériences de pensée qui amènent des connexions entre des propriétés ;
- des systèmes axiomatiques peuvent être considérés comme des concepts pensables ;
- à un niveau supérieur des schémas de savoir comme la géométrie euclidienne peuvent être considérés comme des systèmes pensables.

La faculté biologique qui permet cette construction de modules mentaux est le renforcement des liens entre les neurones qui réussissent et la suppression de ceux qui sont moins performants. De tels liens peuvent être utiles dans de nouvelles situations mais ils peuvent aussi être trompeurs ; le développement des idées mathématiques ne peut donc pas se réduire à un simple développement logique.
La nécessité de la compression du savoir n'entraîne pas seulement la création de liens mais aussi la suppression d'autres qui sont moins importants pour prendre des décisions. Ainsi, la signification dans le monde réel* qui est essentielle dans la construction initiale des idées peut devenir moins importante à mesure que les liens entre les idées symboliques se développent et que la pensée de l'individu se centre plus sur l'activité mathématique et moins sur les sources perceptives initiales.

1.2. Les trois mondes mentaux des mathématiques

La construction à long terme du savoir mathématique utilise la puissance du cerveau biologique avec une entrée à travers la perception, une sortie par l'action et le pouvoir interne de ré-assembler les idées en structures mentales utilisables. Il fait l'hypothèse que la pensée mathématique se développe à travers trois mondes* mentaux reliés entre eux, chacun avec une manière particulière d'accroître sa sophistication (Tall, 2004) :

- un monde conceptuel-incorporé* (*conceptual-embodied world**) basé sur les objets où l'on réfléchit à partir des sens pour définir et déduire des propriétés, de l'expérience par la pensée à la preuve euclidienne.
- un monde proceptuel-symbolique* (*proceptual-symbolic**) fondé sur les actions, qui comprime les schémas d'actions en procepts (dualité processus-concept)
- un monde formel-axiomatique* (*formal-axiomatic**) centré sur la construction de systèmes axiomatiques fondés sur des définitions formelles et la preuve ensembliste.

1.3. Enfance : les origines de la pensée mathématique

Notre développement mathématique est construit sur notre héritage génétique à partir de nos expériences. On ne naît pas comme une table rase : le nouveau-né a des structures neuronales qui traitent l'information ; il a des perceptions, et par exemple déjà un sens primitif de la numérosité (*numeracy*) observable dès l'âge d'un mois.

1.4. Déjà-là (set-before) *et déjà-vu* (met-before)

*Déjà-là** : concept mathématique établi dans nos gènes, que nous avons dès la naissance ou presque, comme celui de numérosité.

*Déjà-vu**[10] : construction antérieure rappelée pour aborder une situation nouvelle.

*Délà-là** relève plutôt de l'inné et *déjà-vu** de l'acquis mais Tall ne fait pas de différence dans la suite et utilise le terme déjà-vu *(met-before)* pour désigner les deux. Il considère qu'en pratique, la différence entre les deux est moins importante que leur point commun : la manière dont elles nous prédisposent à penser des situations nouvelles. Par exemple, les concepts scientifiques ont des origines génétique et expérientielle subtilement entrelacées.
Quand on fabrique un curriculum, on pense davantage à l'aspect positif des déjà-vus en oubliant les effets négatifs liés aux aspects qui ne fonctionnent plus dans le nouveau contexte*. L'auteur donne des exemples à partir de la soustraction, de l'algèbre.

[10] La traduction tente de conserver le jeu de mots, même si *met-before* se traduirait plutôt par vu-avant.

1.5. Compression du savoir par la centration sur l'effet

L'idée fondamentale pour un développement cognitif puissant est la compression des idées en concepts pensables qui peuvent être reliés de manière de plus en plus flexibles. C'est facilité par un parallèle important entre les compressions dans les mondes de l'incorporation* (*embodiment**) et du symbolisme. Ce parallèle a été identifié par Poynter (2004) à propos des vecteurs : elle a noté un glissement d'attention essentiel de l'action d'une main qui translate un objet sur une table à l'effet de cette action qui peut être vu comme un vecteur libre (longueur et direction). L'idée se révèle générale pour la compression d'une action en concept pensable pourvu que l'élève soit averti de l'effet précis sur lequel se centrer (exemple des fractions équivalentes : prendre 2 parts sur 4 ou 3 parts sur 6 a le même effet du point de vue de la quantité). Le glissement de l'action vers l'effet est particulièrement important pour le symbolisme. Des symboles différents représentant des séquences d'actions différentes qui ont le même effet sont considérés comme des manières différentes de représenter le même procept (exemple 2n+2 et 2 (n+1) ; voir Gray & Tall, 1994) ; la relation entre action et effet donne des constructions parallèles dans les mondes de l'incorporation conceptuelle et du symbolisme proceptuel.
Des glissements successifs amènent une compression continue du savoir, des procédures pas à pas à la possibilité de choisir et à un processus encapsulé comme objet pensable via des symboles (figure 1).

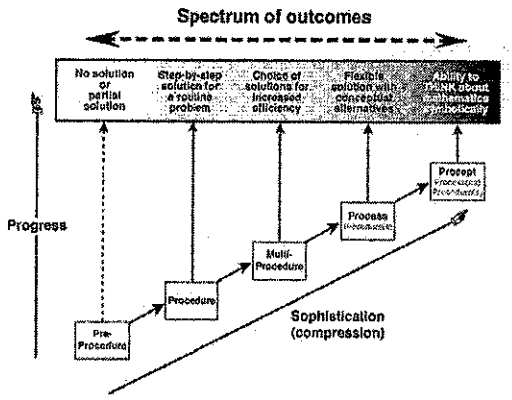


Figure 1: Spectrum of outcomes from increasing compression of symbolism (expanded from Gray, Pitta, Pinto & Tall, 1999, p. 121).

1.6. Complexité croissante et simplicité

A mesure que les deux mondes de l'incorporation conceptuelle et du symbolisme proceptuel deviennent plus sophistiqués, des différences significatives apparaissent dans la manière dont ils opèrent. En particulier certaines incorporations peuvent devenir plus complexes alors que le sens mathématique reste simple ; par exemple (voir p. 201), pour représenter par des longueurs et des aires (a+b) (a-b) = a^2 - b^2, il faut distinguer les cas a<b et a>b alors que le calcul algébrique fonctionne dans tous les cas. Des étudiants sont bloqués en voulant continuer à se référer à un sens concret alors qu'il est beaucoup plus simple et plus efficace de travailler sur les symboles. L'auteur prend encore l'exemple des exposants (p. 202) et de la difficulté pour certains de passer des exposants entiers (nombre de facteurs) aux exposants fractionnaires.

1.7. Réflexion sur les propriétés conduisant à la preuve

A mesure que les enfants se développent sur le plan cognitif, en réfléchissant sur les propriétés des processus et des objets rencontrés il peuvent faire des inférences ; divers moyens de preuve se développent ainsi à la fois dans le monde incorporé* (*embodied**) des objets et dans le monde symbolique des procepts. La manière dont la preuve se développe dans le monde incorporé est bien représentée par la théorie de Van Hiele : partant de l'observation globale d'objets pour décrire des propriétés spécifiques de ces objets puis utiliser ces propriétés comme définitions pour arriver à des déductions qui peuvent amener à accepter des principes généraux comme ceux sur lesquels est basée la preuve euclidienne. Dans le monde symbolique aussi, la preuve part de l'observation de régularités (comme 3+2 = 2+3 induite de la manière de compter les objets) qui peuvent se généraliser en écritures algébriques. Dans les mondes incorporé et symbolique, les définitions et la déduction sont basées sur l'expérience des propriétés des objets et des actions qui sont symbolisées comme procepts. Dans le monde axiomatique formel, on exprime les propriétés en termes ensemblistes en inversant l'ordre : on donne les définitions et les propriétés de base comme axiomes et on déduit les autres propriétés par preuve déductive. On a donc des arguments de natures différentes dans les trois mondes : dans le monde incorporé 2+3 = 3+2 parce que je le vois ; dans le monde symbolique parce que je peux le calculer ; dans le monde formel parce que x+y = y+x est un axiome. Tall reprend à Rodd (2000) le terme de garantie de vérité (*warrant for truth*) pour caractériser les preuves. Dans le monde incorporé, une garantie de vérité est apportée d'abord parce que *je vois que c'est vrai,* ensuite en s'appuyant sur des principes qu'on a établis. Dans le monde proceptuel, la vérité est garantie par un calcul ou par l'algèbre comme arithmétique généralisée. Dans le monde formel, on spécifie des axiomes et des définitions et on déduit par preuve formelle. Le passage au monde formel demande un changement considérable dans la manière dont l'apprenant doit construire sur les déjà-vus de l'incorporation et du symbolisme qui doivent être repensés pour atteindre les preuves formelles des théories axiomatiques. L'auteur fait référence à la thèse de Pinto soutenue en 1998 à Warvick et à un article de Weber (2004) qui montrent que ce passage peut se faire de manière différente selon les étudiants.

2. Implications théoriques

Dans cette partie il donne des réponses brèves aux questions posées pour la conférence.

2.1. Comment les notions enseignées à l'école élémentaire influencent-elles les apprentissages ultérieurs ?

Il a déjà abordé ce point avec les déjà-vus. On insiste toujours sur le fait que l'enseignement élémentaire doit s'appuyer sur des activités concrètes mais on oublie souvent que le passage à un autre contexte demande souvent de repenser fortement les idées. Le cerveau biologique apporte l'expérience antérieure pour interpréter les situations nouvelles. Il pense donc qu'il faut analyser le développement des idées sur le long terme (des années et pas l'année en cours) pour aider les professeurs à identifier les déjà-vus inappropriés afin que les élèves puissent atteindre la flexibilité nécessaire à l'université. Cela demande de réfléchir au processus de compression, en partie en donnant aux actions des incorporations signifiantes permettant de se centrer sur l'effet, et en partie par l'attention au phénomène symbolique correspondant au moment où la centration passe de la procédure à son effet. Cela suppose aussi de comprendre (avec les déjà-vus) pourquoi des idées efficaces dans une situation doivent être repensées dans une autre. Il faut tenir compte dans l'apprentissage de l'usage des concepts sur le long terme mais, au moment où il apprend, l'étudiant doit apprendre en cohérence avec son savoir actuel, donc le phénomène des déjà-vus est inévitable et la réorganisation des savoirs est un point important de la construction des curriculums qui est souvent absente.

2.2. Quels sont les rôles respectifs dans l'apprentissage des procédures et des concepts ?

Dans la théorie des trois mondes, le savoir conceptuel renvoie à des schémas de savoir qui peuvent être utilisés de manière flexible. Le savoir procédural renvoie à des actions pas à pas avant qu'elles soient condensées en procepts. Cela renvoie à la théorie APOS (*Action-Procédure-Objet-Schéma*) (Cottrill *et al.,* 1996). Le savoir procédural apparaît à la fois dans la monde incorporé et dans le monde symbolique avec la possibilité d'un lien éclairant entre la centration "incorporée" sur l'effet d'une action et l'encapsulation symbolique correspondante (voir figure 4). A mesure que des concepts sont construits, il peuvent à leur tour être encapsulés en un concept pensable, ce que Skemp (1979) a imaginé dans sa théorie varifocale (*varifocal theory*).

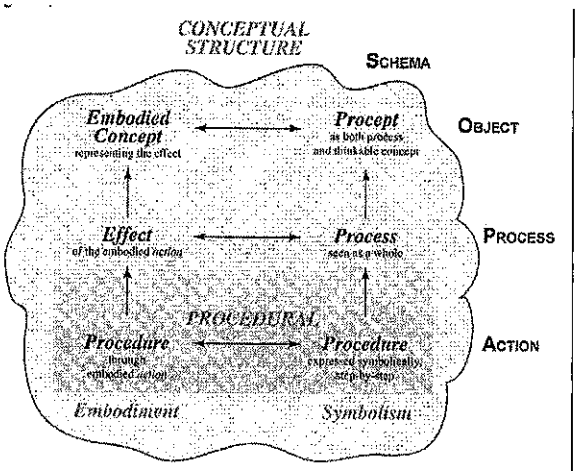


Figure 4: Procedural knowledge as part of conceptual knowledge.

Mais on a toujours une tension entre incorporation comme donnant du sens et incorporation comme obstacle cognitif (Gray & Tall, 1994). A tous les niveaux, on rencontre un partage des élèves entre ceux qui passent à une utilisation flexible des symbolismes et ceux qui restent attachés à des aspects particuliers d'une incorporation et à un usage non flexible du symbolisme. Les meilleurs étudiants ont tendance à se centrer sur le symbolisme plus que sur la visualisation. C'est ce que la communauté mathématique tend à valoriser ; cependant, il y a des exemples de mathématiques de haut niveau combinant les deux. Construire à la fois sur l'incorporation et le symbolisme amène à différents types d'esprits mathématiques.

2.3. Sur quelles bases et selon quels critères doit-on organiser l'enseignement des mathématiques pour obtenir une sorte d'apprentissage naturel ? Comment en élaborer les grandes lignes ? Comment déterminer des points de passage nécessaires ?

Son cadre théorique montre une évolution des idées qui peut favoriser ou inhiber la formation des concepts mais aussi la différence entre les individus. Tall fait l'hypothèse que l'idée de se centrer sur l'effet des actions peut être donnée aux professeurs et aux élèves mais il ne pense pas que toute la population puisse bénéficier d'un seul style d'enseignement. Donner des lignes d'action larges peut être utile aux professeurs et aux élèves mais institutionnaliser des structures peut avoir à la fois des effets positifs et négatifs. Son point de vue personnel est que le développement mathématique de l'enfant nécessite un professeur-mentor qui ne comprend pas seulement la structure mathématique mais aussi le rôle des déjà-vus. Il fait référence à une étude du King's college (Askew *et al.*, 1996 qui classait les professeurs en trois catégories : les transmissifs, les découvreurs et les connexionnistes et, sans surprise, ce sont les connexionnistes qui ont de loin les meilleurs résultats.

2.4. Quels sont les rôles respectifs de l'intuition et de la rigueur ? Comment moduler les deux aspects ?

Dans sa théorie l'intuition n'est pas seulement une faculté humaine fondamentale, c'est une faculté cognitive qui se développe sur les déjà-vus construits antérieurement. Les expériences de pensée donnent des garanties de vérité avant qu'on puisse parler de rigueur et de déduction formelle. Il y a un hiatus entre le point de vue du mathématicien dans le monde formel et celui de l'élève qui construit sur l'incorporation et la symbolisation dans des contextes dont la sophistication augmente. Les idées de preuves commencent dans les mondes de l'incorporation et des opérations symboliques et sont très différentes selon les étapes du développement. Il faut respecter les conceptions de l'enfant tout en cherchant à accroître la clarté et la précision. Même dans le monde formel, les preuves sont rarement complètement rigoureuses. On tient compte du contexte : dans Stewart & Tall (1977), il a introduit pour les étudiants l'idée de preuve contextuelle (*contextual proof*) pour expliquer qu'à mesure que les mathématiques se complexifient, on se concentre sur les idées importantes : la distinction entre ce qui peut être affirmé dans un contexte et ce qui doit être explicité soigneusement est un art qu'il faut expliquer aux étudiants.

Les sections 2.5, où Tall parle de résolution de problèmes et d'un cours qu'il a fait pendant 20 ans sur la base du livre de Mason et al. *(1982), et 2.6, très brève sur la logique sont omises.*

2.7. Que dire des tentatives passées de saisir l'apprentissage des mathématiques globalement en termes de contenus et de méthodes ?

Après les mathématiques modernes et une approche centrée sur l'enfant, une nouvelle synthèse est nécessaire qui prenne en compte la riche structure des mathématiques disponible dans notre culture mais qui tienne compte aussi de la diversité des développements des enfants. Son avis est qu'on a besoin de voir la cohérence et la simplicité des mathématiques comme un tout, mais qu'on a besoin aussi de regarder comment des apprenants différents construisent ces idées sur le long terme de manière que la simplicité chèrement gagnée soit construite et reconstruite de manière appropriée pour chaque individu.

Discussion

Si on pense à la géométrie, il semble que la géométrie III de Houdement & Kuzniak est bien au niveau formel, mais la distinction entre les deux premiers mondes me paraît différente de celle entre géométries I et II. Ici, le changement de niveau est lié à la symbolisation de l'action alors que chez Houdement & Kuzniak (2006) elle est plus liée à la nature des objets.

Souvent, les termes *embodiment** et *embodied** sont presque utilisés aux sens de contextualisé et de contextualisation parce que Tall réfère simplement au fait d'avoir un contexte* matériel avec des objets sensibles, suivi bien entendu d'une intériorisation et l'on a traduit uniformément ces termes par incorporation* et incorporé*. Le sens d'*embodiment* est très proche de l'utilisation des termes "contextualisation" et "décontextualisation" dans la dialectique outil-objet. On trouve beaucoup de points communs entre les deux cadres théoriques exception faite de la symbolisation : elle est implicite dans la dialectique outil-objet, bien que très présente dans l'ingénierie didactique. La symbolisation était contenue dans les jeux de cadres mais le lien avec la conceptualisation reste à faire.

Références de la partie C

Référence de l'article C1

Bruner, J. (1996), *The Culture of Education*, Harvard University Press, U.S.A.

Lave, J. (1988), *Cognition in Practice*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Mason, J. & Davis, D. (1991), *Modelling with Mathematics in Primary and Secondary Schools*, Deakin University Press, Australia.

Nuffield Advanced Science (1994), *Chemistry Students Book*, Longman, U.K.

Nunes, T., Schliemann, A. & Carraher, D. (1993), *Street Mathematics and School Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

Ogborn, J. (1994), 'Overview: the nature of modelling', in H. Mellar, J. Bliss, R. Boohan,

Ogborn, J. & Tompsett, C. (eds.), *Learning with Artificial Worlds: Computer based modelling in the curriculum*, Falmer Press, U.K.

Rogoff, B. & Lave, J. (1984), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*, Harvard University Press, U.S.A.

Rojano, T., Sutherland, R., Ursini, S., Molyneux, S. & Jinich, E. (1996), 'Ways of solving algebra problems: The influence of school culture', in Puig, L. & Gutierrez, A. (eds.), *Proceedings of the Psychology of Mathematics Education Conference*, Vol. 4, Valencia, Spain, pp. 219–226.

Rojano, T., Sutherland, R., Jinich, E., Mochón, S. & Molyneux, S. (1996), 'Las prácticas matemáticas en las materias científicas de la enseñanza media: el papel de la modelación', in Fernando Hitt (ed.), *Investigaciones en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Sutherland, R., Jinich, E., Mochón, S., Molyneux, S. & Rojano, T. (1995), 'Mexican/British Project on the role of spreadsheets within school-based mathematical practices', *Final Report to the Spencer Foundation*, Chicago, Ill. Grant No. B-1493.

Sutherland, R., Mochón, S., Jinich, Molyneux, S. & Rojano, T. (1996), 'Cultura y cognición: El caso de las matemáticas y las ciencias', in Fernando Hitt (ed.), *Investigaciones en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Sutherland, R. (1998), *Mathematics Education: A Case for Survival*, Inaugural Professorial Lecture, May 14th 1998, Graduate School of Education, University of Bristol.

The Royal Society/Joint Mathematical Council of the UK (1997), *Teaching and Learning Algebra*, Pre-19, The Royal Society/JMC, London.

Vygotsky, L.S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, U.S.A.

Wertsch, J. (1991), *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*, Harvester Wheatsheaf, U.S.A.

Références pour l'article C2

Bourdieu, P. (1980), *Le sens pratique*, les éditions de minuit, Paris.

Lave, J. (1988), *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge University press, New York.

Lave, J. & Wenger, E. (1991), *Situated Learning. Legitimate Peripherical Participation*, Cambridge University press, New York.

Lave, J. (1993), 'The practice of learning' in Chaiklin & Lave (eds) *Understanding Practice. Perspectives on Activity and Context*. Cambridge University Press. New York, pp 3-34.

Références pour l'article C3

Cobb, P. (1994), 'Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development', *Educational Researcher* 23 (7), 13-20.

Collins, A., Brown, J.S. & Neuman, S. (1989), 'Cognitive apprenticeship: Teaching students the craft of reading, writing, and mathematics', in L.B. Resnick (ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser Erlbaum*, Hillsdale, NJ, pp. 453-494.

Confrey, J. (1995), 'A theory of intellectual development', *For the Learning of Mathematics* 15(1), 38-48.

Greeno, J. (1997), 'On claims that answer the wrong question', *Educational Researcher*, 26, 5-17.

Johnson, M. (1987), *The Body in the Mind*, University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1980), *Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G. & Johnson, M. (1988), *Philosophy in the Flesh*, Basic Books, New York.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1997), 'The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics', in L. English (ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 21-89.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind brings Mathematics into being*, New York, Basic Books.

Lave, J.. (1988), *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge University press, New York.

Maturana, H. & Varela, F. (1987), *The Tree of Knowledge: The Biological Roots of Human Understanding*, New Science Library, Boston.

Simmons, G.F. (1985), *Calculus with Analytic Geometry*, McGraw-Hill, New York.

Talmy, L. (1988), 'Force dynamics in language and cognition', *Cognitive Science*, 12 (1), 49-100.

Varela, F., Thompson, E. & Rosch, E. (1991), *The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience*, MIT Press, Cambridge, MA.

Références pour l'article C4

Askew, M., Brown, M., Rhodes, D. & William, D. (1997) *Effective teachers of numeracy*, Final report of a study carried out for the Teacher Training Agency 1995-96 by the School of Education, King's College, London.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996) Understanding the limit concept: beginning with a co-ordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior,* 15, 167-192.

Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education,* 26, 115-141.

Houdement, C., Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique des mathématiques et des sciences cognitives*, vol 11, pp 175-216.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1982) *Thinking Mathematically,* London, Addison Wesley.

Pinto, M.M.F. (1998) *Students' understanding of real analysis.* PhD thesis, Warwick University.

Poynter, A. (2004) *Effect as a pivot between action and symbols: the case of vector,* PhD thesis, university of Warwick http://www.annapoynter.net.

Rodd, M.M. (2000) On mathematical warrants. *Mathematical Thinking and Learning,* 2(3), 221-244.

Skemp, R.R. (1979) *Intelligence, learning and action. A foundation for theory and practice in education,* John Wiley, Chichester.

Stewart, I.N. & Tall, D.O. (1977) *Foundations of mathematics,* Oxford: University Press.

Tall, D.O. (2004), *Thinking through three worlds of mathematics,* PME 28. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp 281-288, Bergen, Norway.

Weber, K. (2004) Traditional Instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course, in *Journal of Mathematical Behavior,* 23, 115-133.

ANNEXE 1 - Préalables à une analyse didactique de l'emploi des modèles

François PLUVINAGE

Il est intéressant de noter que la considération des modèles est intervenue en didactique avant son plein développement dans les mathématiques au service de multiples branches. Ainsi, Efraim Fischbein énonçait dès les années 1970 des conditions pour que des modèles soient *générateurs*. Son article à ce sujet, publié par la revue Activités et Recherches Pédagogiques, n'est guère accessible (la revue a paru de 1971 à 1975), c'est pourquoi voici quelques références d'articles d'Efraim Fischbein parus dans la revue *For the learning of mathematics* :

1983, *Intuition and proof*, Vol.3-2, 9-18

1989, *Tacit models and mathematical reasoning*, Vol.9-2, 9-14

1990, *The autonomy of mental models*, Vol.**10**-1, 23-30 (article écrit avec Tirosh D., Stavy R. & Oster A.)

Un exemple simple qui me paraît bien approprié pour éclairer certaines idées de Fischbein est la résolution du problème des poules et des lapins. Un énoncé de départ, dans lequel on peut modifier à volonté les données numériques, est le suivant : *35 têtes, 90 pattes. Combien de poules, combien de lapins ?*

Trois solutions, essentiellement différentes dans leur démarche, peuvent être considérées.

- Le raisonnement dit arithmétique consiste à envisager le cas où les 35 animaux seraient de la même espèce. Si par exemple tous étaient des poules, il y aurait 70 pattes. L'idée est alors de considérer l'effet d'une substitution, en l'occurrence d'un lapin à une poule : il s'ajoute 2 pattes. On voit qu'il y a besoin de 10 telles substitutions pour atteindre les 90 pattes, d'où la solution.
- La résolution algébrique consiste à noter par exemple x le nombre de poules et y le nombre de lapins. L'énoncé se traduit par un système ($x+y=35$; $2x+4y=90$) qu'il n'y a plus qu'à résoudre.
- Une démarche modélisante amène à nous représenter par exemple une tête par un rond et une patte par un trait (cf. Figure 1). Une fois dessinés les 35 ronds, on distribue les pattes, à raison tout d'abord de 2 pour chaque tête-rond. Au bout des 35, on en a distribué 70, et on recommence alors la distribution à raison de 2 par tête, qui s'ajoutent aux deux précédentes. On voit ainsi apparaître 10 quadrupèdes.

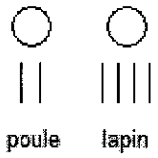


Figure 1

Note : Pour le premier raisonnement, certains ont pu parler de *fausse supposition*. Leur donne tort l'exemple historique qui figure dans le papyrus Rhind à la suite de l'énoncé : « En ajoutant son quart à un nombre, on obtient 15. Quel est ce nombre ? » Dans ce cas, la méthode de fausse supposition conduit à dire : « Je choisis un candidat, par exemple 4 de manière à ce que son quart soit entier. Le quart est 1, et 4 + 1 = 5. La réponse demandée est 15, soit le triple de celle que j'ai obtenue. Mon candidat est donc à multiplier par 3, d'où la réponse 12. »

Pour la démarche modélisante qui nous intéresse, on voit qu'elle s'est appuyée sur des objets (ronds et traits) et des opérations (associations de traits avec un rond). En nous plaçant du point de vue de Fischbein, nous serons intéressés par le fait qu'il provoque un fonctionnement intellectuel

simple, plus élémentaire en tout cas que celui qui préside aux deux premières solutions, et l'extension à la résolution d'une multitude de problèmes analogues (ce qui amène Fischbein à qualifier un modèle de générateur).

Dans cette situation, nous ne sommes pas très loin de l'acception du terme « modèle » qui se rencontre par exemple quand il est question de modèle réduit. Un modèle réduit ne dispose pas de toutes les fonctionnalités de l'objet représenté, mais seulement des plus caractéristiques ; ainsi certains instruments d'une automobile ne sont pas miniaturisés dans une maquette du véhicule. La démarche présentée ici est analogue : Nous avons en quelque sorte construit des maquettes de poules et de lapins.

La considération du cas étudié n'a d'intérêt pour l'enseignement qu'en tant qu'exemple illustratif d'une méthode dont la niche écologique de fonctionnement est suffisamment vaste. Il s'agit en général d'une utilisation très concrète d'un registre de représentation sémiotique dans un espace de travail du type « géométrie I » au sens de Kuzniak et Houdement. Bien évidemment le travail géométrique sera dans beaucoup d'études sensiblement plus avancé.

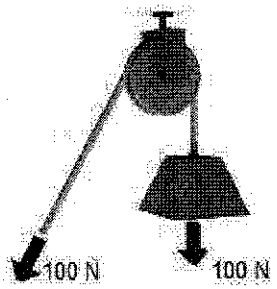


Figure 2

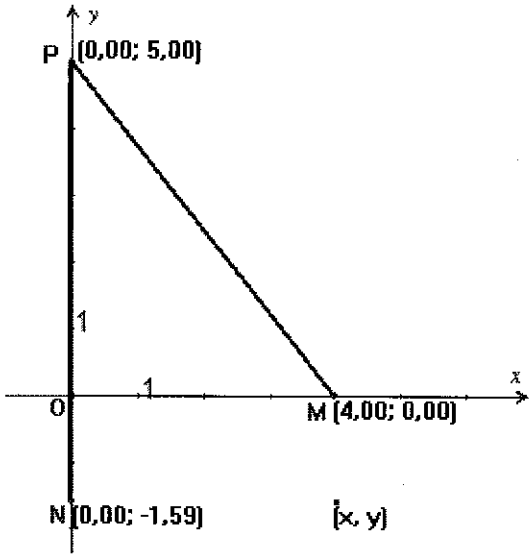


Figure 3

Supposons par exemple que, dans le cadre d'un enseignement des fonctions, on s'intéresse à un dispositif à poulie. La poulie illustrée sur la figure 2 (extraite de Wikipedia) peut être employée pour qu'une bête de trait puisse tirer de l'eau d'un puits. Puisque les distances à la poulie du seau et de l'animal ont une somme constante et égale à la longueur de corde, la relation entre la position de l'animal et la hauteur du seau est très simple si la poulie se trouve à la même hauteur que le point d'attache à l'animal.

Mais en général la poulie P et le point d'attache M ne sont pas à la même hauteur. On peut se rapporter à repère naturel Oxy ayant un axe horizontal passant par M et un axe vertical passant par P (cf. Figure 3). Le point M a pour abscisse x et le point N de fixation au seau a pour ordonnée y. L'étude de la fonction $y = f(x)$ peut donner lieu à une approche par utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, comme le montre la figure. La construction géométrique n'y apparaît pas ; elle s'appuie sur l'égalité de la somme de distances PM + PN à une constante qui est la longueur de la corde (ayant un rôle de paramètre dans ce problème).

Le modèle est alors prêt à fonctionner, quelles que soient mes connaissances du concept de fonction et ma capacité à obtenir la formule algébrique de f. C'est tout son intérêt.

Dans ce second exemple, l'espace de travail géométrique est le cadre de construction du modèle, lequel donne naissance à un objet du registre des représentations graphiques des fonctions. La commande "trace" du logiciel, appliquée au point (x, y), visualisera le graphique de la fonction f. Par ailleurs, le recours à un espace de travail géométrique un peu plus avancé permettra d'obtenir f sous forme algébrique ; notons que le statut de cette expression algébrique est donc ici celui d'un aboutissement et non pas, à la différence de ce qui se passe souvent, celui d'une donnée de départ.

Les pratiques qui viennent d'être illustrées sont mises en œuvre dans plusieurs contextes*. Signalons entre autres la *Realistic Mathematics Education* (RME*) expérimentée aux Pays-Bas au Freudenthal Institut, le cycle ACE (Action, activité en Classe, Exercices) correspondant à la mise en pratique de la théorie APOS (Ed Dubinsky et al.) et l'expérience Weblab, qui a été conduite depuis la Grande-Bretagne dans plusieurs pays. Il est également intéressant de pointer la présence du terme *modèle* dans les standards de la NCTM aux Etats-Unis.

Certaines rubriques mathématiques, comme les probabilités, amènent à naviguer entre simple représentation et modèle. Dans le cas du calcul des probabilités, les arborescences notamment relèvent de ce phénomène. En l'absence de règles opératoires, ce sont des représentations, déjà utiles pour traiter de certains problèmes comme la probabilité d'obtention d'un certain résultat à la suite du lancer de deux dés. Si de tels arbres sont complétés par des probabilités de transition, ils peuvent prétendre au statut de modèle et vont par exemple s'avérer intéressants pour des études de probabilités conditionnelles (voir par exemple Parzysz B. (1993), Des statistiques aux probabilités: exploitons les arbres, *Repères-IREM* 10, 91-104).

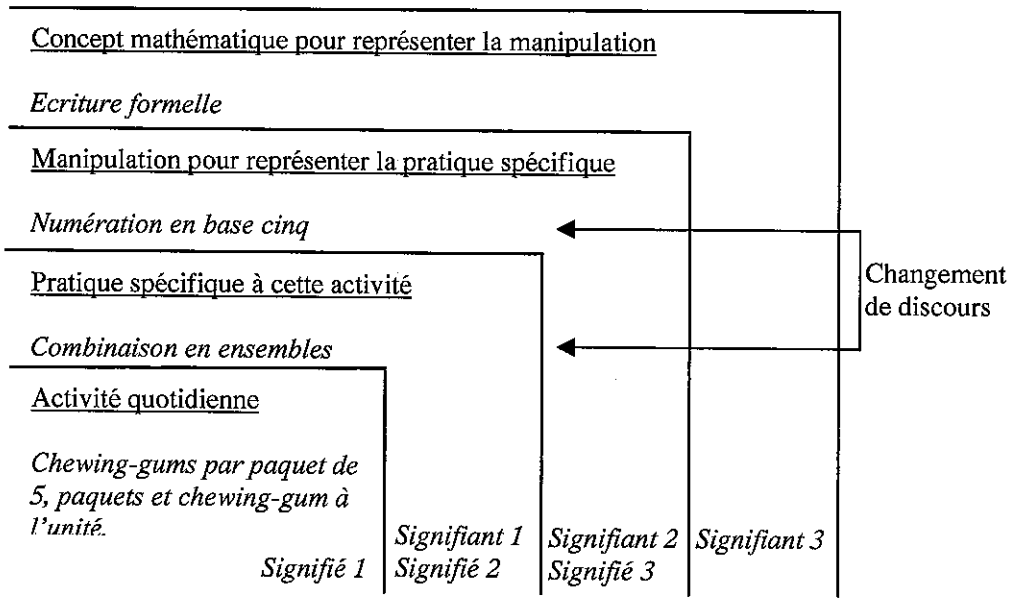
Pour une étude didactique des modèles dans l'enseignement des mathématiques, l'aspect social ne saurait être évacué. Il est ainsi évident que les développements de la présence des mathématiques (et partant, de mathématiciens) au cours des 25 dernières années dans un nombre considérable de secteurs d'activité humaine ne peut manquer d'avoir des répercussions dans le monde de l'enseignement. En particulier, ce sont les modèles et leurs multiples usages, rendus souvent très accessibles grâce à l'informatique, qui sont à la base de cette extension des besoins. Un côté positif pour le professeur de mathématique en est la valorisation de sa discipline. Mais ce peut aussi être un piège, sous forme d'un miroir aux alouettes qui, après d'autres leitmotive (tels *learning by doing* et *problem solving*), conduirait à considérer sans examen approfondi de la question que le recours à des modèles est LA réponse aux problèmes de l'enseignement, et à culpabiliser les professeurs qui ne les intégreraient pas dans leurs pratiques professionnelles.
http://standards.nctm.org/document/chapter3/index.htm
Site de l'association américaine des professeurs de mathématique.

ANNEXE 2 - Glossaire général

APPRENTISSAGE SITUE (*situated learning*) [C2]
Wedege (C2, p. 210) affirme que le concept d'apprentissage situé connecte les deux points de vue des processus d'apprentissage, processus cognitifs et pratique sociale, en s'appuyant sur une citation de Lave and Wenger (1991) : "*l'apprentissage comme une partie intégrante d'une pratique sociale générative dans le monde vécu*"[11].

CHAÎNE DE SIGNIFICATION (*Chain of signification*) [B]
Un article important quant aux évolutions récentes des *Chaînes de signification* est celui de Presmeg (2006). La théorie sous-jacente est notamment la sémiotique de Peirce.
Certains articles étudiés [B1, B2] utilisent cette notion en s'appuyant sur des références plus anciennes.
Pour Walkerdine (1988) une *chaîne de signification* est une succession de signes imbriqués d'une certaine façon. Un signe 1 est constitué par un signifié 1 et un signifiant 1, mais on crée un nouveau signe 2 quand l'étudiant devient capable de prendre le signe 1 comme signifié 2 pour un signifiant 2 plus élaboré [B2]. Il s'agit de faire en sorte que les étudiants créent des liens entre les différents signes, entre deux représentations successives.

Les chaînes de signification permettent d'étudier une "pratique". La figure suivante représente le schéma général (Hall, 2000) où figure l'exemple (en italique) explicité par Presmeg (2006).



Dans les usages originaux, le premier niveau était nécessairement "une activité de la vie quotidienne". Toutefois, de même que la mathématisation peut être verticale, des *chaînes de signification* peuvent être envisagées exclusivement au sein des mathématiques, c'est le cas dans B2.

[11] *Learning as an integral part of generative social practice in the lived-in-world* (Lave and Wenger, 1991).

CONTEXTE

CONTEXTE [A1, A2]

Les termes de situation, contexte et expérience sont synonymes. [A2]
L'expérience est tirée de la réalité qui peut s'appuyer sur un artefact ou un objet.

- *contexte interne de l'élève*. Ses conceptions, ses schèmes... [A1, A2]
- *contexte interne du professeur*. Ses conceptions, ses objectifs éducatifs... [A1, A2]
- *contexte externe*. Les signes, objets, contraintes physiques... associés au domaine culturel concerné. [A1, A2]
- *contexte de modélisation*. Il comprend les raisons du choix des aspects pris en compte dans la modélisation et les artefacts disponibles pour construire le modèle.

CONTEXTE [C2]

Wedege [C2], dans une approche pédagogico-sociologique de l'éducation mathématique pour des adultes, utilise le mot contexte dans deux expressions :

- contexte de tâche (*task-context*): contexte évoqué ou convoqué par la tâche, comme par exemple le contexte de la vie réelle, le contexte des mathématiques. Les domaines de réalité et les domaines d'expérience (*experience field*) sont des contextes de tâche.
- contexte de situation (*situation-context*): contexte où s'apprennent et s'utilisent des mathématiques. Par exemple l'école, et dans l'école la plage dévolue à la physique ou à la biologie, la vie réelle, la pratique professionnelle sont des contextes de situation.

La plupart des recherches s'intéressent aux contextes de tâche, peu aux contextes de situation, bien que la signification dépende du contexte de situation.

Voir aussi **Enseignement contextualisé** et **Problème en situation.**

DÉJA-LÀ (*set-before*), DÉJÀ-VU (*met-before*) [C4]

Un *déjà-là* est un concept mathématique que nous avons dès la naissance ou presque, comme celui de nombre. Ce concept relève de l'inné.
En revanche, un *déjà-vu* est une construction antérieure rappelée pour aborder une situation nouvelle. Ce concept relève de l'acquis contrairement au déjà-là.
Tall fait une différence de principe entre un déjà-là et un déjà-vu, mais en pratique c'est leur point commun qui est crucial : la manière dont ils nous prédisposent à penser des situations nouvelles. Tall utilise le terme de déjà-vu pour désigner la même fonction remplie par les déjà-là et déjà-vus.

DOMAINE DIDACTIQUE D'EXPÉRIENCE (DDE) (*field of experience*) [A]

C'est un domaine de la culture que l'enseignant et les élèves peuvent reconnaître comme suffisamment unitaire et homogène du point de vue de leurs schèmes de connaissances. Un DDE est constitué par le contexte interne de l'élève, celui du professeur et le contexte externe associé au domaine culturel visé au cours des activités de classe. Un DDE peut être relié à différents contextes ou peut être seulement évoqué. Un DDE peut être construit graduellement en utilisant différents contextes.
Les termes « domaine didactique d'expérience », « domaine d'expérience didactique », « domaine d'expérience » sont utilisés concurremment par les chercheurs de l'équipe génoise de Boero. On notera que le qualificatif « didactique » s'applique plutôt à l'expérience qu'au domaine, et qu'il serait donc plus approprié de parler de « domaine d'expérience didactique ».

ENSEIGNEMENT CONTEXTUALISE [A]
C'est un enseignement construit sur l'activité de modélisation au cours de laquelle le concept est introduit comme modèle ou comme artefact pour construire ce modèle et ceci contrairement à l'enseignement traditionnel construit sur la présentation des concepts.

ENSEIGNEMENT REALISTE DES MATHEMATIQUES (REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION, RME) [B]
Le courant *Realistic Mathematics Education (RME)* est une approche pédagogique qui prône le développement des connaissances mathématiques en étroite liaison avec le monde réel (*real world*). C'est ce dernier terme qui est utilisé dans les travaux du courant RME étudiés alors que le terme *réalité (reality)* est peu présent – il en est de même dans le monde anglo-saxon en général.
Le terme *realistic* a généré de nombreuses interprétations erronées. Il s'agit en fait de la traduction du mot hollandais *zich realiseren* qui signifie s'imaginer, se représenter. Cette conception donnera lieu a la notion de *modèle étendu* où vont intervenir des situations souvent désignées sous le terme de problème en situation (*context problem*).

Voir **Monde réel, Problème en situation, modèle, modélisation.**

INCARNATION, INCARNE (*embodiment, embodied*) [C3]
Pour Nùñez et al. les termes *embodiment* et *embodied* sont employé pour exprimer que tout est inscrit dans le corps biologique. Ce point est posé comme un principe de base et son sens est beaucoup plus fort que dans l'utilisation qu'en fait Tall [C4].

Voir **Incorporation**

INCORPORATION, INCORPORÉ (*embodiment, embodied*) [C4]
Tall [C4] fait explicitement référence au corps et c'est ce qui lui permet d'initier le processus qui mène au concept. Ce terme diffère donc de l'intériorisation, uniquement intellectuelle. L'usage et le sens des termes *embodiment* et *embodied* sont néanmoins plus faibles dans l'approche de Tall que dans celle de Nùñez et al. [C3].

Voir **Incarnation**

MATHÉMATISATION [B, C1]
Le concept de mathématisation a été introduit dès 1971 par Freudenthal (1971), pour qui les mathématiques ne sont pas seulement un corpus de connaissances mais une activité humaine qui consiste à résoudre et chercher des problèmes et plus généralement à organiser un domaine issu de la réalité ou un domaine des mathématiques. Ce processus est désigné sous le nom de mathématisation.
Dans l'enseignement, il est important de prendre en compte le processus de mathématisation et de ne pas l'envisager simplement en privilégiant la démarche qui part des mathématiques vers le monde réel – démarche descendante (*top-down*). Pour les tenants de l'enseignement réaliste des mathématiques, il est même essentiel de lui préférer une démarche ascendante (*bottom up*) qui s'appuie sur le monde réel pour faire construire aux élèves les objets mathématiques.

MATHÉMATISATIONS VERTICALE ET HORIZONTALE [B]
Deux façons de mathématiser sont utilisées suivant que l'on travaille sur des problèmes issus de la réalité ou sur l'organisation du monde mathématique :

- la mathématisation *horizontale* qui part du *monde réel* pour arriver au monde des mathématiques ;
- la mathématisation *verticale* qui se déplace à l'intérieur du monde des mathématiques pour y introduire des nouveaux concepts mathématiques (et donc des symboles) de plus en plus abstraits.

Voir **Mathématisation**

METAPHORE CONCEPTUELLE (*Conceptual Metaphor*) [C3]
Une métaphore conceptuelle est un ensemble de projections (*mappings*) d'un domaine source sur un domaine cible qui préservent une partie des structures inférentielles. Le domaine cible va se constituer en fonction des rapports existants entre les éléments du domaine source. Ce processus d'élaboration est presque toujours inconscient.

Voir **Structure Inférentielle, Schémas-image.**

MODÈLE (*Model*)

MODÈLE [A]
Ce terme est utilisé habituellement pour caractériser une forme de métaphore, c'est-à-dire un glissement entre deux espaces sémantiques non disjoints. Boero utilise le terme de modèle pour caractériser une représentation simplifiée d'une portion de la réalité utilisée pour "visualiser" certains aspects de celle-ci, généraliser des propriétés, permettre des comparaisons ...Un modèle est construit sur un Domaine Didactique d'Expérience en utilisant des artefacts matériels ou formels, qui sont eux-mêmes des modèles.
L'utilisation de modèles comme artefacts pour construire de nouveaux modèles, suivie de l'élaboration de modélisations des modèles caractérise des formes de raisonnements élaborés de haut niveau.

MODÈLE [B]
Dans le cadre théorique de la RME, la notion de modèle est intégrée dans la dynamique des modèle de / modèle pour (*model of / model for*) et des chaines de signification. Dans ce cadre, il faut noter quelques variations sur le sens de ces diverses expressions au sein des différents articles, toutefois il semble qu'il soit possible d'en faire une synthèse.
Dans le courant de la RME, les représentations s'inscrivent dans des chaînes de signification avec deux sens légèrement différents selon les auteurs. Les articles B1 et B2 illustrent ces deux tendances :

- Selon Van Den Heuvel [B1], un modèle est une représentation de la situation qui reflète nécessairement les aspects mathématiques essentiels qui sont pertinents pour la situation. Un modèle peut prendre des formes variées : matériel, croquis, situation paradigmatique, schéma, diagramme, symbole, ... recouvrant ainsi une diversité de situations. Un modèle peut donc exister matériellement s' il s'agit d'un artefact, par exemple une maquette, ou relever de la représentation sémiotique, au sens de Raymond Duval, si le langage naturel ou d'autres registres symboliques sont utilisés, seuls ou en combinaison.

- Dans l'article de Yackel *et al.* [B2] le modèle est présenté avec un sens *a priori* un peu différent (et apparemment moins répandu) : les modèles ne sont pas vus comme des entités qui sont externes aux apprenants, mais sont plutôt engendrés cognitivement à partir des significations que les étudiants créent eux-mêmes. En d'autres termes, quand les étudiants résolvent des tâches qui sont proposées dans le monde concret et qu'ils discutent des problèmes avec leurs pairs, ils développent des modèles de la situation concrète. Toutefois, les exemples donnés pour les modèles relèvent des représentations sémiotiques (dessins de la situation, par exemple) et les auteurs considèrent qu'il y a une relation dialectique entre l'utilisation de symboles et le raisonnement mathématique, au sens de Meira (1995).

L'approche de Yackel *et al.* rejoint celle de Van den Heuvel quand on considère les représentations sémiotiques que les étudiants produisent des différentes situations.

MODÈLE DE / MODÈLE POUR (*Model of / model for*) [B]
Pour étudier une situation particulière, l'étudiant construit un *modèle de* la situation. Ce modèle peut être objectivé puis être utilisé dans les raisonnements pour étudier une nouvelle situation, il devient alors un *modèle pour.* Les chaînes de signification, représentations sémiotiques successives pour les différents modèles, sont très impliquées dans ces différents aspects du concept de modèle. Les modèles développés par les étudiants progressent le long de ces chaînes de signification.

Voir Modélisation, Chaîne de signification, **Annexe 1**

MODÉLISATION

MODÉLISATION [A]
Dialectique entre la situation observée et ses représentations à travers différentes étapes d'interprétation (schémas). On suppose alors que ces différentes étapes correspondent à différents modèles [A2, A3].
Les processus de modélisation à différents niveaux d'abstraction sont majoritairement organisés en disciplines. Les mathématiques constituent une exception car elles ne sont pas en général caractérisées par leur domaine d'application mais par le type d'artefacts qu'elles utilisent [A3].

MODÉLISATION (*Modelling, modeling*) [B]
C'est la dynamique entre modèle de et modèle pour que les auteurs de la RME qualifient de *modélisation*. Ce terme n'apparaît pas dans tous les textes et la signification peut varier selon les occurrences. La modélisation peut parfois être entendue en un sens étroit [B3] ou dans un sens plus large [B1]. Il semble cependant que la deuxième signification soit la plus répandue.
Pour Linchevski [B3], la modélisation est une transformation de connaissances spontanées, extérieures à l'école, en connaissances mathématiques scolaires.
Pour Van Den Heuvel [B1], en revanche, si la modélisation inclut le passage du réel aux mathématiques, on ne peut l'y réduire car les transformations successives créent de nouveaux objets, internes aux mathématiques, de plus en plus formels, susceptibles de constituer tour à tour des modèles de / modèles pour.
Ajoutons qu'une approche socio-constructiviste est explicitement nécessaire, d'après Yackel et al. [B2], pour l'élaboration des *modèles de* et donc de la modélisation.

Voir Modèle, **Annexe 1**

MONDE RÉEL (*Real world*) [A]
Ce terme a été défini avec plus de précision par Blum (2002) en faisant référence au monde des mathématiques. Le monde apparaît ainsi divisé en deux parties : les mathématiques et le reste du monde. Cela conduit à la définition relative suivante de *real world*, qui est tout ce qui a rapport avec la nature, la société ou la culture, en incluant aussi bien la vie quotidienne que les sujets rencontrés à l'école ou à l'université ou les disciplines scientifiques et savantes différentes des mathématiques (ICMI Study 14 Discusion Document, p. 4).

LES TROIS MONDES (*the three worlds*) [C4]
Le monde conceptuel-incorporé (*conceptual-embodied world*), le monde proceptuel-symbolique (*proceptual-symbolic world*) et le monde formel-axiomatique (*formal-axiomatic world*).
Tall (2004) explicite trois mondes pour décrire une vue d'ensemble du développement cognitif en mathématiques au travers de l'analyse de théories psycho-cognitives, d'approches anatomo-fonctionnelles et l'*human embodiment* :

- Le premier monde, *conceptuel-incorporé*, rassemble les perceptions que nous avons des objets physiques, ainsi que les conceptions forgées dans notre propre monde mental de significations et qui utilisent notamment des images visuelles et spatiales.
- Le deuxième monde, *proceptuel-symbolique*, est le monde des symboles utilisés pour agir en mathématiques (calculer, manipuler etc.). Des actions sont « encapsulées » dans des symboles, par exemple les actions d'énumérer et de compter sont encapsulées dans le nombre. Ainsi, on passe des processus et des actions à un symbolisme pour penser les concepts mathématiques, dans la perspective d'agir sur ces derniers.
- Le troisième monde, *formel-axiomatique*, est basé sur les définitions formelles des propriétés fondatrices des structures telles que groupe, corps, espace vectoriel etc. On se coupe de l'expérience réelle, ce sont les axiomes qui définissent la base pour l'élaboration de structures mathématiques cohérentes.

PROBLÈME EN SITUATION (*Context Problem*) [B4]
Un problème en situation renvoie à une réalité expérimentable par les étudiants. Cette expérimentation n'est pas nécessairement réalisée dans l'univers physique décrit par l'énoncé du problème, elle peut être envisagée sur des modèles, dans une acception très large du terme.
Dans l'ingénierie de la RME, le cahier des charges impose à un problème d'être en situation.

PROCEPT [C4]
Le monde proceptuel-symbolique (*proceptual-symbolic*) est fondé sur les actions, il comprime les schémas d'actions en procepts marquant ainsi la dualité processus-concept. Voir Gray et Tall (1994).

Voir **Les trois Mondes.**

RÉALITE [A]
La réalité n'est pas nécessairement un objet matériel ou un phénomène naturel ou social. Elle peut se présenter comme une situation sous une forme modélisée, comme un schéma d'un certain phénomène, ou être construite à partir d'un ensemble de modèles.

Voir **Enseignement réaliste des mathématiques, Monde réel.**

STRUCTURE INFÉRENTIELLE (*Inferential Structure*) [C3]
Une structure inférentielle provient de notre expérience corporelle et elle peut être considérée comme un organisateur logique de nos expériences physiques. C'est par le biais des métaphores conceptuelles que ces structures inférentielles seront utilisées dans d'autres contextes et domaines. Une primitive qui permet une organisation des expériences est appelée un schéma d'image (*image-schema*).
Les auteurs de l'article C3 donnent comme exemple la logique des contenants d'où provient la logique booléenne où le processus métaphorique conduit d'une abstraction de l'expérience physique à un domaine mathématique abstrait. Le schéma du contenant (*container-schema*) est le domaine source. Il soutient des concepts comme « dedans » (*IN*) et « dehors » (*OUT*) et les structures inférentielles associées sont : dedans, dehors, la transitivité.

Voir **Métaphore conceptuelle.**

Entrées en anglais

Bottom-up (ascendante), voir **Mathématisation**

Chain of signification (**Chaîne de signification**)

Conceptual Metaphor (**Métaphore conceptuelle**)

Conceptual-embodied world (monde conceptuel-incorporé), voir **les trois Mondes**

Context (**Contexte**)

Context Problem (**Problème en situation**)

Embodied (**Incarné, Incorporé**)

Embodiment (**Incarnation, Incorporation**)

Field of experience (**Domaine Didactique d'Expérience, DDE**)

Formal-axiomatic world (monde formel-axiomatique), voir **les trois Mondes**

Horizontal mathematizing (**Mathématisation horizontale**)

Inferential Structure (**Structure Inférentielle**)

Image-schema (Schéma d'image), voir **Structure Inférentielle**

Mathematizing (**Mathématisation**)

Met-before (**Déjà-vu**)

Model (**Modèle**)

Model for (**Modèle pour**)

Modeling, Modelling (**Modélisation**)

Model of (**Modèle de**)

Procept (**Procept**)

Proceptual-symbolic world (monde proceptuel-symbolique), voir **les trois Mondes**

Real world (**Monde réel**)

Realistic mathematics education (**Enseignement réaliste des mathématiques**)

Reality (**Réalité**)

Set-before (**Déjà-là**)

Situated learning (**Apprentissage situé**)

Situation-context (contexte de situation), voir **Contexte**

Task-context (contexte de tâche), voir **Contexte**

Top-down (descendante), voir **Mathématisation**

The three Worlds (**Les trois Mondes**)

Vertical mathematizing (**Mathématisation verticale**)

Bibliographie du glossaire

Blum, W. (2002) ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document *Educational Studies in Mathematics, vol* 51, **1-2**, 149-171

Freudenthal, H. (1971), Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics, vol* **3**, 413-435.

Gray, E.M. & Tall, D.O. (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education,* 26, 115-141.

Hall, M. (2000). *Bridging the gap between everyday and classroom mathematics: An investigation of two teachers' intentional use of semiotic chains.* Unpublished Ph.D. dissertation, The Florida State University.

Lave, J. & Wenger, E.(1991), *Situated Learning. Legitimate Peripheral Participation*, Cambridge University Press, New York.

Meira, L. (1995), The microevolution of mathematical representations in children's activity, *Cognition and Instruction* **13**, 269–313.

Presmeg, N. (2006), 'Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics', *Educational Studies in Mathematics, Vol. 61n°1-2,* p.165.

Tall, D.O. (2004), Thinking through three worlds of mathematics, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* pp. 281-288, Bergen, Norway.

Walkerdine, V. (1988), *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, Routledge, London.

ANNEXE 3 - Les articles de l'étude

Van Amerom, B.A. (2003), Focusing on informal strategies when linking Arithmetic to early Algebra, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 63 – 75. **[B5]**

Bartolini-Bussi, M. & Boero, P. (1998), Teaching and Learning Geometry in Contexts, *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. ICMI study. Ed. Kluwer (Dordrecht, NL)*, 52-62. **[A1]**

Dapuento, C. & Parenti, L. (1999), Contributions and obstacles of contexts in the development of mathematical knowledge, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 1-21. **[A3]**

Douek, N. (1999), Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 89-110. **[A2]**

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999), Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 111-129. **[B4]**

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003), The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 9-35. **[B1]**

Linchevski, L. & Williams, J. (1999), Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 131-147. **[B3]**

Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. & Ursini, S. (1999) Mathematical modelling : the interaction of culture and practice, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 167-183. **[C1]**

Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (2003) Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 9-35. **[C3]**

Tall, D. (2006), A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 195-215. **[C4]**

Yackel, E., Stephan, M., Rasmussen, C. & Underwood, D. (2003), Didactising: continuing the work of Leen Streefland, *Educational Studies in Mathematics* **54**, 101-126. **[B2]**

Wedege, T. (1999) To know or not to know-mathematics, that is a question of context, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 205-227. **[C2]**

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE 1
1. La question de base 1
2. Articuler une certaine réalité et un monde extérieur avec les mathématiques 1
2.1 Un enseignement contextualisé des mathématiques 2
2.2 L'approche de la *Realistic Mathematics Education* 2
2.3 De l'apprentissage situé à l'*embodiment* 3
3. Annexes 3
Bibliographie de l'introduction générale 3
PARTIE A - Un enseignement contextualisé des mathématiques 5
Articles étudiés 5
Introduction 5
Notions-clés 6
A1 - Teaching and Learning Geometry in Contexts 7
Introduction 7
Résumé de l'article 7
1. Contextes réels et géométrie 7
2. Exemples de DDE 8
3. Conclusion 9
Discussion 10
A2 - Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school 11
Introduction 11
Résumé de l'article 11
1. Objectifs 11
2. L'expérimentation 12
Discussion 14
A3 - Contributions and Obstacles of Contexts in the Development of Mathematical Knowledge 15
Introduction 15
Résumé de l'article 15
1. Enseignement en contexte : perspectives générales 16
2. Quelques aspects de l'enseignement incorporé 18
3. Conclusion : quelles perspectives de développements ? 19
Discussion 20
Références de la partie A 21
PARTIE B - L'approche de la *Realistic Mathematics Education* (RME) 23
Articles étudiés 23
Introduction 23
Notions-clés 24
B1 - The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from longitudinal trajectory on percentage 25
Introduction 25
Résumé de l'article 25
1. Le cadre théorique 25
2. Le cas du *bar-model* 27
Discussion 27
B2 - Didactising: Continuing the Work of Leen Streefland 29

Introduction 29
Résumé de l'article 29
1. Le premier exemple : les deux pré-images, *modèle* et *chaîne de signification* 29
2. Le deuxième exemple : l'élaboration de l'*argumentation* comme *post-image* 31
3. Le troisième exemple : l'élaboration de l'*écoute générative* comme *post-image* et l'évolution des *points de départ réalistes* 32
Discussion 33
B3 - Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers 35
Introduction 35
Résumé de l'article 35
1. Les modèles 35
2. Les expérimentations 36
3. Les résultats 37
Discussion 37
B4 - Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example 39
Introduction 39
Résumé de l'article 39
1. L'enseignement des fonctions 39
2. L'apport historique 40
3. L'expérimentation au lycée 40
Discussion 41
B5 - Focusing on Informal Strategies when Linking Arithmetic to Early Algebra 43
Introduction 43
Résumé de l'article 43
1. L'enchaînement de l'enseignement proposé 43
2. Exemples en classe 45
3. Conclusion 46
Discussion 47
Références de la partie B 48
PARTIE C - De l'apprentissage situé à l'*embodiment* 51
Articles étudiés 51
Introduction 51
Notions-clés 52
C1 - Mathematical modelling: the interaction of culture and practice 53
Introduction 53
Résumé de l'article 53
1. Cadre de l'étude 53
2. Les cultures scolaires : observations Mexique/Grande Bretagne 54
3. Les pratiques mathématiques dans l'enseignement des sciences : pré-évaluation 55
4. Modélisation mathématique avec feuilles de calcul 55
5. Conclusion 57
Discussion 57
C2 - To know or not to know-mathematics, that is a question of context 59
Introduction 59
Résumé de l'article 59
1. Les composantes cognitive et sociale 59
2. L'activité mathématique 59
3. L'exemple de Ruth 60

4. Conclusion 60
Discussion 60
C3 - Embodied cognition as grounding for situatedness and context in Mathematics Education 61
Introduction 61
Résumé de l'article 61
1. Bref historique des approches cognitives 61
2 Incarnation et analyse de structures conceptuelles 62
3. Etude de cas : la continuité 63
4. Conclusion 65
Discussion 66
C4 - A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof 67
Introduction 67
Résumé de l'article 67
1. Développement cognitif de la pensée mathématique de l'enfant à l'adulte 67
2. Implications théoriques 70
Discussion 72
Références de la partie C 73
ANNEXE 1 - Préalables à une analyse didactique de l'emploi des modèles 77
ANNEXE 2 - Glossaire général 81
Entrées en anglais 88
Bibliographie du glossaire 89
ANNEXE 3 - Les articles de l'étude 91
Table des matières 93

TITRE :

Du monde réel au monde mathématique – un parcours bibliographique et didactique

COORDINATEURS :

Alain Kuzniak, Bernard Parzysz, Laurent Vivier

AUTEUR/S :

Caroline Bulf, Christine Chambris, Jacques Colomb, Bernadette Denys, Catherine Houdement, Alain Kuzniak, Ana Mesquita, Cécile Ouvrier-Buffet, Bernard Parzysz, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, François Pluvinage, André Pressiat, Avenilde Romo-Vasquez, Laurent Vivier.

RESUME :

Ce parcours bibliographique décrit un certain nombre d'approches didactiques qui appuient l'apprentissage des mathématiques sur le monde réel. Sont notamment présentées l'approche des Domaines Didactiques d'Expérience (DDE) proposant un enseignement contextualisé des mathématiques et l'approche de la *Realistic Mathematics Education (RME)* développée par l'Ecole hollandaise. En complément de ces deux grands courants didactiques, il est présenté des théories fondées sur l'embodiment ou l'apprentissage situé.
Chaque approche est traitée globalement puis approfondie par des résumés commentés d'articles significatifs. L'ensemble de ces résumés est complété par une bibliographie thématique qui permet au lecteur intéressé de poursuivre l'étude de ces théorie. Les termes spécifiques de ces théories sont explicités et traduits dans un glossaire analytique.

MOTS CLES :

Apprentissage situé, contexte, embodiment, modèle, mathématisation, modélisation, réalité.

IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache – Reprographie Nadine Locufier
www.iremp7.math.jussieu.fr
Dépôt légal : septembre 2008 – ISBN : 2-86612-301-7