

**Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, pour prouver que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.**

**Serge Reymond**

Mont-Pélerin, Switzerland

E-mail: [serge.reymond@bluewin.ch](mailto:serge.reymond@bluewin.ch)

## ABSTRACT

*Dans cet article nous utilisons une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins une solution périodique coupant  $[-i - 1; -i]_{O_x}$  et  $[i; i + 1]_{O_x}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et une coupant  $]-\infty; -n]_{O_x}$  et  $[n; \infty[_{O_x}$ , pour prouver que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine et que pour tous les polynômes de degré pair les solutions périodiques coupent un intervalle borné de  $O_y$ , pour détecter les solutions périodiques en étudiant une transformation linéaire de  $O_y$ , pour prouver que les nombres de solutions périodiques pour  $F(x)$  et pour  $\lambda F(x)$  sont différents, pour donner cinq nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, pour donner des exemples de fonctions pour lesquelles il y a au moins une solution périodique coupant  $[-i - 1; -i]_{O_x}$  et  $[i; i + 1]_{O_x}$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ , pour donner des conditions sur les coefficients de polynômes pour qu'il y ait des solutions périodiques et pour déterminer une borne inférieure à la probabilité qu'il n'y ait pas de solutions périodiques*

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019

## PRINCIPAUX RESULTATS

Les méthodes utilisées pour détecter localiser et dénombrer les solutions périodiques de l'équation de Liénard  $\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$  avec  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  sont traditionnellement celles de l'analyse S'agissant d'un problème de nature géométrique c'est selon ce point de vue que nous avons abordé la question

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

- 1) Pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques à savoir au moins une solution périodique coupant  $[-i - 1; -i]_{Ox}$  et  $[i; i + 1]_{Ox}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et au moins une coupant  $]-\infty; -n]_{Ox}$  et  $[n; \infty[_{Ox}$

$$2) \text{ Pour } F(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} n^{|x|+1} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ impair } [i; i + 1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{|x|}{x} n^{|x|+1} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ pair } [i; i + 1[ \end{cases} \quad \text{avec } i \in \mathbb{Z} \text{ et } k, n \in$$

$\mathbb{R}^*$  et  $n \geq 2$  pour laquelle il y a une infinité de solutions périodiques dont au moins une qui coupe  $[-i - 1; -i]_{Ox}$  et  $[i; i + 1]_{Ox}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}^*$

Nous donnons d'autres exemples

- 3) Pour  $F(x) = \sin(\pi x)$  il y a au moins  $10^6$  solutions périodiques avec au moins une qui coupe  $[-i - 1; -i]_{Ox}$  et  $[i; i + 1]_{Ox}$  pour tout  $1 < i \leq 10^6$  En réalité il y a très probablement une infinité de solutions périodiques  
Nous donnons d'autres exemples

- 4) Lorsque  $F(x)$  est un polynôme de degré impair, les éventuelles solutions périodiques sont contenues dans un espace borné autour de l'origine et nous donnons deux méthodes générales pour déterminer cet espace

Par exemple, si  $F(x) = nx^3 - mx$  avec  $m$  et  $n > 0$  alors les éventuelles solutions périodiques sont situées dans l'espace

$$\left[ -e^{-1} \frac{4}{3} (2+m) \sqrt{\frac{2+m}{3n}}; e^{-1} \frac{4}{3} (2+m) \sqrt{\frac{2+m}{3n}} \right]_{Ox} \times \left[ -\frac{2}{3} (2+m) \sqrt{\frac{2+m}{3n}}; \frac{2}{3} (2+m) \sqrt{\frac{2+m}{3n}} \right]_{Oy} \text{ et}$$

ne coupent ni  $\left[ -\sqrt{\frac{m}{n}}; \sqrt{\frac{m}{n}} \right]_{Ox}$  ni  $\left[ \min \left\{ -\frac{2m}{3} \sqrt{\frac{m}{3n}}; -\sqrt{\frac{m}{n}} \right\}; \max \left\{ \frac{2m}{3} \sqrt{\frac{m}{3n}}; \sqrt{\frac{m}{n}} \right\} \right]_{Oy}$

- 5) Lorsque  $F(x)$  est un polynôme de degré pair, les éventuelles solutions périodiques coupent un intervalle borné de  $Oy_+$  et nous donnons une méthode générale pour déterminer cet espace

Par exemple si  $F(x) = mx^{2n}$  alors les éventuelles solutions périodiques

$$\text{coupent } \left] -\left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{nm}\right)^{\frac{1}{2n-1}}; 0 \right]_{Oy}$$

- 6) Le nombre de solutions périodiques pour  $F(x)$  n'est pas égal au nombre de solutions périodiques pour  $\lambda F(x)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}/\{1\}$   
7) Nous présentons une «Nasse» une «Zone de pêche» une «Ligne de pêche» un «Filet de pêche» et un «Peigne» qui sont des algorithmes polynomiaux qui détectent

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

la présence de solutions périodiques et le cas échéant en donnent une localisation précise

Ces méthodes permettent de botaniser toutes sortes de nouvelles configurations de solutions périodiques par exemple avec des  $F(x)$  non symétriques

- 8) L'étude des solutions périodiques pour les polynômes factorisables sur  $\mathbb{R}$  se ramène à l'étude des solutions périodiques pour les polynômes de la forme  $F(x) =$

$\lambda x \prod_{i=1}^n (x - c_i)$  tels que  $\lambda \neq 0$  et  $c_i \in [-1; 1]$  pour tout  $1 \leq i \leq n$

- 9) Si  $F(x)$  est un polynôme de degré  $n$  alors la probabilité qu'il n'y ait pas de solution

périodique est supérieure ou égale à  $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \geq 2 \text{ et pair} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \geq 3 \text{ et impair} \end{cases}$

En particulier si  $F(x) = a_2 x^2 + a_1 x$  avec  $a_1 \neq 0$  et  $a_2 \neq 0$  il n'y a aucune solution périodique

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019

## INTRODUCTION

Notre axe d'attaque pour localiser et dénombrer les solutions périodiques de l'équation de Liénard  $\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$  où  $F(x)$  est une fonction continue et telle que  $F(0) = 0$  consiste à encadrer  $F(x)$  par des fonctions particulières

### Notations

$Traj_{F(x)}(x; y)$  est la trajectoire issue de  $(x; y)$  pour l'équation différentielle  $\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

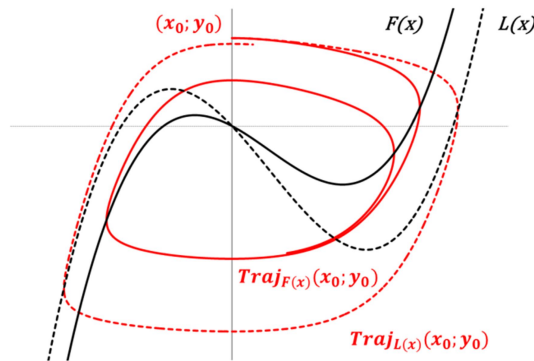
### PROPOSITION 1

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$

Si  $L(x)$  est une fonction continue telle que  $\begin{cases} L(x) \geq F(x) \text{ pour } x < 0 \\ L(x) \leq F(x) \text{ pour } x \geq 0 \end{cases}$  alors  $Traj_{F(x)}(x_0; y_0)$  est incluse dans  $Traj_{L(x)}(x_0; y_0)$  pour tout  $x_0$  et  $y_0$

Si  $H(x)$  est une fonction continue telle que  $\begin{cases} H(x) \leq F(x) \text{ pour } x < 0 \\ H(x) \geq F(x) \text{ pour } x \geq 0 \end{cases}$  alors  $Traj_{F(x)}(x_0; y_0)$  inclut  $Traj_{H(x)}(x_0; y_0)$  pour tout  $x_0$  et  $y_0$

### Preuve



On a  $\begin{pmatrix} y-F(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y-L(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x(F(x)-L(x)) \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} y-F(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} y-L(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \sin \left( \left( \begin{pmatrix} y-F(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y-L(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi le signe de  $\sin \left( \left( \begin{pmatrix} y-F(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y-L(x) \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)$  est le même que celui de  $x(F(x) - L(x))$  qui est

positif ce qui signifie que pour tout point sur  $Traj_{F(x)}(x_0; y_0)$  le champ de  $\begin{cases} \dot{x} = y - L(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$  pointe vers l'extérieur et donc que  $Traj_{F(x)}(x_0; y_0)$  est incluse dans  $Traj_{L(x)}(x_0; y_0)$  pour tout  $x_0$  et  $y_0$

On montre de la même manière que  $Traj_{F(x)}(x_0; y_0)$  inclut  $Traj_{H(x)}(x_0; y_0)$  pour tout  $x_0$  et  $y_0$   
#

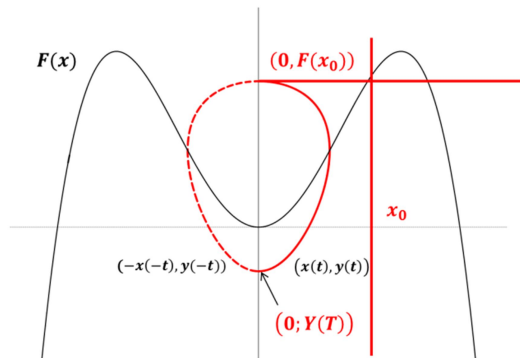
« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## CHAPITRE 1 – Utiliser les symétries de $F(x)$

### PROPOSITION 2

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$ . Si  $F(x) = F(-x)$  alors il y a une infinité de solutions périodiques.

#### Preuve



Soit  $(x(t); y(t))$  une solution pour  $F(x)$  alors  $(-x(-t); y(-t))$  est aussi une solution pour  $F(x)$ . En effet posons  $\tilde{x}(t) = -x(-t)$  et  $\tilde{y}(t) = y(-t)$  et alors  $\dot{\tilde{x}}(-t) = \dot{x}(-t) = y(-t) = \tilde{y}(t)$  et  $F(\tilde{x}(-t)) = F(-x(-t)) = F(x(t)) = \tilde{y}(t) = F(\tilde{x}(t))$  et  $\dot{\tilde{y}}(-t) = -\dot{y}(-t) = x(-t) = -\tilde{x}(t)$ .

Si  $F(x)$  est non nulle alors il existe  $\delta > 0$  et  $x_0 > 0$  tels que  $F(x) \neq 0$  et  $F(x)$  strictement croissante (respectivement décroissante) pour tout  $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ .

Supposons que  $F(x_0) > 0$  et  $F(x)$  strictement croissante alors  $Traj_{F(x)}(0; F(x_0))$  va couper  $F(x)$  puis  $Oy_-$  de même que toutes les trajectoires  $Traj_{F(x)}(0; y)$  pour lesquelles  $0 \leq y \leq F(x_0)$ .

Soit  $(X(t); Y(t))$  la solution pour  $F(x)$  issue de  $(0, F(x_0))$  et soit le plus petit  $T > 0$  tel que  $X(T) = 0$  alors  $(X(T), Y(T))$  passe par  $(0; Y(T))$ . Alors la solution  $(-X(-t), Y(-t))$  passe par  $(-X(0); Y(0)) = (0; F(x_0))$  et  $(-X(-(-T)); Y(-(-T))) = (-X(T); Y(T)) = (0; Y(T))$ .

Ainsi  $(X(t); Y(t))$  et  $(-X(-(-t)); Y(-(-t)))$  sont identiques et  $(X(t); Y(t))$  est périodique de période  $2T$ .

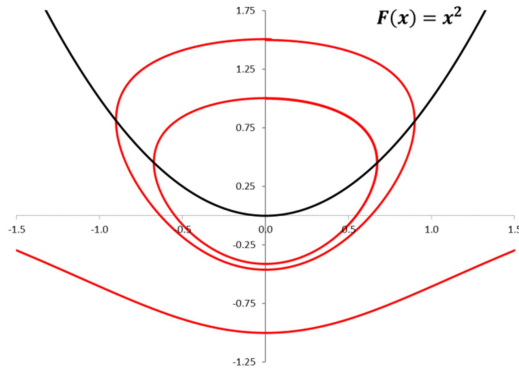
Si  $F(x_0) < 0$  ou  $F(x)$  strictement décroissante la démonstration se fait de manière analogue que précédemment en considérant  $-F(x)$  ou  $F(-x)$ .

Si  $F(x) = 0$  pour tous les  $x$  alors toutes les solutions sont des cercles centrés à l'origine.  
#

### APPLICATION

Soit  $F(x) = x^2$  alors toutes les solutions issues de  $Oy_+$  sont périodiques et celles issues  $Oy_-$  avec  $y \leq -1$  ne sont pas périodiques.

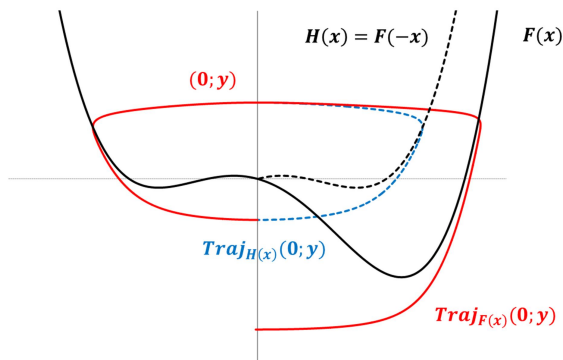
« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »



**PROPOSITION 3**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  Si  $F(x)$  est telle que  $F(-x) > F(x)$  pour tout  $x > 0$  (respectivement  $F(-x) < F(x)$  pour tous  $x > 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

**Preuve**



Posons  $H(x) = F(-x)$  alors  $H(x) > F(x)$  pour tout  $x > 0$  et donc  $Traj_{H(x)}(0; y)$  est enveloppée strictement par  $Traj_{F(x)}(0; y)$  et dès lors si  $Traj_{F(x)}(0; y)$  coupe  $Oy_-$  ce sera strictement en dessous de  $Traj_{H(x)}(0; y)$  Ainsi donc  $Traj_{F(x)}(0; y)$  n'est pas une solution périodique

Et si  $Traj_{F(x)}(0; y)$  ne coupe pas  $Oy_-$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y)$  n'est pas une solution périodique  
#

**THEOREME A**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  Si  $F(x) = S(x) + A(x)$  tel que  $S(x)$  est paire et  $A(-x) < A(x)$  pour tous  $x \neq 0$  (respectivement  $A(-x) > A(x)$  pour tous  $x \neq 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

**Preuve**

On a  $F(-x) = S(-x) + A(-x) = S(x) + A(-x) < S(x) + A(x) = F(x)$  et on applique la proposition 3  
#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### COROLLAIRE A.1

Soit  $F(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$  Si  $\sum_{i \text{ impairs}=1}^n a_i x^i > 0$  pour tous  $x \neq 0$  (respectivement  $\sum_{i \text{ impairs}=1}^n a_i x^i < 0$  pour tous  $x \neq 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

#### Preuve

On définit  $S(x) = \sum_{i \text{ pairs}} a_i x^i$  et  $A(x) = \sum_{i \text{ impairs}} a_i x^i$  On a  $F(x) = S(x) + A(x)$

#

### COROLLAIRE A.2

Soit  $F(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$  Si tous les  $a_i$  quand  $i$  est impair sont positifs et pas tous nuls (respectivement négatifs et pas tous nuls) alors il n'y a pas de solutions périodiques

#

### COROLLAIRE A.3

Soit  $F(x) = a_2 x^2 + a_1 x$  tel que  $a_2 \neq 0$

Si  $a_1 = 0$  alors il y a une infinité de solutions périodiques

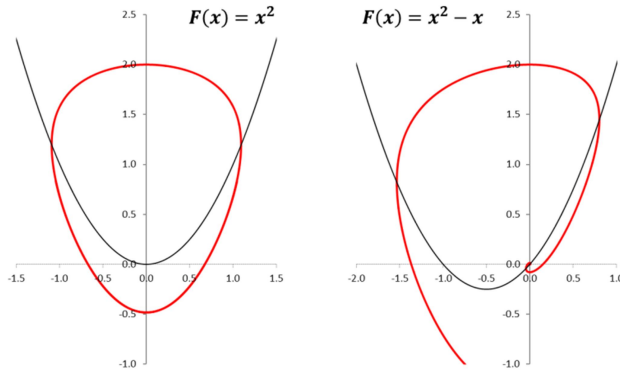
Si  $a_1 \neq 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

#### Preuve

Si  $a_1 = 0$  alors  $F(x) = a_2 x^2$  est paire et il y a une infinité de solutions périodiques

Si  $a_1 \neq 0$  alors la condition  $a_1 x > 0$  (respectivement  $< 0$ ) pour tout  $x$  est toujours vraie

#



### COROLLAIRE A.4.a

Soit  $F(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$  tel que  $a_3 \neq 0$

Si  $a_1 = 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 \neq 0$  et si  $a_3 > 0$  et  $a_1 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_1 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

#### Preuve

On a  $a_3 x^3 + a_1 x = x(a_3 x^2 + a_1)$  Il n'y a aucune solution périodique si la condition  $a_3 x^2 + a_1 > 0$  (respectivement  $< 0$ ) pour tout  $x$  est satisfaite

Si  $a_1 = 0$  ceci équivaut à  $a_3 \neq 0$

Si  $a_1 \neq 0$  ceci équivaut à  $a_3 > 0$  et  $a_1 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_1 < 0$ )

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**COROLLAIRE A.4.b**

Soit  $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_3 \neq 0$  alors il n'y a au moins une solution périodique que si  $a_1a_3 < 0$

#

**COROLLAIRE A.5.a**

Soit  $F(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_4 \neq 0$

Si  $a_1 = 0$  et si  $a_3 = 0$  alors y a une infinité de solutions périodiques

Si  $a_1 = 0$  et si  $a_3 \neq 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 \neq 0$  et si  $a_3 = 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_3 > 0$  et  $a_1 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_1 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

**Preuve**

Si  $a_1 = a_3 = 0$  alors  $F(x) = a_4x^4 + a_2x^2$  est paire et donc il y a une infinité de solutions périodiques.

Supposons que  $a_1 \neq 0$  ou  $a_3 \neq 0$  On a  $a_3x^3 + a_1x = x(a_3x^2 + a_1)$  Il n'y a aucune solution périodique si la condition  $a_3x^2 + a_1 > 0$  (respectivement  $< 0$ ) pour tout  $x$  est satisfaite Ceci est vrai si  $a_1 = 0$  et si  $a_3 \neq 0$  Ceci est aussi vrai si  $a_1 \neq 0$  et si  $a_3 = 0$  Et finalement ceci est vrai si  $a_3 > 0$  et  $a_1 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_1 < 0$ )

#

**COROLLAIRE A.5.b**

Soit  $F(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_4 \neq 0$  alors il n'y a au moins une solution périodique que si  $a_1 = a_3 = 0$  ou  $a_1a_3 < 0$

#

**COROLLAIRE A.6.a**

Soit  $F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_5 \neq 0$

Si  $a_1 = 0$  et  $a_3 \geq 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_3 \leq 0$  et  $a_5 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3^2 - 4a_5a_1 < 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

**Preuve**

On a  $a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x = x(a_5x^4 + a_3x^2 + a_1)$  Il n'y a aucune solution périodique si la condition  $a_5x^4 + a_3x^2 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) pour tout  $x$  est satisfaite.

Si  $a_1 = 0$  alors la condition est  $a_5x^4 + a_3x^2 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_3 \geq 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_3 \leq 0$  et  $a_5 < 0$ )

Si  $a_1 \neq 0$  alors la condition est vraie si  $a_3^2 - 4a_5a_1 < 0$

#

**COROLLAIRE A.6.b**

Soit  $F(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_5 \neq 0$  alors il n'y a au moins une solution périodique que si  $a_1 = 0$  et  $a_3a_5 \leq 0$  ou si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3^2 - 4a_5a_1 \geq 0$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



### **COROLLAIRE A.7.a**

Soit  $F(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_6 \neq 0$

Si  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$  alors il y a une infinité de solutions périodiques

Si  $a_1 = a_3 = 0$  et  $a_5 \neq 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 = a_5 = 0$  et  $a_3 \neq 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 = a_5 = 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 = 0$  et  $a_3 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_5 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_3 = 0$  et  $a_1 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_5 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_5 = 0$  et  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_3 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_3 < 0$  et  $a_5 < 0$ ) alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $a_1a_3a_5 \neq 0$  et  $a_3^2 - 4a_5a_1 < 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

### **Preuve**

Si  $a_1 = a_3 = a_5 = 0$  alors  $F(x) = a_6x^6 + a_4x^4 + a_2x^2$  est paire et il y a une infinité de solutions périodiques

On a  $a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x = x(a_5x^4 + a_3x^2 + a_1)$  Il n'y a aucune solution périodique si la condition  $a_5x^4 + a_3x^2 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) pour tout  $x$  est satisfaite.

Si  $a_1 = a_3 = 0$  et  $a_5 \neq 0$  alors la condition est  $a_5x^4 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_5 < 0$ )

Si  $a_1 = a_5 = 0$  et  $a_3 \neq 0$  alors la condition est  $a_3x^2 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_3 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$ )

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 = a_5 = 0$  alors la condition est  $a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est toujours vraie

Si  $a_1 = 0$  et  $a_5 \neq 0$  et  $a_3 \neq 0$  alors la condition est  $a_5x^4 + a_3x^2 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_3 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_3 < 0$  et  $a_5 < 0$ )

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 = 0$  et  $a_5 \neq 0$  alors la condition est  $a_5x^4 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_1 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_5 < 0$ )

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 \neq 0$  et  $a_5 = 0$  alors la condition est  $a_3x^2 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_3 < 0$ )

Si  $a_1 > 0$  et  $a_3 > 0$  et  $a_5 > 0$  (respectivement  $a_1 < 0$  et  $a_3 < 0$  et  $a_5 < 0$ ) alors la condition  $a_5x^4 + a_3x^2 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est toujours vraie

Si  $a_1 \neq 0$  et  $a_3 \neq 0$  et  $a_5 \neq 0$  alors la condition est  $a_5x^4 + a_3x^2 + a_1 \geq 0$  (respectivement  $\leq 0$ ) Et elle est vraie si  $a_3^2 - 4a_5a_1 < 0$

#

### **COROLLAIRE A.7.b**

Soit  $F(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$  tel que  $a_6 \neq 0$  alors il n'y a au moins une solution périodique que si  $a_1 = 0$  et  $a_3a_5 < 0$  ou si  $a_3 = 0$  et  $a_1a_5 < 0$  ou si  $a_5 = 0$  et  $a_1a_3 < 0$  ou si  $a_1a_3a_5 \neq 0$  et  $a_3^2 - 4a_5a_1 \geq 0$

#

Nous allons traduire ces conditions analytiques sur les coefficients de polynômes en conditions géométriques sur les positions des solutions de polynômes

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### COROLLAIRE A.8

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré 3 tel que  $F(0) = 0$  alors il y a des solutions périodiques que s'il a 2 solutions réelles non nulles de signe opposé.

#### Preuve

Si  $F(x)$  a 3 solutions nulles alors  $F(x) = \lambda x^3$  et il n'y a pas de solution périodique

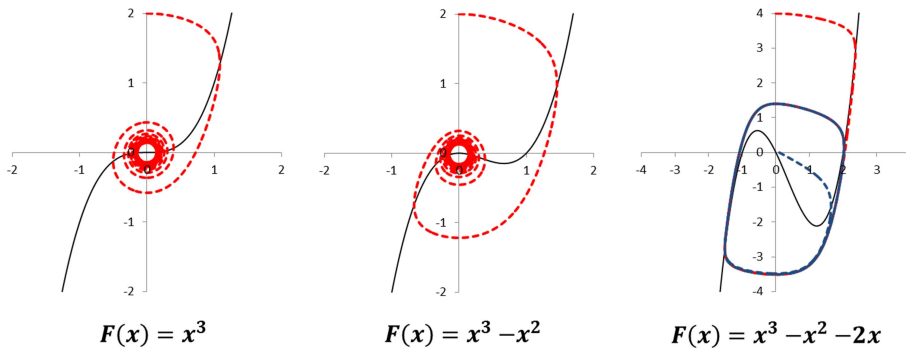
Si  $F(x)$  a 2 solutions nulles alors  $F(x) = \lambda x^2(x - s_1) = \lambda x^3 - \lambda s_1 x^2$  avec  $s_1 \neq 0$  Alors il n'y a pas de solution périodique

Si  $F(x)$  a 1 solution nulle alors  $F(x) = \lambda x(x - s_1)(x - s_2) = \lambda x^3 - \lambda(s_1 + s_2)x^2 + \lambda s_1 s_2 x$  avec  $s_i \in \mathbb{C}^*$  pour  $i = 1, 2$

a) Si  $s_1 \in \mathbb{R}$  puisque  $s_1 + s_2 \in \mathbb{R}$  alors  $s_2 \in \mathbb{R}$  et alors pour qu'il y ait des solutions périodiques il est nécessaire que  $s_1 s_2 < 0$  et dès lors que les solutions non nulles soient de signe opposé

b) Si  $s_1 \in \mathbb{C}$  puisque  $s_1 + s_2 \in \mathbb{R}$  alors  $s_2 \in \mathbb{C}$  Notons  $s_1 = a + ib$  alors  $s_2 = a - ib$  et  $F(x) = x^3 - 2ax^2 + (a^2 + b^2)x$  pour laquelle il n'y a pas de solution périodique

#



### COROLLAIRE A.9

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré 4 tel que  $F(0) = 0$  et qui est factorisable dans  $\mathbb{R}$  alors il y a des solutions périodiques que s'il y a :

- 4 solutions nulles
- 2 solutions nulles et 2 solutions non nulles opposées
- 1 solution nulle et 1 solution non nulle négative et 2 solutions non nulles positives
- 1 solution nulle et 2 solutions non nulles négatives et 1 solution non nulle positive

#### Preuve

Si  $F(x)$  a 4 solutions nulles alors  $F(x) = \lambda x^4$  est paire et il y a une infinité de solutions périodiques.

Si  $F(x)$  a 3 solutions nulles alors  $F(x) = \lambda x^3(x - s_1) = \lambda x^4 - \lambda s_1 x^3$  avec  $s_1 \neq 0$  Alors il n'y a pas de solutions périodiques.

Si  $F(x)$  a 2 solutions nulles alors  $F(x) = \lambda x^2(x - s_1)(x - s_2) = \lambda x^4 - \lambda(s_1 + s_2)x^3 + \lambda s_1 s_2 x^2$  avec  $s_i \in \mathbb{R}^*$  pour  $i = 1, 2$

1) Si  $s_1 + s_2 = 0$  alors il y a une infinité de solutions périodiques

2) Si  $s_1 + s_2 \neq 0$  alors il n'y a aucune solution périodique

Si  $F(x)$  a 1 solution nulle alors  $F(x) = \lambda x(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3) = \lambda x^4 - \lambda(s_1 + s_2 + s_3)x^3 + \lambda(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3)x^2 + \lambda s_1 s_2 s_3 x$  avec  $s_i \in \mathbb{R}^*$  pour  $i = 1, 2, 3$

1) Si  $s_1 + s_2 + s_3 = 0$  alors il n'y a pas de solutions périodiques

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

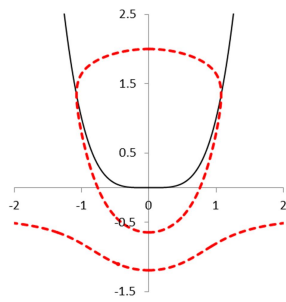
2) Si  $s_1 + s_2 + s_3 > 0$  et  $s_1 s_2 s_3 < 0$  alors il n'y a pas de solutions périodiques

3) Si  $s_1 + s_2 + s_3 < 0$  et  $s_1 s_2 s_3 > 0$  alors il n'y a pas de solutions périodiques

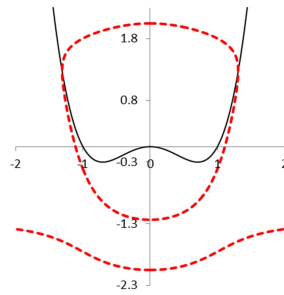
Ainsi il ne peut y avoir des solutions périodiques que

- Si  $s_1 + s_2 + s_3 < 0$  et  $s_1 s_2 s_3 > 0$  ce qui implique 1 solution positive et deux solutions négatives
- Si  $s_1 + s_2 + s_3 > 0$  et  $s_1 s_2 s_3 < 0$  ce qui implique 1 solution négative et deux solutions positives

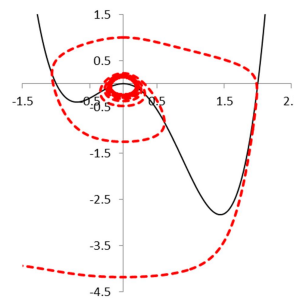
#



$$F(x) = x^4$$



$$F(x) = x^4 - x^2$$



$$F(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$$

### COROLLAIRE A.10

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré 4 tel que  $F(0) = 0$  qui n'est pas factorisable dans  $\mathbb{R}$  et soit  $s$  la solution dans  $\mathbb{R}^*$  et  $r$  la partie réelle de ses deux solutions dans  $\mathbb{C}$  alors il y a des solutions périodiques que si  $-2r \leq s \leq 0$  ou  $0 \leq s \leq -2r$

#### Preuve

On a  $F(x) = \lambda (x - s)(x^2 + ax + b)$  avec  $s, a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$  tels que  $a^2 < 4b$

Ainsi  $F(x) = \lambda x^4 + \lambda(a - s)x^3 + \lambda(b - sa)x^2 - \lambda s b x$  et si

1)  $a > s$  et  $s < 0$  alors il n'y a pas de solutions périodiques

2)  $s > a$  et  $s > 0$  alors il n'y a pas de solutions périodiques

Ainsi il n'y a des solutions périodiques que si  $a \leq s \leq 0$  ou  $0 \leq s \leq a$

Et les solutions de  $F(x)$  dans  $\mathbb{C}$  sont  $-\frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}$

#

Et finalement nous pouvons borner inférieurement la probabilité d'absence de solution périodique en fonction du degré du polynôme

### THEOREME B

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré  $n$  tel que  $F(0) = 0$  alors la probabilité qu'il n'y ait pas de

solution périodique est supérieure ou égale à  $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

Soit  $F(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$  et  $n \geq 1$  Selon le Corolaire 4.1 si pour les  $k$  impairs on a  $a_k > 0$  alors il n'y a pas de solution périodique. De même si pour les  $k$  impairs on a  $a_k < 0$  alors il n'y a pas de solution périodique. Ainsi, il n'y a pas de solution périodique dans plus de  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

des cas de figure si  $n$  est pair et  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$  des cas de figure si  $n$  est impair

#

### PROPOSITION 4-a

Soit  $F(x) = \lambda x \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i)$  tel que  $\lambda \neq 0$  et  $a_i \neq 0$  pour tous les  $1 \leq i \leq n$  Si  $T(x; y)$  est une solution pour  $F(x)$  alors  $T\left(x(\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}; y(\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}\right)$  est une solution pour  $\tilde{F}(x) = x \prod_{i=1}^n \left(x - \frac{b_i}{a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}\right)$

### Preuve

Posons  $X = (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} x$  et  $Y = (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} y$  alors on a

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \dot{x} = (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} (y - F(x)) = (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} y - (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} F(x) = Y - \\ &(\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} F\left((\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{-\frac{1}{n}} X\right) = Y - (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \lambda (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{-\frac{1}{n}} X \prod_{i=1}^n \left(a_i (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{-\frac{1}{n}} X - b_i\right) = \\ &Y - \lambda X \prod_{i=1}^n \left(a_i (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{-\frac{1}{n}} \left(X - \frac{b_i}{a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \end{aligned}$$

$$Y - \lambda X (\prod_{j=1}^n a_j) (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{-1} \prod_{i=1}^n \left(X - \frac{b_i}{a_i} (\prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}\right) = Y - X \prod_{i=1}^n \left(X - \frac{b_i}{a_i} (\prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}\right) = Y - \tilde{F}(X)$$

On a aussi  $\dot{Y} = \dot{y} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} = -x (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} = -X$

#

### PROPOSITION 4-b

Soit  $F(x) = \lambda x \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i)$  tel que  $\lambda \neq 0$  et  $a_i \neq 0$  pour tous les  $1 \leq i \leq n$  Si  $T(x; y)$  est une solution pour  $F(x)$  alors  $T\left(\frac{x}{\Delta}; \frac{y}{\Delta}\right)$  est une solution pour  $\tilde{F}(x) = \lambda \Delta^n x \prod_{i=1}^n \left(a_i x - \frac{b_i}{\Delta}\right)$

### Preuve

$$\begin{aligned} \text{Posons } X &= \frac{x}{\Delta} \text{ et } Y = \frac{y}{\Delta} \text{ alors on a } \dot{X} = \frac{\dot{x}}{\Delta} = \frac{y - F(x)}{\Delta} = Y - \frac{F(\Delta X)}{\Delta} = Y - \frac{\lambda}{\Delta} \Delta X \prod_{i=1}^n (a_i \Delta X - b_i) = \\ Y - \lambda X \prod_{i=1}^n \left(\Delta \left(a_i X - \frac{b_i}{\Delta}\right)\right) &= Y - \lambda \Delta^n X \prod_{i=1}^n \left(a_i X - \frac{b_i}{\Delta}\right) = Y - \tilde{F}(X) \text{ et } \dot{Y} = \frac{\dot{y}}{\Delta} = \frac{-x}{\Delta} = -X \end{aligned}$$

#

### COROLLAIRE 4.1

L'étude des solutions périodiques pour les polynômes factorisables sur  $\mathbb{R}$  se ramène à l'étude des solutions périodiques pour les polynômes de la forme  $F(x) = \lambda x \prod_{i=1}^n (x - c_i)$  tels que  $\lambda \neq 0$  et  $c_i \in [-1; 1]$  pour tout  $1 \leq i \leq n$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

Soit  $F(x) = \lambda x \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i)$  tel que  $\lambda \neq 0$  et  $a_i \neq 0$  pour tous les  $1 \leq i \leq n$

Selon la proposition 4.a il y a une bijection entre les solutions pour  $F(x) = \lambda x \prod_{i=1}^n (a_i x - b_i)$

et les solutions pour  $\bar{F}(x) = x \prod_{i=1}^n \left( x - \frac{b_i}{a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \right)$

Selon la proposition 4.b il y a une bijection entre les solutions pour  $\bar{F}(x) = x \prod_{i=1}^n \left( x - \frac{b_i}{a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \right)$

et les solutions pour  $\tilde{F}(x) = \Delta^n x \prod_{i=1}^n \left( x - \frac{b_i}{\Delta a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \right)$

#

On pose  $\Delta = \max \left\{ \frac{b_i}{a_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}}$  et alors on a  $|c_i| = \left| \frac{b_i}{\Delta a_i} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \right| =$

$$\left| \frac{\frac{b_i}{a_i}}{\max \left\{ \frac{b_i}{a_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}} (\lambda \prod_{j=1}^n a_j)^{\frac{1}{n}} \right| = \left| \frac{\frac{b_i}{a_i}}{\max \left\{ \frac{b_i}{a_i} \mid 1 \leq i \leq n \right\}} \right| = \frac{\left| \frac{b_i}{a_i} \right|}{\max \left\{ \left| \frac{b_i}{a_i} \right| \mid 1 \leq i \leq n \right\}} \leq 1$$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## CHAPITRE 2 – Délimiter les zones où passent les solutions périodiques

Nous allons maintenant encadrer  $F(x)$  par des droites

### LEMME 1

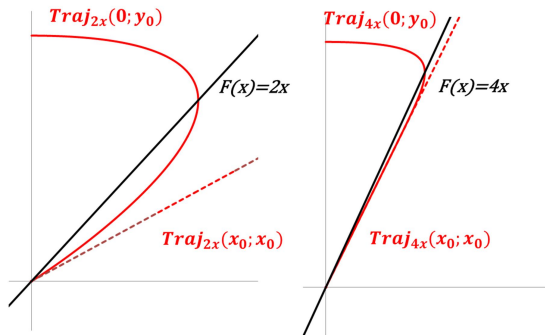
Soit  $\lambda \geq 2$  alors les droites  $y = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x - h$  sont des solutions de l'équation

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \lambda x + h \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

### Preuve

De  $y = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x - h$  on tire  $\dot{y} = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)\dot{x}$  Puisque  $\dot{x} = y - \lambda x + h$  on obtient  $\dot{y} = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)y - \lambda \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x + \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)h$  Et finalement puisque  $y = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x - h$  on obtient  $\dot{y} = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)\left(\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x - h\right) - \lambda \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x + \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)h = \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)^2 x - \lambda \left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x = \left(\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right) - \lambda\right)\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x = \left(\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)\left(\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x = -x$

#



Et on en déduit que plus  $\lambda$  est grand et plus les  $Traj_{\lambda x - h}(0, y)$  resteront plus proches de  $y = \lambda x - h$  une fois qu'elles l'auront coupée Les droites  $y = \lambda x - h$  et  $y = \left(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x - h$  forment une « nasse »

### LEMME 2

Les solutions de l'équation  $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x + h \\ \dot{y} = -x \end{cases}$  sont  $\begin{cases} x(t) = (x_0 + (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} \\ y(t) = (y_0 - h + (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} + h \end{cases}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**Preuve**

On a  $\dot{x}(t) = (y_0 - x_0 - h)e^{-t} - (x_0 + (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} = ((y_0 - 2x_0 - h) - (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t}$

D'autre part  $y(t) - 2x(t) + h = (y_0 - h + (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} - h - 2(x_0 + (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} + h = ((y_0 - 2x_0 - h) - (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t}$

Et donc  $\dot{x}(t) = y(t) - 2x(t) + h$

On a aussi  $\dot{y}(t) = ((y_0 - x_0 - h) - (y_0 - h)) - (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} = (-x_0 - (y_0 - x_0 - h)t)e^{-t} = -x(t)$

#

Notations

Soit  $[a; b]_{O_x}$  l'intervalle  $[a; b]$  de  $O_x$ , respectivement  $[a; b]_{O_y}$  l'intervalle  $[a; b]$  de  $O_y$

**THEOREME C**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$  et notons  $\bar{x} = \min\{x \geq 0 | F(\bar{x}) = F(d) - 2d\}$  et  $\underline{x} = \max\{x \leq 0 | F(\underline{x}) = F(D) - 2D\}$  alors les solutions périodiques sont dans situées dans l'espace  $[(F(D) - 2D - F(d) + 2D)e^{-1}; (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}]_{O_x} \cap [\underline{x}, \bar{x}]_{O_x} \times [F(D) - 2D; F(d) - 2d]_{O_y}$

**Preuve**

Pour tout  $y \geq 0$  on a que  $Traj_F(0; y)$  est incluse dans  $Traj_{2x+F(D)-2D}(0; y)$ . D'autre part, comme conséquence du lemme 1, on a que  $Traj_{2x+F(D)-2D}(0; y)$  avec  $y \geq 0$  coupe  $]F(D) - 2D; 0[_{O_y}$

De la même manière on a que  $Traj_{2x+F(d)-2d}(0; y)$  avec  $y \leq 0$  coupe  $]0; F(d) - 2d[_{O_y}$

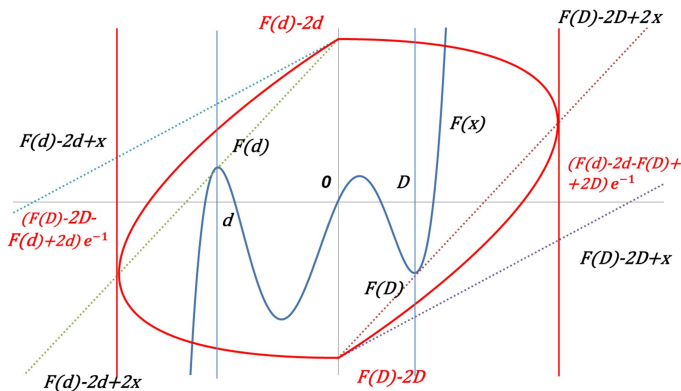
Alors pour tout  $y \geq F(d) - 2d$  on a que  $Traj_F(0; y)$  coupe  $]0; F(d) - 2d[_{O_y}$  et donc que

$Traj_F(0, y)$  n'est pas une solution périodique

De la même manière, pour tout  $y \leq F(D) - 2D$  on a que  $Traj_F(0; y)$  n'est pas une solution périodique

En synthèse toutes les solutions périodiques coupent  $[F(D) - 2D; F(d) - 2d]_{O_y}$ .

1<sup>ère</sup> approche



« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$Traj_{F(x)}(0; F(d) - 2d)$  est enveloppée par  $Traj_{2x+F(D)-2D}(0; F(d) - 2d)$  Et puisque  $Traj_{2x+F(D)-2D}(0, F(d) - 2d)$  atteint son maximum en  $x$  lorsqu'elle coupe la droite  $y = 2x + F(D) - 2D$  Par le lemme 2 ce point d'intersection est donné par le système d'équations

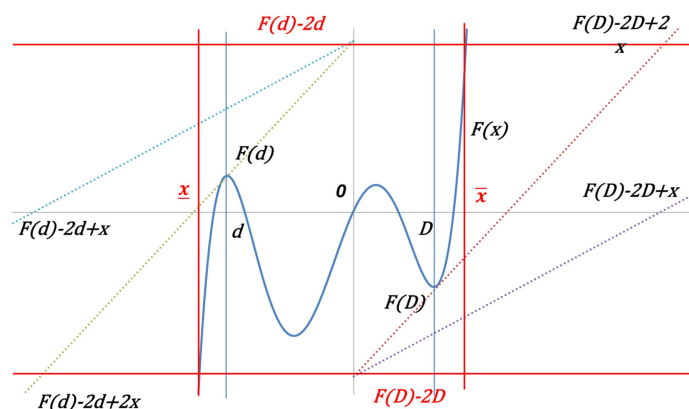
$$\begin{cases} x(t) = (F(d) - 2d - F(D) + 2D)te^{-t} \\ y(t) = (F(d) - 2d - F(D) + 2D)(1 + t)e^{-t} + F(D) - 2D \\ y(t) = 2x(t) + F(D) - 2D \end{cases}$$

Ainsi  $x = (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}$  est la borne à droite de l'espace où se trouvent toutes les solutions périodiques

De la même manière on détermine que  $(F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}$  est la borne à gauche de l'espace où se trouvent toutes les solutions périodiques

En synthèse toutes les solutions périodiques coupent  $[(F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}; (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}]_{0,x}$

2<sup>ème</sup> approche



$Traj_{F(x)}(0; F(d) - 2d)$  est enveloppée par les droites  $y = F(d) - 2d + x$  et  $x = \bar{x}$  où  $\bar{x} = \min\{x \geq 0 | F(x) = F(d) - 2d\}$  De la même manière  $Traj_F(0; F(D) - 2D)$  est enveloppée par les droites  $y = F(D) - 2D + x$  et  $x = \underline{x}$  où  $\underline{x} = \max\{x \leq 0 | F(x) = F(D) - 2D\}$

#

### COROLLAIRE C.1

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$

Soit  $G(x) = \begin{cases} \leq F(x) \text{ si } x \leq (F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1} \\ F(x) \text{ si } x \in [(F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}, (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}] \\ \geq F(x) \text{ si } x \geq (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1} \end{cases}$  alors

les nombres de solutions périodiques pour  $F(x)$  et  $G(x)$  sont identiques

### Preuve

L'ensemble des solutions périodiques pour  $G(x)$  coupent

$[(F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}, (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}]_{0,x}$  Et dans cet intervalle

$G(x) = F(x)$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



## COROLLAIRE C.2

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré  $2n + 1$  tel que  $F(0) = 0$  et  $n \geq 1$  alors les solutions périodiques sont situées dans un espace borné

### Preuve

On suppose  $a_{2n+1} > 0$  Soit  $G(x) = F(x) - 2x = a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots + a_2x^2 + (a_1 - 2)x$

On a  $G(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$  et soit alors  $H = \min\{G(x) | x \in [0; \infty[ \}$

Si  $H \geq 0$  alors on a  $D = 0$  et si  $H < 0$  on a  $D = \max\{x \in [0; \infty[ | H = F(x) - 2x\}$

On détermine  $d$  de manière analogue

#

La seconde approche du théorème C donne un intervalle d'autant plus petit que le degré du polynôme est élevé.

De ce qui précède on tire un algorithme pour déterminer les intervalles de  $O_x$  et  $O_y$  que coupent obligatoirement les solutions périodiques

### ALGORITHME A dit de la « Nasse »

1. Pour tout  $\lambda \geq 2$  on détermine le plus grand  $h(\lambda) \leq 0$  tel que  $F(x) \geq \lambda x + h(\lambda)$  pour tout  $x \geq 0$  La droite  $y(\lambda) = \left(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}\right)x + h(\lambda)$  coupe  $O_{x+}$  en  $x(\lambda) = \frac{-2h(\lambda)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}$
2. On détermine le  $\tilde{\lambda} \geq 2$  qui minimise  $h(\lambda)$  et alors les éventuelles solutions périodiques coupent  $[h(\tilde{\lambda}); 0]_{O_{y-}}$
3. On détermine le  $\bar{\lambda} \geq 2$  qui minimise  $x(\lambda)$  et alors les éventuelles solutions périodiques coupent  $[0; x(\bar{\lambda})]_{O_{x+}}$
4. On procède de manière semblable sur  $O_{x-}$

En lieu et place de déterminer  $\tilde{\lambda}$  et  $\bar{\lambda}$  on peut avoir une approximation à moindre effort en prenant les valeurs  $\tilde{\lambda}'$  et  $\bar{\lambda}'$  qui minimisent  $h(\lambda)$  et  $x(\lambda)$  sur un échantillon aléatoire de  $\lambda$

### APPLICATION

Soit  $F(x) = x^{2n+1} - x$  alors la solution périodique coupe  $\left[-2n \left(\frac{3}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2n}}; -1\right]_{O_y} \subset$

$$\left[-3; -1\right]_{O_y} \text{ et } \left[1; 4n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}} \frac{\left(2^{\frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)} + 1\right)^{\frac{2n+1}{2n}}}{2^{\frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)}} + \sqrt{\left(2^{\frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)}}\right)^2 - 4}}\right]_{O_x}$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

On a  $F' \left( \left( \frac{\lambda+1}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2n}} \right) = \lambda$  et puisque  $F''(x) = 2n(2n+1)x \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$  alors  $F(x) \geq \lambda x - \frac{2}{3}(\lambda+1)\sqrt{\frac{\lambda+1}{3}}$

On en tire  $h(\lambda) = -2n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}}(\lambda+1)^{\frac{2n+1}{2n}}$  et  $h'(\lambda) = -2n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}}(\lambda+1)^{\frac{1}{2n}}$  et  $x(\lambda) = 4n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}} \frac{(\lambda+1)^{\frac{2n+1}{2n}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}$  et  $x'(\lambda) = 4n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}}(\lambda+1)^{\frac{1}{2n}}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}) \left( \frac{2n+1}{2n} - \frac{(\lambda+1)}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \right)$

On a  $h'(\lambda) < 0$  et donc  $\tilde{\lambda} = 2$  et finalement  $h(2) = -2n \left( \frac{3}{2n+1} \right)^{\frac{2n+1}{2n}}$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(2) = -3$

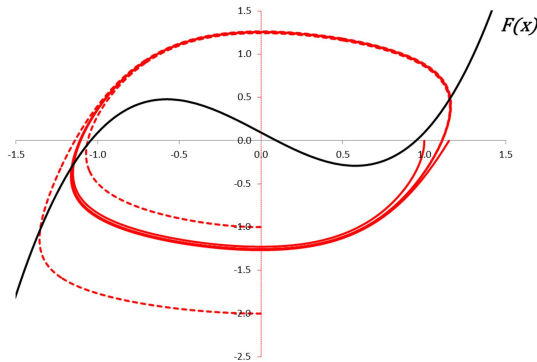
On a  $x'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{2n+1}{2n} - \frac{(\lambda+1)}{\sqrt{\lambda^2 - 4}} \Leftrightarrow (2n+1)^2(\lambda^2 - 4) - 4n^2(\lambda+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (4n^2 + 4n + 1)^2(\lambda^2 - 4) - 4n^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (4n+1)\lambda^2 - 8n^2\lambda - 20n^2 - 16n - 4 = 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda} = 2 \frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)}$  et finalement

$$x(\bar{\lambda}) = 4n(2n+1)^{-\frac{2n+1}{2n}} \frac{\left( 2 \frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)} + 1 \right)^{\frac{2n+1}{2n}}}{2 \frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)} + \sqrt{\left( 2 \frac{2n^2 + \sqrt{4n^4 + 20n^3 + 21n^2 + 8n + 1}}{(4n+1)} \right)^2 - 4}} - 4$$

Et puisque  $x F(x) > 0$  sur  $[-1; 1]_{O_x}$  alors il n'y a pas de solution périodique qui coupe coupent  $[0; 1]_{O_x}$  et  $[-1; 0]_{O_y}$

#

Dès lors pour  $F(x) = x^3 - x$  la solution périodique coupe  $[1,0000; 1.1513]_{O_x}$  et  $[-2.0000; -1.0000]_{O_y}$



### Notations

Soit  $m_{F(x)}[a; b]$  le minimum de  $F(x)$  sur  $[a; b]_{O_x}$

Soit  $M_{F(x)}[a; b]$  le maximum de  $F(x)$  sur  $[a; b]_{O_x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »

### COROLLAIRE C.3

Soit  $F(x)$  un polynôme de degré impair et soit  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$  alors les solutions

périodiques coupent  $\left[ m_{F(x)}[0, D] - \sqrt{D^2 + (m_{F(x)}[0, D] - F(D) + D)^2}; M_{F(x)}[d, 0] + \sqrt{d^2 + (M_{F(x)}[d, 0] - F(d) + d)^2} \right]_{Oy}$

#### Preuve

Les solutions périodiques sont enveloppés à gauche par  $y = F(d) - 2d + x$  et  $Traj_{F(x)}(d; F(d) - d)$  et donc par  $Traj_{M_{F(x)}[d, 0]}(d; F(d) - d)$  Et  $Traj_{M_{F(x)}[d, 0]}(d; F(d) - d)$

coupe  $Oy_+$  en  $M_{F(x)}[d, 0] + \sqrt{d^2 + (M_{F(x)}[d, 0] - F(d) + d)^2}$

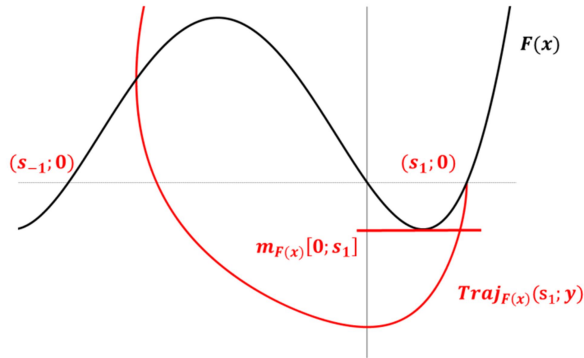
De la même manière les solutions périodiques sont enveloppés à droite par  $y = F(D) - 2D + x$  et  $Traj_{m_{F(x)}[0, D]}(D; F(D) - D)$  et donc par  $Traj_{m_{F(x)}[0, D]}(D; F(D) - D)$  Et

$Traj_{m_{F(x)}[0, D]}(D; F(D) - D)$  coupe  $Oy_-$  en  $m_{F(x)}[0, D] - \sqrt{D^2 + (m_{F(x)}[0, D] - F(D) + D)^2}$   
#

### PROPOSITION 5

Soit  $F(x)$  continue et telle que  $F(0) = 0$  et  $s_i$  ses solutions numérotées de telle façon que  $s_{-j} < \dots < s_{-1} < 0 < s_1 < \dots < s_k$  0 Si  $F(x)$  est strictement décroissante en 0 alors il n'y a pas de solutions périodique qui coupe  $[-\min\{s_1; -s_{-1}\}; \min\{s_1; -s_{-1}\}]_{Ox}$  ou par  $[\min\{\min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s_{-1}\}; s_{-1}\}; \max\{\max\{M_{F(x)}[s_{-1}; 0]; -s_{-1}\}; s_1\}]_{Oy}$

#### Preuve



On définit  $s = \min\{s_1; -s_{-1}\}$

Supposons que  $s_1 \leq -s_{-1}$  Puisque  $F(x)$  est strictement décroissante en 0 alors  $\frac{\partial}{\partial t}(x^2 + y^2) = -2xF(x) > 0$  sur  $[-s_1; s_1]_{Ox}$  et alors  $Traj_{F(x)}(s; 0)$  enveloppe le cercle centré en  $(0; 0)$  de rayon  $s$ . Ainsi donc  $Traj_{F(x)}(s; 0)$  passe successivement en dessous de  $(0; -s)$  à gauche de  $(-s; 0)$  en dessus de  $(0; s)$  et à droite de  $(s; 0)$  et il n'y a pas de solutions périodiques qui coupent  $[-\min\{s_1; -s_{-1}\}; \min\{s_1; -s_{-1}\}]_{Ox}$  et  $[\min\{s_1; -s_{-1}\}; \max\{s_1; -s_{-1}\}]_{Oy}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

D'autre part  $Traj_{F(x)}(0; s)$  passe en dessous de  $(m_1; m_{F(x)}[0; s_1])$  où  $m_1$  est le plus grand réel tel que  $F(m_1) = m_{F(x)}[0; s_1]$  et donc passe en dessous de  $(0; m_{F(x)}[0; s_1])$ . Ainsi en combinant les deux résultats  $Traj_{F(x)}(0, s_1)$  passe en dessous de  $(0; \min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s\})$   
 Par simplicité d'écriture posons  $h = \min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s\}$

Si  $h < s_{-1}$  alors  $Traj_{F(x)}(0; h)$  coupe  $O_{x-}$  à gauche de  $(s_{-1}; 0)$  et enveloppe

$Traj_{F(x)}(s_{-1}; 0)$  qui elle va couper  $O_y$  en dessous de  $(0; -s_{-1})$

Si  $h \geq s_{-1}$  alors  $Traj_{F(x)}(0; h)$  coupe  $O_{x-}$  à gauche de  $(-s_1; 0)$  et enveloppe  $Traj_{F(x)}(-s_1, 0)$  qui elle va couper  $O_{y+}$  en dessous de  $(0; s_1)$  Ainsi en combinant les deux résultats

$Traj_{F(x)}(0, h)$  coupe  $O_y$  en dessous de  $(0; s_1)$

En synthèse il n'y a pas de solution périodique qui coupe

$$[h; s_1]_{O_y} = [\min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s_1\}; s_1]_{O_y}$$

Dans le cas  $s_1 > -s_{-1}$  on montre de la même manière qu'il n'y a pas de solution périodique qui coupe  $[s_{-1}; \max\{M_{F(x)}[s_{-1}; 0]; -s_{-1}\}]_{O_x}$  Et donc qu'il n'y a pas de solution périodique qui coupe  $[\min\{\min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s_1\}; s_{-1}\}; \max\{\max\{M_{F(x)}[s_{-1}; 0]; -s_{-1}\}; s_1\}]_{O_y}$

#

### APPLICATION

Si  $F(x) = nx^3 - mx$  avec  $m$  et  $n > 0$  alors les solutions périodiques sont situées dans l'espace

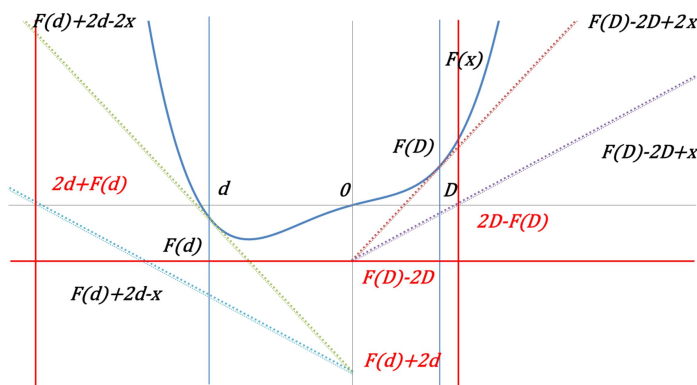
$$\left[-e^{-1\frac{4}{3}}(2+m)\sqrt{\frac{2+m}{3n}}; e^{-1\frac{4}{3}}(2+m)\sqrt{\frac{2+m}{3n}}\right]_{O_x} \times \left[-\frac{2}{3}(2+m)\sqrt{\frac{2+m}{3n}}; \frac{2}{3}(2+m)\sqrt{\frac{2+m}{3n}}\right]_{O_y} \text{ et ne}$$

$$\text{coupent ni } \left[-\sqrt{\frac{m}{n}}; \sqrt{\frac{m}{n}}\right]_{O_x} \text{ ni } \left[\min\left\{-\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3n}}; -\sqrt{\frac{m}{n}}\right\}; \max\left\{\frac{2m}{3}\sqrt{\frac{m}{3n}}; \sqrt{\frac{m}{n}}\right\}\right]_{O_y}$$

### THEOREME D

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq d$  alors les solutions périodiques coupent  $[\min\{F(D) - 2D; F(d) + 2d\}, 0]_{O_{y-}}$  et par  $[2d + F(d); 2D - F(D)]_{O_x}$

### Preuve



« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Pour tout  $y \geq 0$  on a  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est enveloppée par  $Traj_{2x+F(D)-2D}(0; y)$  qui coupe  $[F(D) - 2D, 0]_{0, y_-}$   
 Par symétrie on a que  $Traj_{2x+F(d)+2d}(0; y)$  avec  $y \leq 0$  coupe  $[F(d) + 2d; 0]_{0, y_-}$   
 Alors pour tout  $y \leq \min\{F(D) - 2D; F(d) + 2d\}$  on a que  $Traj_F(0; y)$  ne coupe pas  $0_{y_+}$  et donc que  $Traj_F(0; y)$  n'est pas une solution périodique  
 En synthèse toutes les solutions périodiques coupent  $[\min\{F(D) - 2D; F(d) + 2d\}; 0]_{0, y_-}$   
 D'autre part pour tout  $y \geq 0$  on a  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est limitée par  $x + F(D) - 2D$  et  $x + F(d) + 2d$  et donc coupe  $[2d + F(d); 2D - F(D)]_{0, x}$   
 #

### COROLLAIRE D.1

Si  $F(x)$  est un polynôme de degré  $2n$  avec  $n \geq 1$  et tel que  $F(0) = 0$  alors les solutions périodiques coupent un intervalle borné de  $0_{y_-}$

#### Preuve

On peut supposer que  $a_{2n} > 0$ , dès lors il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x - 2D$  pour tout  $x \geq D$  et il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x - 2d$  pour tous les  $x \leq d$ .  
 #

### APPLICATION

Si  $F(x) = mx^{2n}$  alors les éventuels solutions périodiques coupent  $\left] -\left(2 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{nm}\right)^{\frac{1}{2n-1}}; 0 \right]_{0, y}$

### COROLLAIRE D.2

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  Si  $F(x) \geq 2x$  pour tout  $x \geq 0$  ou  $F(x) \geq 2x$  pour tout  $x \leq 0$ , alors il n'y a pas de solution périodique

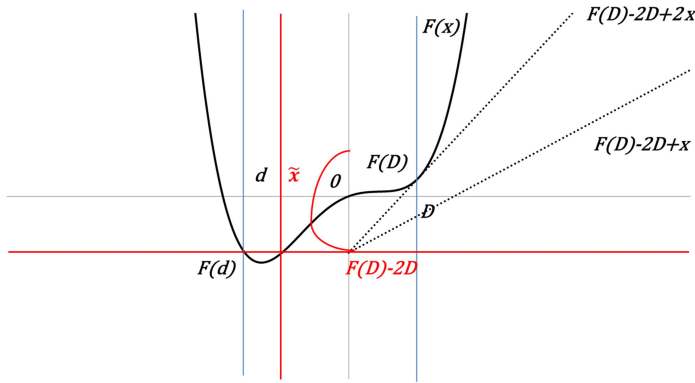
#### Preuve

On a  $d = 0$  ou  $D = 0$  et  $F(d) = 0$  ou  $F(D) = 0$  et donc et les solutions périodiques coupent  $[0, 0]_{0, y_-}$   
 #

### COROLLAIRE D.3

Soit  $F(x)$  est une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$  Si  $F(D) - 2D \geq m_{F(x)}[-\infty, 0]$  alors les solutions périodiques sont dans un espace borné

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



### Preuve

Toutes les trajectoires issues de  $Oy_+$  coupent  $[F(D) - 2D; 0]_{Oy_-}$ . Soit  $\tilde{x}$  le plus grand  $x < 0$  tel que  $F(\tilde{x}) = F(D) - 2D$  alors  $Traj_{F(x)}(0; F(D) - 2D)$  coupe  $[\tilde{x}; 0]_{Ox_-}$  puis  $Oy_+$  puis à nouveau  $[F(D) - 2D; 0]_{Oy_-}$

#

Autant l'approche par la droite de pente  $\lambda \geq 2$  permet de limiter la zone contenant des solutions périodiques à longue distance, autant l'approche par la droite de pente 0 permet de resserrer la zone lorsque l'on est proche de l'origine

De ce qui précède on tire un algorithme pour déterminer les intervalles de  $O_x$  et  $O_y$  que coupent les solutions périodiques

### ALGORITHME B dit de la « Zone de pêche »

1. On détermine  $s_{-1}$  la plus grande solution strictement négative de  $F(x)$
2. On détermine  $s_1$  la plus petite solution strictement positive de  $F(x)$
3. Les éventuelles solutions périodiques ne coupent ni  $[-\min\{s_1; -s_{-1}\}; \min\{s_1; -s_{-1}\}]_{O_x}$  ni  $[\min\{\min\{m_{F(x)}[0; s_1]; -s_{-1}\}; s_{-1}\}; \max\{\max\{M_{F(x)}[s_{-1}; 0]; -s_{-1}\}; s_1\}]_{O_y}$
4. 1er cas:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ 
  - a. On détermine le plus petit  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$
  - b. On détermine le plus grand  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$
  - c. On détermine le plus petit  $\bar{x} \geq 0$  tel que  $F(\bar{x}) = F(d) - 2d$
  - d. On détermine  $m_{F(x)}[0, D]$  et  $M_{F(x)}[d, 0]$
  - e. On détermine le plus grand  $\underline{x} \leq 0$  tel que  $F(\underline{x}) = F(D) - 2D$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »

f. Les éventuelles solutions périodiques coupent  $[(F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}; (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}]_{O_x} \cap [\underline{x}; \bar{x}]_{O_x} \times \left( [F(D) - 2D; F(d) - 2d]_{O_y} \cap [m_{F(x)}[0; D] - \sqrt{D^2 + (m_{F(x)}[0; D] - F(D) + D)^2}; M_{F(x)}[d; 0] + \sqrt{d^2 + (M_{F(x)}[d; 0] - F(d) + d)^2}]_{O_y} \right)$

2ème cas:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \infty$

- On détermine le plus petit  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$
- On détermine le plus grand  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq 0$
- Les éventuelles solutions périodiques coupent  $[max\{F(D) - 2D, F(d) + 2d\}, 0]_{O_y}$  et  $[-2d - F(d), 2D - F(D)]_{O_x}$

Cet algorithme est polynomial et fournit des estimations très précises. En performance il surpasse de loin les autres méthodes proposées jusqu'à présent dans la littérature Avec un tableur le temps de calcul est d'une fraction de seconde

Graphiquement la « Zone de pêche » est délimitée par un rectangle et une croix centrale.

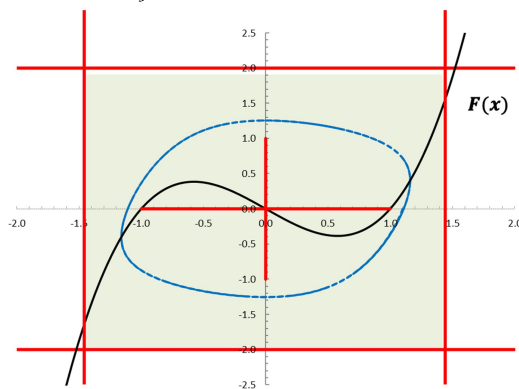
## APPLICATION

Voici ce que l'on obtient pour les quelques très rares équations étudiées dans la littérature.

$F(x) = x^3 - x$  (**Balthasar van de Pol**)

Les solutions périodiques sont dans  $[-1.4715; 1.4715]_{O_x} \times [-2; 2]_{O_y}$  et ne coupent ni

$[-1; 1]_{O_x}$  ni  $[-1; 1]_{O_y}$



$F(x) = \frac{8}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x$  (**Sébastien Neukirch**)

Les solutions périodiques sont dans  $[-2.2002; 2.2002]_{O_x} \times [-3.1262; 3.1262]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-0.8525; 0.8525]_{O_x}$  ni  $[-0.8525; 0.8525]_{O_y}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$F(x) = x^7 - 15.56x^5 + 69.28x^3 - 92.16x \text{ (Sébastien Neukirch)}$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-3.1026; 3.1026]_{O_x} \times [-75.6677; 75.6677]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-1.6000; 1.6000]_{O_x}$  ni  $[-43.4565; 43.4565]_{O_y}$

$$F(x) = \frac{32}{875}x^7 - \frac{56}{125}x^5 + \frac{98}{75}x^3 - \frac{18}{25}x \text{ (Lawrence Perko)}$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-3.0803; 3.0803]_{O_x} \times [-6.4612; 6.4612]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-0.8470; 0.8470]_{O_x}$  ni  $[-0.8470; 0.8470]_{O_y}$

$$F(x) = -x + \frac{1}{2}x|x| \text{ (Boufoul Amel)}$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-3.3109; 3.3109]_{O_x} \times [-3.6623; 3.6623]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-2.0000; 2.0000]_{O_x}$  ni  $[-2.0000; 2.0000]_{O_y}$

$$F(x) = x(x^2 - 2)(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = x^7 - \frac{13}{4}x^5 + \frac{11}{4}x^3 - \frac{1}{2}x \text{ (Armengol Gasull et Hector Giacomini)}$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-1.5932; 1.5932]_{O_x} \times [-2.2533; 2.2533]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-0.5000; 0.5000]_{O_x}$  ni  $[-0.5000; 0.5000]_{O_y}$

$$F(x) = \frac{1}{10}(1.3544x^9 - 6.0952x^7 + 9.3333x^5 - 5.5555x^3 + x) \text{ (Simon Wang et Giovanni Tosi)}$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-1.7552; 1.7552]_{O_x} \times [-2.0221; 2.0221]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-0.5600; 0.5600]_{O_x}$  ni  $[-0.5600; 0.5600]_{O_y}$

Quittons tous ces exemples classiques pour en aborder de nouveaux

$$F(x) = (x - 2)(x - 1)x(x + 1) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-2.4091; 4.4091]_{O_x} \times [-2.4091; 0.0000]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-1.0000; 1.0000]_{O_x}$  ni  $[-1.0000; 1.0000]_{O_y}$

$$F(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = \frac{1}{4}(x^5 - 5x^3 + 4x)$$

Les solutions périodiques sont dans  $[-2.3671; 2.3671]_{O_x} \times [-3.3553; 3.3553]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-1.000; 1.000]_{O_x}$  ni  $[-1.000; 1.000]_{O_y}$

$$F(x) = 0.95(x - 1)(x - 0.95)x(x + 0.7)(x + 1.5)$$

Cette fonction n'a ni symétrie axiale ni symétrie centrale

Les solutions périodiques sont dans  $[-1.6897; 1.5527]_{O_x} \times [-1.5174; 2.6289]_{O_y}$  et ne coupent ni  $[-0.7000; 0.7000]_{O_x}$  ni  $[-0.9500; 0.9500]_{O_y}$

### Notation

Soit  $y > 0$ , on note  $C_+(y)$  la première intersection de  $Traj_{F(x)}(0; y)$  avec  $Oy_-$  et on note  $C_-(y)$  la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; y)$  avec  $Oy_-$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



**PROPOSITION 6**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq d$  alors  $\bar{C}_+ = \lim_{y \rightarrow +\infty} C_+(y)$  et  $\bar{C}_- = \lim_{y \rightarrow +\infty} C_-(y)$  existent

**Preuve**

Selon le théorème D on a que  $C_+(y) \geq F(D) + 2D$  et  $C_-(y) \geq F(d) + 2d$  D'autre part si  $y_1 > y_2 > 0$  alors on a  $C_+(y_1) < C_+(y_2)$  et  $C_-(y_1) < C_-(y_2)$  Ainsi  $C_+(y)$  et  $C_-(y)$  sont strictement décroissantes et bornées et donc elles convergent  
#

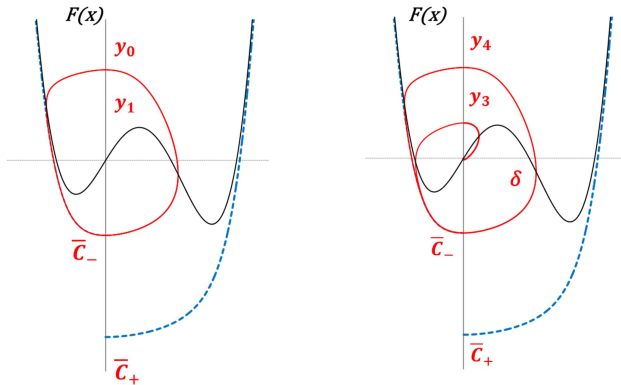
**APPLICATION NUMERIQUE**

Si  $F(x) = x^2$  alors  $\bar{C}_+ = \bar{C}_- \cong 0.4996$

**PROPOSITION 7**

Soit  $F(x)$  une fonction continue et strictement croissante en  $x = 0$  telle que  $F(0) = 0$  Si  $\bar{C}_- \geq \bar{C}_+$  alors il y a au moins une solution périodique

**Preuve**



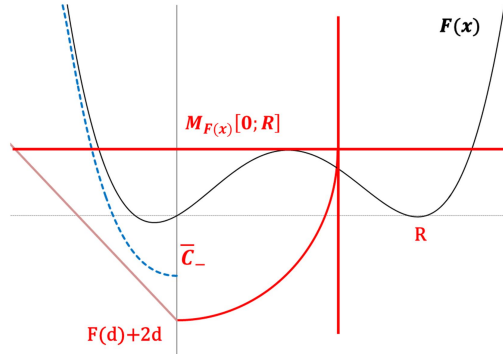
Puisque  $\bar{C}_- \geq \bar{C}_+$  alors  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; \bar{C}_-)$  coupe  $O_{y_+}$  en  $(0; y_0)$  De la même manière  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; y_0)$  coupe  $O_{y_+}$  en  $(0; y_1)$  avec  $y_1 < y_0$  Ainsi  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; y_0) - y_0 < 0$   
Puisque  $F(x) > 0$  est strictement croissante en  $x = 0$  alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $xF(x) > 0$  sur  $[-\delta; 0] \cup ]0; \delta]$  et alors pour  $y_3 \leq \delta$  on a  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; y_3)$  coupe  $O_{y_+}$  en  $(0; y_4)$  avec  $y_3 < y_4$  Ainsi  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; y_3) - y_3 > 0$   
Et puisque  $Traj_{F(x)}^{-1}$  est continue alors il existe au moins un  $\tilde{y}$  tel que  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; \tilde{y}) - \tilde{y} = 0$  et donc la solution qui passe par  $(0; \tilde{y})$  est périodique  
#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**PROPOSITION 8**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq d$  et telle que  $F(x) \geq 0$  sur  $[0; R]$  Si  $M_{F(x)}[0; R] - F(d) - 2d \leq R$  alors  $\bar{C}_- \geq \bar{C}_+$

**Preuve**



On a  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; F(d) + 2d)$  est enveloppée par  $Traj_{M_{F(x)}[0; R]}^{-1}(0; F(d) + 2d)$  dont on en tire que  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; F(d) + 2d)$  coupe  $y = M_{F(x)}[0; R]$  en  $x = M_{F(x)}[0; R] - F(d) - 2d$  et donc  $Traj_{F(x)}^{-1}(0; F(d) + 2d)$  va couper  $F(x)$  et par suite  $Oy_+$  ce qui équivaut à  $F(d) + 2d \geq \bar{C}_+$  Et comme  $\bar{C}_- \geq F(d) + 2d$  on a bien  $\bar{C}_- \geq \bar{C}_+$   
#

**COROLLAIRE 8.1**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq d$  et telle que  $F(x) \geq 0$  sur  $[0; R]$  et  $F(x) < 0$  sur  $]-\delta; 0[$  avec  $\delta > 0$  Si  $M_{F(x)}[0; R] - F(d) - 2d \leq R$  alors il y a au moins une solution périodique

**Preuve**

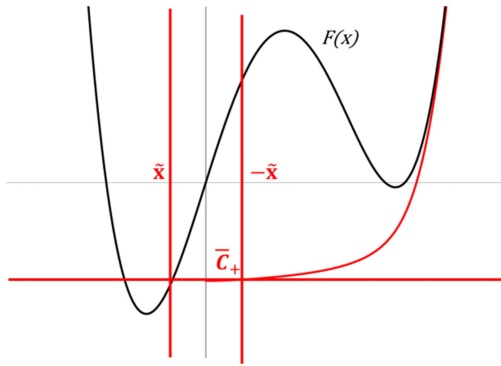
Selon la proposition 8 on a  $\bar{C}_- \geq \bar{C}_+$  et alors selon la proposition 7 il y a au moins une solution périodique  
#

**PROPOSITION 9**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et qui est strictement croissante en 0 et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$  et telle que  $F(x)$  est et telle qu'il existe  $x < 0$  tel que  $F(x) = \bar{C}_+$  Notons  $\bar{x} = \max\{x < 0 \mid F(x) = \bar{C}_+\}$  Si  $-x F(x) > 0$  sur  $[\bar{x}; 0[ \cup ]0; -\bar{x}]$  alors il n'y a aucune solution périodique

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## Preuve



$Traj_{F(x)}(0; \bar{C}_+)$  va couper  $[\bar{x}; 0]_{O_x}$  puis  $]0; -\bar{x}]_{O_x}$ . Comme  $-x(x) < 0$  dans  $[\bar{x}; 0]_{O_x} \cup ]0; -\bar{x}]_{O_x}$  on a que  $Traj_{F(x)}(0; \bar{C}_+)$  va tendre vers  $(0; 0)$ . Pour tout  $y > 0$  on a  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est enveloppée par  $Traj_{F(x)}(0; \bar{C}_+)$  et donc elle va tendre vers  $(0; 0)$ .  
#

## THEOREME E

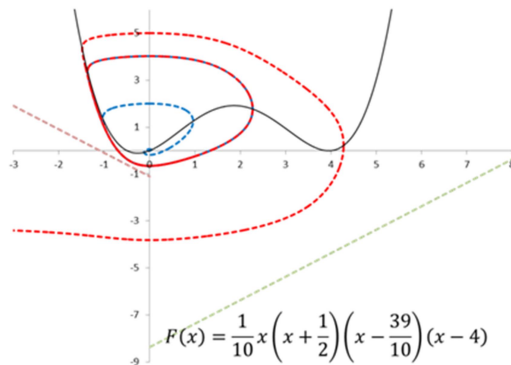
Il existe au moins un  $\alpha \in \mathbb{R}^* - \{1\}$  et une fonction  $F(x)$  continue telle que  $F(0) = 0$  pour lesquels  $F(x)$  et  $\alpha F(x)$  il n'y a pas le même nombre de solutions périodiques.

## Preuve

C'est le cas pour  $F(x) = \frac{1}{10}x(x + \frac{1}{2})(x - \frac{39}{10})(x - 4)$  et  $\alpha = 100$ .

Soit  $F(x) = \frac{1}{10}x(x + \frac{1}{2})(x - \frac{39}{10})(x - 4)$

Dans ce cas on a  $d \cong 0.6873$  et  $F(d) \cong 0.2768$  et  $D \cong 4.3788$  et  $R = 3.9$  et  $\delta = 0.5$  et  $M_{F(x)}[0; R] \cong 1.9163$ . Et finalement  $M_{F(x)}[0; R] - F(d) - 2d \cong 0.2649 \leq 3.9 = R$ . Alors selon le corollaire 8.1 il y a au moins une solution périodique.

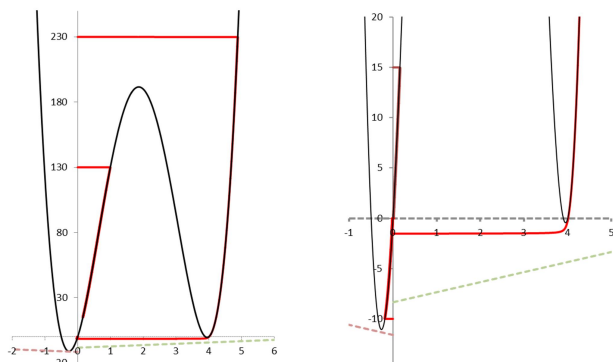


Soit  $G(x) = 10x(x + \frac{1}{2})(x - \frac{39}{10})(x - 4) = 100F(x)$

Dans ce cas on a  $D \cong 3.9563$  et  $\bar{C}_+ \leq G(D) - 2D \cong -8.3464$  et  $\tilde{x} = \max\{x < 0 | G(x) = G(D) - 2D\} \cong -0.1380$  alors  $-0.1380 \cong \tilde{x} \leq \bar{x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »

Comme on a  $G(x) < 0$  sur  $[-\frac{1}{2}; 0[$  et  $G(x) > 0$  sur  $]0; \frac{39}{10}]_{0_x}$  alors  $-xG(x) < 0$  sur  $[-0.1380; 0[ \cup ]0; 0.1380]$  et donc également sur  $[\bar{x}; 0[_{0_x} \cup ]0; -\bar{x}]_{0_x}$ . Alors selon la proposition 9 il n'y a pas de solution périodique



$$G(x) = 10x \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{39}{10}\right) (x - 4)$$

#

### PROPOSITION 10

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$ . S'il existe  $\Delta > 0$  tel que  $M_{F(x)}[-\Delta + F(D) - 2D; 0] \leq \Delta$  alors les solutions périodiques sont dans un espace borné

#### Preuve

On a  $Traj_{F(x)}(0; F(D) - 2D)$  est enveloppée par  $Traj_{\Delta}(0; F(D) - 2D)$  et  $Traj_{\Delta}(0; F(D) - 2D)$  coupe  $y = \Delta$  en  $x = -\Delta + F(D) - 2D$ . Ainsi  $Traj_{F(x)}(0; F(D) - 2D)$  va couper  $F(x)$  et donc tourner autour de  $(0; 0)$ . Pour tout  $y > 0$  on a que  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est enveloppée par  $Traj_{F(x)}(0; F(D) - 2D)$

#

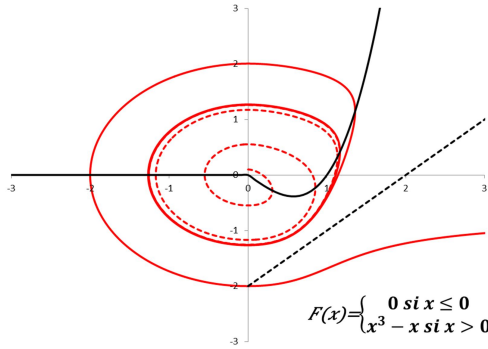
### COROLLAIRE 10.1

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq D$  et s'il existe  $\Delta > 0$  tel que  $M_{F(x)}[-\infty; 0] \leq \Delta$  alors les solutions périodiques sont dans un espace borné

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

En voici une illustration



**LEMME 3**

Les solutions de l'équation  $\begin{cases} \dot{x} = y - h \\ \dot{y} = -x \end{cases}$  sont tous les cercles centrés en  $(0; h)$

**Preuve**

Soit  $x(t) = r \cos(t)$  et  $y(t) = r \sin(t) + h$  Alors  $\dot{x}(t) = -r \sin(t) = y(t) - h$  et  $\dot{y} = r \cos(t) = -x(t)$   
#

**PROPOSITION 11.a**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$  S'il y a au moins une solution périodique alors la solution périodique qui englobe toutes les autres solutions périodiques est semi-stable de l'extérieur

**Preuve**

Soit  $\Gamma$  la solution périodique qui englobe tous les autres cycles notons  $g$  tel que  $\Gamma \cap O_{y+} = (0; g)$  On a  $0 < g < F(d) - 2d$  Pour tout  $y_0 \geq F(d) - 2d$  la  $Traj_{F(x)}(0; y_0)$  coupe  $O_{y+}$  en  $(0; y_1)$  avec  $g < y_1 < F(d) - 2d \leq y_0$  Ainsi  $Traj_{F(x)}(0; y_0)$  s'enroule et se rapproche systématiquement de  $\Gamma$   
Par l'unicité des solutions pour tout  $g < Y_0 < F(d) - 2d$  la  $Traj_{F(x)}(0; Y_0)$  s'enroule et se rapproche systématiquement de  $\Gamma$   
#

**PROPOSITION 11.b**

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et strictement croissante en 0 S'il y a au moins une solution périodique alors la solution qui est englobée par toutes les autres solutions périodiques est semi-stable de l'intérieur

**Preuve**

Soit  $\Gamma$  le cycle qui est englobé par tous les autres cycles notons  $g$  tel que  $\Gamma \cap O_{x+} = (g; 0)$   
Par continuité de  $F(x)$  il existe  $\delta > 0$  tel que  $x F(x) > 0$  pour tout  $x \in [-\delta; 0[ \cup ]0; \delta]$  ainsi pour tout  $0 < x_0 \leq \delta$  la  $Traj_{F(x)}(x_0; 0)$  coupe  $O_{x+}$  en  $(x_1; 0)$  avec  $x_0 \leq \delta < x_1 < g$  Ainsi  $Traj_{F(x)}(0, x_0)$  s'enroule et se rapproche systématiquement de  $\Gamma$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par l'unicité des solutions pour tout  $\delta < X_0 < g$  la  $Traj_{F(x)}(X_0; 0)$  s'enroule et se rapproche systématiquement de  $\Gamma$

#

### COROLLAIRE 11.1

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et strictement croissante en 0 et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$ . S'il y a un nombre impair de solutions périodiques, alors il y a au moins un cycle

#### Preuve

S'il y a une solution périodique alors par les propositions 11.a et 11.b alors elle est stable extérieurement et intérieurement et c'est donc un cycle

Supposons qu'il y a 3 solutions périodiques et notons  $\Gamma_3$  la solution périodique qui englobe les 2 autres et  $\Gamma_1$  la solution périodique qui est englobée par les 2 autres et  $\Gamma_2$  la dernière

Le fait que  $F(x)$  est strictement croissante en  $x = 0$  implique que  $\Gamma_1$  est stable intérieurement

Le fait que  $F(x)$  est telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$  implique que  $\Gamma_3$  est stable extérieurement

Si  $\Gamma_3$  est stable intérieurement alors  $\Gamma_3$  est stable. Et si  $\Gamma_3$  est instable intérieurement alors  $\Gamma_2$  est stable extérieurement. Et dans ce cas si  $\Gamma_2$  est stable

intérieurement alors  $\Gamma_2$  est stable. Et si  $\Gamma_2$  est instable intérieurement et alors  $\Gamma_1$  est stable extérieurement et ainsi  $\Gamma_1$  est stable

Par itération on démontre le corollaire pour tout nombre impair de cycles

#

### PROPOSITION 12

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et qui a un nombre dénombrable de solutions périodiques dont au moins deux  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  telles que  $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2$ . Si  $\Gamma_1$  est stable intérieurement (respectivement stable extérieurement) et  $\Gamma_2$  est stable extérieurement (respectivement stable intérieurement) alors il y a au moins un cycle stable (respectivement instable)

#### Preuve

Soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  les deux solutions périodiques et soit  $(0; c_1) = \Gamma_1 \cap 0_{y+}$  et  $(0; c_2) = \Gamma_2 \cap 0_{y+}$  alors on a  $c_1 < c_2$

Étudions le cas où  $\Gamma_1$  est stable intérieurement et  $\Gamma_2$  est stable extérieurement

#### 1<sup>er</sup> cas

Supposons qu'il n'y a pas de solutions périodiques comprises entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  alors pour tout  $c_1 < y_0 < c_2$  la  $Traj_{F(x)}(0; y_0)$  va recouper  $0_{y+}$  en  $(0; y_1)$  tel que  $y_1 \neq y_0$  et  $c_1 < y_1 < c_2$

Si  $y_1 > y_0$  alors par unicité des solutions  $Traj_{F(x)}(0; y_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Gamma_2$  et s'éloigner de  $\Gamma_1$  et puisque  $\Gamma_2$  est stable extérieurement alors  $\Gamma_2$  est un cycle stable

Si  $y_1 < y_0$  alors par unicité des solutions  $Traj_{F(x)}(0; y_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Gamma_1$  et s'éloigner de  $\Gamma_2$  et puisque  $\Gamma_1$  est stable extérieurement alors  $\Gamma_1$  est un cycle stable

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### 2<sup>ème</sup> cas

Supposons qu'il y a une solution périodique  $\Sigma$  comprise entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et soit  $(0; s) = \Sigma \cap O_{y+}$  alors on a  $c_1 < s < c_2$ . Alors pour tous les  $y_0$  et  $z_0$  tels que  $c_1 < y_0 < s < z_0 < c_2$  la  $\text{Traj}_{F(x)}(0; y_0)$  va recouper  $O_{y+}$  en  $(0; y_1)$  tel que  $y_1 \neq y_0$  et  $c_1 < y_1 < s$  et  $\text{Traj}_{F(x)}(0; z_0)$  va recouper  $O_{y+}$  en  $(0; z_1)$  tel que  $z_1 \neq z_0$  et  $s < z_1 < c_2$ .

Si  $y_1 < y_0$  alors par unicité des solutions  $\text{Traj}_{F(x)}(0; y_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Gamma_1$  et ainsi  $\Gamma_1$  est stable extérieurement. Et puisque  $\Gamma_1$  est stable intérieurement alors  $\Gamma_1$  est un cycle stable.

Si  $z_0 < z_1$  alors par unicité des solutions  $\text{Traj}_{F(x)}(0; z_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Gamma_2$  et ainsi  $\Gamma_2$  est stable intérieurement. Et puisque  $\Gamma_2$  est stable extérieurement alors  $\Gamma_2$  est un cycle stable.

Si  $y_0 < y_1$  et  $z_1 < z_0$  alors par unicité des solutions  $\text{Traj}_{F(x)}(0; y_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Sigma$  et ainsi  $\Sigma$  est stable intérieurement et  $\text{Traj}_{F(x)}(0; z_0)$  va systématiquement s'approcher de  $\Sigma$  et ainsi  $\Sigma$  est stable extérieurement alors  $\Sigma$  est un cycle stable.

### 3<sup>ème</sup> cas

Supposons qu'il y a un nombre dénombrable strictement supérieur ou égal à 2 de solutions périodiques comprises entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  que l'on note  $\Sigma_i$  pour  $i \in \mathbb{N}$  de telle sorte que  $\Gamma_1 \subsetneq \Sigma_1 \subsetneq \Sigma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_2$ .

Si  $\Sigma_1$  est stable intérieurement et alors par récurrence parmi les  $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Gamma_2\}$  il y a un cycle stable.

Si  $\Sigma_1$  est stable extérieurement alors  $\Gamma_1$  est stable intérieurement et extérieurement et donc c'est un cycle stable.

Le cas où  $\Gamma_1$  est stable extérieurement et  $\Gamma_2$  est stable intérieurement se démontre de manière analogue.

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »

### CHAPITRE 3 - $Traj_{F(x)}$ utilisée comme application de $O_y$ sur lui-même

Lorsqu'elles coupent  $O_y$  les  $Traj_{F(x)}$  issues d'un ensemble fini de points définissent une partition de  $O_y$ . L'idée que l'on va creuser est de relier les caractéristiques d'applications de sous-espaces de  $O_y$  sur lui-même et l'existence et la position de solutions périodiques

Soit  $m$  points  $(x_i; y_i)$  différents qui sont tels  $x_i \leq 0$ . Notons  $\bar{y}_i > 0$  tel que  $(0; \bar{y}_i)$  est la première intersection de  $Traj_{F(x)}(x_i; y_i)$  avec  $O_{y+}$  et  $\underline{y}_i < 0$  tel que  $(0; \underline{y}_i)$  est la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(x_i; y_i)$  avec  $O_{y-}$ .

Si  $Traj_{F(x)}(x_i; y_i)$  ne coupe pas  $O_{y+}$  alors on pose  $\bar{y}_i = \infty$ . De la même manière si  $Traj_{F(x)}^{-1}(x_i; y_i)$  ne coupe pas  $O_{y-}$  alors on pose  $\underline{y}_i = -\infty$ .

Les  $\bar{y}_i \neq \infty$  partagent  $O_{y+}$  en  $p_- \leq m + 1$  intervalles que l'on note  $\bar{L}_i$  avec  $\bar{y}_i < \bar{y}_{i+1}$ . De la même manière les  $\underline{y}_i \neq -\infty$  partagent  $O_{y-}$  en  $q_- \leq m + 1$  intervalles que l'on note  $\underline{L}_i$  avec  $\underline{y}_i > \underline{y}_{i+1}$ .

De la même manière, soit  $n$  points  $(X_i; Y_i)$  différents qui sont tels  $X_i \geq 0$ . Notons  $\bar{Y}_i > 0$  tel que  $(0; \bar{Y}_i)$  est la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(X_i; Y_i)$  avec  $O_{y+}$  et  $\underline{Y}_i < 0$  tel que  $(0; \underline{Y}_i)$  est la première intersection de  $Traj_{F(x)}(X_i; Y_i)$  avec  $O_{y-}$ .

Si  $Traj_{F(x)}^{-1}(X_i; Y_i)$  ne coupe pas  $O_{y+}$  alors on pose  $\bar{Y}_i = \infty$ .

De la même manière si  $Traj_{F(x)}(X_i; Y_i)$  ne coupe pas  $O_{y-}$  alors on pose  $\underline{Y}_i = -\infty$ .

Les  $\bar{Y}_i \neq \infty$  partagent  $O_{y+}$  en  $p_+ \leq n + 1$  intervalles que l'on note  $\bar{R}_i$  avec  $\bar{Y}_i < \bar{Y}_{i+1}$ .

De la même manière les  $\underline{Y}_i \neq -\infty$  partagent  $O_{y-}$  en  $q_+ \leq n + 1$  intervalles que l'on note  $\underline{R}_i$  avec  $\underline{Y}_i > \underline{Y}_{i+1}$ .

A remarquer que  $\bar{L}_{p_-}, \bar{R}_{p_+}, \underline{L}_{q_-}$  et  $\underline{R}_{q_+}$  sont des intervalles semi-fermés et que tous les autres  $\bar{L}_i, \bar{R}_i, \underline{L}_i$  et  $\underline{R}_i$  sont des intervalles fermés.

Pour tout  $i \leq p_-$  il existe un entier  $k_i \leq p_+$  et un entier minimum  $l_i \leq p_+$  tels que  $\bar{L}_i \subseteq \bar{R}_{k_i} \cup \dots \cup \bar{R}_{l_i}$  et tels que  $\bar{L}_i \cap \bar{R}_{s_i} \neq \emptyset$  pour tous les  $k_i \leq s_i \leq l_i$ .

Pour tout  $j \leq q_+$  il existe un entier maximum  $m_j \leq q_-$  et un entier minimum  $n_j \leq q_-$  tels que  $\underline{R}_j \subseteq \underline{L}_{m_j} \cup \dots \cup \underline{L}_{n_j}$  et tels que  $\underline{R}_j \cap \underline{L}_{s_j} \neq \emptyset$  pour tous les  $m_j \leq s_j \leq n_j$ .

Soit  $r_- = \text{minimum}(p_-; p_+)$ , puisque  $F(x)$  est continue alors pour tout  $x \in \underline{L}_k$  on a que  $Traj_{F(x)}(x)$  coupe  $\bar{L}_k$  pour tout  $1 \leq k \leq r_-$ .

De la même manière, soit  $r_+ = \text{minimum}(q_-; q_+)$  alors pour tout  $y \in \bar{R}_k$  on a  $Traj_{F(x)}(0; y)$  coupe  $\underline{R}_k$  pour tout  $1 \leq k \leq r_+$ .

Ainsi la trajectoire issue de  $y \in \bar{L}_k$  coupe  $\bar{L}_i$  si et seulement s'il existe  $t$  tel que  $\bar{L}_k \cap \bar{R}_t \neq \emptyset$  et  $\underline{R}_t \cap \underline{L}_i \neq \emptyset$ .

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »



On définit les matrices  $M_{F(x)} = (m_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{L}_i \cap \bar{R}_j = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  pour  $1 \leq i \leq p_+$  et  $1 \leq j \leq q_+$ ,  
 $D_{F(x)} = (d_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  pour  $1 \leq i \leq q_+$  et  $1 \leq j \leq q_-$ ,  $N_{F(x)} = (n_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{R}_i \cap \underline{L}_j = \emptyset \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$   
pour  $1 \leq i \leq q_-$  et  $1 \leq j \leq p_-$  et  $U_{F(x)} = (h_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  pour  $1 \leq i \leq p_-$  et  $1 \leq j \leq p_+$

On note  $C_{F(x)} = (c_{ij}) = M_{F(x)} D_{F(x)} N_{F(x)} U_{F(x)}$ , alors on a  $c_{ij} = \sum_{x,y,z} m_{ix} b_{xy} n_{yz} h_{zj} =$   
 $\sum_x m_{ix} b_{xx} n_{xj} h_{jj} = \sum_x m_{ix} n_{xj} = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{L}_i \cap \bar{R}_x = \emptyset \text{ ou } \underline{R}_x \cap \underline{L}_j = \emptyset \text{ pour tout } x \\ > 0, & \text{sinon} \end{cases}$

On a  $c_{ij} > 0$  si et seulement si il existe  $t$  tel que  $\bar{L}_j \cap \bar{R}_t \neq \emptyset$  et  $\underline{R}_t \cap \underline{L}_i \neq \emptyset$

### PROPOSITION 13

Soit  $F(x)$  une fonction continue et telle que  $F(0) = 0$  et des points  $(x_k; y_k)$  avec  $1 \leq k \leq n$  et  $y \in \bar{L}_i$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y)$  coupe  $\bar{L}_i$  si et seulement si et seulement  $C_{ij} > 0$

#### Preuve

Par construction telle que présentée ci-dessus  
#

### PROPOSITION 14

Soit  $F(x)$  une fonction continue et telle que  $F(0) = 0$  et des points  $(x_k; y_k)$  avec  $1 \leq k \leq n$  Si  $C_{i-1,i} \geq 1$  et  $C_{i,i} \geq 1$  et  $C_{i+1,i} \geq 1$  et  $C_{i,i-1} = C_{i,i+1} = 0$  alors il y a au moins une solution périodique stable intérieurement et une solution périodique stable extérieurement qui coupent  $\bar{L}_i$

#### Preuve

La condition  $C_{i,i} = 1$  implique qu'il existe au moins  $y \in \bar{L}_i$  tel que  $Traj_{F(x)}(0; y)$  coupe  $\bar{L}_i$  ce qui est équivalent à  $Traj_{F(x)}(\bar{L}_i) \cap \bar{L}_i \neq \emptyset$  et  $\bar{L}_i \neq \emptyset$

La condition  $C_{i,i-1} = C_{i,i+1} = 0$  est équivalente à ce que pour tout  $y \in \bar{L}_i$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y)$  ne coupe ni  $\bar{L}_{i-1}$  ni  $\bar{L}_{i+1}$  ce qui est équivalent à  $Traj_{F(x)}(\bar{L}_i) \subseteq \bar{L}_i$  Soit  $y_- = \bar{L}_{i-1} \cap \bar{L}_i$  alors puisque  $C_{i-1,i} = 1$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y_-) \in \bar{L}_i - \{y_-\}$  Et de la même manière soit  $y_+ = \bar{L}_i \cap \bar{L}_{i+1}$  alors puisque  $C_{i+1,i} = 1$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y_+) \in \bar{L}_i - \{y_+\}$

Notons  $b = \min\{(0; y) \in \bar{L}_i | Traj_{F(x)}(0; y) \text{ passe par } (0; y)\}$  et

$h = \max\{(0; y) \in \bar{L}_i | Traj_{F(x)}(0; y) \text{ passe par } (0; y)\}$  alors  $Traj_{F(x)}(0; b)$  est une solution périodique stable intérieurement et  $Traj_{F(x)}(0; h)$  est une solution périodique stable extérieurement

#

### PROPOSITION 15

Soit  $F(x)$  une fonction continue et telle que  $F(0) = 0$  et des points  $(x_k; y_k)$  avec  $1 \leq k \leq n$  Si  $C_{i,i-1} \geq 1$  et  $C_{i,i} \geq 1$  et  $C_{i,i+1} \geq 1$  et  $C_{i-1,i} = C_{i+1,i} = 0$  alors il y a au moins une solution périodique instable intérieurement et une solution périodique instable extérieurement qui coupent  $\bar{L}_i$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## Preuve

La condition  $C_{i,i} = 1$  implique qu'il existe au moins  $y \in \bar{L}_i$  tel que  $Traj_{F(x)}(0; y)$  coupe  $\bar{L}_i$  ce qui est équivalent à  $Traj_{F(x)}(\bar{L}_i) \cap \bar{L}_i \neq \emptyset$  et  $\bar{L}_i \neq \emptyset$

La condition  $C_{i-1,i} = C_{i+1,i} = 0$  est équivalente à que pour tout  $y \in \bar{L}_{i-1}$  alors

$Traj_{F(x)}(0; y)$  ne coupe pas  $\bar{L}_i$  ce qui est équivalent à  $Traj_{F(x)}(\bar{L}_{i-1}) \cap \bar{L}_i = \emptyset$ ; de la même manière on a  $Traj_{F(x)}(\bar{L}_{i+1}) \cap \bar{L}_i = \emptyset$  et ainsi  $\bar{L}_i \subseteq Traj_{F(x)}(\bar{L}_i)$  et donc  $Traj_{F(x)}^{-1}(\bar{L}_i) \subseteq \bar{L}_i$

Soit  $y_- = \bar{L}_{i-1} \cap \bar{L}_i$  alors puisque  $C_{i,i-1} = 1$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y_-) \in \bar{L}_{i-1} - \{y_-\}$  Et de la

même manière soit  $y_+ = \bar{L}_i \cap \bar{L}_{i+1}$  alors puisque  $C_{i,i+1}$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y_+) \in \bar{L}_{i+1} - \{y_+\}$

Notons  $b = \min\{(0; y) \in \bar{L}_i | Traj_{F(x)}(0; y) \text{ passe par } (0; y)\}$  et

$h = \max\{(0; y) \in \bar{L}_i | Traj_{F(x)}(0; y) \text{ passe par } (0; y)\}$  alors  $Traj_{F(x)}(0; b)$  est une solution périodique instable intérieurement et  $Traj_{F(x)}(0; h)$  est une solution périodique instable extérieurement

#

## Notation

$\#(F)$  le nombre de solutions périodiques pour  $F(x)$

## THEOREME F

Soit  $F(x)$  et  $H(x)$  et  $L(x)$  toutes continues et telles que  $F(0) = H(0) = L(0) = 0$  Si  $L(x) \leq F(x) \leq H(x)$  pour tout  $x \geq 0$  et  $H(x) \leq F(x) \leq L(x)$  pour tout  $x \leq 0$  alors  $\#(F) \geq \min\{\#(H); \#(L)\}$  Et les solutions périodiques pour  $F(x)$  sont toutes comprises entre une solution périodique pour  $H(x)$  et une solution périodique pour  $L(x)$

## Preuve

Soit  $(0; y_L)$  l'intersection de  $\Gamma_L$  une solution périodique de  $L(x)$  avec  $Oy_+$  et soit

$(0; y_H)$  l'intersection de  $\Gamma_H$  une solution périodique de  $H(x)$  avec  $Oy_+$

Deux cas sont à envisager:

1<sup>er</sup> cas :  $y_L \geq y_H$  Soit  $y$  tel que  $y_H \leq y \leq y_L$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est enveloppée

par  $Traj_{L(x)}(0; y)$  qui elle-même est enveloppée par  $Traj_{L(x)}(0; y_L)$  Et d'autre

part  $Traj_{F(x)}(0; y)$  enveloppe  $Traj_{H(x)}(0; y)$  qui elle-même enveloppe  $Traj_{H(x)}(0; y_H)$

Ainsi  $Traj_{F(x)}(0; y)$  recoupe  $[\tilde{y}_H; \tilde{y}_L]_{Oy_+} \subset [y_H; y_L]_{Oy_+}$  Et alors par le théorème du point fixe il

y a au moins une solution périodique pour  $Traj_{F(x)}(0; y)$  qui coupe  $[y_H; y_L]_{Oy_+}$ .

2<sup>ème</sup> cas ou  $y_L \leq y_H$  Soit  $y$  tel que  $y_H \geq y \geq y_L$  alors  $Traj_{F(x)}(0; y)$  est enveloppé par

$Traj_{L(x)}(0; y)$  qui elle-même est enveloppée par  $Traj_{L(x)}(0; y_H)$ . Et d'autre part

$Traj_{F(x)}(0; y)$  enveloppe  $Traj_{H(x)}(0; y)$  qui elle-même enveloppe  $Traj_{H(x)}(0; y_H)$

Ainsi  $Traj_{F(x)}(0; y)$  recoupe  $[\tilde{y}_H; \tilde{y}_L]_{Oy_+} \supset [y_H; y_L]_{Oy_+}$  Et alors  $Traj_{F(x)}^{-1}[\tilde{y}_H; \tilde{y}_L] \subset [y_H; y_L]_{Oy_+}$  et

alors par le théorème du point fixe il y a au moins une solution périodique pour  $F(x)$  qui

coupe  $[y_H; y_L]_{Oy_+}$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

#### LEMME 4

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  Si  $F(-x) = F(x)$  pour tout  $x$  alors à toute solution périodique pour  $F(x)$  il correspond une solution périodique pour  $F(-x)$  et réciproquement et ces solutions sont symétriques par rapport à  $O_y$

#### Preuve

Soit  $T = (x(t), y(t))$  une trajectoire pour  $F(x)$  cela équivaut à ce  $\dot{x}(t) = y(t) - F(x(t))$  et  $\dot{y}(t) = -x(t)$

Soit  $G(x) = F(-x)$  et  $a(t) = -x(-t)$  et  $b(t) = y(-t)$  alors  $\dot{a}(t) = \dot{x}(-t) = y(-t) -$

$F(x(-t)) = b(t) - F(-a(t)) = b(t) - G(a(t))$  et  $\dot{b}(t) = -\dot{y}(-t) = x(-t) = -a(t)$  Ainsi

$T^- = (a(t), b(t)) = (-x(-t), y(-t))$  est une trajectoire pour  $G(x)$  et donc pour  $F(-x)$

Si  $T$  est une solution périodique cela veut dire qu'il existe  $\tau$  tel que  $x(t) = x(t + \tau)$  et

$y(t) = y(t + \tau)$  et donc on a  $a(t) = -x(t) = -x(t + \tau) = -a(t + \tau)$  et  $b(t) = -y(t) =$

$-y(t + \tau) = -b(t + \tau)$  et donc  $T^-$  est aussi une solution périodique Et la réciproque est aussi vraie

#

#### LEMME 5

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle que  $F(-x) = F(x)$  pour tout  $x$  Si  $\Gamma = (x_\Gamma(t), y_\Gamma(t))$  est une solution périodique stable (respectivement instable) pour  $F(x)$  alors  $\Gamma^- = (-x_\Gamma(-t), y_\Gamma(-t))$  est une solution périodique instable (respectivement stable) pour  $F(-x)$

#### Preuve

Soit  $(0; y_0)$  l'intersection de  $\Gamma$  avec  $O_{y+}$  et puisque  $\Gamma$  est stable ceci implique qu'il existe

$\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $0 < \delta < \varepsilon$  la  $Traj_{F(x)}(0; y_0 + \delta)$  coupe  $[y_0; y_0 + \delta]_{O_{y+}}$  Supposons

que  $(0; y_0 + \delta) = (x_\Gamma(0), y_\Gamma(0))$  et soit  $\tau > 0$  la valeur minimale tel que  $x_\Gamma(\tau) = 0$  alors on a

$$0 > \oint \frac{\partial}{\partial t} (x_\Gamma^2(t) + y_\Gamma^2(t)) dt = \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} (x_\Gamma^2(t) + y_\Gamma^2(t)) dt = 2 \int_0^\tau (x_\Gamma(t)\dot{x}_\Gamma(t) + y_\Gamma(t)\dot{y}_\Gamma(t)) dt = -2 \int_0^\tau x_\Gamma(t)F(x_\Gamma(t)) dt$$

Comme les deux solutions périodiques sont symétrique alors  $(0; y_0)$  est l'intersection de  $\Gamma^-$

avec  $O_{y+}$  Supposons que  $(0; y_0 + \delta) = (-x_\Gamma(0), y_\Gamma(0))$  alors et  $\oint \frac{\partial}{\partial t} (x_{\Gamma^-}^2(t) + y_{\Gamma^-}^2(t)) dt =$

$$\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} ((-x_\Gamma(-t))^2 + (y_\Gamma(-t))^2) dt = - \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} ((-x_\Gamma(t))^2 + (y_\Gamma(t))^2) dt = - \int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t} (x_\Gamma^2(t) + y_\Gamma^2(t)) dt = 2 \int_0^\tau x_\Gamma(t)F(x_\Gamma(t)) dt > 0$$

dont on tire  $y_{\Gamma^-}(\tau) > y_0 + \delta$  et donc que  $\Gamma^-$  est instable

par l'extérieur

De la même manière on prouve que  $\Gamma^-$  est instable par l'intérieur

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

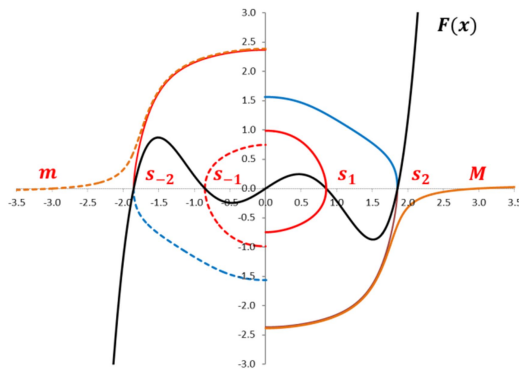
### ALGORITHME C dit de la «Ligne de pêche»

1. 1er cas:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$ 
  - a. on détermine le plus petit  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$
  - b. on détermine le plus grand  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$
  - c. on définit  $m = (F(D) - 2D - F(d) + 2d)e^{-1}$  et  $M = (F(d) - 2d - F(D) + 2D)e^{-1}$
- 2ème cas:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \infty$ 
  - a. on détermine le plus petit  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$
  - b. on détermine le plus grand  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \geq -2x + F(d) + 2d$  pour tous les  $x \leq 0$
  - c. on définit  $m = -2d - F(d)$  et  $M = 2D - F(D)$
2. on détermine les solutions  $s_i$  de  $F(x)$
3. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}(s_i, 0)$  avec  $O_y$  pour tous les  $i$
4. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}(m, 0)$  avec  $O_y$
5. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}(M, 0)$  avec  $O_y$
6. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(s_i, 0)$  avec  $O_y$  pour tous les  $i$
7. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(m, 0)$  avec  $O_y$
8. on détermine la première intersection de  $Traj_{F(x)}^{-1}(M, 0)$  avec  $O_y$
9. on détermine les  $\bar{L}_j$  et  $\bar{R}_j$  et  $\underline{L}_j$  et  $\underline{R}_j$
10. on détermine la matrice  $C$
11. on détermine les  $k$  tels que  $C_{k-1,k} \geq 1$  et  $C_{k,k} \geq 1$  et  $C_{k+1,k} \geq 1$  et  $C_{k,k-1} = C_{k,k+1} = 0$
12. on détermine les  $l$  tels que  $C_{l,l-1} \geq 1$  et  $C_{l,l} \geq 1$  et  $C_{l,l+1} \geq 1$  et  $C_{l-1,l} = C_{l+1,l} = 0$

Cet algorithme est déterministe. Le temps de calcul nécessaire dépend de la précision prise dans la détermination des trajectoires Avec un tableur le temps de calcul nécessaire ne dépasse pas au pire quelques fractions de secondes

### APPLICATION

Soit  $F(x) = \frac{8}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}$  (Sébastien Neukirch)



On a  $-s_{-2} = s_2 \cong 1.8547$  et  $-s_{-1} = s_1 \cong 0.8525$  et  $-m = M = 2.9855$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par calcul on tire  $\bar{L}_1 \cong [0.000; 0.7460]$  et  $\bar{L}_2 \cong [0.7460; 2.3650]$  et  $\bar{L}_3 \cong [2.3650; 2.3848]$  et  $\bar{L}_4 \cong [2.3848; \infty[$  et  $\underline{L}_1 \cong [0; -0.9866]$  et  $\underline{L}_2 \cong [-0.9866; -1.5630]$  et  $\underline{L}_3 \cong [-1.5630; -\infty[$  et  $\bar{R}_1 \cong [0; 0.9866]$  et  $\bar{R}_2 \cong [0.9866; 1.5630]$  et  $\bar{R}_3 \cong [1.5630; \infty[$  et  $\underline{R}_1 \cong [0.000; -0.7460]$  et  $\underline{R}_2 \cong [-0.7460; -2.3650]$  et  $\underline{R}_3 \cong [-2.3650; -2.3848]$  et  $\underline{R}_4 \cong [-2.3848; -\infty[$

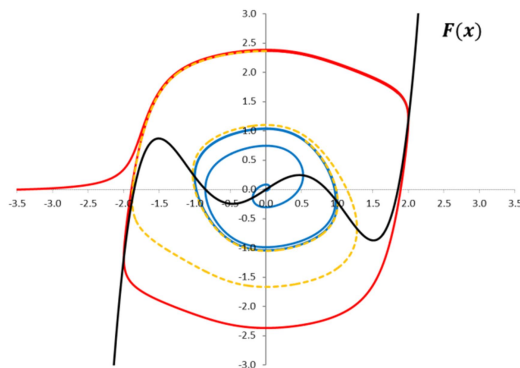
Alors  $M_{F(x)} = N_{F(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D_{F(x)} = U_{F(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et finalement on

obtient  $C_{F(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi il y a au moins 2 solutions périodiques dont une qui coupe  $\bar{L}_2 \cong [0.7460; 2.3650]_{O_y}$  et  $\underline{R}_2 \cong [-0.7460; -2.3650]_{O_y}$  et une qui coupe  $\bar{L}_3 \cong [2.3650; 2.3848]_{O_y}$  et  $\underline{R}_3 \cong [-2.3650; -2.3848]_{O_y}$

En procédant de même on obtient qu'il y a pour  $F(-x)$  au moins 2 solutions périodiques dont une qui coupe  $\bar{R}_2 \cong [0.9866; 1.5630]_{O_y}$  et  $\underline{L}_2 \cong [-1.5630; -0.9866]_{O_y}$  et une qui coupe  $\bar{R}_3 \cong [1.5630; \infty]_{O_y}$  et  $\underline{L}_3 \cong [-2.3848; -2.3650]_{O_y}$

Comme par le lemme 5 les solutions périodiques  $F(x)$  et  $F(-x)$  coupe  $O_y$  en des points identiques alors il y a pour  $F(x)$  au moins 2 solutions périodiques dont une qui coupe  $\bar{L}_2 \cap \bar{R}_2 = [0.9866; 1.5630]_{O_y}$  et  $\underline{R}_2 \cap \underline{L}_2 = [-1.5630; -0.9866]_{O_y}$  et une qui coupe  $\bar{L}_3 \cap \bar{R}_3 = [2.3650; 2.3848]_{O_y}$  et  $\underline{R}_3 \cap \underline{L}_3 = [-2.3848; -2.3650]_{O_y}$



« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## CHAPITRE 4 - Le filet à solutions périodiques

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et  $\varepsilon > 0$  et  $m > 0$  et  $i \in \mathbb{Z}$ , on définit  $x_i = i$  puis  $\lambda_i = m_{F(x)}[x_{i-1}; x_i]$  respectivement  $\theta_i = M_{F(x)}[x_{i-1}; x_i]$

Soit alors

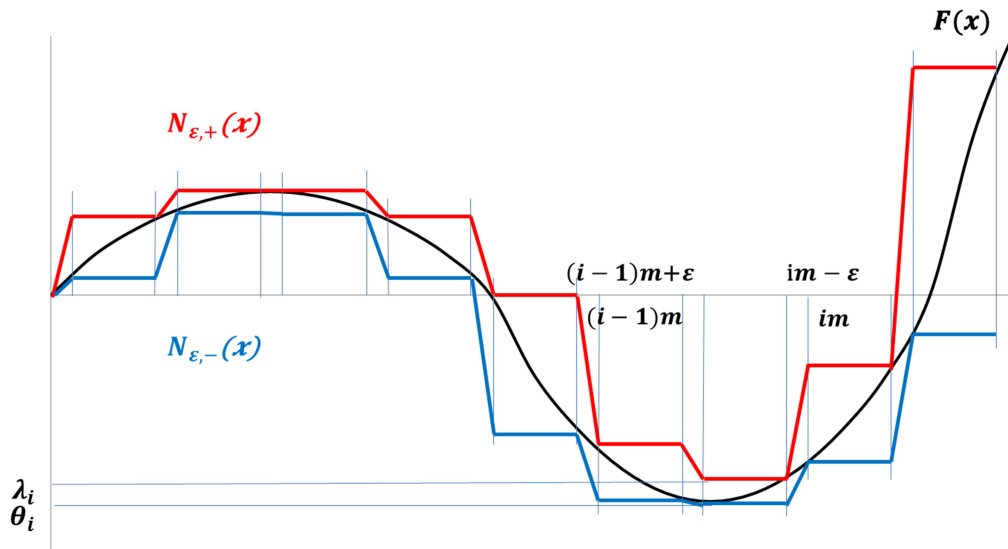
$$N_{\varepsilon,-}(x) = \begin{cases} \lambda_i & \text{pour } x \in [(i-1)m + \varepsilon; im - \varepsilon[ \text{ lorsque } i \geq 1 \\ \lambda_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \frac{(x_i - \varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [im - \varepsilon; im + \varepsilon[ \text{ lorsque } i \geq 1 \\ \theta_{-1} + (\theta_{-1} - \lambda_1) \frac{(-\varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [-\varepsilon; \varepsilon[ \text{ lorsque } i = 0 \\ \theta_i & \text{pour } x \in ]im + \varepsilon; (i+1)m - \varepsilon] \text{ lorsque } i \leq -1 \\ \theta_{i-1} + (\theta_{i-1} - \theta_i) \frac{(x_i - \varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [im - \varepsilon; im + \varepsilon[ \text{ lorsque } i \leq -1 \end{cases}$$

et

$$N_{\varepsilon,+}(x) = \begin{cases} \theta_i & \text{pour } x \in [(i-1)m + \varepsilon; im - \varepsilon[ \text{ lorsque } i \geq 1 \\ \theta_i + (\theta_i - \theta_{i+1}) \frac{(x_i - \varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [im - \varepsilon; im + \varepsilon[ \text{ lorsque } i \geq 1 \\ \lambda_{-1} + (\lambda_{-1} - \theta_1) \frac{(-\varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [-\varepsilon; \varepsilon[ \text{ lorsque } i = 0 \\ \lambda_i & \text{pour } x \in ](i-1)m + \varepsilon; im - \varepsilon] \text{ lorsque } i \leq 0 \\ \lambda_i + (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \frac{(x_i - \varepsilon - x)}{2\varepsilon} & \text{pour } x \in [im - \varepsilon; im + \varepsilon[ \text{ lorsque } i \leq 0 \end{cases}$$

Soit  $\bar{M} > 0$  et  $\underline{M} < 0$  alors si  $F(x)$  est continue alors il existe un  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $N_{\varepsilon,-}(x) \leq F(x)$  lorsque  $x \geq \underline{M}$  et  $N_{\varepsilon,-}(x) \geq F(x)$  lorsque  $x \leq \bar{M}$  de même que  $N_{\varepsilon,+}(x) \geq F(x)$  lorsque  $x \geq \underline{M}$  et  $N_{\varepsilon,+}(x) \leq F(x)$  lorsque  $x \leq \bar{M}$

De manière imagée on dit que  $N_{\varepsilon,-}(x)$  et  $N_{\varepsilon,+}(x)$  et  $m$  et  $\varepsilon$  forment un filet pour  $F(x)$  dans la zone de pêche  $[\underline{M}; \bar{M}]_{O_x}$



« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### ALGORITHME D dit du «Filet de pêche»

1. On fixe  $\varepsilon = 0$  et on choisit un  $m > 0$  C'est la maille du filet.
2. On choisit la  $[\underline{M}; \overline{M}]_{O_x}$  sur lequel on procède aux calculs. C'est la zone de pêche.
3. On détermine la présence et la position des solutions périodiques pour  $N_{0,+}(x)$ 
  - a. on détermine la première intersection de  $Traj_{N_{0,+}(x)}(x_i - \varepsilon; \lambda_i)$  avec  $O_y$
  - b. on détermine la première intersection de  $Traj_{N_{0,+}(x)}^{-1}(x_i - \varepsilon; \lambda_i)$  avec  $O_y$
  - c. on détermine les  $\overline{L}_i$  et  $\overline{R}_i$  et  $\underline{L}_i$  et  $\underline{R}_i$
  - d. on détermine la matrice  $C$
  - e. on détermine les  $k$  tels que  $C_{k-1,k} \geq 1$  et  $C_{k,k} \geq 1$  et  $C_{k+1,k} \geq 1$  et  $C_{k,k-1} = C_{k,k+1} = 0$   
Les solutions périodiques coupent  $\overline{R}_k$  et  $\underline{R}_k$
  - f. on détermine les  $l$  tels que  $C_{l,l-1} \geq 1$  et  $C_{l,l} \geq 1$  et  $C_{l,l+1} \geq 1$  et  $C_{l-1,l} = C_{l+1,l} = 0$   
Les solutions périodiques coupent  $\overline{R}_l$  et  $\underline{R}_l$
  - g. on note  $n_+$  le nombre de solutions périodiques détectées
4. On détermine la présence et la position des solutions périodiques pour  $N_{0,-}(x)$  comme au point précédent et on note  $n_-$  le nombre de solutions périodiques détectées
5. Alors il y a au moins  $\min\{n_+; n_-\}$  solutions périodiques pour  $F(x)$  qui coupent  $[\underline{M}; \overline{M}]_{O_x}$  et ces solutions périodiques passent entre les solutions périodiques détectées pour  $N_{0,-}(x)$  et  $N_{0,+}(x)$

Si  $F(x)$  est un polynôme alors on sait selon les théorèmes C et D déterminer  $[\underline{M}; \overline{M}]_{O_x}$  par lequel passent les solutions périodiques Dans ce cas il suffit de lancer le filet sur cet intervalle

Cet algorithme est polynomial mais heuristique. Pour une maille égale à 1/20 de la zone de pêche, le temps de calcul avec un tableur est d'une fraction d'une seconde.

### APPLICATIONS NUMERIQUES

Voici les résultats obtenus avec  $\varepsilon = 0$  sur un choix de  $F(x)$  qui sont traditionnellement traitées dans la littérature

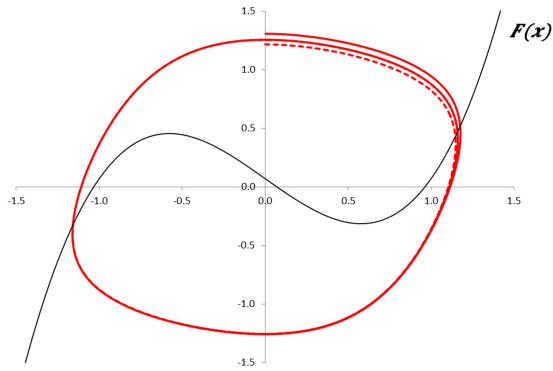
**Si  $F(x) = x^3 - x$  (Balthasar van der Pol)**

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-1.4715; 1.4715]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.0750 sur  $[-1.500; 1.500]_{O_x}$  et on obtient 1 solution périodique

La solution périodique coupe  $[1.2161; 1.2201]_{O_{y+}} \cup [1.3029; 1.3072]_{O_{y+}}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



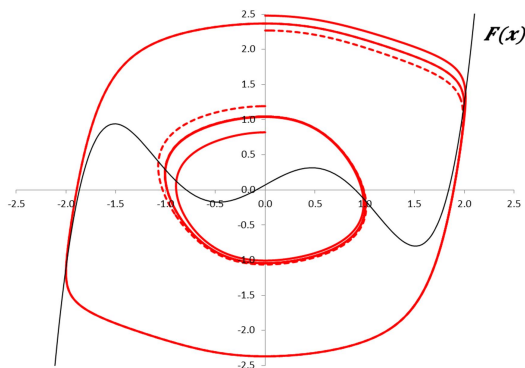
Si  $F(x) = \frac{8}{25}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{5}x$  (Hector Giacomini et Sébastien Neukirch)

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-2.2002; 2.2002]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.1250 sur  $[-2.500; 2.500]_{O_x}$  et on obtient 2 solutions périodiques

La 1<sup>er</sup> solution périodique coupe  $[0.8200; 1.0778]_{O_{y+}} \cup [0.9352; 1.1929]_{O_{y+}}$

La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[2.2701; 2.2737]_{O_{y+}} \cup [2.4784; 2.4813]_{O_{y+}}$



$F(x) = x(x^2 - 1.6^2)(x^2 - 4)(x^2 - 9) = x^7 - 15.56x^5 + 69.28x^3 - 9.16x$  (Hector Giacomini et Sébastien Neukirch)

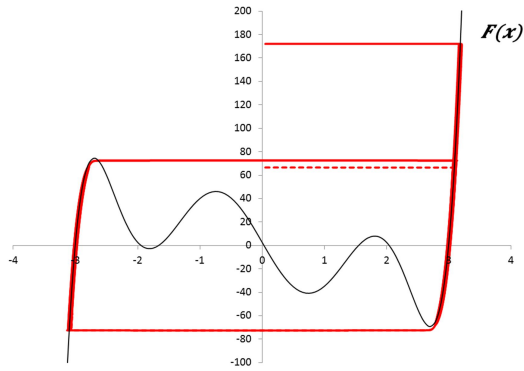
On sait que les solutions périodiques coupent  $[-3.1026; 3.1026]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.1875 sur  $[-3.7500; 3.7500]_{O_x}$  et on obtient 1 solution périodique

La solution périodique coupe  $[66.5414; 66.5414]_{O_{y+}} \cup [127.2254; 172.0625]_{O_{y+}}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»





$$F(x) = \frac{32}{875}x^7 - \frac{56}{125}x^5 + \frac{98}{75}x^3 - \frac{18}{25}x \quad (\text{Lawrence Perko})$$

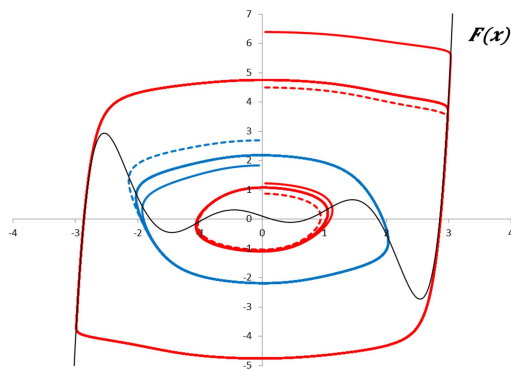
On sait que les solutions périodiques coupent  $[-3.0803; 3.0803]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.0750 sur  $[-3.750; 3.750]_{O_x}$  et on obtient 3 solutions périodiques

La 1<sup>ère</sup> solution périodique coupe  $[0.8723; 0.9543]_{O_{y+}} \cup [1.1594; 1.2228]_{O_{y+}}$

La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[1.8357; 2.5314]_{O_{y+}} \cup [1.9696; 2.6931]_{O_{y+}}$

La 3<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[4.4983; 4.4983]_{O_{y+}} \cup [6.0822; 6.3922]_{O_{y+}}$



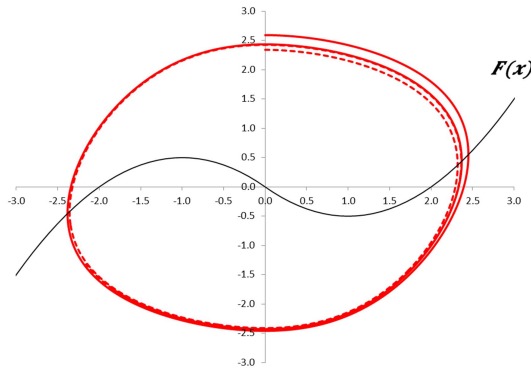
$$F(x) = -x + \frac{1}{2}x|x| \quad (\text{Boufoul Amel})$$

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-3.3109; 3.3109]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.1750 sur  $[-3.500; 3.500]_{O_x}$  et on obtient 1 solution périodique

La solution périodique coupe  $[2.3402; 2.3995]_{O_{y+}} \cup [2.5307; 2.5910]_{O_{y+}}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »



$$F(x) = x(x^2 - 2)(x^2 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \text{ (Armengol Gasull et Hector Giacomini)}$$

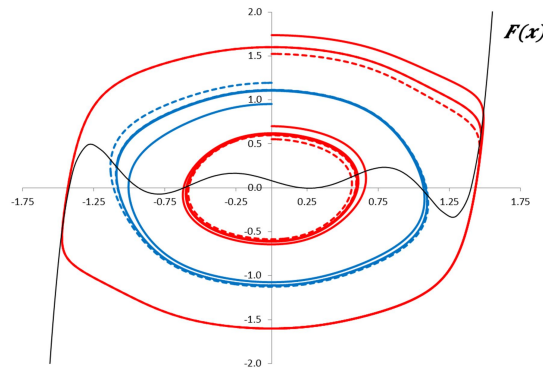
On sait que les solutions périodiques coupent  $[-1.5932; 1.5932]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.0900 sur  $[-1.8000; 1.8000]_{O_x}$  et on obtient 3 solutions périodiques

La 1<sup>ère</sup> solution périodique coupe  $[1.5243; 1.5866]_{O_{y+}} \cup [1.6894; 1.7377]_{O_{y+}}$

La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[0.9537; 1.1190]_{O_{y+}} \cup [1.0235; 1.1949]_{O_{y+}}$

La 3<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[0.5535; 0.6047]_{O_{y+}} \cup [0.6494; 0.7013]_{O_{y+}}$



$$F(x) = \frac{1}{10}(1.3544x^9 - 6.0952x^7 + 9.3333x^5 - 5.5555x^3 + x) \text{ (Simon Wang et Giovanni Tosi)}$$

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-1.7552; 1.7552]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.0xxx sur  $[-1.9000; 1.9000]_{O_x}$  et on obtient 4 solutions périodiques

La 1<sup>ère</sup> solution périodique coupe  $[1.3306; 1.4161]_{O_{y+}} \cup [1.4327; 1.5147]_{O_{y+}}$

La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[1.2317; 1.3306]_{O_{y+}} \cup [1.1399; 1.2380]_{O_{y+}}$

La 3<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[0.8559; 0.9492]_{O_{y+}} \cup [1.0468; 1.1399]_{O_{y+}}$

La 4<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[0.7594; 0.8559]_{O_{y+}} \cup [0.5655; 0.6655]_{O_{y+}}$

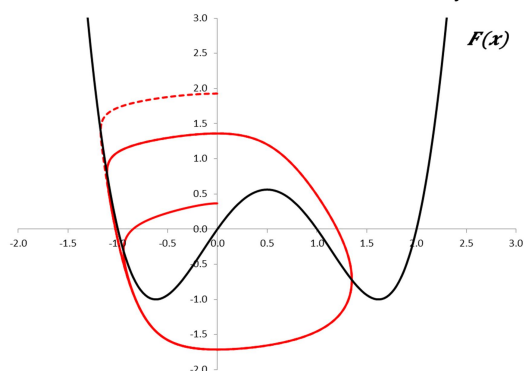
« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$F(x) = (x - 2)(x - 1)x(x + 1) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-2.4091; 4.4091]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.2250 sur  $[-4.5000; 4.5000]_{O_x}$  et on obtient 1 solution périodique

La solution périodique coupe  $[0.3665; 1.6948]_{O_{y+}} \cup [0.5002; 1.9280]_{O_{y+}}$



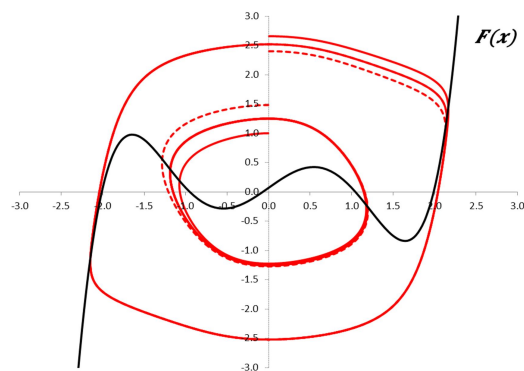
$$F(x) = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) = \frac{1}{4}(x^5 - 5x^3 + 4x)$$

On sait que les solutions périodiques coupent  $[-2.3671; 2.3671]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.1250 sur  $[-2.500; 2.500]_{O_x}$  et l'on obtient 2 solutions périodiques

La 1<sup>ère</sup> solution périodique coupe  $[1.0018; 1.3475]_{O_{y+}} \cup [1.1381; 1.4833]_{O_{y+}}$

La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[2.4023; 2.4014]_{O_{y+}} \cup [2.6590; 2.6583]_{O_{y+}}$



$$F(x) = 0.95(x - 1)(x - 0.95)x(x + 0.7)(x + 1.5) \text{ qui n'est pas symétrique}$$

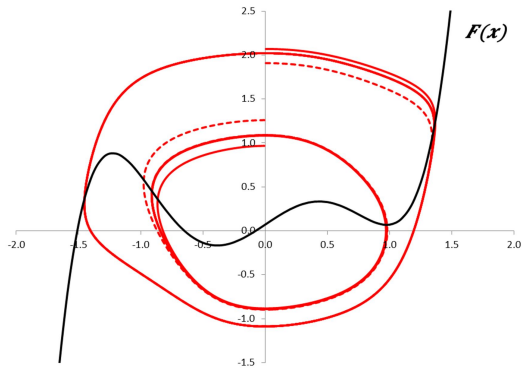
On sait que les solutions périodiques coupent  $[-1.6897; 1.5527]_{O_x}$

On lance un filet de maille 0.0850 sur  $[-1.700; 1.700]_{O_x}$  et on obtient 2 solutions périodiques

La 1<sup>ère</sup> solution périodique coupe  $[0.9672; 1.1840]_{O_{y+}} \cup [1.0434; 1.2596]_{O_{y+}}$

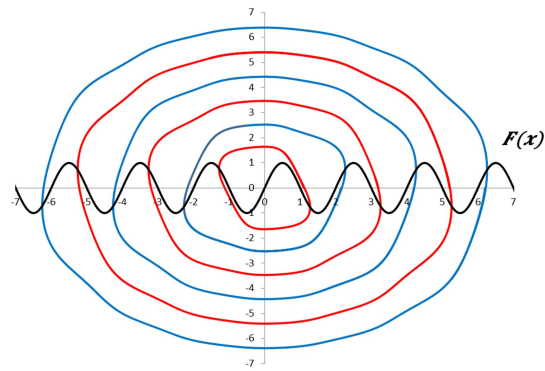
La 2<sup>ème</sup> solution périodique coupe  $[1.9089; 1.9210]_{O_{y+}} \cup [2.0599; 2.0700]_{O_{y+}}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »



$$F(x) = \sin(\pi x)$$

On lance un filet de maille 1.0000 sur  $[-7.0000; 7.0000]_{O_x}$  et on obtient 1 solution périodique qui coupe  $[i; i + 1]_{O_{y+}}$  avec  $1 \leq i \leq 7$



Ce cas est repris et approfondi au chapitre 9

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## CHAPITRE 5 - Le peigne à solutions périodiques

Soit  $F(x)$  continue telle que  $F(0) = 0$  et strictement croissante respectivement décroissante en toutes ses solutions. Pour la suite on suppose que  $F(x)$  est strictement croissante à l'origine et si ce n'est pas le cas on considérera  $F(-x)$ .

Soient  $s_i$  avec  $i, j \in \mathbb{N}$  les solutions différentes de  $F(x)$ . On numérote les  $s_i$  de telle sorte que  $s_{-l} < \dots < s_{-j} < \dots < s_{-1} < 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_i < \dots < s_r$ .

Soient  $x_i$  l'un des extrema de  $F(x)$  entre  $[s_{i-1}, s_i]$  lorsque  $i > 0$  respectivement entre  $[s_i, s_{i+1}]$  lorsque  $i < 0$ .

Alors on a  $s_{-l} \leq \dots \leq s_{-j} \leq x_{-j} \leq s_{-j+1} \leq \dots \leq s_{-1} \leq x_{-1} \leq 0 = s_0 \leq x_1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{i-1} \leq x_i \leq s_i \leq \dots < s_r$ .

$$\text{et } F(x_i) = \begin{cases} M_{F(x)}[s_{i-1}, s_i] & \text{si } (i > 0 \text{ et impair}) \text{ ou } (i < 0 \text{ et pair}) \\ m_{F(x)}[s_{i-1}, s_i] & \text{si } (i > 0 \text{ et pair}) \text{ ou } (i < 0 \text{ et impair}) \end{cases}$$

On définit

$$P_{\varepsilon,+}(x) = \begin{cases} (x - s_{2i}) \frac{F(x_{2i+1})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [s_{2i}, s_{2i} + \varepsilon[ \\ F(x_{2i+1}) & \text{pour } x \in [s_{2i} + \varepsilon; s_{2i+1} - \varepsilon[ \\ -(x - s_{2i+1}) \frac{F(x_{2i+1})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [s_{2i+1} - \varepsilon; s_{2i+1}[ \\ 0 & \text{pour } x \in [s_{2i+1}, x_{2i+2} - \varepsilon[ \cup [x_{2i+2} + \varepsilon; s_{2i+2}[ \\ (x - x_{2i+2} + \varepsilon) \frac{F(x_{2i+2})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [x_{2i+2} - \varepsilon; x_{2i+2}[ \\ -(x - x_{2i+2} - \varepsilon) \frac{F(x_{2i+2})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [x_{2i+2}; x_{2i+2} + \varepsilon[ \\ F(x) & \text{pour } x \in [s_r; \infty[ \\ -(x - s_{-2j}) \frac{F(x_{-2j-1})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [s_{-2j} - \varepsilon; s_{-2j}[ \\ F(x_{-2j-1}) & \text{pour } x \in [s_{-2j-1} + \varepsilon; s_{-2j} - \varepsilon[ \\ (x - s_{-2j-1}) \frac{F(x_{-2j-1})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [s_{-2j-1}; s_{-2j-1} + \varepsilon[ \\ 0 & \text{pour } x \in ]x_{-2j-2} + \varepsilon; s_{-2j-1}] \cup [s_{-2j-2}; x_{-2j-2} - \varepsilon[ \\ -(x - x_{-2j-2} - \varepsilon) \frac{F(x_{-2j-2})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [x_{-2j-2}; x_{-2j-2} + \varepsilon[ \\ (x - x_{-2j-2} + \varepsilon) \frac{F(x_{-2j-2})}{\varepsilon} & \text{pour } x \in [x_{-2j-2} - \varepsilon; x_{-2j-2}[ \\ F(x) & \text{pour } x \in ]-\infty; s_{-l}[ \end{cases}$$

où  $0 \leq i \leq \frac{r-2}{2}$  et  $0 \leq j \leq \frac{l-2}{2}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc. »

et

$$P_{\varepsilon,-}(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } x \in [s_{2i}; x_{2i+1} - \varepsilon [ \cup [x_{2i+1} + \varepsilon; s_{2i+1}[ \\ (x - x_{2i+1} + \varepsilon) \frac{F(x_{2i+1})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in [x_{2i+1} - \varepsilon; x_{2i+1}[ \\ -(x - x_{2i+1} - \varepsilon) \frac{F(x_{2i+1})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in [x_{2i+1}; x_{2i+1} + \varepsilon[ \\ (x - s_{2i+1}) \frac{F(x_{2i+2})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in [s_{2i+1}; s_{2i+1} + \varepsilon[ \\ F(x_{2i+2}) \text{ pour } x \in [s_{2i+1} + \varepsilon; s_{2i+2} - \varepsilon[ \\ -(x - s_{2i+2}) \frac{F(x_{2i+2})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in [s_{2i+2} - \varepsilon; s_{2i+2}[ \\ F(x) \text{ pour } x \in [s_r; \infty[ \\ 0 \text{ pour } x \in ]s_{-2j-1}; x_{-2j-1} - \varepsilon] \cup ]x_{-2j-1} + \varepsilon; s_{-2j}[ \\ -(x - x_{-2j-1} - \varepsilon) \frac{F(x_{-2j-1})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in ]x_{-2j-1}; x_{-2j-1} + \varepsilon[ \\ (x - x_{-2j-1} + \varepsilon) \frac{F(x_{-2j-1})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in ]x_{-2j-1} - \varepsilon; x_{-2j-1}[ \\ -(x - s_{-2j-1}) \frac{F(x_{-2j-2})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in ]s_{-2j-1} - \varepsilon; s_{-2j-1}[ \\ F(x_{-2j-2}) \text{ pour } x \in ]s_{-2j-2} + \varepsilon; s_{-2j-1} - \varepsilon[ \\ (x - s_{-2j-2}) \frac{F(x_{-2j-2})}{\varepsilon} \text{ pour } x \in ]s_{-2j-2}; s_{-2j-2} + \varepsilon[ \\ F(x) \text{ pour } x \in ]-\infty; s_{-l}[ \end{cases}$$

où  $0 \leq i \leq \frac{r-2}{2}$  et  $0 \leq j \leq \frac{l-2}{2}$

Puisque  $F(x)$  est continue et strictement croissante respectivement décroissante en ses solutions alors il existe  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que  $P_{\varepsilon,-}(x) \leq F(x)$  lorsque  $x \geq 0$  et  $P_{\varepsilon,-}(x) \geq F(x)$  lorsque  $x \leq 0$  de même que  $P_{\varepsilon,+}(x) \geq F(x)$  lorsque  $x \geq 0$  et  $P_{\varepsilon,+}(x) \leq F(x)$  lorsque  $x \leq 0$

De manière imagée on dit que  $P_{\varepsilon,-}(x)$  et  $P_{\varepsilon,+}(x)$  forment un peigne pour  $F(x)$

### PROPOSITION 16

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  Si  $P_{\varepsilon,-}(x)$  et  $P_{\varepsilon,+}(x)$  forment un peigne pour  $F(x)$  alors  $\#(F(x)) \geq \min\{\#(P_{\varepsilon,-}(x)); \#(P_{\varepsilon,+}(x))\}$

### Preuve

C'est un corollaire du théorème F

#

### COROLLAIRE 16.1

Soit  $F(x)$  et  $G(x)$  des fonctions continues telles  $F(0) = G(0) = 0$  et telles que  $P_{\varepsilon,-}(x)$  et  $P_{\varepsilon,+}(x)$  forment un peigne pour  $F(x)$  et  $G(x)$  Si  $P_{\varepsilon,-}(x)$  et  $P_{\varepsilon,+}(x)$  ont chacun une infinité de solutions périodiques alors  $F(x)$  et  $G(x)$  ont chacun une infinité de solutions périodiques

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**ALGORITHME E dit du « Peigne »**

1. On détermine les solutions et les extrema de  $F(x)$
2. On détermine  $P_{0,-}(x)$  et  $P_{0,+}(x)$
3. On applique l'algorithme C dit de la « Ligne de pêche » à  $P_{0,-}(x)$  et  $P_{0,+}(x)$  Dans le cas de  $\varepsilon = 0$  les trajectoires sont des arcs de cercles ce qui allège très fortement les calculs

Cet algorithme est polynomial est déterministe. Le temps de calcul avec un tableur est d'une fraction d'une seconde.

Dans les 2 derniers chapitres on a pu constater que la géométrie de  $F(x)$  données par ses solutions et ses extrema est déterminante pour l'existence et la position de solutions périodiques

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019

## Chapitre 6 - Condition d'existence et de localisation de solutions périodiques

Dans ce chapitre on s'intéresse aux conditions d'existence et de localisation de solution périodique pour  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et les solutions sont les entiers  $\{\pm 1; \dots; \pm n\}$  et strictement croissante en 0 et strictement croissante respectivement décroissante en toutes ses solutions et telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

### LEMME 6.a

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  et  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = 0$  et  $0 < a_2 < b_1 < b_2 < a_1$  Si  $[-a_1; -a_2]_{O_y} \subsetneq \text{Traj}_{F(x)}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y$  et  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subsetneq [b_1; b_2]_{O_{y^+}}$  alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_x}$  et  $[k; k+1]_{O_x}$

### Preuve

On a  $[b_1; b_2]_{O_y} \subsetneq [a_2; a_1]_{O_y}$  et alors  $[-b_2; -b_1]_{O_y} \subsetneq [-a_1; -a_2]_{O_y}$  et  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([-b_2; -b_1]_{O_y}) \cap O_x \subsetneq \text{Traj}_{F(x)}^{-1}([-a_1; -a_2]_{O_y}) \cap O_x \subsetneq \text{Traj}_{F(x)}^{-1}(\text{Traj}_{F(x)}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y) \cap O_x \subsetneq [k; k+1]_{O_x}$  Puisque  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subsetneq [b_1; b_2]_{O_{y^+}}$  alors  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([-b_2; -b_1]_{O_y}) \cap O_x \subsetneq [b_1; b_2]_{O_{y^+}}$

Par symétrie de  $F(x)$  on a  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([b_1; b_2]_{O_{y^+}}) \cap O_y \subsetneq [-b_2; -b_1]_{O_y}$

Ainsi  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([-b_2; -b_1]_{O_y}) \cap O_y \subsetneq [-b_2; -b_1]_{O_{y^+}}$  de même que  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subsetneq [k; k+1]_{O_x}$  Puisque que  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}$  est continue alors par le théorème du point fixe il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[k; k+1]_{O_x}$

Finalement par symétrie de  $F(x)$  il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x^-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x^+}}$

#

### LEMME 6.b

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$  et  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = 0$  et  $0 < b_1 < a_2 < a_1 < b_2$  Si  $\text{Traj}_{F(x)}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subsetneq [-a_2; -a_1]_{O_y}$  et  $[b_1; b_2]_{O_{y^+}} \subsetneq \text{Traj}_{F(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y$  alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_x}$  et  $[k; k+1]_{O_x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



### Preuve

On a  $[a_2; a_1]_{O_y} \subseteq [b_1; b_2]_{O_y}$  et alors  $Traj_{F(x)}([a_2; a_1]_{O_y}) \cap O_x \subseteq Traj_{F(x)}([b_1; b_2]_{O_y}) \cap O_x \subseteq Traj_{F(x)}(Traj_{F(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y) \cap O_x = [k; k+1]_{O_x}$  Puisque  $Traj_{F(x)}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subseteq [-a_1; -a_2]_{O_y}$  alors  $Traj_{F(x)}([a_2; a_1]_{O_y}) \cap O_y \subseteq [-a_1; -a_2]_{O_y}$

Par symétrie de  $F(x)$  on a  $Traj_{F(x)}([-a_1; -a_2]_{O_y}) \cap O_y \subseteq [a_2; a_1]_{O_y}$

Ainsi  $Traj_{F(x)}([a_2; a_1]_{O_{y+}}) \cap O_y \subseteq [a_2; a_1]_{O_{y+}}$  de même que  $Traj_{F(x)}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y \subseteq [k; k+1]_{O_x}$  Puisque que  $Traj_{F(x)}$  est continue alors par le théorème du point fixe il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[k; k+1]_{O_x}$

Finalement par symétrie de  $F(x)$  il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x+}}$

#

### LEMME 7

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et strictement croissante en 0 et 2 et strictement décroissante en 1 et telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(1) = F(2) = 0$  et qui vérifie les conditions :

$$\#1 \quad M_{F(x)}[0; 1] \leq \sqrt{3}$$

$$\#2 \quad \sqrt{1 + \left( m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3} \right)^2} < M_{F(x)}[0; 1]$$

$$\#3 \quad 2M_{F(x)}[0; 1] + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - M_{F(x)}[0; 1])^2} < \sqrt{1 + (M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2])^2}$$

$$\#4 \quad \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} < 2M_{F(x)}[0; 1] + 1$$

$$\#5 \quad 1 < M_{F(x)}[0; 1]$$

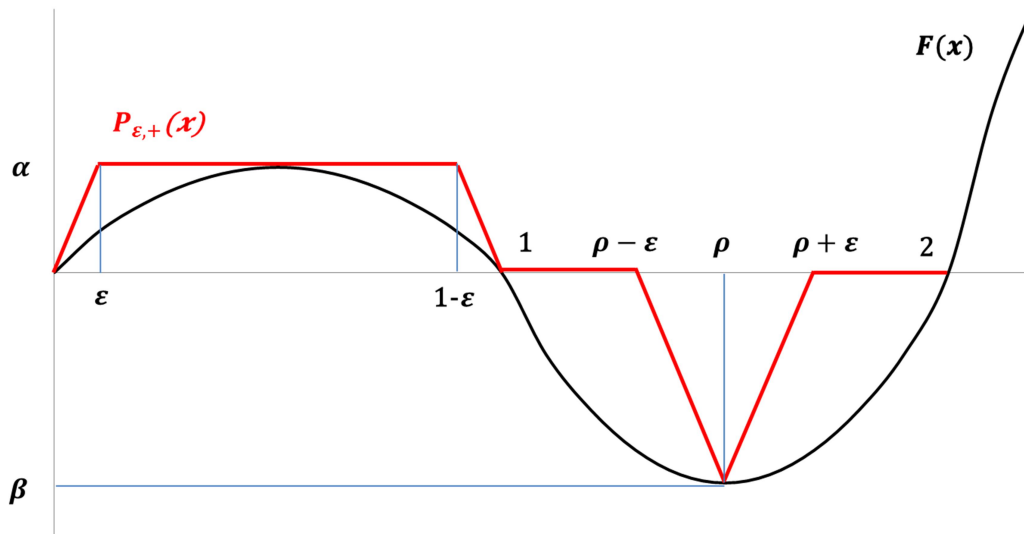
$$\#6 \quad M_{F(x)}[0; 1]^2 < (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2$$

Alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{O_x}$  et  $[1; 2]_{O_x}$

### Preuve

Par simplification on pose  $\alpha = M_{F(x)}[0; 1] = -m_{F(x)}[-1; 0]$  et  $\beta = m_{F(x)}[1; 2] = -M_{F(x)}[-2; -1]$  et  $\sigma$  le plus grand maxima sur  $[1; 2]_{O_x}$  et  $\rho$  le plus grand minima sur  $[1; 2]_{O_x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Soit  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  alors on définit

$$p_{\epsilon,+}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pour } x \in ]-\infty; -2[ \\ 0 & \text{pour } x \in [-2; -\rho - \epsilon[ \cup [-\rho + \epsilon; -1[ \\ -(x + \rho + \epsilon) \frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-\rho - \epsilon; -\rho[ \\ (x + \rho - \epsilon) \frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-\rho; -\rho + \epsilon[ \\ -(1 + x) \frac{\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-1; -1 + \epsilon[ \\ -\alpha & \text{pour } x \in [-1 + \epsilon; -\epsilon[ \\ \frac{\alpha}{\epsilon} x & \text{pour } x \in [-\epsilon; 0[ \\ \frac{\alpha}{\epsilon} x & \text{pour } x \in [0; \epsilon[ \\ \alpha & \text{pour } x \in [\epsilon; 1 - \epsilon[ \\ (1 - x) \frac{\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [1 - \epsilon; 1[ \\ 0 & \text{pour } x \in [1; \rho - \epsilon[ \cup [\rho + \epsilon; 2[ \\ (x - \rho + \epsilon) \frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [\rho - \epsilon; \rho[ \\ -(x - \rho - \epsilon) \frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [\rho; \rho + \epsilon[ \\ F(x) & \text{pour } x \in [2; \infty[ \end{cases}$$

Comme  $F(x)$  est une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(1) = F(2) = 0$  et strictement croissante en 0 et 2 et strictement décroissante en 1 alors il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  on a  $P_{\epsilon,+}(x) \geq F(x)$  pour tout  $x \geq 0$  et  $P_{\epsilon,+}(x) \leq F(x)$  pour tout  $x \leq 0$

Etudions les trajectoires passant par les points  $(1; 0)$  et  $(2; 0)$

### 1<sup>ère</sup> trajectoire

$Traj_{p_{\epsilon,+}(x)}(2; 0)$  passe en dessous de  $(\rho; \beta)$  et donc en dessous de  $(1; \beta)$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Sur  $[0; 1]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_\alpha$  et  $Traj_\alpha(1; \beta)$  coupe  $Oy_-$  en  $(0; \alpha - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2})$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(2; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de  $(0; \alpha - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2})$

### 2<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[1 - \varepsilon; 1]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_0$  et  $Traj_0(1; 0)$  passe en  $(1 - \varepsilon; -\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2})$

Sur  $[\varepsilon; 1 - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  est égale à  $Traj_\alpha$  et  $Traj_\alpha(1 - \varepsilon; -\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2})$  passe en  $(\varepsilon; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \varepsilon^2 - 2\alpha\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}})$

Sur  $[0; \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_0$  et

$Traj_0(\varepsilon; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \varepsilon^2 - 2\alpha\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}})$  coupe  $Oy_-$  en

$(0; -\sqrt{\varepsilon^2 + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \varepsilon^2 - 2\alpha\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}})^2})$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(1; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de

$(0; -\sqrt{\varepsilon^2 + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - \varepsilon^2 - 2\alpha\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}})^2})$

Soit  $g(x) = -\sqrt{x^2 + (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1 - x^2 - 2\alpha\sqrt{2x - x^2}})^2}$  alors  $g(0) = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}$

Ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < x < \delta$  on a  $\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1} - \varepsilon' < g(x)$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(1; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de  $(0; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1} - \varepsilon')$

### 1er intervalle

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}([1; 2]_{O_{x+}}) \cap O_y \subsetneq [\alpha - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1} - \varepsilon']_{O_{y-}}$

### 3<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[1; 2]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(2; 0)$  passe en  $(1; \sqrt{3})$

Sur  $[1 - \varepsilon; 1]_{O_x}$  et  $[0; \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_\alpha^{-1}$  et sur  $[\varepsilon; 1 - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  est égale à  $Traj_\alpha^{-1}$  et puisque  $\sqrt{3} \geq \alpha$  (Condition #1) alors la  $Traj_\alpha^{-1}(1; \sqrt{3})$

coupe  $Oy_+$  en  $(0; \alpha + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - \alpha)^2})$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $Oy_+$  en dessous de  $(0; \alpha + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - \alpha)^2})$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

#### 4<sup>ème</sup> trajectoire

$Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(1; 0)$  passe en dessus de  $(1 - \varepsilon; \alpha)$

Sur  $[\varepsilon; 1 - \varepsilon]_{0x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  est égale à  $Traj_{\alpha}$  et  $Traj_{\alpha}^{-1}(1 - \varepsilon; \alpha)$  passe en  $(\varepsilon; \alpha + \sqrt{1 - 2\varepsilon})$

Sur  $[0; \varepsilon]_{0x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_0$  et  $Traj_0^{-1}(\varepsilon; \alpha + \sqrt{1 - 2\varepsilon})$  coupe  $Oy_+$  en  $(0; \sqrt{\varepsilon^2 + (\alpha + \sqrt{1 - 2\varepsilon})^2})$

Soit  $g(x) = \sqrt{x^2 + (\alpha + \sqrt{1 - 2x})^2}$  alors  $g(0) = \alpha + 1$

Ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < x < \delta$  on a  $\alpha + 1 - \varepsilon' < g(x)$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(1; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessus de  $(0; \alpha + 1 - \varepsilon')$

#### 2<sup>ème</sup> intervalle

Ainsi  $\left[ \alpha + 1 - \varepsilon'; \alpha + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - \alpha)^2} \right]_{0y_+} \subsetneq Traj_{p_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}([1; 2]) \cap Oy$

#### Synthèse

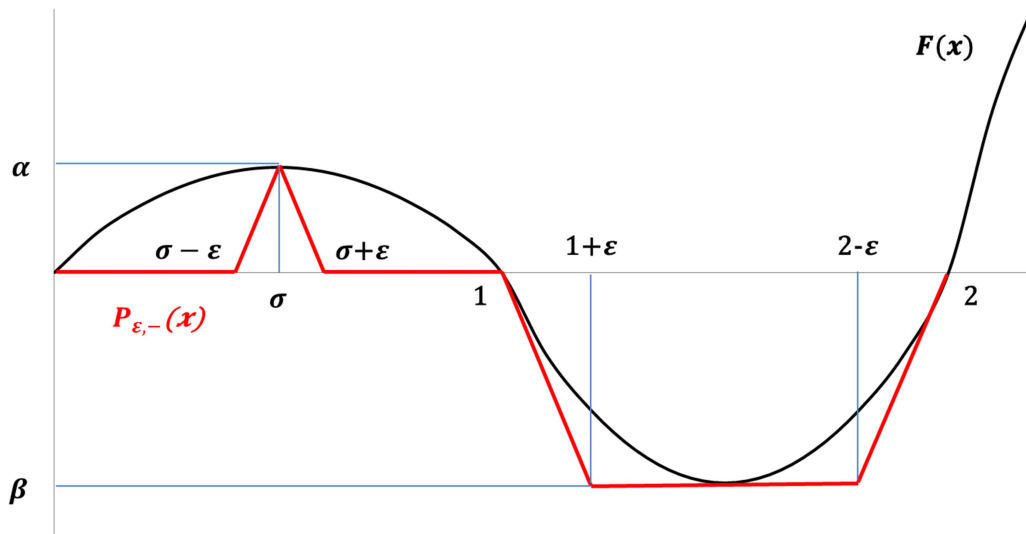
Soient  $a_1 = -\alpha + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}$  et  $a_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \varepsilon'$  et  $b_1 = \alpha + 1 - \varepsilon'$  et  $b_2 = \alpha + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - \alpha)^2}$

La Condition #3 équivaut à  $\alpha + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - \alpha)^2} < -\alpha + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}$  ce qui équivaut à et donc  $b_2 < a_1$

La Condition #4 équivaut à  $-\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} < \alpha + 1$  et si on choisit  $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}(2\alpha + 1 - \sqrt{1 + \alpha^2})$  alors  $b_1 = \alpha + 1 - \varepsilon' > \alpha + 1 - \frac{1}{2}(2\alpha + 1 - \sqrt{1 + \alpha^2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2}$  et  $a_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \varepsilon' < -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2}(2\alpha + 1 - \sqrt{1 + \alpha^2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2}$  donc  $a_2 < b_1$

Ainsi par le lemme 6.a il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{0x_-}$  et  $[1; 2]_{0x_+}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Soit  $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$  alors on définit

$$p_{\epsilon,-}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pour } x \in ]-\infty; -2[ \\ -(x+2)\frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-2; -2+\epsilon[ \\ -\beta & \text{pour } x \in [-2+\epsilon; -1-\epsilon[ \\ (x+1)\frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-1-\epsilon; -1[ \\ (x+\sigma+\epsilon)\frac{-\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-\sigma-\epsilon; -\sigma[ \\ (x+\sigma-\epsilon)\frac{\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [-\sigma; -\sigma+\epsilon[ \\ 0 & \text{pour } x \in [-1; -\sigma-\epsilon[ \cup [-\sigma+\epsilon; 0[ \\ 0 & \text{pour } x \in [0; \sigma-\epsilon[ \cup [\sigma+\epsilon; 1[ \\ (x-\sigma+\epsilon)\frac{\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [\sigma-\epsilon; \sigma[ \\ -(x-\sigma-\epsilon)\frac{\alpha}{\epsilon} & \text{pour } x \in [\sigma; \sigma+\epsilon[ \\ (x-1)\frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [1; 1+\epsilon[ \\ \beta & \text{pour } x \in [1+\epsilon; 2-\epsilon[ \\ -(x-2)\frac{\beta}{\epsilon} & \text{pour } x \in [2-\epsilon; 2[ \\ F(x) & \text{pour } x \in [2; \infty[ \end{cases}$$

Comme  $F(x)$  est une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(1) = F(2) = 0$  et strictement croissante en 0 et 2 et strictement décroissante en 1 alors il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  on a  $P_{\epsilon,-}(x) \leq F(x)$  pour tout  $x \geq 0$  et  $P_{\epsilon,-}(x) \geq F(x)$  pour tout  $x \leq 0$

Etudions les trajectoires passant par les points  $(1; 0)$  et  $(2; 0)$

### 1<sup>ère</sup> trajectoire

$Traj_{p_{\epsilon,+}(x)}(2; 0)$  passe en dessous de  $(2 - \epsilon; \beta)$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Sur  $[1 + \varepsilon; 2 - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  est égale à  $Traj_{\beta}$  et  $Traj_{\beta}(2 - \varepsilon; \beta)$  passe en  $(1 + \varepsilon; \beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})$

Sur  $[\sigma + \varepsilon; 1 + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_0$  et  $Traj_0(1 + \varepsilon; \beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})$  passe en  $(\sigma + \varepsilon; -\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})$

Sur  $[\sigma - \varepsilon; \sigma + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_{\alpha}$  et

$Traj_{\alpha}(\sigma + \varepsilon; -\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})$  passe en  $(\sigma - \varepsilon; \alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + (\alpha + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})^2})$

Sur  $[0; \sigma - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}$  est égale à  $Traj_0$  et

$Traj_0(\sigma - \varepsilon; \alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + (\alpha + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})^2})$  coupe  $Oy_-$  en  $(0; -\sqrt{(\sigma - \varepsilon)^2 + (\alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + (\alpha + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})^2})^2})$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(2; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de

$(0; -\sqrt{(\sigma - \varepsilon)^2 + (\alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + (\alpha + \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - (\sigma + \varepsilon)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2\varepsilon)})^2})^2})^2})$

Soit

$$g(x) = -\sqrt{(\sigma - x)^2 + (\alpha - \sqrt{4\sigma x + (\alpha + \sqrt{(1 + x)^2 - (\sigma + x)^2 + (\beta - \sqrt{3(1 - 2x)})^2})^2})^2}$$

$$\text{alors } g(0) = -\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2}$$

Ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < x < \delta$  on a

$$g(x) < -\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} + \varepsilon'$$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(2; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de  $(0; -\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} + \varepsilon')$

## 2<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[\sigma + \varepsilon; 1]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}$  est égale à  $Traj_0$  et  $Traj_0(1; 0)$  passe en

$$(\sigma + \varepsilon; -\sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2})$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Sur  $[\sigma - \varepsilon; \sigma + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_\alpha$  et

$$Traj_\alpha(\sigma + \varepsilon; -\sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2}) \text{ passe en } \left( \sigma - \varepsilon; \alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + \left(\alpha - \sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2}\right)^2} \right)$$

Sur  $[0; \sigma - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}$  est égale à  $Traj_0$  et

$$Traj_0\left(\sigma - \varepsilon; \alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + \left(\alpha - \sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2}\right)^2}\right) \text{ coupe } O_{y_-} \text{ en}$$

$$\left( 0; -\sqrt{(\sigma - \varepsilon)^2 + \left(\alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + \left(\alpha - \sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2}\right)^2}\right)^2} \right)$$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}(1; 0)$  coupe  $O_{y_-}$  en dessus de

$$\left( 0; -\sqrt{(\sigma - \varepsilon)^2 + \left(\alpha - \sqrt{4\sigma\varepsilon + \left(\alpha - \sqrt{1 - (\sigma + \varepsilon)^2}\right)^2}\right)^2} \right)$$

Soit  $g(x) = -\sqrt{(\sigma - x)^2 + \left(\alpha - \sqrt{4\sigma x + \left(\alpha - \sqrt{1 - (\sigma + x)^2}\right)^2}\right)^2}$  puisque  $1 < \alpha$  (Condition #5)

alors  $g(0) = -1$

Ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < x < \delta$  on a  $-1 - \varepsilon' < g(x)$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}(1; 0)$  coupe  $O_{y_-}$  en dessus de  $(0; -1 - \varepsilon')$

### 1<sup>er</sup> intervalle

$$\text{Ainsi } Traj_{p_{\varepsilon,k,-}(x)}\left([1; 2]_{O_x}\right) \cap O_y \not\subseteq \left[-\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} + \varepsilon'; -1 - \varepsilon'\right]_{O_{y_-}}$$

### 3<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[2 - \varepsilon; 2]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(2; 0)$  passe en

$$(2 - \varepsilon; \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})$$

Sur  $[1 + \varepsilon; 2 - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  est égale à  $Traj_\beta^{-1}$  et  $Traj_\beta^{-1}(2 - \varepsilon; \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})$  passe

$$\text{en } \left( 1 + \varepsilon; \beta + \sqrt{(-\beta + \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})^2 + 3(1 - 2\varepsilon)} \right)$$

Sur  $[\sigma + \varepsilon; 1 + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_0^{-1}$  et sur  $[0; \sigma - \varepsilon]_{O_x}$  la

$$Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1} \text{ est égale à } Traj_0^{-1} \text{ et } Traj_0^{-1}\left(1 + \varepsilon; \beta + \sqrt{(-\beta + \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})^2 + 3(1 - 2\varepsilon)}\right)$$

$$\text{coupe } O_{y_+} \text{ en } \left( 0; \sqrt{\left(\beta + \sqrt{(-\beta + \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})^2 + 3(1 - 2\varepsilon)}\right)^2 + (1 + \varepsilon)^2} \right)$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessous de

$$\left( 0; \sqrt{\left( \beta + \sqrt{(-\beta + \sqrt{4\varepsilon - \varepsilon^2})^2 + 3(1 - 2\varepsilon)} \right)^2 + (1 + \varepsilon)^2} \right)$$

Soit  $g(x) = \sqrt{\left( \beta + \sqrt{(-\beta + \sqrt{4x - x^2})^2 + 3(1 - 2x)} \right)^2 + (1 + x)^2}$  alors

$$g(0) = \sqrt{1 + \left( \beta + \sqrt{\beta^2 + 3} \right)^2}$$

Ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < x < \delta$  on a

$$g(x) < \sqrt{1 + \left( \beta + \sqrt{\beta^2 + 3} \right)^2} + \varepsilon'$$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $O_{y-}$  en dessous de  $\left( 0; \sqrt{1 + \left( \beta + \sqrt{\beta^2 + 3} \right)^2} + \varepsilon' \right)$

Et puisque  $\sqrt{1 + \left( \beta + \sqrt{\beta^2 + 3} \right)^2} < \alpha$  (Condition #2) alors  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $O_{y-}$  en dessous de  $(0; \alpha + \varepsilon')$

#### 4<sup>ème</sup> trajectoire

$Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}^{-1}(1; 0)$  va passer en dessus de  $(\sigma; \alpha)$

Sur  $[\sigma - \varepsilon; \sigma]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(\sigma; \alpha)$  passe en  $(\sigma - \varepsilon; \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma\varepsilon - \varepsilon^2})$

Sur  $[0; \sigma - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}^{-1}$  est égale à  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(\sigma - \varepsilon; \sqrt{\alpha^2 + 2\sigma\varepsilon - \varepsilon^2})$  va couper  $O_{y+}$  en  $(0; \sqrt{\alpha^2 + \sigma^2})$  qui est en dessus de  $(0; \alpha)$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}^{-1}(1; 0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessus de  $(0; \alpha)$

#### 2<sup>ème</sup> intervalle

Ainsi  $[\alpha; \alpha + \varepsilon']_{O_{y+}} \subsetneq Traj_{p_{\varepsilon,k,-}(x)}^{-1}([1; 2]_{O_x}) \cap O_y$

#### Synthèse

Soient  $a_1 = \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} - \varepsilon'$  et  $a_2 = 1 + \varepsilon'$  et  $b_1 = \alpha$  et  $b_2 = \alpha + \varepsilon'$

La Condition #5 est  $1 < \alpha$  et si on choisit  $0 < \varepsilon' < \alpha - 1$  alors  $a_2 = 1 + \varepsilon' < 1 + \alpha - 1 = \alpha = b_1$

La Condition #6 est  $\alpha^2 < (\beta - \sqrt{3})^2$  et si on choisit  $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}((\beta - \sqrt{3})^2 - \alpha^2)$  alors  $b_2 = \alpha + \varepsilon' = \alpha + 1 - \varepsilon' > \alpha + 1 - \frac{1}{2}(2\alpha + 1 - \sqrt{1 + \alpha^2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \alpha^2} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2}(2\alpha + 1 - \sqrt{1 + \alpha^2}) > -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \varepsilon' = a_2$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Ainsi par le lemme 6.a il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{Ox_-}$  et  $[1; 2]_{Ox_+}$

#

### LEMME 8

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et strictement croissante en 0 et en 2 et strictement décroissante en 1 et telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(1) = F(2) = 0$  et qui vérifie les conditions :

$$\#1 \quad \sqrt{3} \leq M_{F(x)}[0; 1]$$

$$\#2 \quad \sqrt{1 + \left( m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3} \right)^2} < M_{F(x)}[0; 1]$$

$$\#3 \quad 2M_{F(x)}[0; 1] + 1 < \sqrt{1 + (M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2])^2}$$

$$\#4 \quad \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} < 2M_{F(x)}[0; 1] + 1$$

$$\#5 \quad M_{F(x)}[0; 1]^2 < (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2$$

Alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{Ox}$  et  $[1; 2]_{Ox}$

### Preuve

Par simplification on pose  $\alpha = M_{F(x)}[0; 1] = -m_{F(x)}[-1; 0]$  et  $\beta = m_{F(x)}[1; 2] = -M_{F(x)}[-2; -1]$  et  $\sigma$  le plus grand maxima sur  $[0; 1]_{Ox}$  et  $\rho$  le plus grand minima sur  $[1; 2]_{Ox}$

Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  et  $p_{\varepsilon,+}(x)$  tel que définit au lemme 7

#### 1<sup>ère</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(2; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de  $(0; \alpha - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2})$

#### 2<sup>ème</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}(1; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessus de  $(0; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1} - \varepsilon')$

#### 1<sup>er</sup> intervalle

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}([k; k+1]_{Ox}) \cap Oy \subsetneq [\alpha - \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}; \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1} - \varepsilon']_{Oy_-}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### 3<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[1; 2]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(2; 0)$  passe en  $(1; \sqrt{3})$

qui est en dessous de  $(1; \alpha)$  (Condition #1)

Sur  $[0; \varepsilon]_{O_x}$  et  $[1 - \varepsilon; \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_{\alpha}^{-1}$  et sur  $[\varepsilon; 1 - \varepsilon]_{O_x}$  la

$Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}$  est égale à  $Traj_{\alpha}^{-1}$  et  $Traj_{\alpha}^{-1}(1; \alpha)$  coupe  $Oy_+$  en  $(0; \alpha + 1)$

Ainsi  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $Oy_+$  en dessous de  $(0; \alpha + 1)$

### 4<sup>ème</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $Traj_{p_{\varepsilon,+}(x)}^{-1}(1; 0)$  coupe  $Oy_+$  en dessus de  $(0; \alpha + 1 - \varepsilon')$

### 2<sup>ème</sup> intervalle

Ainsi  $[\alpha + 1 - \varepsilon'; \alpha + 1]_{Oy_+} \subsetneq Traj_{p_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}([k; k + 1]_{O_x}) \cap Oy_+$

### Synthèse

Soient  $a_1 = -\alpha + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2} - \varepsilon'$  et  $a_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \varepsilon'$  et  $b_1 = \alpha + 1$  et  $b_2 = \alpha + 1 + \varepsilon'$

La Condition #3 est  $1 + \alpha < \alpha + \sqrt{1 + (\alpha - \beta)^2}$  et si on choisit  $0 < \varepsilon' < 2\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 1}$  alors  $a_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + \varepsilon' < -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1} + 2\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 1} = \alpha + 1 = b_1$

La Condition #4 est  $\sqrt{1 + \alpha^2} < 2\alpha + 1$  alors  $b_2 = \alpha + 1 + \varepsilon' > -\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} + \varepsilon' = a_1$   
Ainsi par le lemme 6.a il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{O_{x-}}$  et  $[1; 2]_{O_{x+}}$

Soit  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  et  $p_{\varepsilon,-}(x)$  tel que définit au lemme 7

### 1<sup>ère</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}(2; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessous de

$(0; -\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} + \varepsilon')$

### 2<sup>ème</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $Traj_{p_{\varepsilon,-}(x)}(1; 0)$  coupe  $Oy_-$  en dessus de  $(0; -1 - \varepsilon')$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### 1<sup>er</sup> intervalle

$$\text{Ainsi } \text{Traj}_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}([1; 2]_{O_x}) \cap O_y \subsetneq \left[ -\sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2 + \varepsilon'}; -1 - \varepsilon' \right]_{O_{y-}}$$

### 3<sup>ème</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $\text{Traj}_{P_{\varepsilon, -}(x)}^{-1}(2; 0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessous de  $(0; \alpha + \varepsilon')$

### 4<sup>ème</sup> trajectoire

De manière identique au lemme 7 on obtient que  $\text{Traj}_{P_{\varepsilon, -}(x)}^{-1}(1; 0)$  va couper  $O_{y+}$  en dessus de  $(0; \alpha)$

### 2<sup>ème</sup> intervalle

$$\text{Ainsi } [\alpha + 1 - \varepsilon'; \alpha + 1]_{O_{y+}} \subsetneq \text{Traj}_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}^{-1}([1; 2]_{O_x}) \cap O_y$$

### Synthèse

$$\text{Soient } a_1 = \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} - \varepsilon' \text{ et } a_2 = 1 + \varepsilon' \text{ et } b_1 = \alpha + \varepsilon' \text{ et } b_2 = \alpha$$

La Condition #1 est  $\sqrt{3} \leq \alpha$  alors  $b_1 = \alpha + \varepsilon' \geq \sqrt{3} + \varepsilon' > 1 + \varepsilon' = a_2$

La Condition #5 est  $\alpha^2 < (\beta - \sqrt{3})^2$  et si on choisit  $0 < \varepsilon' < \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} - \alpha$  alors

$$a_1 = \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} - \varepsilon' > \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} - \sqrt{1 + (\beta - \sqrt{3})^2} + \alpha = \alpha = b_2$$

Ainsi par le lemme 6.a il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{O_{x-}}$  et

$[1; 2]_{O_{x+}}$

#

### **LEMME 9.a**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq 2$  et soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = F(k-1) = F(k) = F(k+1) = 0$  et  $F(-x) = -F(x)$  et strictement croissante en 0 et  $k$  et strictement décroissante en  $k-1$  et  $k+1$  et  $F(x) < 0$  sur  $]k-1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k+1[$   
Soit  $\bar{x}$  le plus grand extrema de  $F(x)$  sur  $]k-1; k[$  alors on définit

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$P_{\varepsilon, k, +}(x) = \left\{ \begin{array}{l} F(x + \varepsilon) \quad \text{si } x \in ]-\infty; -k - 1 - \varepsilon[ \\ \left(\frac{x+k+1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[-k-1; -k] \quad \text{si } x \in [-k-1-\varepsilon; -k-1[ \\ m_{F(x)}[-k-1; -k] \quad \text{si } x \in [-k-1; -k[ \\ -\left(\frac{x+k-\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[-k-1; -k] \quad \text{si } x \in [-k; -k+\varepsilon[ \\ \left(\frac{x+\bar{x}+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k; -k+1] \quad \text{si } x \in [-\bar{x}-\varepsilon; -\bar{x}[ \\ -\left(\frac{x+\bar{x}-\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k; -k+1] \quad \text{si } x \in [-\bar{x}; -\bar{x}+\varepsilon[ \\ 0 \quad \text{si } x \in [-k+\varepsilon; -\bar{x}-\varepsilon[ \cup [-\bar{x}+\varepsilon; -k+1-\varepsilon[ \\ \left(1 + \frac{x+k-1}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[-k+1; 0] \quad \text{si } x \in [-k+1-\varepsilon; -k+1[ \\ m_{F(x)}[-k+1; 0] \quad \text{si } x \in [-k+1; -\varepsilon[ \\ -\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[-k+1; 0] \quad \text{si } x \in [-\varepsilon; 0[ \\ \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[0; k-1] \quad \text{si } x \in [0; \varepsilon[ \\ M_{F(x)}[0; k-1] \quad \text{si } x \in [\varepsilon; k-1[ \\ \left(1 - \frac{x-k+1}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[0; k-1] \quad \text{si } x \in [k-1; k-1+\varepsilon[ \\ 0 \quad \text{si } x \in [k-1+\varepsilon; \bar{x}-\varepsilon[ \cup [\bar{x}+\varepsilon; k-\varepsilon[ \\ \left(\frac{x-\bar{x}+\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[k-1; k] \quad \text{si } x \in [\bar{x}-\varepsilon; \bar{x}[ \\ -\left(\frac{x-\bar{x}-\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[k-1; k] \quad \text{si } x \in [\bar{x}; \bar{x}+\varepsilon[ \\ \left(\frac{x-k+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[k; k+1] \quad \text{si } x \in [k-\varepsilon; k[ \\ M_{F(x)}[k; k+1] \quad \text{si } x \in [k; k+1[ \\ -\left(\frac{x-k-1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[k; k+1] \quad \text{si } x \in [k+1; k+1+\varepsilon[ \\ F(x - \varepsilon) \quad \text{si } x \in [k+1+\varepsilon; \infty[ \end{array} \right.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\#1.1 \quad m_{F(x)}[k-1; k] \leq -2\sqrt{k}$$

$$\#1.2 \quad M_{F(x)}[0; k-1] < M_{F(x)}[k; k+1]$$

$$\#1.3 \quad \sqrt{2k-1} < M_{F(x)}[0; k-1]$$

$$\#1.4 \quad 2M_{F(x)}[0; k-1] + k - 1 < \sqrt{(M_{F(x)}[0; k-1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 + (k-1)^2}$$

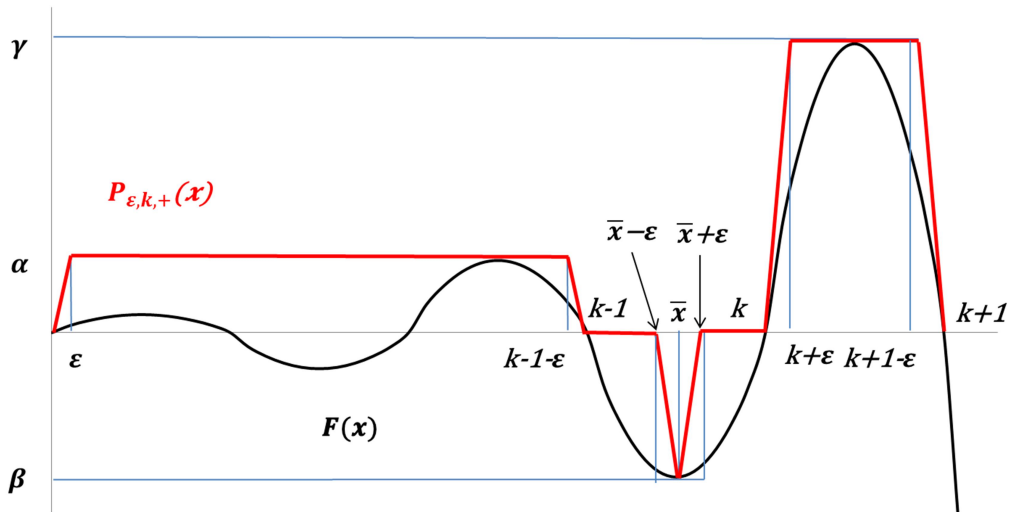
$$\#1.5 \quad -m_{F(x)}[k-1; k] < M_{F(x)}[k; k+1] + \sqrt{2k+1}$$

Alors pour tous les  $\varepsilon$  suffisamment petit  $P_{\varepsilon, k, +}(x)$  a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x+}}$

### Preuve

Par simplification on note  $\alpha = M_{F(x)}[0; k-1] = -m_{F(x)}[-k+1; 0]$  et  $\beta = m_{F(x)}[k-1; k] = -M_{F(x)}[-k; -k+1]$  et  $\gamma = M_{F(x)}[k; k+1] = -m_{F(x)}[-k-1; -k]$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Comme  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(k-1) = F(k) = F(k+1) = 0$  et strictement croissante en 0 et  $k$  et strictement décroissante en  $k-1$  et  $k+1$  alors il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  on a  $P_{\epsilon, k, +}(x) \geq F(x)$  pour tout  $x \geq 0$  et  $P_{\epsilon, k, +}(x) \leq F(x)$  pour tout  $x \leq 0$

Etudions les trajectoires passant par les points  $(k; 0)$  et  $(k+1; 0)$

### 1<sup>ère</sup> trajectoire

Sur  $[\bar{x} + \epsilon; k+1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\epsilon, k, +}(x)}$  passe en dessus de  $Traj_0$  et  $Traj_0(k+1; 0)$  passe en  $(\bar{x} + \epsilon; -\sqrt{(k+1)^2 - (\bar{x} + \epsilon)^2})$

Soit  $g(x) = (k+1)^2 - (\bar{x} + x)^2$  alors  $g'(x) = -2(\bar{x} + x) < 0$  pour tout  $x > 0$  et  $g(0) = (k+1)^2 - \bar{x}^2 > (k+1)^2 - (k-1)^2 = 4k$  et donc  $g(x) < 4k$  pour tout  $x > 0$

Puisque  $\beta \leq -2\sqrt{k}$  (Condition #1.1) alors  $(\bar{x} + \epsilon; -\sqrt{(k+1)^2 - (\bar{x} + \epsilon)^2})$  est en dessus de  $(\bar{x} + \epsilon; \beta)$

Ainsi  $Traj_{P_{\epsilon, k, +}(x)}(k+1; 0)$  passe en dessus de  $(k; \beta)$

D'autre part  $Traj_{P_{\epsilon, k, +}(x)}(k+1; 0)$  passe en dessous de  $(k-1; \beta)$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

a) Trajectoire issue de  $(k; \beta)$

Sur  $[0; k]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}$  passe en dessus de  $Traj_{\beta}$  et  $Traj_{\beta}(k; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en  $(0; -\sqrt{\beta^2 + k^2})$

Ainsi la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en dessus de  $(0; -\sqrt{\beta^2 + k^2})$

b) Trajectoire issue de  $(k - 1; \beta)$

Sur  $[0; k - 1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_{\alpha}$  et  $Traj_{\alpha}(k - 1; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en  $(0; \alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k - 1)^2})$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en dessous de  $(0; \alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k - 1)^2})$

En synthèse  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; 0)$  coupe  $[-\sqrt{\beta^2 + k^2}; \alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k - 1)^2}]_{O_{y-}}$

2<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[\bar{x} + \varepsilon; k]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}$  passe en dessus de  $Traj_0$  et  $Traj_0(k; 0)$  passe en  $(\bar{x} + \varepsilon; -\sqrt{k^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2})$  puisque  $-\sqrt{k^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2} > -\sqrt{(k + 1)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2}$  et alors par la Condition #1.1  $(\bar{x} + \varepsilon; -\sqrt{k^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2})$  est en dessus de  $(\bar{x} + \varepsilon; \beta)$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; 0)$  passe en dessus de  $(k; \beta)$

D'autre part  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; 0)$  passe en dessous de  $(k - 1; \beta)$

Et de la même manière que pour la 1<sup>ère</sup> trajectoire  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}(k; 0)$  coupe  $[-\sqrt{\beta^2 + k^2}; \alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k - 1)^2}]_{O_{y-}}$

1<sup>er</sup> intervalle

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}([k; k + 1]_{O_x}) \cap O_y \subset [-\sqrt{\beta^2 + k^2}; \alpha - \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k - 1)^2}]_{O_{y-}}$

3<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[k + 1 - \varepsilon; k + 1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}(k + 1; 0)$  passe en dessus  $(k + 1 - \varepsilon; \gamma)$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Sur  $[k + \varepsilon; k + 1 - \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}$  est égale à  $Traj_{\gamma}^{-1}$  et  $Traj_{\gamma}^{-1}(k + 1 - \varepsilon; \gamma)$  passe en  $(k + \varepsilon; \gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})$

Sur  $[\bar{x} + \varepsilon; k + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(k + \varepsilon; \gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})$  passe en  $(\bar{x} + \varepsilon; \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2})$

Sur  $[\bar{x} - \varepsilon; \bar{x} + \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_{\beta}^{-1}$  et  $Traj_{\beta}^{-1}(\bar{x} + \varepsilon; \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2})$  passe en

$$\left( \bar{x} - \varepsilon; \beta + \sqrt{\left( -\beta + \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2} \right)^2 + 4\bar{x}\varepsilon} \right)$$

Sur  $[0; \bar{x} - \varepsilon]_{O_x}$  et puisque  $\alpha < \gamma$  (Condition #1.2)  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(\bar{x} - \varepsilon; \beta + \sqrt{\left( -\beta + \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2} \right)^2 + 4\bar{x}\varepsilon})$

coupe  $O_{y+}$  en dessus de

$$\left( 0; \sqrt{\left( \beta + \sqrt{\left( -\beta + \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2} \right)^2 + 4\bar{x}\varepsilon} \right)^2 + (\bar{x} - \varepsilon)^2} \right)$$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, +}(x)}^{-1}(k + 1 + \varepsilon; 0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessus de

$$\left( 0; \sqrt{\left( \beta + \sqrt{\left( -\beta + \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2\varepsilon)})^2 + (k + \varepsilon)^2 - (\bar{x} + \varepsilon)^2} \right)^2 + 4\bar{x}\varepsilon} \right)^2 + (\bar{x} - \varepsilon)^2} \right)$$

$$\text{Soit } g(x) = \sqrt{\left( \beta + \sqrt{\left( -\beta + \sqrt{(\gamma + \sqrt{(2k + 1)(1 - 2x)})^2 + (k + x)^2 - (\bar{x} + x)^2} \right)^2 + 4\bar{x}x} \right)^2 + (\bar{x} - x)^2}$$

alors  $g(0) = \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k + 1})^2 + k^2}$  et ainsi pour tout  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  il existe  $0 < \delta$  tel que pour

tout  $0 < x < \delta$  on a  $\sqrt{(\gamma + \sqrt{2k + 1})^2 + k^2} - \varepsilon' \leq g(x)$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Et finalement la  $Traj_{P_{\delta,k,+}(x)}^{-1}(k+1;0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessus de

$$\left(0; \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2 - \varepsilon'}\right)$$

#### 4<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[k-1; k]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_0^{-1}$  et  $Traj_0^{-1}(k;0)$  passe par  $(k-1; \sqrt{2k-1})$  qui est en dessous de  $(k-1; \alpha)$  (Condition #1.3)

Sur  $[0; k-1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_\alpha^{-1}$  et  $Traj_\alpha^{-1}(k-1; \alpha)$  coupe  $O_{y+}$  en dessous de  $(0; \alpha + k - 1)$

Ainsi  $Tra_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}(k;0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessous de  $(0; \alpha + k - 1)$

#### 2<sup>ème</sup> intervalle

$$\text{Ainsi } \left[ \alpha + k - 1; \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2 - \varepsilon} \right]_{O_{y+}} \subsetneq Traj_{P_{\varepsilon,k,+}(x)}^{-1}([k; k+1]) \cap O_y$$

#### Synthèse

Soient  $a_1 = \sqrt{\beta^2 + k^2}$  et  $a_2 = -\alpha + \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (k-1)^2}$  et  $b_1 = \alpha + k - 1$  et  $b_2 = \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2 - \varepsilon}$

La Condition #1.4 équivaut à  $b_1 < a_2$

La Condition #1.5 donne  $\sqrt{\beta^2 + k^2} < \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2}$  et si on choisit  $0 < \varepsilon < \sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2} - \sqrt{\beta^2 + k^2}$  alors  $\sqrt{(\gamma + \sqrt{2k+1})^2 + k^2 - \varepsilon} > \sqrt{\beta^2 + k^2}$  et donc  $a_1 < b_2$

Ainsi par le lemme 6.b il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x+}}$

#

#### **LEMME 9.b**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq 2$  et soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(k-1) = F(k) = F(k+1) = 0$  et strictement croissante en 0 et  $k$  et strictement décroissante en  $k-1$  et  $k+1$  et  $F(x) < 0$  sur  $]k-1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k+1[$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Soit  $\bar{y}$  est le plus grand extrema de  $F(x)$  sur  $]k-1; k[$  alors on définit

$$P_{\varepsilon, k, -}(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) \quad \text{si } x \in ]-\infty; -k-1[ \\ \left(\frac{x+\bar{y}+\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[k-1; -k] \quad \text{si } x \in [-\bar{y}-\varepsilon; -\bar{y}[ \\ -\left(\frac{x+\bar{y}-\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[-k-1; -k] \quad \text{si } x \in [-\bar{y}; -\bar{y}+\varepsilon[ \\ 0 \quad \text{si } x \in [-k-1; -\bar{y}-\varepsilon[ \cup [-\bar{y}+\varepsilon; -k[ \\ \left(\frac{x+k+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k; -k+1] \quad \text{si } x \in [-k; -k+\varepsilon[ \\ M_{F(x)}[-k; -k+1] \quad \text{si } x \in [-k+\varepsilon; -k+1[ \\ \left(1 + \frac{x+k-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k+1; 0] - \left(\frac{x+k-1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k; -k+1] \quad \text{si } x \in [-k+1; -k+1-\varepsilon[ \\ M_{F(x)}[-k+1; 0] \quad \text{si } x \in [-k+1-\varepsilon; -\varepsilon[ \\ -\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[-k+1; 0] \quad \text{si } x \in [-\varepsilon; 0[ \\ \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[0; k-1] \quad \text{si } x \in [0; \varepsilon[ \\ m_{F(x)}[0; k-1] \quad \text{si } x \in [\varepsilon; k-1+\varepsilon[ \\ \left(1 - \frac{x-k+1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[0; k-1] + \left(\frac{x-k+1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[k-1; k] \quad \text{si } x \in [k-1+\varepsilon; k-1[ \\ m_{F(x)}[k-1; k] \quad \text{si } x \in [k-1; k-\varepsilon[ \\ \left(\frac{x-k+\varepsilon}{\varepsilon}\right) m_{F(x)}[k-1; k] \quad \text{si } x \in [k-\varepsilon; k[ \\ 0 \quad \text{si } x \in [k; \bar{y}-\varepsilon[ \cup [\bar{y}+\varepsilon; k+1[ \\ \left(\frac{x-\bar{y}+\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[k; k+1] \quad \text{si } x \in [\bar{y}-\varepsilon; \bar{y}[ \\ -\left(\frac{x-\bar{y}-\varepsilon}{\varepsilon}\right) M_{F(x)}[k; k+1] \quad \text{si } x \in [\bar{y}; \bar{y}+\varepsilon[ \\ F(x) \quad \text{si } x \in [k+1; \infty[ \end{array} \right.$$

Si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\#2.1 \quad m_{F(x)}[k-1; k] < -\sqrt{2k+1}$$

$$\#2.2 \quad m_{F(x)}[k-1; k] < m_{F(x)}[0; k-1]$$

$$\#2.3 \quad m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{m_{F(x)}[0; k-1]^2 + k^2} < -m_{F(x)}[k-1; k] + k$$

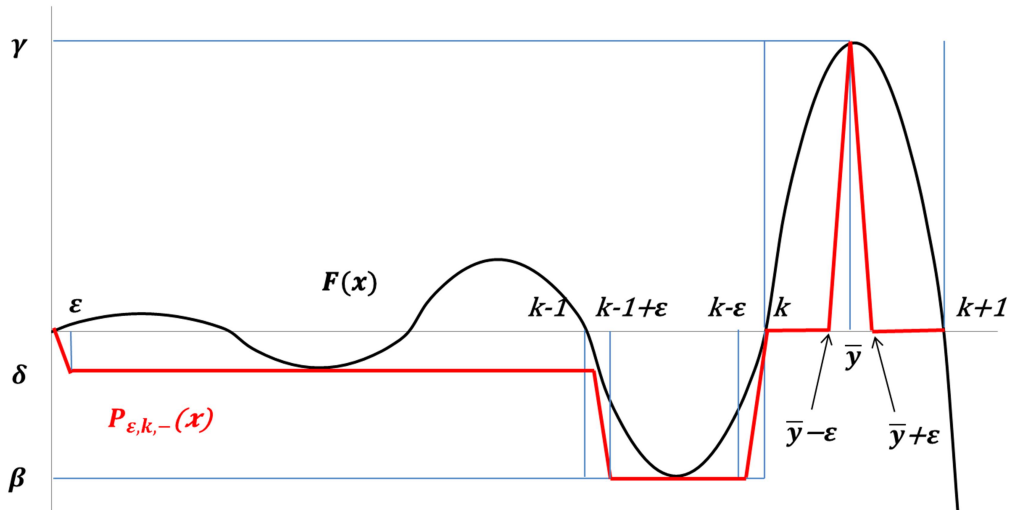
$$\#2.4 \quad -m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{(m_{F(x)}[0; k-1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 + k^2} < m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 + k^2}$$

Alors pour tous les  $\varepsilon$  suffisamment petit  $P_{\varepsilon, k, -}(x)$  a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x^-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x^+}}$

### Preuve

Par simplification on note  $\delta = m_{F(x)}[0; k-1] = -M_{F(x)}[-k+1; 0]$  et  $\beta = m_{F(x)}[k-1; k] = -M_{F(x)}[-k; -k+1]$  et  $\gamma = M_{F(x)}[k; k+1] = -m_{F(x)}[-k-1; -k]$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Comme  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(k-1) = F(k) = F(k+1) = 0$  et strictement croissante en 0 et  $k$  et strictement décroissante en  $k-1$  et  $k+1$  alors il existe  $0 < \delta$  tel que pour tout  $0 < \epsilon < \delta$  on a  $P_{\epsilon, k, -}(x) \leq F(x)$  pour tout  $x \geq 0$  et  $P_{\epsilon, k, -}(x) \geq F(x)$  pour tout  $x \leq 0$

Etudions les trajectoires passant par les points  $(k; 0)$  et  $(k+1; 0)$

### 1<sup>ère</sup> trajectoire

Sur  $[k; k+1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\epsilon, k, -}(x)}(k+1; 0)$  passe en dessus de  $Traj_0(k+1; 0)$  et  $Traj_0(k+1; 0)$  passe par  $(k; -\sqrt{2k+1})$  Puisque  $2k+1 < \beta^2$  (Condition #2.1) alors  $(k; -\sqrt{2k+1})$  est en dessus de  $(k; \beta)$  Ainsi  $Traj_{P_{\epsilon, k, -}(x)}(k+1; 0)$  passe en dessus de  $(k; \beta)$  et en dessous de  $(k-\epsilon; \beta)$

#### a) Trajectoire issue de $(k; \beta)$

Sur  $[0; k]_{O_x}$  puisque  $\beta < \delta$  (Condition #2.2)  $Traj_{P_{\epsilon, k, -}(x)}$  passe en dessus de  $Traj_\beta$  et  $Traj_\beta(k; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en  $(0; \beta - k)$  et donc  $Traj_{P_{\epsilon, k, -}(x)}(k+1; 0)$  coupe  $O_{y-}$  en dessus de  $(0; \beta - k)$

#### b) Trajectoire issue de $(k-\epsilon; \beta)$

Sur  $[\epsilon; k-\epsilon]_{O_x}$  puisque  $\beta < \delta$  la  $Traj_{P_{\epsilon, k, -}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_\delta$  et  $Traj_\delta(k-\epsilon; \beta)$  passe en  $(\epsilon; \delta - \sqrt{k^2 - 2\epsilon k + (\delta - \beta)^2})$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Sur  $[0; \varepsilon]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}$  passe en dessous de  $Traj_0$  et

$Traj_0(\varepsilon; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})$  coupe  $O_{y-}$  en  $(0; -\sqrt{\varepsilon^2 + (\delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})^2})$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}(k - \varepsilon; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en dessous de

$(0; -\sqrt{\varepsilon^2 + (\delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})^2})$

On a  $-\sqrt{\varepsilon^2 + (\delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})^2} < -\sqrt{(\delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})^2} = \delta -$

$\sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2}$  et donc  $(0; -\sqrt{\varepsilon^2 + (\delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})^2})$  est en dessous de

$(0; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}(k - \varepsilon; \beta)$  coupe  $O_{y-}$  en dessous de  $(0; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2})$

En synthèse  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}(k + 1; 0)$  coupe  $[\beta - k; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2}]_{O_{y-}}$

### 2<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[k - \varepsilon; k]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}(k; 0)$  passe en dessus de  $(k; \beta)$  et en dessous de  $(k - \varepsilon; \beta)$

Et de la même manière que pour la 1<sup>ère</sup> trajectoire  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}(k; 0)$

coupe  $[\beta - k; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2}]_{O_{y-}}$

### 1<sup>er</sup> intervalle

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}([k; k + 1]_{O_x}) \cap O_y \not\subset [\beta - k; \delta - \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2}]_{O_{y-}}$

### 3<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[k; k + 1]_{O_x}$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}^{-1}(k + 1; 0)$  passe en dessus de  $(\bar{y}; \gamma)$  et par suite en dessus de  $(k; \gamma)$

Sur  $[0; k]_{O_x}$  puisque  $\beta < \delta$  la  $Traj_{P_{\varepsilon, k, -}(x)}^{-1}$  passe en dessus de  $Traj_{\beta}^{-1}$  et  $Traj_{\beta}^{-1}(k; \gamma)$  coupe  $O_{y+}$  en  $(0; \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2})$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon,k,-}(x)}^{-1}(k+1;0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessus de  $(0; \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2})$

#### 4<sup>ème</sup> trajectoire

Sur  $[0:k]_{O_x}$  puisque  $\beta < \delta$  la  $Traj_{P_{\varepsilon,k,-}(x)}^{-1}$  passe en dessous de  $Traj_{\delta}^{-1}$  et  $Traj_{\delta}^{-1}(k;0)$  coupe  $O_{y+}$  en  $(0; \delta + \sqrt{\delta^2 + k^2})$

Ainsi  $Traj_{P_{\varepsilon,k,-}(x)}^{-1}(k;0)$  coupe  $O_{y+}$  en dessous de  $(0; \delta + \sqrt{\delta^2 + k^2})$

#### 2<sup>ème</sup> intervalle

Ainsi  $[\delta + \sqrt{\delta^2 + k^2}; \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2}]_{O_{y+}} \subsetneq Traj_{P_{\varepsilon,k,-}(x)}^{-1}([k; k+1]_{O_x}) \cap O_y$

#### Synthèse

Soit  $a_1 = -\delta + \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2}$  et  $a_2 = -\beta + k$  et  $b_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 + k^2}$  et  $b_2 = \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2}$

#2.2  $\beta < \delta$

#2.3  $\delta + \sqrt{\delta^2 + k^2} < -\beta + k$

#2.4  $-\delta + \sqrt{(\delta - \beta)^2 + k^2} < \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2}$

La Condition #2.3 équivaut à  $b_1 = \delta + \sqrt{\delta^2 + k^2} < -\beta + k = a_2$

La Condition #2.4 donne a  $a_1 = -\delta + \sqrt{k^2 - 2\varepsilon k + (\delta - \beta)^2} < -\delta + \sqrt{k^2 + (\delta - \beta)^2} < \beta + \sqrt{(\beta - \gamma)^2 + k^2} = b_2$

Ainsi par le lemme 6.b il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_{x-}}$  et  $[k; k+1]_{O_{x+}}$

#

#### **LEMME 10**

Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k \geq 2$  et soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = F(k-1) = F(k) = F(k+1) = 0$  et  $F(-x) = -F(x)$  et strictement croissante en 0 et  $k$  et strictement décroissante en  $k-1$  et  $k+1$  et  $F(x) < 0$  sur  $]k-1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k+1[$  Si les conditions suivantes sont satisfaites:

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

- # 1.  $m_{F(x)}[k-1; k] < -2\sqrt{k}$   
 # 2.  $M_{F(x)}[0; k-1] < M_{F(x)}[k; k+1]$   
 # 3.  $\sqrt{2k-1} < M_{F(x)}[0; k-1]$   
 # 4.  $m_{F(x)}[k-1; k] < m_{F(x)}[0; k-1]$   
 # 5.  $2M_{F(x)}[0; k-1] + k - 1 < \sqrt{(M_{F(x)}[0; k-1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 + (k-1)^2}$   
 # 6.  $m_{F(x)}[k-1; k]^2 < (M_{F(x)}[k; k+1] + \sqrt{2k+1})^2$   
 # 7.  $m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{m_{F(x)}[0; k-1]^2 + k^2} \leq -m_{F(x)}[k-1; k] + k$   
 # 8.  $-m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 + k^2} < m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 + k^2}$

alors il y a pour  $F(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-k; -k-1]_{0_x}$  et  $[k; k+1]_{0_x}$

### Preuve

Les conditions des lemmes 9.a et 9.b sont vérifiées

Lorsque  $k \geq \frac{1}{2}$  on a  $-\sqrt{2k+1} \geq -2\sqrt{k}$  ainsi si la condition #1.1 du lemme 9.a est respectée alors ce sera aussi le cas de la condition #2.1 du lemme 9.b

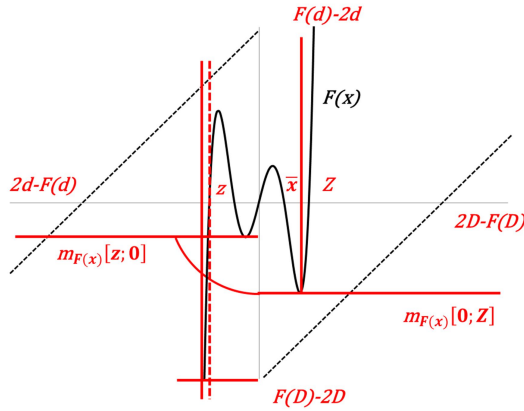
Ainsi l'ensemble des conditions des lemmes 9.a et 9.b sont équivalentes aux conditions #1.1 à #1.5 du lemme 9.a plus aux conditions #2.2 à #2.4 du lemme 9.b

Dès lors en appliquant les lemmes 9.a et 9.b et le théorème F on achève la démonstration  
 #

### PROPOSITION 17

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et telle qu'il existe  $D \geq 0$  tel que  $F(x) \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tous les  $x \geq 0$  et qu'il existe  $d \leq 0$  tel que  $F(x) \leq 2x + F(d) - 2d$  pour tous les  $x \leq 0$  et soit  $z < 0$  le minimum tel que  $F(z) = 0$  et  $Z > 0$  le maximum tel que  $F(Z) = 0$  Si  $m_{F(x)}[0; Z] < m_{F(x)}[z; 0]$  et  $m_{F(x)}[0; Z] - m_{F(x)}[z; 0] < z$  et  $M_{F(x)}[z; 0] > M_{F(x)}[0; Z]$  et  $M_{F(x)}[z; 0] - M_{F(x)}[0; Z] > Z$  alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[2d - F(d); z]_{0_{x^-}}$  et  $[Z; 2D - F(D)]_{0_{x^+}}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



### Preuve

$Traj_{F(x)}(0; F(D) - 2D)$  coupe  $]2d - F(d); 0]_{O_{x^-}}$

Soit  $\bar{x}$  le maximum tel que  $m_{F(x)}[0; Z] = F(\bar{x})$  alors  $Traj_{F(x)}(Z; 0)$  passe au dessous de  $(\bar{x}; m_{F(x)}[0; Z])$  et par suite coupe  $O_{x^-}$  en dessous de  $(0; m_{F(x)}[0; Z])$  Ensuite

$Traj_{F(x)}(0; m_{F(x)}[0; Z])$  passe en dessous de  $Traj_{m_{F(x)}[z; 0]}(0; m_{F(x)}[0; Z])$  et cette trajectoire passe par  $(-m_{F(x)}[0; Z] + m_{F(x)}[z; 0]; m_{F(x)}[z; 0])$  et donc coupe  $F(x)$  dans  $]-\infty; z]_{O_{x^-}}$  et finalement coupe  $]-\infty; z]_{O_{x^-}}$

Comme  $Z < 2D - F(D)$  alors  $Traj_{F(x)}([Z; 2D - F(D)]_{O_{x^+}}) \subset ]2d - F(d); z]_{O_{x^-}}$

De la même manière on prouve que  $Traj_{F(x)}([2d - F(d); z]_{O_{x^-}}) \subset ]Z; 2D - F(D)]_{O_{x^+}}$

Ainsi  $Traj_{F(x)}([Z; 2D - F(D)]_{O_{x^+}}) \subsetneq ]Z; 2D - F(D)]_{O_{x^+}}$  et  $Traj_{F(x)}([2d - F(d); z]_{O_{x^-}}) \subsetneq [2d - F(d); z]_{O_{x^-}}$  donc il y a au moins une solution périodique qui coupe  $]Z; 2D - F(D)]_{O_{x^+}}$  et  $[2d - F(d); z]_{O_{x^-}}$

#

### PROPOSITION 18

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  alors les solutions périodiques coupent  $[-\frac{16}{10}n; \frac{16}{10}n]_{O_x}$

### Preuve

Soit  $\bar{x} \in [n - 1; n]$  tel que  $F(\bar{x}) = m_{F(x)}[n - 1, n]$  alors  $F''(x) > 0$  sur  $[\bar{x}; \infty]$  et  $F(x) \geq (F(n) - nF'(n)) + 2x$  sur  $[\bar{x}; \infty]$  Selon le lemme 16 on a que  $m_{F(x)}[n - 1, n] < m_{F(x)}[i - 1, i]$  pour tout  $0 \leq i \leq n - 1$  alors  $F(x) \geq (F(n) - nF'(n)) + 2x$  pour tout  $x \geq 0$  De la même manière on a  $F(x) \leq -(F(n) - nF'(n)) + 2x$  pour tout  $x \leq 0$  Et puisque  $F(n) = 0$  alors les solutions périodiques coupent  $[-nF'(n); nF'(n)]_{O_y}$

On a  $F'(x) = \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2) + 2x^2 \sum_{j=1}^n \prod_{i=1, i \neq j}^n (x^2 - i^2)$  et donc

$$F'(n) = 2n^2 \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)$$

En vue d'appliquer le théorème C on cherche  $\varepsilon > 0$  tel que  $F(n + \varepsilon) \geq nF'(n) \Leftrightarrow (n + \varepsilon) \prod_{i=1}^n ((n + \varepsilon)^2 - i^2) \geq 2n^3 \prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2) \Leftrightarrow (n + \varepsilon)((n + \varepsilon)^2 - n^2) \prod_{i=1}^{n-1} ((n + \varepsilon)^2 - i^2) \geq 2n^3 \prod_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)$  Une condition suffisante est que  $(n + \varepsilon)\varepsilon(2n + \varepsilon) \geq 2n^3 \Leftrightarrow \varepsilon^3 +$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$3n\varepsilon^2 + 2n^2\varepsilon - 2n^3 \geq 0$  Soit  $g(\varepsilon) = \varepsilon^3 + 3n\varepsilon^2 + 2n^2\varepsilon - 2n^3$  alors  $g'(\varepsilon) = 3\varepsilon^2 + 6n\varepsilon + 2n^2 > 0$  et  $g\left(\frac{6}{10}n\right) = \frac{496}{1000}n^3$  Et donc il suffit que  $\varepsilon \geq \frac{6}{10}n$   
 #

## APPLICATION

$$F(x) = x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$$

Selon la proposition 17 on a  $z = -2$  et  $Z = 2$  et  $d \cong -1.6912$  et  $D \cong 1.6912$  et  $m_{F(x)}[0; 2] \cong -3.6314 < -1.4187 \cong m_{F(x)}[-2; 0]$  et  $m_{F(x)}[0; 2] - m_{F(x)}[-2; 0] \cong -3.6314 + 1.4187 = -2.2127 < -2 = z$  et  $M_{F(x)}[-2; 0] \cong 3.6314 > 1.4187 \cong M_{F(x)}[0; 2]$  et  $M_{F(x)}[-2; 0] - M_{F(x)}[0; 2] \cong 3.6314 - 1.4187 = 2.2127 > 2 = Z$  Ainsi il y a une solution périodique qui coupe  $[-6.9683; -2]_{O_x}$  et  $[2; 6.9683]_{O_x}$

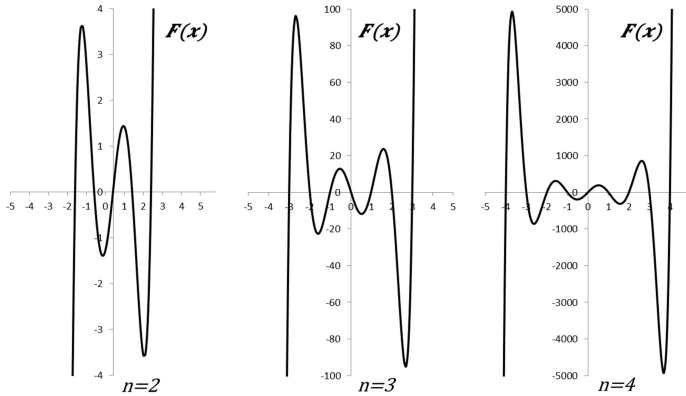
Selon la proposition 18 les solutions périodiques coupent  $[-3.2000; 3.2000]_{O_x}$

Ainsi il y a une solution périodique qui coupe  $[-3.2000; -2]_{O_x}$  et  $[2; 3.200]_{O_x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## CHAPITRE 7 - Le nombre de solutions périodiques pour $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$ est au moins égal à $n$

Voici le graphe de  $F(x)$  pour  $n = 2$  et 3 et 4



Commençons par étudier les caractéristiques de  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$

### LEMME 11

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 2$  alors  $\frac{F(x+1)}{-F(x)} = \frac{x+n+1}{n-x}$  et  $\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{F(x+1)}{-F(x)} \geq \frac{i+1+n}{n-i}$  pour tout  $x \in ]i; i+1[$  et  $0 \leq i \leq n-2$

#### Preuve

$$\begin{aligned} \frac{F(x+1)}{-F(x)} &= -\frac{(x+1) \prod_{i=1}^n ((x+1)^2 - i^2)}{x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)} = -\frac{(x+1) \prod_{i=1}^n ((x+1-i)(x+1+i))}{x \prod_{i=1}^n ((x-i)(x+i))} = -\frac{(x+1) \prod_{i=1}^n (x+1-i) \prod_{i=1}^n (x+1+i)}{x \prod_{i=1}^n (x-i) \prod_{i=1}^n (x+i)} \\ &= -\frac{(x+1) \prod_{i=0}^{n-1} (x-i) \prod_{i=1}^n (x+1+i)}{x \prod_{i=1}^n (x-i) \prod_{i=0}^{n-1} (x+1+i)} = -\frac{(x+1)x(x+1+n)}{x(x-n)(x+1)} = \frac{x+1+n}{n-x} \end{aligned}$$

On a  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x+1+n}{n-x} \right) = \frac{2n+1}{(x-n)^2} > 0$  et donc que  $\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{x+1+n}{n-x} \geq \frac{i+1+n}{n-i}$  pour tout  $x \in ]i; i+1[$

#

### LEMME 12.a

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 2$  tel que  $m_{F(x)}[i; i+1] < 0$  alors  $\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{M_{F(x)}[i+1; i+2]}{-m_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{i+1+n}{n-i}$  pour tout  $x \in ]i; i+1[$  et  $0 \leq i \leq n-2$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



### Preuve

Soit  $\bar{x} \in ]i; i+1[$  tel que  $F(\bar{x}) = m_{F(x)}[i; i+1]$  alors  $M_{F(x)}[i+1; i+2] \geq F(\bar{x}+1) > 0$  et selon le lemme 11 on a  $\frac{i+1+n}{n-i} \leq \frac{F(\bar{x}+1)}{-F(\bar{x})} = \frac{-F(\bar{x}+1)}{F(\bar{x})} \leq \frac{-M_{F(x)}[i+1; i+2]}{m_{F(x)}[i; i+1]} = \frac{M_{F(x)}[i+1; i+2]}{-m_{F(x)}[i; i+1]}$

Soit  $\bar{X} \in ]i; i+1[$  tel que  $F(\bar{X}+1) = M_{F(x)}[i+1; i+2]$  alors  $0 > F(\bar{X}) \geq m_{F(x)}[i; i+1]$  et selon le lemme 6 on a  $\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{F(\bar{X}+1)}{-F(\bar{X})} \geq \frac{M_{F(x)}[i+1; i+2]}{-m_{F(x)}[i; i+1]}$

#

### LEMME 12.b

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 2$  tel que  $M_{F(x)}[i; i+1] > 0$  alors

$$\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{-m_{F(x)}[i+1; i+2]}{M_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{i+1+n}{n-i} \text{ pour tout } x \in ]i; i+1[ \text{ et } 0 \leq i \leq n-2$$

### Preuve

Soit  $\bar{x} \in ]i; i+1[$  tel que  $F(\bar{x}) = M_{F(x)}[i; i+1]$  alors  $0 > F(\bar{x}+1) \geq m_{F(x)}[i+1; i+2]$  et selon le lemme 11 on a  $\frac{i+1+n}{n-i} \leq \frac{F(\bar{x}+1)}{-F(\bar{x})} = \frac{-F(\bar{x}+1)}{F(\bar{x})} \leq \frac{-m_{F(x)}[i+1; i+2]}{M_{F(x)}[i; i+1]}$

Soit  $\bar{X} \in ]i; i+1[$  tel que  $F(\bar{X}+1) = m_{F(x)}[i+1; i+2]$  alors  $M_{F(x)}[i; i+1] \geq F(\bar{X}) > 0$  et selon le lemme 6 on a  $\frac{i+2+n}{n-i-1} \geq \frac{F(\bar{X}+1)}{-F(\bar{X})} = \frac{-F(\bar{X}+1)}{F(\bar{X})} \geq \frac{-m_{F(x)}[i+1; i+2]}{M_{F(x)}[i; i+1]}$

#

### LEMME 13

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  alors  $\frac{F(x+2)}{F(x)} = \frac{(x+n+1)(x+n+2)}{(n-x)(n-x-1)}$  et  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq \frac{F(x+2)}{F(x)} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)}$  pour tout  $x \in ]i; i+1[$  et  $0 \leq i \leq n-3$

### Preuve

Selon le lemme 11 on a  $\frac{F(x+2)}{F(x)} = \left(\frac{F(x+2)}{F(x+1)}\right) \left(\frac{F(x+1)}{F(x)}\right) = \left(-\frac{x+n+2}{n-x-1}\right) \left(-\frac{x+n+1}{n-x}\right) = \frac{(x+n+1)(x+n+2)}{(n-x)(n-x-1)}$

On a  $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{(x+n+1)(x+n+2)}{(n-x)(n-x-1)}\right) = \frac{2(2n+1)(n(n+1)-(x+1)^2)}{(n-x)(n-x+1)} \geq \frac{2(2n+1)(n(n+1)-(n-1)^2)}{(n-x)(n-x+1)} = \frac{2(2n+1)(3n-1)}{(n-x)(n-x+1)} > 0$  et

donc que  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq \frac{(x+n+1)(x+n+2)}{(n-x)(n-x-1)} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)}$  pour tout  $x \in ]i; i+1[$

#

### LEMME 14

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  tel que  $m_{F(x)}[i; i+1] < 0$  alors  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq$

$$\frac{m_{F(x)}[i+2; i+3]}{m_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)} \text{ pour tout } x \in ]i; i+1[ \text{ et } 0 \leq i \leq n-3$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

Soit  $\bar{x} \in ]i; i + 1[$  tel que  $F(\bar{x}) = m_{F(x)}[i; i + 1]$  alors  $0 > F(\bar{x} + 2) \geq m_{F(x)}[i + 2; i + 3]$  et

selon le lemme 13 on a  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq \frac{F(\bar{x}+2)}{F(\bar{x})} \geq \frac{m_{F(x)}[i+2; i+3]}{m_{F(x)}[i; i+1]}$

Soit  $\bar{X} \in ]i; i + 1[$  tel que  $F(\bar{X} + 2) = m_{F(x)}[i + 2; i + 3]$  alors  $0 > F(\bar{X}) \geq m_{F(x)}[i; i + 1]$

selon le lemme 13 on a  $\frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)} \leq \frac{F(\bar{X}+2)}{F(\bar{X})} \leq \frac{m_{F(x)}[i+2; i+3]}{m_{F(x)}[i; i+1]}$

#

### LEMME 15

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  tel que  $M_{F(x)}[i; i + 1] > 0$  alors  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq$

$\frac{M_{F(x)}[i+2; i+3]}{M_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)}$  pour tout  $x \in ]i; i + 1[$  et  $0 \leq i \leq n - 3$

### Preuve

Soit  $\bar{x} \in ]i; i + 1[$  tel que  $F(\bar{x} + 2) = M_{F(x)}[i + 2; i + 3]$  alors  $M_{F(x)}[i; i + 1] \geq F(\bar{x}) > 0$  et

selon le lemme 13 on a  $\frac{(i+n+2)(i+n+3)}{(n-i-1)(n-i-2)} \geq \frac{F(\bar{x}+2)}{F(\bar{x})} \geq \frac{M_{F(x)}[i+2; i+3]}{M_{F(x)}[i; i+1]}$

Soit  $\bar{X} \in ]i; i + 1[$  tel que  $F(\bar{X}) = M_{F(x)}[i; i + 1]$  alors  $M_{F(x)}[i + 2; i + 1] \geq F(\bar{X} + 2) > 0$  et

selon le lemme 13 on a  $\frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)} \leq \frac{F(\bar{X}+2)}{F(\bar{X})} \leq \frac{M_{F(x)}[i+2; i+3]}{M_{F(x)}[i; i+1]}$

#

### LEMME 16

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  tel que  $m_{F(x)}[i + 2; i + 3] < 0$  alors  $m_{F(x)}[i + 2; i + 3] < m_{F(x)}[i; i + 1]$  et  $m_{F(x)}[0; i + 3] = m_{F(x)}[i + 2; i + 3]$  pour tout  $0 \leq i \leq n - 3$

### Preuve

Selon le lemme 14 on a  $\frac{m_{F(x)}[i+2; i+3]}{m_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)} \geq \frac{(n+1)(n+2)}{(2)(1)} > 1$  et puisque  $m_{F(x)}[i; i + 1] < 0$  alors  $m_{F(x)}[i + 2; i + 3] < m_{F(x)}[i; i + 1]$

En appliquant ce résultat et puisque  $m_{F(x)}[i + 1; i + 2] = 0$  on obtient  $m_{F(x)}[i; i + 3] = \min\{m_{F(x)}[i; i + 1]; m_{F(x)}[i + 1; i + 2]; m_{F(x)}[i + 2; i + 3]\} = \min\{m_{F(x)}[i; i + 1]; 0; m_{F(x)}[i + 2; i + 3]\} = m_{F(x)}[i + 2; i + 3]$

Et par récurrence on obtient  $m_{F(x)}[0; i + 3] = m_{F(x)}[i + 2; i + 3]$

#

### LEMME 17

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  tel que  $M_{F(x)}[i + 2; i + 3] > 0$  alors  $M_{F(x)}[i + 2; i + 3] > M_{F(x)}[i; i + 1]$  et  $M_{F(x)}[0; i + 3] = M_{F(x)}[i + 2; i + 3]$  pour tout  $0 \leq i \leq n - 3$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

Selon le lemme 15 on a  $\frac{M_{F(x)}[i+2; i+3]}{M_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{(i+n+1)(i+n+2)}{(n-i)(n-i-1)} \geq \frac{(n+1)(n+2)}{(2)(1)} > 1$  et puisque  $M_{F(x)}[i; i+1] > 0$  alors  $M_{F(x)}[i+2; i+3] > M_{F(x)}[i; i+1]$

En appliquant ce résultat et puisque  $M_{F(x)}[i+1; i+2] = 0$  on obtient  $M_{F(x)}[i; i+3] = \max\{M_{F(x)}[i; i+1]; M_{F(x)}[i+1; i+2]; M_{F(x)}[i+2; i+3]\} = \max\{M_{F(x)}[i; i+1]; 0; M_{F(x)}[i+2; i+3]\} = M_{F(x)}[i+2; i+3]$

Et par récurrence on obtient  $M_{F(x)}[0; i+3] = M_{F(x)}[i+2; i+3]$

#

### LEMME 18

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 2$  alors  $\left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1}$

### Preuve

On a  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2 = \left(\frac{1}{2} - i\right) \left(\frac{1}{2} + i\right)$  et si  $i \geq 2$  alors  $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2\right| \geq \left|\left(\frac{1}{2} - 2\right)\right| \left|\left(\frac{1}{2} + 2\right)\right| = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}$

Ainsi  $\left|F\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\prod_{i=1}^n \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2\right|\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1^2\right|\right) \left(\prod_{i=2}^n \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2 - i^2\right|\right) \geq \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1}$

#

### LEMME 19.a

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  et  $m_{F(x)}[0; 1] < 0$  alors  $m_{F(x)}[0; 1] < -\frac{7}{4}n$

### Preuve

Par le lemme 18 on a  $m_{F(x)}[0; 1] \leq F\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1}$

Soit  $g(n) = \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{4}n$  et  $g'(n) = \left(\frac{3}{8}\right) \ln\left(\frac{15}{4}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1} - \frac{7}{4} > \left(\frac{3}{8}\right) \ln\left(\frac{15}{4}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^2 - \frac{7}{4} \cong$

$5.2202 > 0$  et  $g(3) = \left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^2 - \frac{21}{4} \cong 0.0234 > 0$  et donc  $g(n) > 0$  pour tout  $n \geq 3$

Et ainsi  $\left(\frac{3}{8}\right) \left(\frac{15}{4}\right)^{n-1} = g(n) + \frac{7}{4}n > \frac{7}{4}n$

#

### LEMME 19.b

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 3$  et  $M_{F(x)}[0; 1] > 0$  alors  $M_{F(x)}[0; 1] > \frac{7}{4}n$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

De la même manière que le lemme 19.a

#

### LEMME 20

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  avec  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  alors  $\left| F\left(k + \frac{1}{2}\right) \right| \geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k}$

### Preuve

Si  $0 \leq i \leq k$  alors  $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - k^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} - k^2 = k + \frac{1}{4} > 0$

Si  $k + 1 \leq i \leq n$  alors  $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 \leq \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - (k + 1)^2 = k^2 + k + \frac{1}{4} - k^2 - 2k - 1 = -k - \frac{3}{4}$  et comme  $k \geq 1$  alors  $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 \leq -k - \frac{3}{4} \leq -\frac{7}{4} < 0$

Alors

$$\left| F\left(k + \frac{1}{2}\right) \right| = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\prod_{i=1}^k \left| \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 \right| \right) \left(\prod_{i=k+1}^n \left| \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - i^2 \right| \right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k}$$

#

### LEMME 21

Si  $n \geq 3$  et  $1 = k \leq n$  alors  $\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} > \begin{cases} \frac{19}{10}nk & \text{si } k = 1 \\ \frac{9}{5}nk & \text{si } k = 2 \\ 10nk & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$

### Preuve

#### Si $k = 1$

$$\text{On a } \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{4}{7}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^n = \frac{15}{14} \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

Soit  $g(n) = \frac{15}{14} \left(\frac{7}{4}\right)^n - \frac{19}{10}n$  alors  $g'(n) = \frac{15}{14} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^n - \frac{19}{10}$  Comme  $n \geq 3$  alors  $g'(n) \geq$

$\frac{15}{14} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^3 - \frac{19}{10} \cong 1.3134 > 0$  et  $g(3) = \frac{15}{14} \left(\frac{7}{4}\right)^3 - \frac{57}{10} \cong 0.0422 > 0$  d'où  $g(n) > 0$  pour tout

$n \geq 3$  et finalement  $\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} = g(n) + \frac{19}{10}n > \frac{19}{10}n = \frac{19}{10}nk$

#### Si $k = 2$

$$\text{On a } \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{9}{4}\right)^2 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(\frac{7}{4}\right)^n = \frac{405}{196} \left(\frac{7}{4}\right)^n$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Soit  $g(n) = \frac{405}{196} \left(\frac{7}{4}\right)^n - \frac{18}{5}n$  alors  $g'(n) = \frac{405}{196} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^n - \frac{18}{5}$  Comme  $n \geq 3$  et  $k \geq 3$  alors  
 $g'(n) > \frac{405}{196} \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^3 - \frac{18}{5} \cong 2.5973 > 0$  et  $g(3) = \frac{405}{196} \left(\frac{7}{4}\right)^3 - \frac{54}{5} \cong 0.2742 > 0$  d'où  $g(n) > 0$  pour tout  $n \geq 3$  et finalement  $\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^n > g(n) + \frac{18}{5}n > \frac{18}{5}n = \frac{9}{5}nk$

### **Si $k \geq 3$**

On a  $\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^n$

Soit  $g(n) = \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^n - 10n$  alors  $g'(n) = \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^n - 10$  Comme  
 $n \geq 3$  et  $k \geq 3$  alors  $g'(n) > \left(\frac{13}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 10 \geq \left(\frac{13}{7}\right)^3 \ln\left(\frac{7}{4}\right) \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 10 \cong 9.2106 > 0$   
 et  $g(3) = \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 30 > \left(\frac{13}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 30 = \left(\frac{13}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 30 > \left(\frac{13}{7}\right)^3 \left(\frac{7}{4}\right)^3 - 30 \cong 4.3281 > 0$  d'où  $g(n) > 0$  pour tout  $n \geq 3$  et finalement  $\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{4}{7}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^n > k(g(n) + 10n) > 10nk$

#

### **LEMME 22**

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  et  $n \geq 2$  et  $0 \leq k \leq n - 1$  Si  $m_{F(x)}[k; k + 1] < 0$  alors

$$m_{F(x)}[k; k + 1] \leq -\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} < \begin{cases} -\frac{19}{10}nk & \text{si } k = 1 \\ -\frac{9}{5}nk & \text{si } k = 2 \\ -10nk & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

### **Preuve**

Si  $m_{F(x)}[k; k + 1] < 0$  alors  $F(x) < 0$  pour  $x \in ]k; k + 1[$  et par suite  $m_{F(x)}[k; k + 1] \leq F\left(k + \frac{1}{2}\right) < 0$  et par le lemme 20 on a  $F\left(k + \frac{1}{2}\right) \leq -\left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k}$  et on conclut en appliquant le lemme 21  
 #

### **LEMME 23**

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  et  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n - 1$  Si  $M_{F(x)}[k; k + 1] > 0$  alors

$$M_{F(x)}[k; k + 1] \geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k} > \begin{cases} \frac{19}{10}nk & \text{si } k = 1 \\ \frac{9}{5}nk & \text{si } k = 2 \\ 10nk & \text{si } k \geq 3 \end{cases}$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Preuve

Si  $M_{F(x)}[k; k+1] > 0$  alors  $F(x) > 0$  pour  $x \in ]k; k+1[$  et par suite  $M_{F(x)}[k; k+1] \geq F\left(k + \frac{1}{2}\right) \geq 0$  et par le lemme 20 on a  $F\left(k + \frac{1}{2}\right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k + \frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{7}{4}\right)^{n-k}$  et on conclut en appliquant le lemme 21  
#

### THEOREME G

Soit  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  et  $n \geq 1$  alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-i-1; -i]_{O_x}$  et  $[i; i+1]_{O_x}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et une qui coupe  $]-\infty; -n]_{O_x}$  et  $[n; \infty[_{O_x}$  Et donc il y a au moins  $n$  solutions périodiques

### Preuve

#### 1<sup>er</sup> cas $n = 1$

Dans ce cas  $F(x) = x^3 - x$  qui est l'équation de Balthasar van der Pol pour laquelle il y a exactement un cycle qui coupe  $[-2; -1]_{O_x}$  et  $[1; 2]_{O_x}$

#### 2<sup>ème</sup> cas $n = 2$

Dans ce cas  $F(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$  On a  $F(1) = F(2) = 0$  et  $F(x) > 0$  sur  $]0; 1[$  et  $F(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  Les extrema de  $F(x)$  sont  $\sigma = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} \in ]0; 1[$  et  $\rho = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} \in ]1; 2[$  et on a

$$M_{F(x)}[0; 1] = -m_{F(x)}[-1; 0] = \sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} \left(\frac{1+\sqrt{145}}{5}\right) \cong 1.4187 \text{ et}$$

$$m_{F(x)}[1; 2] = -M_{F(x)}[-2; -1] = \sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} \left(\frac{1-\sqrt{145}}{5}\right) \cong -3.6314$$

#### Intervalle $[0; 1]_{O_x}$

On a  $F(x) < 0$  pour tout  $x \in [-1; 0]_{O_x}$  et  $F(x) > 0$  pour tout  $x \in [0; 1]_{O_x}$  et donc  $x F(x) > 0$  pour tout  $x \in [-1; 1]_{O_x}$  et il n'y a pas de solution périodique

#### Intervalle $[1; 2]_{O_x}$

On a  $n \geq 3$  et  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(1) = F(2) = 0$  et  $F(x) > 0$  sur  $]0; 1[$  et  $F(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  et  $F'(0) > 0$  et  $F'(1) < 0$  et  $F'(2) > 0$

On va montrer que les conditions du lemme 7 sont vérifiées ;

#### Condition 1

On a  $M_{F(x)}[0; 1] \cong 1.4187 \leq 1.7321 \cong \sqrt{3}$

□

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Condition 2

$$\text{On a } \sqrt{1 + \left( m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3} \right)^2} \cong 1.0741 < 1.4187 \cong M_{F(x)}[0; 1]$$

□

### Condition 3

$$M_{F(x)}[0; 1] = -m_{F(x)}[-1; 0] = \sqrt{\frac{15 - \sqrt{145}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{145}}{5} \right)} \cong 1.4187 \text{ et}$$

$$m_{F(x)}[1; 2] = -M_{F(x)}[-2; -1] = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{145}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{145}}{5} \right)} \cong -3.6314$$

$$\text{On a } 2M_{F(x)}[0; 1] + \sqrt{1 + (\sqrt{3} - M_{F(x)}[0; 1])^2} \cong 3.8853 < 5.1482 \cong$$

$$\sqrt{1 + (M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2])^2}$$

□

### Condition 4

$$\text{On a } \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} \cong 1.7357 < 3.8374 \cong 2M_{F(x)}[0; 1] + 1$$

□

### Condition 5

$$\text{On a } 1 < 1.4187 \cong M_{F(x)}[0; 1]$$

□

### Condition 6

$$\text{On a } M_{F(x)}[0; 1]^2 \cong 2.0127 < 28.7666 \cong (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2$$

□

Ainsi donc il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{Ox}$  et  $[1; 2]_{Ox}$

### Intervalle $[2; \infty]_{Ox}$

Soit  $D = -d \cong 1.6912$  alors  $x^5 - 5x^3 + 4x \geq 2x + F(D) - 2D$  pour tout  $x > 0$  et  $x^5 - 5x^3 + 4x \leq 2x + F(d) + 2d$  pour tout  $x < 0$

Soit  $Z = 2$  la plus grande solution positive et  $z = -2$  la plus petite solution négative de  $F(x)$

On a  $m_{F(x)}[0; 2] \cong -3.6314 < -1.4187 \cong m_{F(x)}[-2; 0]$  et  $m_{F(x)}[0; 2] - m_{F(x)}[-2; 0] \cong$

$-2.2127 < -2 = z$  et  $M_{F(x)}[-2; 0] \cong 3.6314 > 1.4187 \cong M_{F(x)}[0; 2]$  et  $M_{F(x)}[-2; 0] -$

$M_{F(x)}[0; 2] \cong 2.2127 > 2 = Z$

Alors on applique la proposition 17 et il y a au moins une solution périodique qui coupe

$[-6.9683; -2]_{Ox}$  et  $[2; 6.9683]_{Ox}$

Ainsi au total il y a au moins 2 solutions périodiques

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### 3<sup>ème</sup> cas $n \geq 3$

#### Intervalle $[0; 1]_{O_x}$

Si  $n$  est pair alors  $F(x) < 0$  pour tout  $x \in [-1; 0[$  et  $F(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0; 1]$  et donc il n'y a pas de solution périodique

Si  $n$  est impair alors  $F(x) > 0$  pour tout  $x \in [-1; 0[$  et  $F(x) < 0$  pour tout  $x \in ]0; 1]$  et donc il n'y a pas de solution périodique

#### Intervalle $[1; 2]_{O_x}$

##### Si $n$ est pair

On a  $n \geq 3$  et  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(0) = F(1) = F(2) = 0$  et  $F(x) > 0$  sur  $]0; 1[$  et  $F(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  et  $F'(0) > 0$  et  $F'(1) < 0$  et  $F'(2) > 0$

On va montrer que les conditions du lemme 8 sont satisfaites

##### Condition 1

Selon le lemme 19.b on a  $M_{F(x)}[0; 1] \geq \frac{7}{4}n \geq 5.2500 > 1.7321 \cong \sqrt{3}$

□

##### Condition 2

$$\sqrt{1 + \left( m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3} \right)^2} \leq M_{F(x)}[0; 1]$$

Soit  $g(x) = 1 + (x + \sqrt{x^2 + 3})^2$  et  $g'(x) = 2(x + \sqrt{x^2 + 3}) \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) > 0$  pour tout  $x$  Puisque  $g(0) = 4$  cela implique que  $g(x) \leq 4$  pour tout  $x \leq 0$  Puisque  $m_{F(x)}[1; 2] < 0$  alors

$$\sqrt{1 + \left( m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3} \right)^2} - M_{F(x)}[0; 1] = \sqrt{g(m_{F(x)}[1; 2])} - M_{F(x)}[0; 1] < 2 - M_{F(x)}[0; 1]$$

Et comme selon le lemme 19.b on a  $M_{F(x)}[0; 1] \geq \frac{7}{4}n > 2$  alors l'inégalité est prouvée

□

##### Condition 3

Selon le lemme 12.b on a  $\frac{-m_{F(x)}[1; 2]}{M_{F(x)}[0; 1]} \geq \frac{n+1}{n} \geq$  d'où  $-m_{F(x)}[1; 2] \geq M_{F(x)}[0; 1] \frac{n+1}{n}$  et donc

$M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2] \geq M_{F(x)}[0; 1] \frac{2n+1}{n} > 0$  et finalement

$$\sqrt{1 + \left( M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2] \right)^2} - 2M_{F(x)}[0; 1] - 1 \geq \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2 \left( \frac{2n+1}{n} \right)^2} - 2M_{F(x)}[0; 1] - 1$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



Selon le lemme 19.b on a  $M_{F(x)}[0; 1] \geq \frac{7}{4}n$

Soit  $g(x) = \sqrt{1 + x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2} - 2x - 1$  alors on a  $g'(x) = \frac{x \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2}{\sqrt{1 + x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2}} - 2$  Dès lors  $g'(x) >$

$0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^4 > 4 \left(1 + x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2\right) \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 \left(\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 - 4\right) > 4 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{4n+1}{n^2}\right) >$   
 $4 \Leftrightarrow x^2 > 4 \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \left(\frac{n^2}{4n+1}\right) = 4n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \left(\frac{n}{4n+1}\right)$  Et puisque l'on a  $4n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \left(\frac{n}{4n+1}\right) <$   
 $4n \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{n}{4}$  alors  $g'(x) > 0$  pour tout  $x \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$

On  $\frac{7}{4}n > \frac{\sqrt{n}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{7} \Leftrightarrow n > \frac{4}{49}$  ce qui est vérifié et puisque  $g\left(\frac{7}{4}n\right) = \sqrt{1 + \frac{49(2n+1)^2}{16}} - \frac{7}{2}n -$   
 $1 > \frac{7(2n+1)}{4} - \frac{7}{2}n - 1 = \frac{3}{4} > 0$  cela implique que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq \frac{7}{4}n$  et ainsi

$g(x M_{F(x)}[0; 1]) = \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2} - 2 M_{F(x)}[0; 1] - 1 > 0$

$\sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2} - 2 M_{F(x)}[0; 1] - 1 > 0$

□

#### Condition 4

$\sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} \leq 2M_{F(x)}[0; 1] + 1$

On a  $M_{F(x)}[0; 1] > 0$  Soit  $g(x) = 2x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$  alors  $g'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$  car  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < 1$

Comme  $g(0) = 0$  alors  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$

□

#### Condition 5

$M_{F(x)}[0; 1]^2 \leq (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2$

Selon le lemme 12.b on a  $0 < M_{F(x)}[0; 1] \leq -m_{F(x)}[1; 2] \frac{n}{n+1}$  d'où  $M_{F(x)}[0; 1]^2 \leq$

$m_{F(x)}[1; 2]^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$  Et donc il suffit de montrer que  $m_{F(x)}[1; 2]^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2$

On a  $x^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < (x - \sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \Leftrightarrow x^2 \left(1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right) - 2\sqrt{3}x + 3 >$

$0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{(n+1)^2}\right) - 2\sqrt{3}x + 3 > 0$  Et lorsque  $x \leq 0$  la condition équivaut à

$x \leq \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{12 - 12\frac{2n+1}{(n+1)^2}}}{2\frac{2n+1}{(n+1)^2}} = \sqrt{3} \frac{(n+1)}{2n+1}$  ce qui est toujours vérifié et donc on a  $\sqrt{1 + x^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2} \leq$

$\sqrt{1 + (x - \sqrt{3})^2}$  pour tout  $x \leq 0$  et en particulier pour  $m_{F(x)}[1; 2] < 0$

□

Alors il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{Ox}$  et  $[1; 2]_{Ox}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Si  $n$  est impair

On définit  $G(x) = F(-x)$  et alors  $G(1) = G(2) = 0$  et  $G(x) > 0$  sur  $]0; 1[$  et  $G(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  et alors  $G(x)$  on montre de la même manière que ci-dessus que les conditions du lemme 8 sont satisfaites

Ainsi il y a pour  $G(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{0x}$  et  $[1; 2]_{0x}$  Et en appliquant le lemme 4 on obtient qu'il y a pour  $F(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-2; -1]_{0x}$  et  $[1; 2]_{0x}$

Intervalle  $[2; 3]_{0x}$

Si  $n$  est pair

On a  $F(0) = F(1) = F(2) = F(3) = 0$  et  $F'(1) < 0$  et  $F'(2) > 0$  et  $F'(3) < 0$  et  $F(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]2; 3[$  et on a  $m_{F(x)}[0; 1] = M_{F(x)}[1; 2] = m_{F(x)}[2; 3] = 0$  et on va montrer que les 8 conditions du lemme 10 sont remplies et dans ce cas il y a au moins une solution périodique

Condition 1  $m_{F(x)}[1; 2] \leq -2\sqrt{2}$

Selon le lemme 21 on a  $m_{F(x)}[1; 2] \leq -\frac{19}{10}n \leq -\frac{57}{10} = -5.7000 < 2.8284 \cong -2\sqrt{2}$

□

Condition 2  $M_{F(x)}[0; 1] \leq M_{F(x)}[2; 3]$

Selon le lemme 15 on a  $\frac{M_{F(x)}[2; 3]}{M_{F(x)}[0; 1]} \geq \frac{(n+1)(n+2)}{(n)(n-1)} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \left(\frac{n+2}{n}\right) > 1$

□

Condition 3  $\sqrt{5} \leq M_{F(x)}[0; 1]$

Selon le lemme 19.b on a  $M_{F(x)}[0; 1] > \frac{7}{4}n \geq \frac{21}{4} \cong 5.2500 > 2.2361 \cong \sqrt{5}$

□

Condition 4  $m_{F(x)}[1; 2] \leq 0$

Ce qui est vérifié

□

Condition 5  $2M_{F(x)}[0; 1] + 1 \leq \sqrt{(M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2])^2 + 1}$

Cette condition est égale à la Condition 3 pour  $[1; 2]_{0x}$  qui a déjà été démontrée

□

Condition 6  $m_{F(x)}[1; 2]^2 \leq (M_{F(x)}[2; 3] + \sqrt{5})^2$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Selon le lemme 12.a on a  $\frac{M_{F(x)}[2;3]}{-m_{F(x)}[1;2]} \geq \frac{n+2}{n-1} > 1$  dont on tire  $M_{F(x)}[2;3] > -m_{F(x)}[1;2] > 0$  et donc  $(M_{F(x)}[2;3] + \sqrt{5})^2 \geq (-m_{F(x)}[1;2] + \sqrt{5})^2 = m_{F(x)}[1;2]^2 - 2\sqrt{5}m_{F(x)}[1;2] + 5 > m_{F(x)}[1;2]^2$

□

Condition 7  $\sqrt{m_{F(x)}[1;2]^2 + 4} \leq m_{F(x)}[1;2] + \sqrt{(m_{F(x)}[1;2] - M_{F(x)}[2;3])^2 + 4}$

Selon le lemme 12.a on a  $\frac{M_{F(x)}[2;3]}{-m_{F(x)}[1;2]} \geq \frac{n+2}{n-1} > 1$  dont on tire  $M_{F(x)}[2;3] \geq -m_{F(x)}[1;2] \frac{n+2}{n-1}$

ainsi  $(m_{F(x)}[1;2] - M_{F(x)}[2;3])^2 = (M_{F(x)}[2;3] - m_{F(x)}[1;2])^2 \geq (-m_{F(x)}[1;2] \frac{n+2}{n-1} - m_{F(x)}[1;2])^2 = m_{F(x)}[1;2]^2 \left(1 + \frac{n+2}{n-1}\right)^2 = m_{F(x)}[1;2]^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2$

Ainsi  $m_{F(x)}[1;2] + \sqrt{(m_{F(x)}[1;2] - M_{F(x)}[2;3])^2 + 4} \geq$

$m_{F(x)}[1;2] + \sqrt{(m_{F(x)}[1;2] - M_{F(x)}[2;3])^2} \geq m_{F(x)}[1;2] - m_{F(x)}[1;2] \left(\frac{2n+1}{n-1}\right) = -m_{F(x)}[1;2] \left(\frac{n+2}{n-1}\right)$

Dès lors, il suffit de montrer que  $\sqrt{m_{F(x)}[1;2]^2 + 4} \leq -m_{F(x)}[1;2] \left(\frac{n+2}{n-1}\right)$

Posons  $g(x) = -x \left(\frac{n+2}{n-1}\right) - \sqrt{x^2 + 4}$  et  $g'(x) = -\left(\frac{n+2}{n-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$  Puisque  $-\frac{n+2}{n-1} = -1 - \frac{3}{n-1} <$

$-1$  et que  $-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < 1$  pour tout  $x < 0$  alors  $g'(x) = -\left(\frac{n+2}{n-1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < -1 + 1 = 0$  pour tout

$x \leq 0$  Et puisque  $g(-n) = n \left(\frac{n+2}{n-1}\right) - \sqrt{n^2 + 4} = n \left(1 + \frac{3}{n-1}\right) - \sqrt{n^2 + 4} > n \left(1 + \frac{3}{n}\right) -$

$\sqrt{n^2 + 4} = n + 3 - \sqrt{n^2 + 4} > 0$  car  $(n + 3)^2 - (n^2 + 4) = 6n + 5 > 0$  alors  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x \leq -n$

Selon le lemme 22 on a  $m_{F(x)}[1;2] \leq -\frac{19}{10}n < -n$  et ainsi

$g(m_{F(x)}[1;2]) = -m_{F(x)}[1;2] \left(\frac{n+2}{n-1}\right) - \sqrt{m_{F(x)}[1;2]^2 + 4} > 0$

□

Condition 8  $0 \leq -m_{F(x)}[1;2]$

Ce qui est vérifié

□

Si n est impair

On définit  $G(x) = F(-x)$  et alors puisque  $F(-x) = -F(x)$  alors  $G(x) < 0$  sur  $]1; 2[$  et  $G(x) > 0$  sur  $]2; 3[$  et de la même manière que ci-dessus on montre que les 8 conditions du lemme 7 sont vérifiées et qu'il y a pour  $G(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-3; -2]_{0_x}$  et  $[2; 3]_{0_x}$  et ensuite par le lemme 4 il y a pour  $F(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-3; -2]_{0_x}$  et  $[2; 3]_{0_x}$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Intervalle $[k; k + 1]$ avec $3 \leq k \leq n - 1$

Si  $n - k$  est pair  $F(x) < 0$  sur  $]k - 1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k + 1[$  et on montre que les 8 conditions du lemme 10 sont remplies et dans ce cas il y a au moins une solution périodique

Condition 1  $m_{F(x)}[k - 1; k] \leq -2\sqrt{k}$

Selon lemme 22 on a  $m_{F(x)}[k - 1; k] \leq \begin{cases} -\frac{18}{5}n & \text{si } k = 3 \\ -10n(k - 1) & \text{si } k \geq 4 \end{cases}$

Si  $k = 3$  alors  $-\frac{18}{5}n \leq -2\sqrt{3} \Leftrightarrow n \geq \frac{5\sqrt{3}}{9} \cong 0.9623$  ce qui est vérifié

Si  $k \geq 3$  alors on définit  $g(x) = -10n(x - 1) + 2\sqrt{x}$  et  $g'(x) = -10n + \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 0$  pour tout

$x \geq \frac{1}{900} \geq \frac{1}{100n^2}$  et puisque  $g(3) = -20n + 2\sqrt{3} < 0$  alors  $g(x) < 0$  pour tout  $x \geq 3$  et alors

$m_{F(x)}[k - 1; k] < -10n(k - 1) = g(k) - 2\sqrt{k} < -2\sqrt{k}$

□

Condition 2  $M_{F(x)}[0; k - 1] \leq M_{F(x)}[k; k + 1]$

On pose  $k = i + 2$  et selon le lemme 12 on a  $M_{F(x)}[k; k + 1] > M_{F(x)}[k - 2; k - 1]$  pour tout  $2 \leq k \leq n - 1$

Supposons  $k = 3$  alors on a  $M_{F(x)}[2; 3] = M_{F(x)}[0; 1] = 0$  et donc  $M_{F(x)}[0; 2] =$

$\max\{M_{F(x)}[0; 1]; M_{F(x)}[1; 2]\} = \max\{0; M_{F(x)}[1; 2]\} = M_{F(x)}[1; 2]$

Supposons  $k \geq 4$  alors on pose  $k - 1 = i + 3$  et selon le lemme 17 on a  $M_{F(x)}[0; k - 1] =$

$M_{F(x)}[k - 2; k - 1]$  pour tout  $4 \leq k \leq n + 1$

En synthèse  $M_{F(x)}[k; k + 1] > M_{F(x)}[k - 2; k - 1] = M_{F(x)}[0; k - 1]$

□

Condition 3  $\sqrt{2k - 1} \leq M_{F(x)}[0; k - 1]$

Supposons  $k = 3$  alors  $M_{F(x)}[0; 1] = 0$  et donc  $M_{F(x)}[0; 2] = M_{F(x)}[1; 2]$  et selon le lemme

23 on a  $M_{F(x)}[0; 2] > \frac{19}{10}n$  On aussi  $\frac{19}{10}n > \sqrt{5} \Leftrightarrow n > \frac{10\sqrt{5}}{19} \cong 1.1769$  ce qui est vérifié

Supposons que  $k \geq 4$  alors selon le lemme 17 on a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = M_{F(x)}[k - 2; k -$

$1]$  pour tout  $4 \leq k \leq n + 1$  On pose  $l = k - 2$  et alors  $2 \leq l \leq n - 1$  et selon le lemme 23 on

a  $M_{F(x)}[k - 2; k - 1] = M_{F(x)}[l; l + 1] > \frac{9}{5}n(k - 2)$  et finalement  $M_{F(x)}[0; k - 1] > \frac{9}{5}n(k - 2)$

Soit  $g(x) = \frac{9}{5}n(x - 2) - \sqrt{2x - 1}$  et  $g'(x) = \frac{9}{5}n - \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} \geq 0$  pour tout  $x \geq 0 > -\frac{704}{1458} >$

$\frac{-81n^2 + 25}{162n^2}$  et puisque  $g(4) = \frac{18}{5}n - \sqrt{7} \geq \frac{18}{5}(3) - \sqrt{7} \cong 8.1542 > 0$  et donc  $g(x) > 0$  pour tout

$x \geq 4$  et alors  $M_{F(x)}[k - 2; k - 1] > \frac{9}{5}nk = g(k) + \sqrt{2k - 1} > \sqrt{2k - 1}$

Et finalement on a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = M_{F(x)}[k - 2; k - 1] > \sqrt{2k - 1}$

□

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**Condition 4**  $m_{F(x)}[k-1; k] \leq m_{F(x)}[0; k-1]$

On pose  $k = i + 3$  selon le lemme 16 alors  $m_{F(x)}[k-1; k] < m_{F(x)}[k-3; k-2]$  pour tout  $3 \leq k \leq n$

Supposons  $k = 3$  alors puisque  $m_{F(x)}[2; 3] < 0$  on a  $m_{F(x)}[1; 2] = 0$  et alors  $m_{F(x)}[0; 2] = \min\{m_{F(x)}[0; 1]; m_{F(x)}[1; 2]\} = \min\{m_{F(x)}[0; 1]; 0\} = m_{F(x)}[0; 1]$

Supposons  $k \geq 4$  alors on pose  $k = i + 4$  selon le lemme 16 alors  $m_{F(x)}[0; k-1] = m_{F(x)}[k-2; k-1]$  pour tout  $4 \leq k \leq n+1$  et puisque  $m_{F(x)}[k-1; k] < 0$  on a  $m_{F(x)}[k-2; k-1] = 0$  et donc  $m_{F(x)}[0; k-1] = \min\{m_{F(x)}[0; k-3]; m_{F(x)}[k-3; k-2]; m_{F(x)}[k-2; k-1]\} = \min\{m_{F(x)}[0; k-3]; m_{F(x)}[k-3; k-2]; 0\} = m_{F(x)}[k-3; k-2]$

En synthèse  $m_{F(x)}[0; k-1] = m_{F(x)}[k-3; k-2] > m_{F(x)}[k-1; k]$

□

**Condition 5**  $2M_{F(x)}[0; k-1] + k - 1 \leq \sqrt{(M_{F(x)}[0; k-1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 + (k-1)^2}$

Supposons  $k = 3$  On a  $M_{F(x)}[0; 1] = 0$  alors  $M_{F(x)}[0; 2] = M_{F(x)}[1; 2]$  et ainsi il faut montrer

que  $2M_{F(x)}[1; 2] + 2 \leq \sqrt{(M_{F(x)}[1; 2] - m_{F(x)}[2; 3])^2 + 4}$

Selon le lemme 12.b pour tout  $0 \leq i \leq n-2$  on a  $\frac{-m_{F(x)}[i+1; i+2]}{M_{F(x)}[i; i+1]} \geq \frac{i+1+n}{n-i}$  et donc

$-m_{F(x)}[2; 3] \geq M_{F(x)}[1; 2] \frac{n+2}{n-1}$  et ainsi

$M_{F(x)}[0; 2] - m_{F(x)}[2; 3] > M_{F(x)}[1; 2] + M_{F(x)}[1; 2] \frac{n+2}{n-1} = M_{F(x)}[1; 2] \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)$

Dès lors il suffit de montrer que  $2M_{F(x)}[1; 2] + 2 \leq \sqrt{M_{F(x)}[1; 2]^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 4}$

Posons  $g(x) = \sqrt{x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 4} - 2x - 2$  et  $g'(x) = \frac{x \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 4}} - 2$  Alors  $g'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^4 > 4x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 16 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 \left(\left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 - 4\right) > 16 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 \left(\left(2 + \frac{3}{n-1}\right)^2 - 4\right) > 16 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 \frac{(12n-3)}{(n-1)^2} > 16 \Leftrightarrow x^2 \left(2 + \frac{3}{n-1}\right)^2 \left(12 + \frac{9}{(n-1)}\right) \frac{1}{(n-1)} > 16$  D'autre part on a

$\left(2 + \frac{3}{n-1}\right)^2 \left(12 + \frac{9}{n-1}\right) > (4)(12) = 48$  et  $(n-1)^2 > \frac{n-1}{3}$  et alors si  $x > n-1$  alors  $x^2 \left(2 + \frac{3}{n-1}\right)^2 \left(12 + \frac{9}{(n-1)}\right) \frac{1}{(n-1)} > (n-1)^2 48 \frac{1}{(n-1)} > \frac{n-1}{3} 48 \frac{1}{(n-1)} = 16$  Ainsi  $g'(x) > 0$  pour tout

$x > n-1$  et puisque  $g(n-1) = \sqrt{(n-1)^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 4} - 2(n-1) - 2 = \sqrt{(2n+1)^2 + 4} - 2n > \sqrt{(2n+1)^2} - 2n = 2n+1 - 2n = 1$  alors  $g(x) > 0$  pour tout  $x > n-1$

Par le lemme 23 on a  $M_{F(x)}[1; 2] \geq \frac{19}{10}n > n-1$  et donc

$g(M_{F(x)}[1; 2]) = \sqrt{M_{F(x)}[1; 2]^2 \left(\frac{2n+1}{n-1}\right)^2 + 4} - 2M_{F(x)}[1; 2] - 2 > 0$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Supposons  $k \geq 4$  alors on pose  $k = i + 4$  et selon le lemme 17 on a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = M_{F(x)}[k - 2; k - 1]$  pour tout  $4 \leq k \leq n + 1$  et ainsi il suffit de montrer que  $2M_{F(x)}[k - 2; k - 1]$

$$+ k - 1 \leq \sqrt{(M_{F(x)}[k - 2; k - 1] - m_{F(x)}[k - 1; k])^2 + (k - 1)^2}$$

On pose  $k = i + 2$  alors selon le lemme 12.b pour tout  $2 \leq k \leq n$  on a  $\frac{-m_{F(x)}[k-1;k]}{M_{F(x)}[k-2;k-1]} \geq \frac{n+k-1}{n-k+2}$  dont on tire  $-m_{F(x)}[k - 1; k] \geq M_{F(x)}[k - 2; k - 1] \frac{n+k-1}{n-k+2}$  puis  $M_{F(x)}[k - 2; k - 1] - m_{F(x)}[k - 1; k] \geq M_{F(x)}[k - 2; k - 1] \left(1 + \frac{n+k-1}{n-k+2}\right) = M_{F(x)}[k - 2; k - 1] \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)$  Et ainsi il suffit de montrer que

$$2M_{F(x)}[k - 2; k - 1] + k - 1 \leq \sqrt{M_{F(x)}[k - 2; k - 1]^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 + (k - 1)^2}$$

$$\text{Soit } g(x) = \sqrt{x^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 + (k - 1)^2} - 2x - k + 1 \text{ et } g'(x) = \frac{x \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2}{\sqrt{x^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 + (k-1)^2}} - 2 \text{ Alors}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 \left(\left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 - 4\right) > 4(k - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 \left(\left(2 + \frac{2k-3}{n-k+2}\right)^2 - 4\right) >$$

$$4(k - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 \left(\frac{4(2k-3)}{n-k+2} + \left(\frac{2k-3}{n-k+2}\right)^2\right) > 4(k - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 \frac{(2n+1)^2(2k-3)(4n-2k+5)}{(n-k+2)^4} >$$

$$4(k - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 > \frac{4(n-k+2)^4(k-1)^2}{(2n+1)^2(2k-3)(4n-2k+5)}$$

$$\text{On a } \frac{4(n-k+2)^4(k-1)^2}{(2n+1)^2(2k-3)(4n-2k+5)} \leq \frac{4(n-2)^4(k-1)^2}{(2n+1)^2(2k-3)(2n+7)} \leq \frac{4(n-2)(n-2)^3(k-1)^2}{(2n+1)^3(2k-3)} \leq 4(n-2)(k -$$

$$1) \frac{(k-1)}{(2k-3)} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^3 = 4(n-2)(k-1) \frac{\left(k-\frac{3+1}{2}\right) \left(\frac{n+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{2n+1}\right)^3}{(2k-3)} = 4(n-2)(k-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2k-3)}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2(2n+1)}\right)^3 \leq 4(n-2)(k-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \frac{3(n-2)(k-1)}{10} < \frac{n(k-1)}{3} < \frac{nk}{3} \text{ Dès lors il suffit que}$$

$$x^2 > \frac{nk}{3} \text{ Et puisque } g\left(\sqrt{\frac{nk}{3}}\right) = \sqrt{\left(\frac{nk}{3}\right) \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 + (k-1)^2} - 2\sqrt{\frac{nk}{3}} - k + 1 > \sqrt{\left(\frac{nk}{3}\right) \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2} -$$

$$2\left(\frac{nk}{3}\right) - k + 1 = \frac{nk(2n+1)}{3(n-k+2)} - \frac{2nk}{3} - k + 1 \geq \frac{nk(2n+1)}{3} - \frac{2nk}{3} - k + 1 = \frac{2kn^2 - kn - 3k + 3}{3} > 0 \text{ car les}$$

$$\text{solutions de } g(n) = 2kn^2 - kn - 3k + 3 \text{ sont } \frac{k \pm \sqrt{24k-2}}{4k} = \frac{1 \pm \sqrt{24 - \frac{23}{k}}}{4} \text{ et puisque } \sqrt{24 - \frac{23}{4}} <$$

$$\sqrt{24 - \frac{23}{k}} \leq \sqrt{24} \text{ et donc } 0 < \frac{1 + \sqrt{24 - \frac{23}{4}}}{4} < \frac{1 + \sqrt{24 - \frac{23}{k}}}{4} < \frac{1 + \sqrt{24}}{4} \text{ et } \frac{1 - \sqrt{24}}{4} < \frac{1 - \sqrt{24 - \frac{23}{k}}}{4} < \frac{1 - \sqrt{24 - \frac{23}{3}}}{4} <$$

$$0 \text{ les solutions sont dans } \left] \frac{1 - \sqrt{24}}{4}; \frac{1 + \sqrt{24}}{4} \right[ \cong ] -0.9747; 1.4747 [$$

$$\text{Selon le lemme 23 on a } M_{F(x)}[k - 2; k - 1] > \frac{9}{5}n(k - 2) \text{ et } \frac{9}{5}n(k - 2) > \sqrt{\frac{nk}{3}} \Leftrightarrow \frac{9}{5}nk -$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{nk} - \frac{18}{5} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{nk} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{648}{25}}\right) \left(\frac{5}{18}\right) \cong 1.5837 \text{ ce qui est vérifié}$$

$$\text{Et ainsi } g(M_{F(x)}[k - 2; k - 1]) = \sqrt{M_{F(x)}[k - 2; k - 1]^2 \left(\frac{2n+1}{n-k+2}\right)^2 + (k - 1)^2} - 2M_{F(x)}[k - 2; k - 1] - k + 1 > 0$$

□

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**Condition 6**  $m_{F(x)}[k-1; k]^2 \leq (M_{F(x)}[k; k+1] + \sqrt{2k+1})^2$

On pose  $k = i + 1$  alors selon le lemme 12.a pour tout  $1 \leq k \leq n - 1$  on a  $\frac{M_{F(x)}[k; k+1]}{-m_{F(x)}[k-1; k]} \geq \frac{n+k}{n-k+1}$  dont on tire  $M_{F(x)}[k; k+1] \geq -m_{F(x)}[k-1; k] \left(\frac{n+k}{n-k+1}\right) = -m_{F(x)}[k-1; k] \left(1 + \frac{2k-1}{n-k+1}\right) > -m_{F(x)}[k-1; k] > 0$  Ainsi  $(M_{F(x)}[k; k+1] + \sqrt{2k+1})^2 > (M_{F(x)}[k; k+1])^2 > (-m_{F(x)}[k-1; k])^2 = m_{F(x)}[k-1; k]^2$

□

**Condition 7**  $m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{m_{F(x)}[0; k-1]^2 + k^2} \leq -m_{F(x)}[k-1; k] + k$

Soit  $g(x) = \sqrt{x^2 + k^2} - x - k$  alors  $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + k^2}} - 1 < 0$  pour tout  $x > 0$  et puisque  $g(0) = 0$  alors  $g(x) < 0$  pour tout  $x > 0$  Et puisque  $-m_{F(x)}[0; k-1] > 0$  alors  $g(-m_{F(x)}[0; k-1]) = \sqrt{m_{F(x)}[0; k-1]^2 + k^2} + m_{F(x)}[0; k-1] - k < 0$  D'autre part  $-m_{F(x)}[k-1; k] > 0$  et ainsi la condition est vérifiée

□

**Condition 8**  $-m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 + k^2} \leq m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 + k^2}$

Puisque  $m_{F(x)}[k-2; k-1] = 0$  on obtient  $m_{F(x)}[0; k-1] = m_{F(x)}[0; k-2]$  Et selon le lemme 17 on a  $m_{F(x)}[0; k-2] = m_{F(x)}[k-3; k-2]$  et donc finalement  $m_{F(x)}[0; k-1] = m_{F(x)}[k-3; k-2]$

Selon le lemme 14 et on a  $\frac{(n+k-1)(n+k)}{(n-k+2)(n-k+1)} \geq \frac{m_{F(x)}[k-1; k]}{m_{F(x)}[k-3; k-2]}$  pour tout  $3 \leq k \leq n$  et donc selon le point ci-dessus  $\frac{(n+k-1)(n+k)}{(n-k+2)(n-k+1)} \geq \frac{m_{F(x)}[k-1; k]}{m_{F(x)}[0; k-1]}$  et ensuite  $\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+k-1)(n+k)} \leq \frac{m_{F(x)}[0; k-1]}{m_{F(x)}[k-1; k]}$  et ensuite  $-\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+k-1)(n+k)} \geq \frac{-m_{F(x)}[0; k-1]}{m_{F(x)}[k-1; k]}$  et puisque  $m_{F(x)}[k-1; k] < 0$  on obtient  $0 < -m_{F(x)}[k-1; k] \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+k-1)(n+k)} \leq -m_{F(x)}[0; k-1]$

Selon le lemme 17 on a aussi  $m_{F(x)}[0; k-1] > m_{F(x)}[k-1; k]$  et ainsi de l'inégalité ci-dessus on tire  $0 > m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1] \geq m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[k-1; k] \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+k-1)(n+k)} = m_{F(x)}[k-1; k] \left(1 - \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{(n+k-1)(n+k)}\right) = \frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)}$  et alors  $(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 \leq m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left(\frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)}\right)^2$  Et finalement

$$\sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 + k^2} \leq \sqrt{m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left(\frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)}\right)^2 + k^2}$$

En synthèse  $-m_{F(x)}[0; k-1] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 + k^2} \leq -m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left(\frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)}\right)^2 + k^2} \leq$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$\begin{aligned}
& -m_{F(x)}[k-1; k] \frac{(n-k+3)(n-k+2)}{(n+k-2)(n+k-1)} + \sqrt{m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left( \frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)} \right)^2 + \sqrt{k^2}} = -m_{F(x)}[k- \\
& 1; k] \frac{(n-k+3)(n-k+2)}{(n+k-2)(n+k-1)} + |m_{F(x)}[k-1; k]| \left( \frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)} \right) + k = -m_{F(x)}[k-1; k] \frac{(n-k+3)(n-k+2)}{(n+k-2)(n+k-1)} - \\
& m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)} \right) + k = -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{(n-k+3)(n-k+2)}{(n+k-2)(n+k-1)} + \frac{(4n+2)(k-1)}{(n+k-1)(n+k)} \right) + k = \\
& -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3+n^2-10nk-3k^2+12n+4}{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3-3n^2-6nk-3k^2+2n+2k} \right) + k
\end{aligned}$$

Selon le lemme 12.a on a  $\frac{M_{F(x)}[k; k+1]}{-m_{F(x)}[k-1; k]} \geq \frac{n+k}{n-k+1}$  pour tout  $1 \leq k \leq n-1$  et donc

$$\begin{aligned}
& M_{F(x)}[k; k+1] \geq -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n+k}{n-k+1} \right) \text{ et ainsi } (m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 = \\
& (M_{F(x)}[k; k+1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 \geq (-m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n+k}{n-k+1} \right) - m_{F(x)}[k-1; k])^2 \geq \\
& m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left( \frac{n+k}{n-k+1} + 1 \right)^2 = m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left( \frac{2n+1}{n-k+1} \right)^2 \text{ Ainsi } m_{F(x)}[k-1; k] + \\
& \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 + k^2} \geq \\
& m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left( \frac{2n+1}{n-k+1} \right)^2 + k^2} \geq \\
& m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{m_{F(x)}[k-1; k]^2 \left( \frac{2n+1}{n-k+1} \right)^2} = m_{F(x)}[k-1; k] + |m_{F(x)}[k-1; k]| \left( \frac{2n+1}{n-k+1} \right) = \\
& m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{2n+1}{n-k+1} \right) = m_{F(x)}[k-1; k] \left( 1 - \frac{2n+1}{n-k+1} \right) = -m_{F(x)}[k- \\
& 1; k] \left( \frac{n+k}{n-k+1} \right)
\end{aligned}$$

Alors pour que la Condition 7 soit satisfaite il suffit d'avoir

$$-m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3+n^2-10nk-3k^2+12n+4}{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3-3n^2-6nk-3k^2+2n+2k} \right) + k \leq -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n+k}{n-k+1} \right)$$

qui est équivalente à

$$\begin{aligned}
& k \leq -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \left( \frac{n+k}{n-k+1} \right) - \left( \frac{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3+n^2-10nk-3k^2+12n+4}{n^3+3n^2k+3nk^2+k^3-3n^2-6nk-3k^2+2n+2k} \right) \right) \text{ puis à } k \leq \\
& -m_{F(x)}[k-1; k] \left( \frac{n^3(2k-5)+n^2(6k^2-k-11)+n(6k^3-19k^2+26k-16)+2k^4-7k^3+5k^2+4k-4}{n^4+n^3(2k-2)-n^2+n(-2k^3+6k^2-6k+2)-k^4+4k^3-5k^2+2k} \right)
\end{aligned}$$

Selon le lemme 22 on a  $-m_{F(x)}[k-1; k] > 10nk$  alors il suffit de montrer que :

$$\begin{aligned}
& 1 \leq 10n \left( \frac{n^3(2k-5)+n^2(6k^2-k-11)+n(6k^3-19k^2+26k-16)+2k^4-7k^3+5k^2+4k-4}{n^4+n^3(2k-2)-n^2+n(-2k^3+6k^2-6k+2)-k^4+4k^3-5k^2+2k} \right) \text{ ce qui est équivalent à} \\
& n^4(20k-51) + 12n^3(5k^2-k-9) + n^2(60k^3-190k^2+260k-159) + n(20k^4-68k^3+ \\
& 44k^2+46k-42) + k^4-4k^3+5k^2-2k \geq 0
\end{aligned}$$

Cette condition est vérifiée lorsque  $k \geq 3$  car alors tous les coefficients des puissances de  $n$  sont positifs, en effet on a

1.  $20k-51 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{51}{20} = 2.55$
2.  $5k^2-k-9 \geq 0$  si  $k \geq \frac{1+\sqrt{180}}{10} \cong 1.4416$
3. Soit  $h(k) = 60k^3 - 190k^2 + 260k - 159$  alors  $h'(k) = 20(9k^2 - 19k + 13)$  et  $h'(k) \geq 0$  car  $\Delta = -107 < 0$  et  $h(2) = 81 > 0$  et dès lors  $h(k) > 0$  pour tout  $k \geq 2$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



4.  $20k^4 - 68k^3 + 44k^2 + 46k - 42 = 4k^2(5k^2 - 17k + 11) + 2(23k - 21)$  Et puisque  $5k^2 - 17k + 11 > 0$  si  $k \geq \frac{17+\sqrt{69}}{10} \cong 2.5307$  et que  $23k - 21 > 0$  si  $k > \frac{23}{21} \cong 1.0952$
5.  $k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k = k(k^3 - 4k^2 + 5k - 2)$  et soit  $h(k) = k^3 - 4k^2 + 5k - 2$  et  $h'(k) = 3k^2 - 8k + 5$  et  $h'(k) \geq 0$  si  $k \geq \frac{5}{3} \cong 1.6667$  et  $h(2) = 0$  et dès lors  $h(k) > 0$  pour tout  $k \geq 2$

□

Ainsi donc par le lemme 10 il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k - 1; k]_{O_x}$  et  $[k; k + 1]_{O_x}$

#

Si  $n - k$  est impair

On définit  $G(x) = F(-x)$  et alors puisque  $F(-x) = -F(x)$  alors  $G(x) < 0$  sur  $]k - 1; k[_{O_x}$  et  $G(x) > 0$  sur  $]k; k + 1[_{O_x}$  et alors on prouve comme ci-dessus que les 8 conditions du lemme 7 sont remplies et donc qu'il y a dans ce cas au moins une solution périodique qui coupe  $[-k - 1; k]_{O_x}$  et  $[k; k + 1]_{O_x}$

Et ensuite par le lemme 4 on obtient qu'il y a pour  $F(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-k - 1; k]_{O_x}$  et  $[k; k + 1]_{O_x}$

Intervalle  $[n; \infty]_{O_x}$

On a que  $F(0) = 0$  et  $-n$  respectivement  $n$  sont la plus petite et la plus grande solutions de  $F(x)$

Soit  $\bar{x} \in [n - 1; n]$  tel que  $F(\bar{x}) = m_{F(x)}[n - 1, n]$  alors  $F''(x) > 0$  sur  $[\bar{x}; \infty]$  et  $F(x) \geq (F(n) - nF'(n)) + 2x$  sur  $[\bar{x}; \infty]$  Selon le lemme 16 on a que  $m_{F(x)}[n - 1, n] < m_{F(x)}[i - 1, i]$  pour tout  $0 \leq i \leq n - 1$  alors  $F(x) \geq (F(n) - nF'(n)) + 2x$  pour tout  $x \geq 0$  De la même manière on a  $F(x) \leq -(F(n) - nF'(n)) + 2x$  pour tout  $x \leq 0$

On pose  $z = -n$  et  $Z = n$  et on détermine  $d < 0$  tel que  $2d - F(d) = nF'(n)$  et  $D > 0$  tel que  $2D - F(D) = -nF'(n)$  et alors les conditions de la proposition 17 sont remplies

Condition 1  $m_{F(x)}[0; n] < m_{F(x)}[-n; 0]$

Puisque  $m_{F(x)}[-n; -n + 1] = 0$  et par le lemme 12 alors  $m_{F(x)}[-n; 0] = m_{F(x)}[-n + 1; -n + 2]$  Et puisque  $F(x) = -F(-x)$  alors  $m_{F(x)}[-n + 1; -n + 2] = -M_{F(x)}[n - 2; n - 1]$

Par le lemme 16 on a  $m_{F(x)}[0; n] = m_{F(x)}[n - 1; n]$

Soit  $\bar{x} \in ]n - 2; n - 1[_{O_x}$  tel que  $F(\bar{x}) = M_{F(x)}[n - 2; n - 1]$  alors  $F(\bar{x} + 1) \geq m_{F(x)}[n - 1; n]$  par le lemme 11 on a  $\frac{F(\bar{x}+1)}{-M_{F(x)}[n-2;n-1]} \geq n - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow F(\bar{x} + 1) < -M_{F(x)}[n - 2; n - 1]$  et donc

$$m_{F(x)}[n - 1; n] \leq F(\bar{x} + 1) \leq -M_{F(x)}[n - 2; n - 1]$$

En synthèse  $m_{F(x)}[0; n] = m_{F(x)}[n - 1; n] < -M_{F(x)}[n - 2; n - 1] = m_{F(x)}[-n + 1; -n + 2] = m_{F(x)}[-n; 0]$

□

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Condition 2  $m_{F(x)}[0; n] - m_{F(x)}[-n; 0] < -n$

Selon le point ci-dessus on a  $m_{F(x)}[-n; 0] > m_{F(x)}[0; n]$  et donc  $m_{F(x)}[0; n] - m_{F(x)}[-n; 0] < 2m_{F(x)}[0; n] = 2m_{F(x)}[n-1; n]$  Et selon le lemme 22 on a  $m_{F(x)}[n-1; n] < -10n(n-1) < -n$

En synthèse  $m_{F(x)}[0; n] - m_{F(x)}[-n; 0] < -2n < -n$

□

Condition 3  $M_{F(x)}[-n; 0] > M_{F(x)}[0; n]$

Puisque  $F(x) = -F(-x)$  alors  $M_{F(x)}[-n; 0] = -m_{F(x)}[0; n]$  et  $M_{F(x)}[0; n] = -m_{F(x)}[-n; 0]$

En combinant ces résultats avec la condition 1 on a  $M_{F(x)}[-n; 0] = -m_{F(x)}[0; n] >$

$-m_{F(x)}[-n; 0] = M_{F(x)}[-n; 0]$

□

Condition 4  $M_{F(x)}[-n; 0] - M_{F(x)}[0; n] > n$

Puisque  $F(x) = -F(-x)$  alors  $M_{F(x)}[-n; 0] = -m_{F(x)}[0; n]$  et  $M_{F(x)}[0; n] = -m_{F(x)}[-n; 0]$

En combinant ces résultats avec la condition 2 on a  $n < -m_{F(x)}[0; n] + m_{F(x)}[-n; 0] =$

$M_{F(x)}[-n; 0] - M_{F(x)}[0; n]$

□

Et ainsi il y a au moins une solution périodique qui coupe  $]-nF'(n); -n]_{O_x}$  et  $[n; nF'(n)]_{O_x}$

Et puisque selon le corolaire C.3 les solutions périodique doivent couper  $\left[-\frac{16}{10}n; \frac{16}{10}n\right]_{O_x}$  ainsi

donc il y a au moins une solution périodique qui coupe  $\left[-\frac{16}{10}n; -n\right]$  et  $\left[n; \frac{16}{10}n\right]$

En synthèse dans les intervalles

- $[0; 1]_{O_x}$  il n'y a pas de solution périodique
- $[k; k+1]_{O_x}$  avec  $1 \leq k \leq n-1$  il y a au moins une solution périodique et donc sur  $[1; n]_{O_x}$  il y a au moins  $n-1$  solutions périodiques
- $[n; \infty]_{O_x}$  il y a au moins une solution périodique

Et donc au total il y a au moins  $n$  solutions périodiques

#

### CORROLAIRE G.1

*Le nombre maximum de solutions périodiques pour les polynômes de degré  $n$  impair est*

*d'au moins  $\frac{n-1}{2}$*

#### Preuve

On a que  $n = 2k + 1$  et pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^k (x^2 - i^2)$  et  $k \geq 1$  il y a au moins  $k$  solutions périodiques

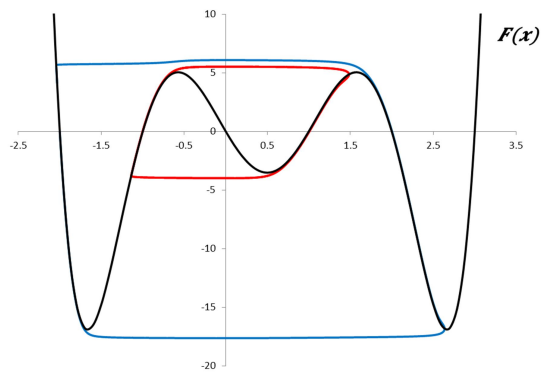
#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Alors nous proposons

### CONJECTURE 1

Soit  $F(x) = (x - n)x \prod_{i=1}^{n-1} (x^2 - i^2)$  et  $n \geq 1$  alors il y a un cycle qui coupe  $[-i - 1; -i]_{0x}$  et  $[i; i + 1]_{0x}$  pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$  et un cycle qui coupe  $]-\infty; n]_{0x}$  et  $[n; \infty[_{0x}$ . Et donc il y a  $n$  cycles



$$F(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019

## CHAPITRE 8 - Exemples de $F(x)$ pour lesquelles il y a une infinité de solutions périodiques

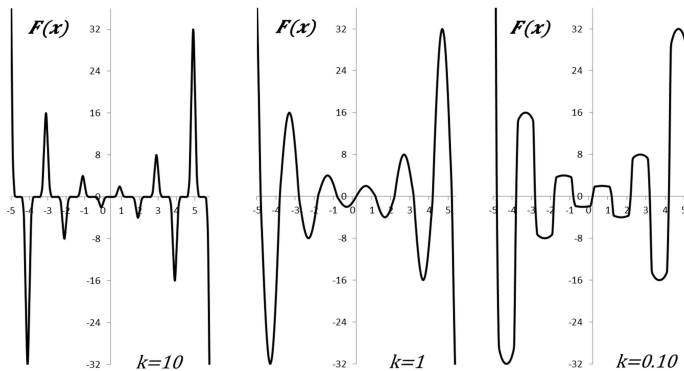
### THEOREME H

$$\text{Pour } F(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} n^{|x|+1} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ impair} [i; i+1[ \\ \frac{|x|}{x} n^{|x|+1} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ pair} [i; i+1[ \end{cases} \text{ avec } i \in \mathbb{Z} \text{ et } n, k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et}$$

$n \geq 2$  il y a une infinité de solutions périodiques; plus précisément il y a au moins une qui coupe  $[-i-1; -i[_{Ox}$  et  $[i; i+1[_{Ox}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  \*

### Preuve

Voici le graphe de  $F(x)$  pour  $n = 2$  et  $k = 10$  et  $1$  et  $0.1$



### 1<sup>er</sup> cas: intervalles $[-1; 0[_{Ox}$ et $]0; 1]_{Ox}$

Il n'y a aucune solution périodique qui coupe  $[-1; 0[$  ou  $]0; 1]$  de  $Ox$  car sur ces intervalles on a  $x F(x) > 0$

### 2<sup>ème</sup> cas: intervalles $[-2; -1[_{Ox}$ et $]1; 2]_{Ox}$

On a  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(1) = F(2) = 0$  et  $F'(0) > 0$  et  $F'(1) < 0$  et  $F'(2) > 0$  et  $F(x) > 0$  sur  $]0; 1[_{Ox}$  et  $F(x) < 0$  sur  $]1; 2]_{Ox}$  et  $m_{F(x)}[1; 2] = -4$  et  $2 = M_{F(x)}[0; 1]$  et les conditions du lemme 7 sont vérifiées

#### Condition 1

On a  $m_{F(x)}[1; 2] = -4 < -\sqrt{3}$

#### Condition 2

On a  $\sqrt{3} < 2 = M_{F(x)}[0; 1]$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Condition 3

$$\text{On a } 2M_{F(x)}[0; 1] + 1 = 5 < \sqrt{37} = \sqrt{1 + (M_{F(x)}[0; 1] - m_{F(x)}[1; 2])^2}$$

### Condition 4

$$\text{On a } \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} = \sqrt{5} < 5 = 2M_{F(x)}[0; 1] + 1$$

### Condition 5

$$\text{On a } \sqrt{1 + (m_{F(x)}[1; 2] + \sqrt{m_{F(x)}[1; 2]^2 + 3})^2} = \sqrt{36 - 8\sqrt{19}} \cong 1.0625 < 2 = M_{F(x)}[0; 1]$$

### Condition 6

$$\text{On a } \sqrt{1 + M_{F(x)}[0; 1]^2} = \sqrt{5} \leq 5.8186 \cong \sqrt{20 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{1 + (m_{F(x)}[1; 2] - \sqrt{3})^2}$$

### **3<sup>ème</sup> cas: intervalles $[-k - 1; -k]_{o_x}$ et $]k; k + 1]_{o_x}$ avec $k \geq 3$**

#### k pair

On a  $F(0) = 0$  et  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(k) = 0$  pour tout  $k$  et  $F(x) < 0$  sur  $]k - 1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k + 1[$  et les 8 conditions du lemme 10 sont remplies.

Par construction on a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = n^{k-1}$  et  $m_{F(x)}[0; k - 1] = -n^{k-2}$  et  $m_{F(x)}[k - 1; k] = -n^k$  et  $M_{F(x)}[k; k + 1] = n^{k+1}$

#### Condition 1

$$m_{F(x)}[k - 1; k] = -n^k \leq -2\sqrt{k}$$

Soit  $g(k) = -2\sqrt{k} + n^k$  alors  $g'(k) = -\frac{1}{\sqrt{k}} + \ln(n)n^k > -\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln(n)n^3 > -\frac{1}{\sqrt{3}} + 8 \ln(2) \cong 4.9678 > 0$  Et puisque  $g(3) = -2\sqrt{3} + n^3 > -2\sqrt{3} + 8 = 4.5359 > 0$  alors  $g(k) > 0$

#

#### Condition 2

$$\sqrt{2k + 1} \leq M_{F(x)}[0; k - 1]$$

On a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = n^{k-1}$  Soit  $g(k) = n^{k-1} - \sqrt{2k + 1}$  alors  $g'(k) = \ln(n)n^{k-1} - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} > \ln(2)2^2 - \frac{1}{\sqrt{7}} \cong 2.3946 > 0$  Et puisque  $g(3) = n^2 - \sqrt{7} > 4 - \sqrt{7} \cong 1.3542 > 0$  alors  $g(k) > 0$

#

#### Condition 3

$$M_{F(x)}[0; k - 1] \leq M_{F(x)}[k; k + 1]$$

On a  $M_{F(x)}[0; k - 1] = n^{k-1} < n^{k+1} = M_{F(x)}[k; k + 1]$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

#### Condition 4

$$m_{F(x)}[k-1; k] \leq m_{F(x)}[0; k-1]$$

$$\text{On a } m_{F(x)}[k-1; k] = -n^k < -n^{k-2} = m_{F(x)}[0; k-1]$$

#

#### Condition 5

$$\begin{aligned} \text{On a } (M_{F(x)}[k; k+1] + \sqrt{2k+1})^2 - m_{F(x)}[k-1; k]^2 &= (n^{k+1} + \sqrt{2k+1})^2 - n^{2k} = n^{2k+2} + \\ 2n^{k+1}\sqrt{2k+1} + 2k+1 - n^{2k} &= n^{2k}(n^2-1) + 2n^{k+1}\sqrt{2k+1} + 2k+1 > n^{2k}(n^2-1) \geq \\ 3n^{2k} > 0 \end{aligned}$$

#

#### Condition 6

$$\begin{aligned} \text{On a } \sqrt{(M_{F(x)}[0; k-1] - m_{F(x)}[k-1; k])^2 + (k-1)^2} - 2M_{F(x)}[0; k-1] - k + 1 &= \\ \sqrt{(n^{k-1} + n^k)^2 + (k-1)^2} - 2n^{k-1} - k + 1 &\geq \sqrt{n^{2k-2}(1+n)^2} - 2n^{k-1} - k + 1 = n^{k-1}(1+n) - \\ 2n^{k-1} - k + 1 &= (n-1)n^{k-1} - k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } g(k) = (n-1)n^{k-1} - k + 1 \text{ alors } g'(k) = (n-1)\ln(n)n^{k-1} - 1 > \ln(2)2^2 - 1 \cong 1.7726 > 0$$

$$\text{Et puisque } g(3) = (n-1)n^2 - 3 > 1 > 0 \text{ alors } g(k) > 0 \text{ pour tout } k \geq 3$$

#

#### Condition 7

$$\begin{aligned} \text{On a } m_{F(x)}[k-1; k] + \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - M_{F(x)}[k; k+1])^2 + k^2} + m_{F(x)}[0; k-1] - \\ \sqrt{(m_{F(x)}[k-1; k] - m_{F(x)}[0; k-1])^2 + k^2} &= -n^k + \sqrt{(-n^k - n^{k+1})^2 + k^2} - n^{k-2} - \\ \sqrt{(-n^k + n^{k-2})^2 + k^2} &> -n^k + n^k + n^{k+1} - n^{k-2} - \sqrt{(-n^k + n^{k-2})^2 + k^2} = n^{k-2}(n^3-1) - \\ \sqrt{(-n^k + n^{k-2})^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } g(k) = (n^2-1)n^{k-3} - k \text{ alors } g'(k) = (n^2-1)\ln(n)n^{k-3} - 1 > 3\ln(2) - 1 \cong 1.0794 > 0$$

$$\text{Et puisque } g(3) = (n^2-1) - 3 > 3 - 3 = 0 \text{ alors } g(k) > 0 \text{ pour tout } k \geq 3$$

$$\text{ce qui équivaut à } k < n^{k-3}(n^2-1) \text{ pour tout } k \geq 3$$

$$\text{Ainsi } \sqrt{n^{2k-4}(n^2-1)^2 + k^2} < \sqrt{n^{2k-4}(n^2-1)^2 + n^{2k-6}(n^2-1)^2} = (n^2-1)n^{k-3}\sqrt{n^2+1}$$

$$\text{Et donc } n^{k-2}(n^3-1) - \sqrt{n^{2k-4}(n^2-1)^2 + k^2} > n^{k-2}(n^3-1) - n^{k-3}(n^2-1)\sqrt{n^2+1} =$$

$$(n-1)n^{k-3}(n^3+n^2+n - (n+1)\sqrt{n^2+1})$$

$$\text{Soit } h(n) = n^3 + n^2 + n - (n+1)\sqrt{n^2+1} \text{ alors } h'(n) = 3n^2 + 2n + 1 - \sqrt{n^2+1} -$$

$$(n+1)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > 3n^2 + 2n + 1 - \sqrt{n^2+1} - (n+1)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 3n^2 + 2n + 1 - n - 1 -$$

$$(n+1)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 3n^2 + n - (n+1)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 2n^2 + n(n+1) - (n+1)\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 2n^2 +$$

$$n(n+1)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) > 0 \text{ Et puisque } h(2) = 14 - 3\sqrt{5} \cong 7.2918 > 0 \text{ alors } h(n) > 0 \text{ pour tout}$$

$$n \geq 2 \text{ Et donc } (n-1)\sqrt{n^2+1}n^{k-3}(n^3+n^2+n - (n+1)\sqrt{n^2+1}) > 0 \text{ pour tout } n \geq 2$$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

### Condition 8

On a  $-m_{F(x)}[k-1; k] + k - m_{F(x)}[0; k-1] - \sqrt{m_{F(x)}[0; k-1]^2 + k^2} = n^k + k + n^{k-2} - \sqrt{n^{2k-4} + k^2} > n^k - \sqrt{n^{2k-4} + k^2} > n^k - \sqrt{n^{2k-4} + 2n^{k-2} + k^2} = n^k - (n^{k-2} + k) = n^{k-2}(n^2 - 1) - k > 3n^{k-2} - k$   
Soit  $g(k) = 3n^{k-2} - k$  alors  $g'(k) = 3\ln(n)n^{k-2} - 1 > 6\ln(2) - 1 \cong > 0$  et puisque  $g(3) = 3n - 3 \geq 3 > 0$  alors  $g(k) > 0$   
#

Ainsi donc il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_x}$  et  $[k; k+1]_{O_x}$

### k impair

On définit  $G(x) = F(-x)$  alors on a  $G(0) = 0$  et  $F(-x) = -F(x)$  et  $F(k) = 0$  pour tout  $k$  et  $F(x) < 0$  sur  $]k-1; k[$  et  $F(x) > 0$  sur  $]k; k+1[$  et comme de la même manière que ci-dessus on montre que les 8 conditions du lemme 10 sont remplies. Ainsi il y a pour  $G(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_x}$  et  $[k; k+1]_{O_x}$  Et donc par le lemme 4 il y a pour  $F(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[-k-1; -k]_{O_x}$  et  $[k; k+1]_{O_x}$   
#

Alors nous proposons

### CONJECTURE 2

Pour  $F(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} n^{\lfloor |x|+1 \rfloor} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ impair } [i; i+1[ \\ \frac{|x|}{x} n^{\lfloor |x|+1 \rfloor} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{ pair } [i; i+1[ \end{cases}$  avec  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n, k \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \geq 2$  il y a une infinité de cycles; plus précisément il y a un cycle qui coupe  $[-i-1; -i]_{O_x}$  et  $[i; i+1]_{O_x}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}^*$

### THEOREME I

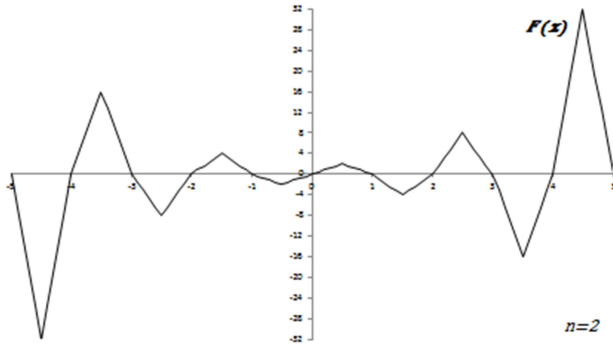
Soit  $F(x) = \begin{cases} (-1)^i 2n^{|i|+1} (x-i) & \text{si } x \in [i; i+\frac{1}{2}] \text{ et } i \geq 0 \\ (-1)^i 2n^{|i|+1} (i+1-x) & \text{si } x \in [i+\frac{1}{2}; i+1[ \text{ et } i \geq 0 \\ (-1)^i 2n^{|i|} (x-i) & \text{si } x \in [i; i+\frac{1}{2}] \text{ et } i < 0 \\ (-1)^i 2n^{|i|} (i+1-x) & \text{si } x \in [i+\frac{1}{2}; i+1[ \text{ et } i < 0 \end{cases}$  avec  $i \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{R}$  et

$n \geq 2$  alors il y a une infinité de solutions périodiques; plus précisément il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[-i-1; -i]_{O_x}$  et  $[i; i+1]_{O_x}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}^*$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

## Preuve

Voici le graphe de  $F(x)$  pour  $n = 2$



$$\text{Soit } G(x) = \begin{cases} -\frac{|x|}{x} n^{[|x|+1]} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{impair}[i; i+1[ \\ \frac{|x|}{x} n^{[|x|+1]} |\sin(\pi x)|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{pair}[i; i+1[ \end{cases} \text{ avec } i \in \mathbb{Z} \text{ et } n, k \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \geq 2$$

Les solutions de  $F(x)$  et de  $G(x)$  sont les mêmes Ce sont tous les  $i \in$

Les extrema de  $F(x)$  et de  $G(x)$  sont les mêmes Ce sont les  $i + 1/2$  pour tous les  $i \in \mathbb{Z}$  et  $F(x)$  et leur valeurs sont égales car

$$G\left(i + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{|i+\frac{1}{2}|}{i+\frac{1}{2}} n^{[|i|+1]} \left|\sin\left(\pi i + \frac{\pi}{2}\right)\right|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{impair}[i; i+1[ \\ \frac{|i+\frac{1}{2}|}{i+\frac{1}{2}} n^{[|i|+1]} \left|\sin\left(\pi i + \frac{\pi}{2}\right)\right|^k & \text{si } x \in \cup_i \text{pair}[i; i+1[ \end{cases} = \begin{cases} -\frac{|i|}{i} n^{|i|+1} 1^k & \text{si } i \text{ impair} \\ \frac{|i|}{i} n^{|i|+1} 1^k & \text{si } i \text{ pair} \end{cases} =$$

$$\begin{cases} -n^{|i|+1} & \text{si } i \text{ impair et } i \geq 0 \\ n^{|i|+1} & \text{si } i \text{ impair et } i < 0 \\ n^{|i|+1} & \text{si } i \text{ pair et } i \geq 0 \\ -n^{|i|+1} & \text{si } i \text{ pair et } i < 0 \end{cases} = \begin{cases} (-1)^i n^{|i|+1} & \text{si } i \geq 0 \\ (-1)^{i+1} n^{|i|+1} & \text{si } i < 0 \end{cases} = F\left(i + \frac{1}{2}\right)$$

Ainsi les peignes de  $G(x)$  sont également des peignes pour  $F(x)$  Selon le théorème H les peignes de  $G(x)$  ont une infinité de solutions périodiques ainsi par le corolaire 16 pour  $F(x)$  il y a un nombre infini de solution périodiques

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»



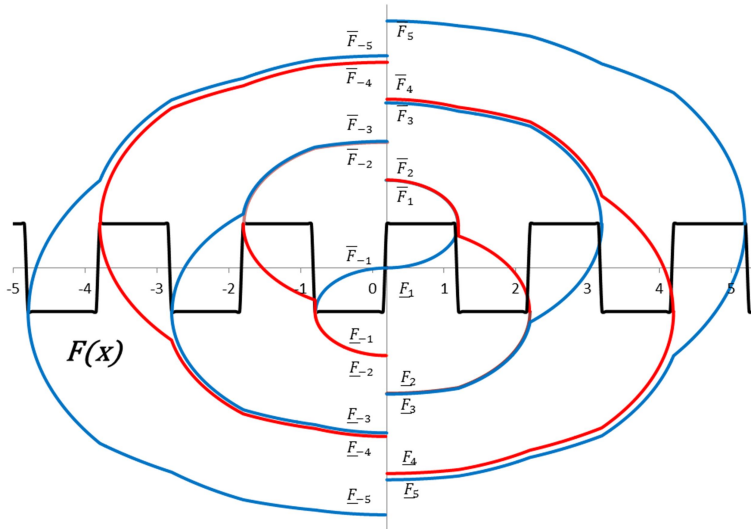
## CHAPITRE 9 - Exemples de $F(x)$ pour lesquelles il y a très probablement une infinité de solutions périodiques

### LEMME 24

Soit  $F(x)$  une fonction continue telle que  $F(0) = 0$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq i \leq n$  et  $\bar{F}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}(i, F(i))$  avec  $O_{y_+}$  et  $\underline{F}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{F(x)}(i, F(i))$  avec  $O_{y_-}$ . Si  $\bar{F}_{-i} > \bar{F}_i$  et  $\underline{F}_i < \underline{F}_{-i}$  pour tout  $i$  pair et  $\bar{F}_{-i} < \bar{F}_i$  et  $\underline{F}_i > \underline{F}_{-i}$  pour tout  $i$  impair alors pour  $F(x)$  il y a au moins une solution périodique qui coupe  $[\underline{F}_{-i-1}; \underline{F}_{-i}]_{O_{y_-}}$  et  $[\bar{F}_i; \bar{F}_{i+1}]_{O_{y_+}}$  pour tous les  $2 \leq i \leq n+1$

#

### Preuve



Les intervalles  $\bar{L}_1 = [0; \bar{F}_{-1}]$ , ...,  $\bar{L}_n = [\bar{F}_{-n+1}; \bar{F}_{-n}]$ ,  $\bar{L}_{n+1} = [\bar{F}_{-n}; \infty[$  sont une partition de  $O_{y_+}$  de même que  $\bar{R}_0 = [0; 0]$ ,  $\bar{R}_1 = [0; \bar{F}_1]$ , ...,  $\bar{R}_n = [\bar{F}_{n-1}; \bar{F}_n]$ ,  $\bar{R}_{n+1} = [\bar{F}_n; \infty[$

Les intervalles  $\underline{L}_1 = [0; \underline{F}_{-1}]$ , ...,  $\underline{L}_l = [\underline{F}_{-n+1}; \underline{F}_{-n}]$  et  $\underline{L}_{n+1} = [\underline{F}_{-n}; -\infty[$  sont une partition de  $O_{y_-}$  de même que les intervalles  $\underline{R}_0 = [0; 0]$ ,  $\underline{R}_1 = [0; \underline{F}_1]$ , ...,  $\underline{R}_n = [\underline{F}_{n-1}; \underline{F}_n]$ ,  $\underline{R}_{n+1} = [\underline{F}_n; -\infty[$

La matrice de transformation de  $O_{y_+}$  sur  $O_{y_+}$  de dimension  $(n+1)(n+1)$  est:

$$M_{F(x)}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j \leq n+1) \text{ et } ((i=1 \text{ et } j=1,2) \text{ ou } (i \text{ pair et } j=i) \text{ ou } (i \text{ impair } > 1 \text{ et } j=i, i \pm 1)) \\ 1 & \text{si } (l < r) \text{ et } (i=l \text{ et } j>l) \\ 1 & \text{si } (l > r) \text{ et } (i>r \text{ et } j=r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de transformation de  $O_{y_+}$  sur  $O_{y_-}$  de dimension  $(n+1)(n+1)$  est

$$D_{F(x)}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = I$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

La matrice de transformation de  $Oy_-$  sur  $Oy_-$  de dimension  $(n+1)(n+1)$  est

$$N_{F(x)}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j \leq \min\{l+1, r+1\}) \text{ et } ((i=1 \text{ et } j=1,2) \text{ ou } (i \text{ pair et } j=i) \text{ ou } (i \text{ impair } > 1 \text{ et } j=i, i \pm 1)) \\ 1 & \text{si } (l < r) \text{ et } (i=l \text{ et } j > l) \\ 1 & \text{si } (l > r) \text{ et } (i > r \text{ et } j=r) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La matrice de transformation de  $Oy_-$  sur  $Oy_+$  de dimension  $(l+1)(l+1)$  est

$$U_{F(x)}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = I$$

$$\text{Alors } C_{F(x)} = M_{F(x)} D_{F(x)} N_{F(x)} U_{F(x)} = M_{F(x)} I N_{F(x)} I = M_{F(x)} N_{F(x)}$$

Si  $i=1$

$$C_{F(x)}[1,j] = N_{F(x)}[1,j] + N_{F(x)}[2,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \text{ ou } 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} 1 & \text{si } j=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 2 & \text{si } j=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $i \text{ impair } > 1$

$$C_{F(x)}[i,j] = N_{F(x)}[i-1,j] + N_{F(x)}[i,j] + N_{F(x)}[i+1,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i-1 \\ 0 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} 1 & \text{si } j=i-1 \\ 1 & \text{si } j=i \\ 1 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} + \begin{cases} 1 & \text{si } j=i-1 \\ 1 & \text{si } j=i \\ 1 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } j=i-1 \\ 0 & \text{si } j=i \\ 1 & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 2 & \text{si } j=i \pm 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $i \text{ pair}$

$$C_{F(x)}[i,j] = N_{F(x)}[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En synthèse on obtient

$$C_{F(x)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & \boxed{1} \end{bmatrix} & \text{si } n+1 \text{ impair} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \boxed{1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} & \text{si } n+1 \text{ pair} \end{cases}$$

En appliquant les propositions 14 et 15 on en déduit qu'il y a au moins  $n-1$  solutions périodiques qui coupent  $\bar{L}_i$  pour  $2 \leq i \leq n$

#

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

**LEMME 25**

Soit

$$S_{\varepsilon,-}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[2i; 2i + \frac{1}{2} - \varepsilon \right[ \cup \left[2i + \frac{1}{2} + \varepsilon; 2i + 1 \right[ \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{1}{2} + \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{1}{2} - \varepsilon; 2i + \frac{1}{2}\right] \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{1}{2} - \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{1}{2}; 2i + \frac{1}{2} + \varepsilon\right] \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - 1) & \text{si } x \in [2i + 1; 2i + 1 + \varepsilon[ \\ -1 & \text{si } x \in [2i + 1 + \varepsilon; 2i + 2 - \varepsilon[ \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - 2) & \text{si } x \in [2i + 2 - \varepsilon; 2i + 2[ \end{cases} \text{ avec } i \in \mathbb{Z}$$

et

$$S_{\varepsilon,+}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i) & \text{si } x \in [2i; 2i + \varepsilon[ \\ 1 & \text{si } x \in [2i + \varepsilon; 2i + 1 - \varepsilon[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - 1) & \text{si } x \in [2i + 1 - \varepsilon; 2i + 1[ \\ 0 & \text{si } x \in \left[2i + 1; 2i + \frac{3}{2} - \varepsilon \right[ \cup \left[2i + \frac{3}{2} + \varepsilon; 2i + 2 \right[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{3}{2} + \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{3}{2} - \varepsilon; 2i + \frac{3}{2}\right] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{3}{2} - \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{3}{2}; 2i + \frac{3}{2} + \varepsilon\right] \end{cases} \text{ avec } i \in \mathbb{Z}$$

Alors  $S_{\varepsilon,+}(x) = -S_{\varepsilon,-}(x - 1)$

**Preuve**

$$-S_{\varepsilon,-}(x - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x - 1) \in \left[2i; 2i + \frac{1}{2} - \varepsilon \right[ \cup \left[2i + \frac{1}{2} + \varepsilon; 2i + 1 \right[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}\left((x - 1) - 2i - \frac{1}{2} + \varepsilon\right) & \text{si } (x - 1) \in \left[2i + \frac{1}{2} - \varepsilon; 2i + \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{\varepsilon}\left((x - 1) - 2i - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) & \text{si } (x - 1) \in \left[2i + \frac{1}{2}; 2i + \frac{1}{2} + \varepsilon\right] \\ \frac{1}{\varepsilon}\left((x - 1) - 2i - 1\right) & \text{si } (x - 1) \in [2i + 1; 2i + 1 + \varepsilon[ \\ 1 & \text{si } (x - 1) \in [2i + 1 + \varepsilon; 2i + 2 - \varepsilon[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}\left((x - 1) - 2i - 2\right) & \text{si } (x - 1) \in [2i + 2 - \varepsilon; 2i + 2[ \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[2i + 1; 2i + \frac{3}{2} - \varepsilon \right[ \cup \left[2i + \frac{3}{2} + \varepsilon; 2i + 2 \right[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{3}{2} + \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{3}{2} - \varepsilon; 2i + \frac{3}{2}\right] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - \frac{3}{2} - \varepsilon) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{3}{2}; 2i + \frac{3}{2} + \varepsilon\right] \\ \frac{1}{\varepsilon}(x - 2i) & \text{si } x \in [2i; 2i + \varepsilon[ \\ 1 & \text{si } x \in [2i + \varepsilon; 2i + 1 - \varepsilon[ \\ -\frac{1}{\varepsilon}(x - 2i - 1) & \text{si } x \in [2i + 1 - \varepsilon; 2i + 1[ \end{cases}$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[ 2i + 1; 2i + \frac{3}{2} - \varepsilon \right] \cup \left[ 2i + \frac{3}{2} + \varepsilon; 2i + 2 \right[ \\ -\frac{1}{\varepsilon} \left( x - 2i - \frac{3}{2} + \varepsilon \right) & \text{si } x \in \left[ 2i + \frac{3}{2} - \varepsilon; 2i + \frac{3}{2} \right] \\ \frac{1}{\varepsilon} \left( x - 2i - \frac{3}{2} - \varepsilon \right) & \text{si } x \in \left[ 2i + \frac{3}{2}; 2i + \frac{3}{2} + \varepsilon \right] \\ \frac{1}{\varepsilon} (x - 2i - 2) & \text{si } x \in [2i + 2; 2i + 2 + \varepsilon[ \\ 1 & \text{si } x \in [2i + 2 + \varepsilon; 2i + 3 - \varepsilon[ \\ -\frac{1}{\varepsilon} (x - 2i - 3) & \text{si } x \in [2i + 3 - \varepsilon; 2i + 3[ \end{cases} = S_{\varepsilon,+}(x)$$

#

### LEMME 26

Soit  $F(x)$  et  $G(x)$  deux fonctions continues telle que  $F(0) = G(0) = 0$  Pour chaque  $1 \leq i \leq n$  notons  $\bar{F}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{F(x)}^{-1}(i, 0)$  avec  $O_{y+}$  et  $\underline{F}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{F(x)}(i, 0)$  avec  $O_{y-}$  et  $\bar{G}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{G(x)}^{-1}(i, 0)$  avec  $O_{y+}$  et  $\underline{G}_i$  le premier point d'intersection de  $\text{Traj}_{G(x)}(i, 0)$  avec  $O_{y-}$  Si  $F(x) = -G(x-1)$  alors  $\bar{F}_i = -\underline{G}_{i+1}$  et  $\underline{F}_i = -\bar{G}_{i+1}$

#### Preuve

On a  $\bar{F}_i = \text{Tra}_{F(x)}^{-1}(i, 0) \cap O_y = \text{Traj}_{-G(x-1)}^{-1}(i; 0) \cap O_y = \text{Traj}_{-G(x)}^{-1}(i+1; 0) \cap O_y = \text{Traj}_{-G(x)}^{-1}(i+1; 0) \cap O_y = -\text{Traj}_{G(x)}(i+1; 0) \cap O_y = -\underline{G}_{i+1}$

On a

$\underline{F}_i = \text{Tra}_{F(x)}(i, 0) \cap O_y = \text{Traj}_{-G(x-1)}(i; 0) \cap O_y = \text{Traj}_{-G(x)}(i+1; 0) \cap O_y = -\text{Traj}_{G(x)}^{-1}(i+1; 0) \cap O_y = -\bar{G}_{i+1}$

#

### APPLICATION NUMERIQUE

Soit  $F(x) = S_{0,+}(x)$  alors par calcul on trouve que pour tous les  $i \leq 10^6$  on a:

$$\begin{cases} \bar{F}_{-i} > \bar{F}_i \text{ et } \underline{F}_i < \underline{F}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ impair} \\ \bar{F}_{-i} < \bar{F}_i \text{ et } \underline{F}_i > \underline{F}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ pair} \end{cases} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq 10^6$$

Par l'application des lemmes 24 et 25 à  $G(x) = S_{0,-}(x)$  on obtient  $\bar{F}_i = -\underline{G}_{i+1}$  et  $\underline{F}_i = -\bar{G}_{i+1}$

Ainsi

$$\begin{cases} \bar{F}_{-i} > \bar{F}_i \text{ et } \underline{F}_i < \underline{F}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ impair} \\ \bar{F}_{-i} < \bar{F}_i \text{ et } \underline{F}_i > \underline{F}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\underline{G}_{-i+1} > -\underline{G}_{i+1} \text{ et } -\bar{G}_{i+1} < -\bar{G}_{-i+1} \text{ pour tout } i \text{ impair} \\ -\underline{G}_{-i+1} < -\underline{G}_{i+1} \text{ et } -\bar{G}_{i+1} > -\bar{G}_{-i+1} \text{ pour tout } i \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{G}_{-i+1} < \underline{G}_{i+1} \text{ et } \bar{G}_{i+1} > \bar{G}_{-i+1} \text{ pour tout } i \text{ impair} \\ \underline{G}_{-i+1} > \underline{G}_{i+1} \text{ et } \bar{G}_{i+1} < \bar{G}_{-i+1} \text{ pour tout } i \text{ pair} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{G}_{-i} < \underline{G}_i \text{ et } \bar{G}_i > \bar{G}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ pair} \\ \underline{G}_{-i} > \underline{G}_i \text{ et } \bar{G}_i < \bar{G}_{-i} \text{ pour tout } i \text{ impair} \end{cases}$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Et en appliquant le lemme 24 à  $S_{0,+}(x)$  et  $S_{0,-}(x)$  on en tire qu'il y a pour  $S_{0,+}(x)$  et pour  $S_{0,-}(x)$  au moins une solution périodique qui coupe  $[\underline{F}_{-i-1}; \underline{F}_{-i}]_{Oy}$  et  $[\overline{F}_i; \overline{F}_{i+1}]_{Oy}$  pour tous les  $2 \leq i \leq 10^6$

### LEMME 27

$S_{0,-}(x)$  et  $S_{0,+}(x)$  sont des peignes pour  $F(x) = \sin(\pi x)$

#### Preuve

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  on a  $F(j) = \sin(\pi j) = 0$

$$\text{Pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ on a } F\left(j + \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\pi j + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \text{si } j \text{ pair} \\ \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } j \text{ impair} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ pair} \\ -1 & \text{si } j \text{ impair} \end{cases}$$

#

### LEMME 28

$$S_{0,-}(x) \text{ et } S_{0,+}(x) \text{ est un peigne pour } G(x) = \begin{cases} 2(x - 2i) & \text{si } x \in \left[2i; 2i + \frac{1}{2}\right[ \\ -2(x - 2i - 1) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{1}{2}; 2i + 1\right[ \\ -2(x - 2i - 1) & \text{si } x \in \left[2i + 1; 2i + \frac{3}{2}\right[ \\ 2(x - 2i - 2) & \text{si } x \in \left[2i + \frac{3}{2}; 2i + 2\right[ \end{cases} \text{ avec } i \in \mathbb{Z}$$

#### Preuve

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  on a

$$G(j) = \begin{cases} 2(j - 2i) & \text{si } j \in \left[2i; 2i + \frac{1}{2}\right[ \\ -2(j - 2i - 1) & \text{si } j \in \left[2i + \frac{1}{2}; 2i + 1\right[ \\ -2(j - 2i - 1) & \text{si } j \in \left[2i + 1; 2i + \frac{3}{2}\right[ \\ 2(j - 2i - 2) & \text{si } j \in \left[2i + \frac{3}{2}; 2i + 2\right[ \end{cases} = \begin{cases} 2(2i - 2i) & \text{si } j = 2i \\ -2(2i + 1 - 2i - 1) & \text{si } j = 2i + 1 \\ -2(2i + 1 - 2i - 1) & \text{si } j = 2i + 1 \\ 2(2i + 2 - 2i - 2) & \text{si } j = 2i + 2 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } j = 2i \\ 0 & \text{si } j = 2i + 1 \\ 0 & \text{si } j = 2i + 1 \\ 0 & \text{si } j = 2i + 2 \end{cases} = 0$$

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  on a

$$G\left(j + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 2\left(j + \frac{1}{2} - 2i\right) & \text{si } j + \frac{1}{2} \in \left[2i; 2i + \frac{1}{2}\right[ \\ -2\left(j + \frac{1}{2} - 2i - 1\right) & \text{si } j + \frac{1}{2} \in \left[2i + \frac{1}{2}; 2i + 1\right[ \\ -2\left(j + \frac{1}{2} - 2i - 1\right) & \text{si } j + \frac{1}{2} \in \left[2i + 1; 2i + \frac{3}{2}\right[ \\ 2\left(j + \frac{1}{2} - 2i - 2\right) & \text{si } j + \frac{1}{2} \in \left[2i + \frac{3}{2}; 2i + 2\right[ \end{cases} =$$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(j + \frac{1}{2} - 2i) \text{ si } j \in [2i - \frac{1}{2}; 2i[ \\ -2(j - 2i - \frac{1}{2}) \text{ si } j \in [2i; 2i + \frac{1}{2}[ \\ -2(j - 2i - \frac{1}{2}) \text{ si } j \in [2i + \frac{1}{2}; 2i + 1[ \\ 2(j - 2i - \frac{3}{2}) \text{ si } j \in [2i + 1; 2i + \frac{3}{2}[ \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 2(2i + \frac{1}{2} - 2i) \text{ si } j = 2i \\ -2(2i - 2i - \frac{1}{2}) \text{ si } j = 2i \\ -2(2i + 1 - 2i - \frac{1}{2}) \text{ si } j = 2i + 1 \\ 2(2i + 1 - 2i - \frac{3}{2}) \text{ si } j = 2i + 1 \end{array} \right. =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } j = 2i \\ -1 \text{ si } j = 2i + 1 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } j \text{ pair} \\ -1 \text{ si } j \text{ impair} \end{array} \right.$$

#

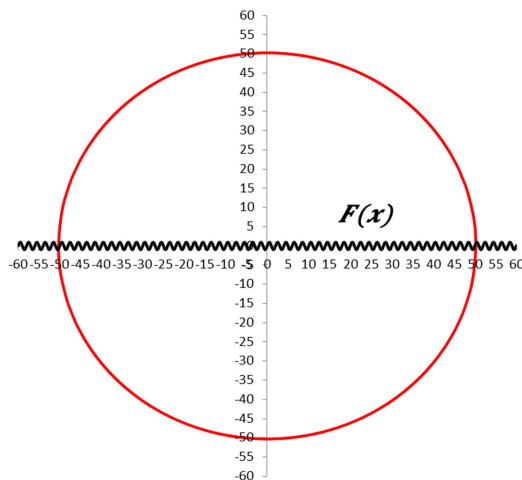
Sur la base du résultat du calcul présenté ci-dessus et des lemmes précédents nous obtenons les résultats suivants

### APPLICATION NUMERIQUE

$$\text{Soit } F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 2(x - 2i) \text{ si } x \in [2i; 2i + \frac{1}{2}[ \\ -2(x - 2i - 1) \text{ si } x \in [2i + \frac{1}{2}; 2i + 1[ \\ -2(x - 2i - 1) \text{ si } x \in [2i + 1; 2i + \frac{3}{2}[ \\ 2(x - 2i - 2) \text{ si } x \in [2i + \frac{3}{2}; 2i + 2[ \end{array} \right. \text{ alors il y a une solution périodique qui}$$

coupe  $[-i - 1; -i]_{0_{y^+}}$  et  $[i; i + 1]_{0_{y^+}}$  pour tout  $1 \leq i \leq 10^6$

Soit  $F(x) = \sin(\pi x)$  alors il y a une solution périodique qui coupe  $[-i - 1; -i]_{0_{y^+}}$  et  $[i; i + 1]_{0_{y^+}}$  pour tout  $1 \leq i \leq 10^6$  Et voici la solution périodique qui passe très proche de  $(0; 50,2801) \in [50; 51]_{0_{y^+}}$



« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Alors nous proposons

**CONJECTURE 3**

Soit  $F(x) = \begin{cases} 2(x - 2i) & \text{si } x \in [2i; 2i + \frac{1}{2}[ \\ -2(x - 2i - 1) & \text{si } x \in [2i + \frac{1}{2}; 2i + 1[ \\ -2(x - 2i - 1) & \text{si } x \in [2i + 1; 2i + \frac{3}{2}[ \\ 2(x - 2i - 2) & \text{si } x \in [2i + \frac{3}{2}; 2i + 2[ \end{cases}$  alors il y a un cycle qui coupe  $[-i - 1; -i]_{0_{y^+}}$  et  $[i; i + 1]_{0_{y^+}}$  pour tout  $i \geq 1$

**CONJECTURE 4**

Soit  $F(x) = \sin(\pi x)$  alors il y a un cycle qui coupe  $[-i - 1; -i]_{0_{y^+}}$  et  $[i; i + 1]_{0_{y^+}}$  pour tout  $i \geq 1$

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019

## Références

- [1] Neukirch S. : *Les attracteurs des systèmes dynamiques dissipatifs de Lorenz et de Liénard : nombre, forme et localisation*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1998.
- [2] Giacomini H. and Neukirch S. : *Number of limit cycles of the Liénard equation*, Physical Review. E, 56(4):38093813, 1997.
- [3] Gasull A. and Giacomini H. : *A new criterion for controlling the number of limit cycles of some generalized Liénard equations*, Journal of Differential Equations 185, 54–73, 2002.
- [4] Perko L. : *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 253-264, third édition, 2001.
- [5] Wang S. and Tosi G. : *Limit cycles in Liénard equations*, World Journal of Engineering 3(1), 58-88, 2006.
- [6] Boulfoul A., *Cycles limites de certains systèmes de Liénard généralisés dépendant d'un petit paramètre*, Thèse de doctorat, Université de Annaba - Badji Mokhtar, 2013.

« Une approche géométrique de l'équation de Liénard pour prouver que pour  $F(x) = x \prod_{i=1}^n (x^2 - i^2)$  il y a au moins  $n$  solutions périodiques, que pour tous les polynômes de degré impair les solutions périodiques sont dans un espace borné autour de l'origine, pour donner des nouveaux algorithmes permettant de localiser les solutions périodiques, etc.»

Par Serge Reymond, Mont-Pélerin, Switzerland, 31 mai 2019