Équations et inéquation dans l'enseignement secondaire : Entre syntaxe et sémantique

Kouki Rahim

▶ **To cite this version:**

Kouki Rahim. Équations et inéquation dans l'enseignement secondaire : Entre syntaxe et sémantique. Miftah al Hissab, 2004, 108, pp.62-73. hal-02144850

HAL Id: hal-02144850
https://hal.science/hal-02144850

Submitted on 31 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equations, inéquations dans l'enseignement secondaire : entre syntaxe et sémantique

Rahim KOUKI

Dans l'enseignement des mathématiques, les équations et les inéquations du premier degré à une inconnue ne semblent pas difficiles à apprendre, leur résolution ne nécessitant tout au plus que quelques techniques algébriques à caractère algorithmique. Toutefois, nombreux sont les élèves du secondaire qui échouent dans leur manipulation de ces objets mathématiques.

1. Fondements théoriques :

Notre cadre théorique général est celui de la logique des prédicats et en particulier l'aspect sémantique et syntaxique de la vérité introduit dans la théorie des modèles de *Tarski*. Contrairement à la logique des propositions, la logique des prédicats est une logique qui permet d'analyser la structure de la proposition tout en tenant compte de la quantification. En effet, la proposition possède une forme fonctionnelle ou prédicative désignant tantôt une propriété, tantôt une relation qui se décompose en deux parties : l'une est dite fermée et l'autre requérant un complément.

1.1 Les phrases ouvertes :

L'application d'un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes dont l'un au moins est un terme général, donne ce qui est appelé une phrase ouverte (Durand – Guerrier et al, 2000) ou une fonction propositionnelle (Tarski, 1971). La phrase ouverte n'est pas une proposition. Toutefois, la satisfaction d'une telle phrase, par l'assignation de certains objets aux termes généraux, correspond à la conception sémantique de la vérité qu'on peut relier explicitement à la notion de solution d'une équation mathématique.

Par exemple, résoudre une équation revient à déterminer tous les objets du domaine (l'univers du discours en logique) la satisfaisant. Cette résolution peut être réalisée par l'étude des différentes interprétations possibles des équations ou bien par l'utilisation des règles de formation et de transformation employant les structures additives et multiplicatives. En terme de logique, on peut appeler cela l'articulation des registres sémantique et syntaxique.

1.2 La quantification :

Les systèmes modernes, en logique, ont retenu deux types de quantificateurs utilisés dans le domaine mathématique : « $\forall$ » , qui se lit « *quelque soit* » ou « *pour tout* » et qui signifie que les variables représentent tous les objets d'un domaine et « $\exists$ » , qui se lit « *il existe au moins* » et qui sert à exprimer l'existence de quelque chose sans qu'on connaisse encore précisément cette chose.

Le fait de définir les quantificateurs des systèmes formels en tant que modélisateurs des notions correspondantes à la langue naturelle revient à adopter le point de vue *sémantique* en logique. Alors que le point de vue *syntaxique*, gère les règles de fonctionnement et détermine la validité des relations sans chercher à les interpréter.

1.3 Sémantique versus syntaxe :

La sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. La théorie sémantique de la vérité due à *Tarski* permet d'associer une valeur de vérité à une formule donnée dans une interprétation donnée. Celui-ci définit la sémantique comme étant

« *… l'ensemble des études qui traitent des concepts, qui, en gros, expriment certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets et états de choses auxquels ces expressions se réfèrent*. » (*Tarski*, 1974, p.133)

En logique, la syntaxe d'un langage formel donne les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré ; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration est valide.

Dans le calcul des propositions, on a un ensemble dénombrable de lettres de variables propositionnelles et un nombre fini de connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$ (on peut en prendre moins ou plus, mais ce sont ceux que l'on utilise en mathématiques).

L'élément minimum est la lettre de proposition. Les règles de formation sont les suivantes :

- P_1 Une lettre de variable propositionnelle est une formule.
- P_2 Si F est une formule, $\neg F$ est une formule.
- P_3 Si F et G sont des formules, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule. Ceci permet de construire des formules du calcul propositionnel et aussi d'analyser des formules complexes.

Dans le calcul des prédicats, on ajoute des ensembles dénombrables de lettres de variables, lettres de constantes, lettres de prédicats, et quand on fait des mathématiques les lettres de fonctions.

L'élément minimum est le terme : une lettre de variable, une lettre de constante sont des termes ; une fonction saturée par des lettres de variables et/ou des lettres de constantes est un terme. Un terme s'interprète comme un nom d'objet. Les règles de formation sont les suivantes :

- Un prédicat saturé par autant de termes qu'il a de place est une formule
- P_1 P_2 et P_3.
- P_4 Si F est une formule et x une lettre de variable $\exists x\, F$ et $\forall x\, F$ sont des formules.

La sémantique nécessite une structure interprétative : un univers du discours, des interprétations pour les lettres de prédicats, de fonctions et éventuellement de constantes et de fonctions.

Pour le calcul des propositions ; on a une **construction récursive de la vérité** via les tables de vérité des connecteurs. Pour le calcul des prédicats, on a une **construction récursive de la satisfaction** d'une phrase ouverte qui permet de définir la vérité des phrases closes.

La différence entre ces deux types de calcul s'explique par le fait que le calcul propositionnel s'applique dans des domaines d'objets finis. Or le remplacement, lorsque le domaine d'objets est infini, n'est plus réalisable. Ce qui est le plus souvent le cas en mathématiques ; de plus on ne peut pas le faire non plus concrètement lorsque le domaine d'objet est fini et que son cardinal est très grand.

Comme le souligne *Durand-Guerrier*, le point de vue de *Tarski* est à mettre en relation avec la pratique habituelle du mathématicien qui dans son travail articule le plus souvent les deux points de vue, en particulier lorsqu'il travaille avec des équations. En effet,

« *…Cette présentation de la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, correspond à la conception « **sémantique** » de la vérité dans les langages formalisés due à Tarski (1936), qui, lorsqu'il*

l'introduit, la relie explicitement à la notion ***de solution d'une équation*** *familière au mathématicien.* » (*Durand-Guerrier et al, 2000*, p.9)

Ainsi, il nous semble qu'une mise en évidence et un éclairage des éléments de logique, introduits dans ce chapitre, peut nous aider à analyser les questions d'interprétation et de raisonnement en mathématiques et plus précisément au niveau de la résolution des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle.

1.4 Aspects didactiques :

De nombreux travaux concernant les difficultés du passage de l'arithmétique à l'algèbre et en particulier les notions d'équations et d'inéquation au collège et au secondaire ont été conduits en didactique des mathématiques.

Vergnaud (1987) souligne que l'algèbre constitue une rupture épistémologique importante pour les élèves. En effet, l'arithmétique est un outil de résolution de problèmes de langage ayant pour objectif la recherche de l'inconnue selon des opérations adéquates. Tandis que l'algèbre scolaire consiste à manipuler des expressions littérales liant des variables et des données numériques dont le traitement consiste à appliquer des procédures automatiques conduisant à la solution.

Dans ses analyses Vergnaud s'intéresse aux différentes significations de l'égalité qui peut être interprétée, comme annonce d'un résultat, exprimant une relation qui n'est ni symétrique ni transitive, ou comme égalité de nombres, sous la contrainte d'un choix adéquat des valeurs des inconnues :

$5 + 3(x + 6) = 7x – 17$

ou encore comme une identité :

$5 + 3(x + 6) = 3x + 23.$

Outre la question de l'égalité, Vergnaud s'est intéressé au statut des lettres et a montré que c'est au niveau de la manipulation des égalités entre expressions algébriques, sans aucune référence aux nombres, que réside la rupture arithmétique / algèbre et particulièrement au niveau des équations du type : $ax + b = cx + d$. Cependant, les catégories sous-jacentes, qui offrent selon nous un cadre d'analyse pertinent pour les questions abordées, sont présentes, et ce bien qu'elles ne soient pas totalement explicitées, puisqu'en particulier, ni la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, ni la nécessité d'une articulation entre les aspects syntaxique et sémantique n'apparaissent en tant que telle.

Chevallard (1989) quant à lui, se place explicitement dans la dualité sémantique / syntaxe qu'il interprète comme l'incontournable dialectique qui existe entre l'arithmétique et le calcul algébrique.

« *Lorsqu'en classe de sixième, l'enseignant passe de l'observation que* $2+3=5$ *et* $3+2=5$, *à l'écriture de la relation générale* $a+b=b+a$, *il passe alors du calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficient entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique, que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique*[1]. » (*Chevallard*, 1989, p.50)

Les difficultés des élèves sont interprétées comme l'absence de mise en relation des aspects syntaxiques (manipulation des expressions algébriques) et sémantique (substitution des valeurs dans l'expression). En fait, *Chevallard* mobilise explicitement les catégories logiques qui lui on permis de conclure que le travail fait au collège, essentiellement de nature syntaxique, sans articulation avec le point de vue sémantique, va se révéler inadéquat au lycée lorsqu'il s'agira d'utiliser l'outil algébrique dans des situations diverses. Ceci, en s'appuyant sur le problème d'ingénierie curriculaire qui joue un rôle fondamental dans l'introduction du savoir – savant dans l'enseignement. C'est une piste que nous avons choisi d'explorer dans le cadre de notre analyse des programmes et des manuels scolaires.

En s'appuyant sur les recherches existantes en didactique de l'algèbre, et plus particulièrement au niveau de la rupture arithmétique / algèbre, Grugeon (1997) construit une structure multidimensionnelle d'analyse de la compétence algébrique adaptée aux niveaux d'enseignement choisis, permettant d'étudier les rapports personnels et de les traduire en termes de profils des élèves. L'auteur met au cœur de son travail d'analyse l'articulation sémantique / syntaxe :

« *La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.* » (*Grugeon*, 1997, p.179)

Il nous semble cependant que dans la structure d'analyse multidimensionnelle, les éléments concernant l'égalité d'une part, le statut des lettres d'autre part, mériteraient d'être mieux explicités en référence aux catégories logiques. C'est au niveau des relations d'équivalence et des relations binaires indiqués par l'auteur que :

- Nous pensons que, dans une équation, il est nécessaire de faire une extension de l'égalité entre deux expressions par exemple 2x + 5 = x + 8

[1] *De même la sémantique n'est autre que la sémantique logique.*

qui pourrait être vérifiée ou pas suivant les valeurs associées aux lettres. Ceci pourrait être traduit en termes de phrases ouvertes sans valeurs de vérité, c'est à dire des phrases insaturées. Une telle phrase donne lieu à une proposition par attribution d'un objet (ici un nombre) à la variable x qui produirait un couple :

- Le réel 3 produit le couple (11 , 11) qui satisfait la relation 2x + 5.
- Le réel 5 produit le couple (15 , 13) qui ne satisfait pas la relation.

❖ Une identité de la forme x + 2x = 3x qui permet de substituer 3x à 2x + x sans rien connaître de x. Ce qui donnera à x soit un statut d'élément générique pour exprimer le fait que n'importe quelle valeur attribuée à x est solution de l'équation soit un statut de variable liée par un quantificateur universel. Autrement dit : x est une variable muette et on a : $\forall x, (2x + x = 3x)$. Nous pouvons dire, également, qu'une identité peut également être établie par des transformations syntaxiques. Ainsi l'identité (pour tout x , 2x + x = 3x) s'établit syntaxiquement en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication et signifie que les deux programmes de calcul associés donnent le même résultat quelque soit le nombre de départ auquel ils s'appliquent.

Grugeon (1997) choisit de considérer que l'inconnue est un nombre faisant partie du domaine algébrique ; pour notre part, l'inconnue se situe à l'interface entre arithmétique et algèbre. En effet, l'inconnue en arithmétique est en général un nom d'objet, donnant lieu a des énoncés singuliers, tandis qu'en algèbre, l'inconnue est interprétée le plus souvent comme une variable dans des phrases ouvertes selon le point de vue de *Tarski*.

Le travail de *Sackur* et *Maurel* (1999) intitulé : « les inéquations en classe de seconde » se réfère explicitement à la logique de *Frege* afin de poser le problème de la nécessité des énoncés mathématiques puisque les connaissances mathématiques des élèves risquent de se réduire à une liste de règles sans liens entre elles. En fait, connaître la nature du savoir mathématique peut aider les élèves à apprendre, exploiter et même s'intéresser aux mathématiques. Toutefois, les notions de *conformité* et de *performance*, utilisées dans cette recherche, peuvent se rapprocher de la dualité entre syntaxe et sémantique développées par le cadre de la logique des prédicats. En effet, la conformité est définie comme l'accord avec les règles édictées par autrui (professeur qui représente les mathématiciens…) et la *performance* représente l'accord avec la réalité mathématique que l'on peut situer au niveau de l'interprétation dans *un domaine de réalité donné* (par exemple l'ensemble ordonné des nombres réels).

Nous faisons l'hypothèse, avec *Durand-Guerrier* (2000) que la conception sémantique de la vérité développée dans la théorie des modèles de *Tarski* et la notion de satisfaction de phrases ouvertes offrent un cadre de référence pertinent pour répondre et explorer certaines des questions que nous avons soulevées.

2. Analyse en termes de sémantique et de syntaxe des programmes et des manuels scolaires :

Notre analyse didactique des programmes et des manuels scolaires a pour objectif d'explorer le degré d'articulation entre la sémantique et la syntaxe dans le traitement des équations et des inéquations.

2.1 Etude des programmes :

En consultant les programmes du deuxième cycle de l'enseignement de base (huitième et neuvième année de base) et du premier cycle de l'enseignement secondaire (première et deuxième année secondaire), relatifs à la réforme de 1998, nous constatons qu'au niveau de la résolution des équations et des inéquations, l'aspect sémantique n'apparaît pas d'une façon explicite mais seulement sous la forme de recommandations prodiguées à l'élève afin de contrôler ses résultats. Quant à l'aspect syntaxique, il est employé d'une façon explicite même comme objectif spécifique et principal de résolution.

Les équations :

Dans les programmes de 8^{e} et 9^{e} années de l'enseignement de base (Annexes 1 et 2), il est recommandé de fournir à l'élève un moyen de contrôle des équations, lui permettant de les interpréter et de donner un sens à la *phrase ouverte* qui en résulte avant de commencer la résolution. La résolution devient, par la suite, une proposition vraie ou fausse au moment de la vérification. Les situations de résolution de problèmes constituent une occasion de modélisation par la mise en équation et de rencontre implicite de la notion de variable. La composante sémantique apparaît particulièrement au moment de la vérification et de l'interprétation des résultats, alors que la composante syntaxique est toujours présente lors de la deuxième phase de la modélisation, qui correspond à la résolution de l'équation.

La modélisation prend une importance encore plus grande en 1ère année secondaire. En effet, les objectifs spécifiques du programme officiel (Annexe 3) prescrivent de rendre l'élève capable de mettre en équation tout problème donné, puisé dans les domaines des mathématiques ou de la physique ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. De plus, il est recommandé explicitement de dégager les différentes phases de la résolution d'un problème. Les jeux entre les registres sémantiques et syntaxiques sont encouragés, tout en permettant la maîtrise des différents statuts de la lettre en tant que variable ou en tant qu'inconnue.

L'aspect sémantique est presque absent au niveau de la deuxième année du premier cycle de l'enseignement secondaire, l'élève étant supposé se limiter implicitement à trouver un résultat et non à l'interpréter ni à voir sa valeur de vérité ou de fausseté. Dans le programme officiel (Annexe 4), le retour sur les équations a pour objectif la consolidation des acquis des élèves sur les notions de racine d'une équation et d'ensemble des solutions d'une équation et la manipulation des valeurs absolues.

Les inéquations :

L'enseignement des inéquations débute en 9ème année de base et ce n'est qu'à ce niveau qu'il recommande d'exploiter les représentations graphiques de la droite réelle afin de préciser l'ensemble des solutions des inéquations. Notons l'apparition de la notion de variable et l'utilisation de l'aspect sémantique. Au niveau de la 1ère année secondaire, la résolution des problèmes dans lesquels interviennent les inéquations, encourageant ainsi les jeux entre les registres sémantique et syntaxique. Enfin, au niveau de la 2ème année secondaire, il est recommandé de consolider les acquis des élèves sur les encadrements des nombres réels en manipulant des valeurs absolues, sans pour autant signaler l'importance de la vérification et de l'interprétation du sens des phrases ouvertes.

2.2 Etude des manuels scolaires (2002-2003) :

Pour en savoir plus, nous avons choisi d'analyser les manuels destinés aux élèves des classes des 8ème et de 9ème années de l'enseignement de base et ceux des 1ère et 2ème années du secondaire, afin de mettre en rechercher si la prise en compte des aspects sémantique et syntaxique est explicite ou implicite.

Nous avons ciblé, en premier lieu, les activités et les exercices d'application inclus dans le cours et, en second lieu, la liste des exercices placés à la fin de chaque chapitre, puis nous avons essayé de classer ces questions en trois catégories :

1) Celles qu'on peut résoudre uniquement en se basant sur l'aspect sémantique.
2) Celles qui favorisent l'aspect syntaxique.
3) Celles qui emploient les deux aspects sémantique et syntaxique en même temps.

A l'issue de ce travail d'analyse, nous avons relativiser notre point de vue, constatant que les questions incitant les élèves à vérifier et à interpréter les solutions trouvées dans les problèmes nécessitant la résolution des équations ou des inéquations du premier degré à une inconnue réelle, sont présentes bien qu'employées de façon timide. Elles confirment par contre que le point de vue sémantique recule de manière significative au fil des années.

CONCLUSION

Il est évident que l'étude des programmes et des manuels ne remplace pas l'étude de l'activité des professeurs dans la classe, mais comme on peut penser que ces derniers appliquent les directives des programmes et ce que proposent les manuels de façon majoritaire, nous pouvons quand même soutenir l'hypothèse que l'enseignement favorise l'effacement du point de vue sémantique au profit du point de vue syntaxique au niveau des équations et des inéquations au cours de l'avancement dans le cursus.

Bibliographie

CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation, In *Petit x*, n°19, pp.43-72.

DURAND GUERRIER V., LEBERRE M., PONTILLE M .C. & REYNAUD – FEURLY J. (2000), *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants* .IREM de Lyon.

FREGE G. (1971), *Ecrits de logique et philosophiques*, Paris, Seuil.

GRUGEON B. (1997), Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, In *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 17, n°2, pp.167-210.

OUELBANI M. (2000), *Introduction à la logique*, Tunis, Centre de Publication Universitaire.

TARSKI A. (1971), *Introduction à la logique*, Paris : Gauthier-Villard.

TARSKI A. (1974), *Logique, sémantique, métamathématique*, A. Colin, t.2.

VERGNAUD G., CORTES A., FAUVRES-ARTIGUE P. (1987), Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles problèmes épistémologiques et didactiques, *In Actes du colloque de didactique et acquisition des connaissances*, pp. 259-279, Sèvres (France), 25, 26 et 27 Mai 1987 : CIEP.

Annexe 1 : Extrait des programmes officiels (1998) de l'enseignement de base : 8ème année de l'enseignement de base.

THEMES	**Article 5 :** Ensemble **Q** ; Calculs dans **Q**
OBJECTIFS SPECIFIQUES	L'élève sera capable de : • Résoudre une équation de la forme ax = b dans l'ensemble des nombres rationnels. • Résoudre des problèmes d'équations du premier degré à une inconnue dans l'ensemble des nombres rationnels.
CONTENU	Exemple d'étude de problèmes conduisant à une équation ou une équation du premier degré à une inconnue réelle.
RECOMMANDATIONS	Exemples de résolution de problèmes d'équations du premier degré dans l'ensemble des nombres rationnels.

Annexe 2 : Extrait des programmes officiels (1998) de l'enseignement de base : 9ème année de l'enseignement de base.

THEMES	**Article 4 :** Equations et inéquations du 1er degré à une inconnue réelle
OBJECTIFS SPECIFIQUES	L'élève sera capable de : • Résoudre une équation ou inéquation du 1er degré à une inconnue réelle • Résoudre des problèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré à une inconnue réelle.
CONTENU	Equation et inéquations degré à une inconnue réelle
RECOMMANDATIONS	* La résolution des équations et des inéquations sera faite partir des exemples numériques et sans étude théorique et sans aucun média. * Les élèves ne sont pas obligés à résoudre des équations ou inéquations contenant des valeurs absolues qui demandent des discussions.

Annexe 3 : Extrait des programmes officiels (1998) de l'enseignement secondaire : 1ère année de l'enseignement secondaire.

THEMES	**Article 7 :** Equations et Problèmes
OBJECTIFS SPECIFIQUES	L'élève sera capable de : • mettre en équation ou en inéquation un problème donnée. • résoudre une inéquation ou une inéquation du 1er degré à une inconnue réelle…
CONTENU	Equation et inéquations degré à une inconnue réelle
RECOMMANDATIONS	* La résolution des équations et des inéquations sera faite partir des exemples numériques et sans étude théorique et sans aucun média. * Les élèves ne sont pas obligés à résoudre des équations ou inéquations contenant des valeurs absolues qui demandent des

	discussions.

Annexe 4 : Extrait des programmes officiels (1998) de l'enseignement de base : 2ème année de l'enseignement secondaire.

THEMES	**Article 2 :** Equations et inéquations du 1er degré
OBJECTIFS SPECIFIQUES	L'élève sera capable de résoudre une équation ou inéquation du 1er degré à une inconnue réelle contenant éventuellement une valeur absolue ou un paramètre
CONTENU	Equation et inéquations degré à une inconnue réelle, les coefficients pouvant être des paramètres
RECOMMANDATIONS	* Le retour sur les équations (inéquations) qui se ramènent à des équations (inéquations) du premier degré à une inconnue réelle aura, entre autres objectifs, celui de consolider les acquis des élèves sur les notions de racine d'une équation et d'ensemble des solutions d'une équation ou d'une inéquation. * Les équations et les inéquations contenant des valeurs absolues amèneront « naturellement » les élèves à considérer leur étude dans les intervalles adéquats. Elles offriront aux élèves l'occasion de manipuler des valeurs absolues, d'encadrer des réels et de vérifier qu'un réel appartient à un intervalle donné. * Pour les équations et les inéquations contenant un paramètre, on s'appliquera à choisir les coefficients de manière à obtenir des discussions simples. On n'oubliera pas que l'essentiel n'est pas de faire acquérir des réflexes de discussion mais d'amener les élèves à envisager « naturellement » la discussion lorsqu'elle s'impose.