



Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.

Marc Rogalski

► To cite this version:

Marc Rogalski. Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.. IREM de Paris. IREM de Paris, 11, 1991, Cahier de DIDIREM, Michèle Artigue, 2-86612-104-X. hal-02138842

HAL Id: hal-02138842

<https://hal.science/hal-02138842>

Submitted on 24 May 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

**UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE EN DEUG A
PREMIÈRE ANNÉE**

Par M. ROGALSKI

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ - PARIS VII

**UN ENSEIGNEMENT DE
L'ALGÈBRE LINÉAIRE
EN DEUG A PREMIÈRE ANNÉE**

Marc Rogalski

**Université des Sciences
et Techniques de Lille**

**Equipe d'analyse
Unité associée au CNRS n° 754
Université Pierre et Marie Curie**

Octobre 1991



UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE EN DEUG A PREMIÈRE ANNÉE

Marc Rogalski

Université des Sciences
et Techniques de Lille
Octobre 1991

C'est un fait assez bien établi que l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année scientifique des universités françaises marche mal, c'est à dire se traduit chez les étudiants par un apprentissage médiocre des concepts, des méthodes et même des techniques de l'algèbre linéaire. Des essais pour modifier cet enseignement, jusqu'alors très "bourbakiste", ont déjà eu lieu, il y a près de dix ans (voir le livre de E. Lehmann [9]), ou plus récemment en France (cf [10] au CNAM et le début d'expérimentation à Lille [20]) et à l'étranger (cf G. Harel [6]).

Ce n'est que depuis 1987 qu'on peut trouver dans la littérature une réflexion plus approfondie ou une analyse didactique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire (cf [1], [16], [17], les travaux de A. Robert et J. Robinet [12], [13], et surtout la thèse de J.-L. Dorier [2], [3], [4]).

C'est en s'appuyant sur ces anciennes expériences et sur ces analyses plus récentes que, dans une section de première année de DEUG A de l'université de Lille 1, a été mis progressivement en place, testé et modifié, sur plusieurs années, un enseignement assez nouveau de l'algèbre linéaire. Les enseignants suivants ont participé, à un moment ou un autre, à la réalisation de cet enseignement: M.-C. Ayats, E. Cousquer, M.-J. Delval, K. Sou, M. Rogalski, N. Roussignol, C. Sacré, F. Zedek. Un enseignement assez voisin, mais avec certaines différences, a lieu aussi depuis 1988 dans une autre section, avec P. Caron, E. Cousquer, R. Devolder, A. D'Hoine; on peut en trouver les idées dans [1].

Nous nous proposons dans ce qui suit de présenter les choix faits dans la version la plus récente de notre enseignement, en y incorporant de plus des modifications que nous nous proposons encore de faire au vu de la dernière année enseignée. Il s'agit d'une ingénierie conçue explicitement pour s'étaler sur une année entière, située dans le cadre d'un enseignement comportant d'autres aspects expérimentaux, et participant d'un projet explicite de modifier les points de vue et les comportements des étudiants face aux mathématiques en général. Nous avons donc choisi le cadre de description des "ingénieries longues" proposé par A. Robert (cf [11]), en le modifiant pour tenir compte de l'imbrication avec les autres mathématiques enseignées et pour dire comment nous avons utilisé dans nos choix les travaux et réflexions effectués sur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Plan

- I. Le public
- II. Les caractères spécifiques du contenu: épistémologie, transposition, relations avec les autres mathématiques, connaissances préliminaires
- III. Les problèmes didactiques
- IV. Les objectifs généraux d'apprentissage
- V. Les choix et l'organisation globale
- VI. Quelle "évaluation" ?

I. Le public

A. Analyse du public

Il s'agit d'étudiants de première année de DEUG A, ayant en général eu la moyenne aux épreuves scientifiques du baccalauréat, mais rarement une mention. On trouve parmi eux environ 70% de bacheliers C et 30% de bacheliers D (assez différents, voir [21]), et entre 30 et 40% de redoublants. Il s'agit en général d'un public plutôt scolaire, dont l'épistémologie spontanée se résume assez bien dans la formule "telle notion est importante parce qu'elle peut servir pour les problèmes d'examen", et qui a tendance à prendre les mathématiques pour un ensemble de recettes permettant de résoudre des problèmes bien calibrés, en gros les problèmes de bac, prévus pour fonctionner dans un seul cadre. Ces étudiants s'attendent à un prolongement dans le supérieur de ce type de mathématiques, et vivent très mal la rupture de contrat, même annoncée, qui a lieu sur ce point.

Mais il s'agit cependant d'un public d'adultes avec qui la discussion explicite des contrats est possible, qui peuvent réfléchir sur les mathématiques et même sur les manières de les apprendre: une grosse demande sur ce dernier point surgit dès qu'il leur apparaît qu'ils ne pourront s'en tenir au contrat scolaire habituel. On constate même que des activités mathématiques de type radicalement différent de ce qu'ils avaient l'habitude de faire peuvent les passionner (rédaction collective de mémoires, par exemple, ou bien T.P. sur ordinateur). Ils se destinent en général à des "professions scientifiques" (enseignant, ingénieur, sont les vœux les plus fréquemment exprimés), mais n'ont qu'une idée très vague du type d'activités intellectuelles qu'elles demandent.

Enfin, il s'agit d'étudiants dont très peu ont une activité salariée, qui ont donc du temps pour travailler, et qui sont capables d'un grand travail personnel... quand ils arrivent à l'organiser efficacement. Mais la forte diminution du temps de présence avec les enseignants, par rapport au secondaire, leur donne souvent, au début, une illusion de plus grande facilité et de plus grande liberté qui est souvent ressentie... trop tard! comme un piège.

Les problèmes des préliminaires spécifiques du public vis-à-vis du contenu de l'algèbre linéaire seront envisagés dans le paragraphe concernant les spécificités du contenu.

B. Quels leviers utiliser avec un tel public?

* Un discours métamathématique sur les enjeux et les contrats peut être entendu, et nous le faisons, à la fois sur l'ensemble des contenus mathématiques et sur ceux spécifiques de l'algèbre linéaire, avec des mises en perspective emboîtées (l'activité scientifique, les mathématiques, l'algèbre linéaire, l'utilité professionnelle...). Sur ce point et le suivant voir [21].

* Nous utilisons aussi un discours sur "comment apprendre" étroitement associé au contrat reliant les différentes formes de l'évaluation et aux considérations épistémologiques concernant les contenus (changements de cadre, dialectique outils/objets, concepts et techniques...).

* Dans plusieurs des points du programme nous avons choisi de faire un enseignement explicite de méthodes, y compris depuis un an en algèbre linéaire (et sous une forme sans doute encore à beaucoup améliorer).

* Nous avons choisi de démarrer l'année en donnant beaucoup de travail personnel aux étudiants.

* Nous avons décidé, d'introduire des "T.P." de mathématiques utilisant l'informatique, et dont certains devraient jouer un rôle important pour la compréhension de concepts du cours, y compris en algèbre linéaire.

* Enfin, tous les étudiants doivent réaliser (par groupe de trois environ) un mémoire, en général choisi parmi une liste de sujets qui leur est proposée (cf. [18], [21]).

II. Les caractères spécifiques du contenu

A. Epistémologie

1/ La place dans les mathématiques et leur histoire

Un mathématicien d'aujourd'hui voit dans l'universalité du formalisme de l'algèbre linéaire (c'est presque un des langages des mathématiques actuelles) une forme parfaite de la démarche de simplification et de généralisation qui est au cœur de la méthode axiomatique. Au point qu'il lui paraît naturel et économique de commencer par elle. Et c'est justement ce qui pose problème pour l'enseignement: d'une part cette méthode axiomatique est très étrangère aux bacheliers; de l'autre, le constat quotidien montre que même quand les étudiants admettent (et parfois préfèrent au

début) ce genre d'enseignement, il se produit très rapidement des pertes de sens importantes.

On trouvera dans la thèse de Jean-Luc Dorier [3] une étude importante de cet aspect de l'algèbre linéaire, à travers une analyse historique et épistémologique qui montre bien comment l'axiomatique est dernière.

L'auteur met en évidence le fait que l'émergence de l'algèbre linéaire a été un processus long et complexe, une convergence de multiples problèmes, où les changements de point de vue et les apports "extérieurs" ont été déterminants. Quatre aspects principaux, se situant à des niveaux différents, se dégagent de ce processus. La composante du "linéaire", dont l'étude des équations linéaires a été le nerf, mais qui a fait intervenir de nombreux autres domaines: courbes algébriques, théorie des déterminants, formes quadratiques, transformations linéaires, matrices. La composante formée par la géométrie analytique, transition vers le calcul vectoriel et l'abord des espaces $\mathbb{R}^n$. Le calcul vectoriel, issu de la géométrie et effort pour s'en dégager en la formalisant. L'étape, enfin, de l'algèbre linéaire proprement dite, d'abord dans le cadre des espaces $\mathbb{R}^n$, le langage algébrique permettant dans un premier temps de se débarrasser des déterminants, puis dans le cadre axiomatique, qui ne se diffusera au-delà des précurseurs, surtout influencés par l'algébrisation de la fin du 19^e siècle, que lorsque la problématique de la dimension infinie l'imposera en analyse.

Jean-Luc Dorier met clairement en valeur à quel point certains concepts centraux ont eu du mal à se dégager: notion de vecteur en géométrie, notion de rang, d'abord de systèmes d'équations avant de l'être pour des vecteurs. Il montre aussi clairement à quel point la "généralisation" en œuvre dans l'algèbre linéaire a eu des causes variées, internes et externes au niveau des problèmes, mais aussi des causes tenant à de nouvelles préoccupations, relevant de tendances historiques dans le développement des mathématiques: structures algébriques, soucis d'exposition,...

Enfin, il faut constater que l'algèbre linéaire "pure" sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en dimension finie est une discipline qui n'est plus guère active du point de vue de la recherche, sauf dans le domaine des opérateurs, c'est à dire des matrices. Mais c'est un outil extrêmement puissant de "modélisation" interne aux mathématiques: on formule de nombreux problèmes de divers domaines des mathématiques dans le cadre de l'algèbre linéaire, et les résultats de celle-ci permettent alors des résolutions rapides et élégantes. C'est l'aspect "langage universel" de l'algèbre linéaire qui apparaît ici important, mais c'est aussi de ce fait un aspect caché: on oublie qu'une langue doit s'apprendre avant que son usage devienne "naturel" (c'est un phénomène analogue de "naturalisation" qui a lieu en physique avec la "mise en équation", qui apparaît si naturelle aux physiciens qu'ils n'imaginent pas qu'elle ne le soit pas pour les étudiants).

2/ Les grands types de problèmes en algèbre linéaire en première année d'université

Ce sont les problèmes que nous essayons de valoriser tout au long de l'enseignement, et pour lesquels nous essayons de dégager des méthodes. Certains d'entre-eux pourraient motiver l'introduction de certains concepts.

@ Des problèmes internes (mais pouvant se poser dans des contextes extérieurs à l'algèbre linéaire, celle-ci servant de modèle dans lequel les problèmes ont été traduits), que nous énumérons dans le désordre:

- ✎ déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'équations, savoir si elle est génératrice;
- ✎ déterminer la dimension d'espaces vectoriels;
- ✎ décrire un sous-espace par des équations ou par des générateurs et des paramètres;
- ✎ trouver une base d'un espace vectoriel;
- ✎ déterminer des éléments caractéristiques d'une application linéaire: rang, noyau, image;
- ✎ déterminer la matrice d'une application linéaire;
- ✎ inverser une matrice...

@ Des problèmes externes, où l'on modélise *dans* l'algèbre linéaire des problèmes posés dans d'autres domaines mathématiques:

- ✎ résoudre l'équation $T(x)=y$ dans des domaines variés, où il faudra chaque fois, dans la *modélisation linéaire*, préciser les espaces, l'application linéaire T , ce qu'est y ...
- ✎ choisir des bases bien adaptées à la modélisation linéaire puis à l'étude d'un problème.

3/ Les questions pour lesquelles il y a de méthodes

Nos choix globaux d'enseignement en premier cycle universitaire nous amènent à développer chaque fois que c'est possible et utile des enseignements de méthodes (cf [14], [15], [21]). En ce qui concerne l'algèbre linéaire, nous pensons que des méthodes existent effectivement, mais il n'a pas été simple de pouvoir les analyser et les rassembler sous une forme peut-être enseignable. Il est certainement trop tôt pour affirmer qu'un enseignement de méthodes en algèbre linéaire est possible et induit un meilleur apprentissage de celle-ci.

Voici quelques points pour lesquels il nous semble en tout cas que peuvent se dégager effectivement des méthodes (voir annexe 1).

- (a) Trouver des égalités ou des inclusions entre sous-espaces;
- (b) prouver l'indépendance linéaire ou trouver le rang (selon la nature des vecteurs sur lesquels on travaille;

- (c) passer des équations d'un sous-espace à une représentation paramétrique et inversement;
- (d) trouver la matrice d'une application linéaire;
- (e) effectuer un changement de base;
- (f) trouver l'image et le noyau d'une application linéaire;
- (g) modéliser linéairement une situation ou un problème mathématique;

B. Les idées centrales qui guident nos choix de transposition

Nous avons choisi de mettre en évidence 5 idées centrales dans l'algèbre linéaire, telle qu'elle fonctionne en première année d'université. Le choix de mettre ces idées au centre de l'enseignement ne relève pas seulement de l'analyse du développement de l'algèbre linéaire et de son fonctionnement actuel. Nous prenons aussi en compte la nécessité d'une problématisation du domaine, même artificielle, la liaison avec les autres mathématiques enseignées, le besoin de construire certains préliminaires, en particulier "l'envie algébrique" de généraliser et de mettre en forme... Bref, il s'agit d'une transposition de l'algèbre linéaire dont les ressorts sont autant didactiques qu'épistémologiques. Nous présenterons plus loin les problèmes didactiques que pose cette transposition.

🔑 1 Une technique de base: la méthode de Gauss d'élimination.
 Pour résoudre des équations, trouver le nombre d'équations minimum pour définir un sous-espace, déterminer le rang d'une famille de vecteurs, identifier l'image d'une application linéaire, son noyau, ...

🔑 2 Un concept central: le rang, sous divers aspects:
 rang d'un système d'équations;
 rang d'une famille de vecteurs;
 rang d'un tableau rectangulaire;
 rang d'une application linéaire.

Avec ce concept, fonctionnent en même temps:
 l'indépendance linéaire;
 la notion de sous-espace engendré;
 la notion de base;
 la notion de dimension.

🔑 3 Un double point de vue: équations et paramétrage.
Deux manières de définir un sous-espace de dimension k dans un espace de dimension n : par $n-k$ équations indépendantes, ou engendré par k vecteurs indépendants au moyen de k paramètres.

🔑 4 Un modèle central de problématique: l'équation $T(x)=y$.
Un grand nombre des problèmes internes à l'algèbre linéaire et de ceux qui concernent les applications de l'algèbre linéaire peuvent se mettre sous cette forme, l'application $T : E \rightarrow F$ étant linéaire.

🔑 5 Une préoccupation constante: choisir des bases adaptées à la résolution des problèmes qu'on étudie, en particulier quand on se propose de modéliser linéairement un problème issu d'autres domaines des mathématiques.

C. Relations avec les autres mathématiques du DEUG

Cet aspect intervient de façon fondamentale, d'une part dans le fonctionnement actuel de l'algèbre linéaire: cadre dans lequel il est "naturel" et "simple" d'exprimer beaucoup de problèmes; d'autre part dans les ressorts du développement historique de l'algèbre linéaire, et donc dans une éventuelle possibilité de problématisation des concepts pour l'enseignement.

1 / La géométrie des droites et plans dans l'espace et la géométrie cartésienne

On peut à ce propos distinguer plusieurs aspects, qui peuvent jouer selon les cas dans un sens ou dans l'autre dans les changements de cadre.

(a) fournir un support géométrique et (peut-être) intuitif à certains concepts de l'algèbre linéaire et au langage vectoriel (cf à ce sujet [13]);

(b) interpréter des équations linéaires, en permettant une conservation du sens dans la manipulation calculatoire;

(c) donner un statut géométrique à la pratique de l'élimination et à la dualité de représentation: équations/paramétrage;

(d) donner des moyens puissants pour résoudre certains problèmes géométriques par l'intermédiaire de l'utilisation de la structure vectorielle des équations de certains objets (plans, cercles ou sphères, coniques); avec une difficulté: l'objet géométrique est une classe d'équations, c'est à dire un élément du projectif associé...C'est un peu difficile en première année...

2/ Les liens conceptuels entre les équations linéaires et les autres mathématiques sont peu visibles au niveau du DEUG, mais le lien technique est important

En effet, les courbes algébriques et les formes quadratiques, avec le rôle qu'y jouent les "substitutions" linéaires, ne sont pas du niveau du DEUG première année. Il est a priori tentant, par exemple, de vouloir utiliser le "paradoxe de Cramer" dans le cadre de la problématisation des notions d'indépendance linéaire et de rang, mais cela se révélerait sans doute trop difficile, et nécessiterait vraisemblablement de trop grands préliminaires. Disons que la question est ouverte... Mais c'est clair que toute "application" de l'algèbre linéaire mène rapidement à des équations, et il faut donc en dominer la technique.

3/ Les polynômes

Il y a là, évidemment, un champ privilégié pour les notions de dimensions et de base, à condition de ne pas se limiter aux bases naturelles, qui rendent souvent inutile, au contraire, le recours à l'algèbre linéaire; c'est donc la recherche de bases privilégiées pour certains problèmes qui doit jouer un grand rôle dans les rapports de l'algèbre linéaire avec les polynômes. Et on peut développer une "théorie linéaire" des polynômes. Reste que l'application de l'algèbre linéaire aux polynômes est souvent insatisfaisante. En effet, si on obtient facilement des résultats d'existence et d'unicité, la recherche pratique oblige souvent à utiliser des algorithmes dont les concepts d'algèbre linéaire ont disparu (c'est le cas par exemple pour la décomposition des fractions rationnelles, ou les divisions de polynômes).

4 / Suites, équations différentielles ou fonctionnelles

Les liens de ces domaines avec l'algèbre linéaire, s'il sont naturels pour un mathématicien, demandent un saut qualitatif important pour les étudiants, un changement de niveau dans les conceptions: accepter de considérer une suite ou une fonction comme un "vecteur" d'un espace, ce qui demande d'avoir assimilé l'idée de la suite et de la fonction à la fois comme "globalité" et comme élément d'un ensemble. Si ce pas est franchi, alors il s'agit d'un domaine où la "modélisation linéaire" des problèmes trouve un champ quasi illimité, même au niveau d'une première année d'université.

D. Les connaissances préliminaires

On trouvera dans [3] une étude didactique des corrélations entre la présence ou l'absence de diverses connaissances et la réussite en algèbre linéaire, et dans [12] une analyse des erreurs fréquentes. Une brève

synthèse se trouve dans [17]. Il se dégage de ces travaux la nécessité, pour apprendre l'algèbre linéaire, de certains préliminaires ou de certaines connaissances éventuellement utiles à enseigner en même temps que l'algèbre linéaire, mais certainement plus particulièrement dès le début. Ces prérequis ne se placent d'ailleurs pas sur le même plan.

1 / Une compréhension des enjeux de vérité en mathématiques et une certaine pratique de la logique élémentaire et du langage ensembliste semblent des préliminaires nécessaires

Il faut comprendre de quoi on parle, garder le contrôle du sens pour des assertions qui ne vont pas être immédiatement "concrètes", et être capable de faire des raisonnements assez délicats. On constate par exemple que l'implication et l'équivalence soulèvent des difficultés, particulièrement en algèbre, si on ne les distingue pas; ainsi, une démonstration d'indépendance se conclut assez souvent par "si les a_i sont nuls, on a montré que $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0$, donc les u_i sont indépendants"! D'autre part, de gros problèmes apparaissent avec les quantificateurs; par exemple, si on demande dans un problème à quelles conditions sur le paramètre t l'espace $\text{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ contient l'espace $\text{lin}\{u(t), v(t)\}$, la question risque d'être traduite en: chercher t pour que $\forall x, y \ni a, b, c$ vérifiant $xu(t) + yv(t) = ae_1 + be_2 + ce_3 \dots$. Il est clair qu'il faut alors dominer les quantificateurs pour s'en sortir!

Parmi les activités fréquentes en algèbre linéaire on trouve: l'identification de sous-espaces, la preuve d'inclusions, l'utilisation d'intersections... Il faut aussi savoir interpréter en termes d'injection, de surjection, la résolubilité ou le nombre de solutions d'équations $f(x)=y$. On utilise en permanence une notion générale d'application, déconnectée de tout support numérique ou graphique. Tout ceci demande une certaine familiarité avec les idées et les méthodes de la théorie ensembliste élémentaire. Il y a un passage obligé par le formalisme, qui intervient d'ailleurs aussi dans l'aspect suivant.

2 / Une acceptation (au moins) de la "démarche" algébrique et axiomatique

Accepter de raisonner avec des symboles sans support immédiat, considérer comme des "êtres" individuels des objets mathématiques riches, manier des lois de composition simples, accepter qu'un détour formel puisse amener à une simplification ultérieure et augmenter les champs d'application, que généraliser n'est pas un exercice gratuit... Tout ceci relève de ce qu'on peut appeler la démarche algébrique et axiomatique, et semble déterminant en algèbre linéaire, ne serait-ce que pour en accepter la règle du jeu. Reste que le problème relève sans doute autant, sinon plus, d'une approche

métamathématique de l'enjeu des mathématiques que de connaissances précises en algèbre.

3 / Une pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne

Il n'y a pas sur ce point, contrairement aux précédents, d'études précises. Mais il y a un fort consensus des personnes qui ont réfléchi à la question, et nous l'adoptons comme hypothèse (voir [13]).

Ces connaissances géométriques vont être un support important pour le langage et le sens en algèbre linéaire. Il semble d'ailleurs qu'on puisse les enseigner en même temps que les débuts de l'algèbre linéaire. On peut rajouter à cet aspect des choses le fait qu'une pratique du "dessin symbolique" dans l'espace pour représenter des situations générales de l'algèbre linéaire semble utile, et demande sans doute un apprentissage particulier parallèle à celui de l'algèbre linéaire.

III. Les problèmes didactiques qui se posent a priori

Ils dépendent des choix relatifs à la stratégie d'enseignement et aux objectifs d'apprentissage. Nous y reviendront plus loin. Disons, pour l'instant, que les objectifs vont s'articuler autour des problèmes présentés en II. A. 2/ et des choix faits dans la transposition. La stratégie sera centrée sur deux idées: l'utilisation du métamathématique pour faire prendre conscience de la simplification et de l'unification apportées par l'algèbre linéaire et de son utilité comme cadre de modélisation intra-mathématique; et l'organisation de la confluence de divers aspects et de diverses interventions de l'algèbre linéaire. Les choix présentés dans les parties IV et V sont une tentative de réponse à ces problèmes.

A. L'organisation des situations d'apprentissages des concepts de l'algèbre linéaire

1/ L'absence de situations fondamentales

Dans sa thèse, J.-L. Dorier étudie les conséquences possibles de l'analyse historique et épistémologique de l'algèbre linéaire sur son enseignement. Il montre bien, à ce propos, comme l'avaient déjà supposé A.Robert et J.Robinet, les limites de l'approche de l'enseignement de l'algèbre linéaire uniquement en terme de "situations fondamentales", même si elles se placent dans l'optique de la dialectique outil/objet et des jeux de cadres. Il cite d'ailleurs une séquence didactique (la suite de Fibonacci ou des variantes) testée par plusieurs personnes, mais sans effet notable sur l'accès

aux concepts de l'algèbre linéaire. Plus généralement, il se demande comment envisager l'enseignement de concepts qui ne sont pas "naturellement" outils avant d'être objets. L'analyse épistémologique et historique faite l'amène à considérer que tel est le cas des concepts de l'algèbre linéaire, qui apparaissent comme beaucoup plus unificateurs et généralisateurs qu'outils indispensables pour résoudre des problèmes qu'on peut résoudre plus "naturellement" et avec plus "d'économie de concepts" autrement (même si c'est parfois plus laborieux), en particulier au niveau du DEUG A première année.

Il y a là un contraste frappant avec divers secteurs de l'analyse, où des situations fondamentales et de plus non artificielles existent: qu'on pense par exemple à l'intégrale de Riemann (cf. [7]).

2/ Comment se servir alors, à la place, du rapprochement de divers problèmes, de divers cadres, de divers point de vue, telle qu'on le voit dans l'histoire ?

Il nous semble en effet que c'est un aspect important de l'algèbre linéaire que ce phénomène de rapprochement, et qu'une ingénierie doit pouvoir l'utiliser efficacement, quitte à l'accentuer artificiellement. Citons par exemple:

- * sur la notion de base, on peut confronter: la géométrie dans l'espace, l'étude des polynômes, l'étude de suites, la détermination des carrés magiques, la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants...

- * sur les notions d'indépendance linéaire, de rang et de dimension, on peut faire confluer: la résolution des équations linéaires, avec description de l'espace des solutions et de celui des conditions de résolution; le fait que si une équation de plus rajoutée à un système linéaire ne modifie pas l'ensemble des solutions, elle est combinaison linéaire des équations originales; l'étude des faisceaux de plans en dimension 3, avec visualisation éventuelle de la méthode du pivot sur micro-ordinateur; l'étude des courbes et surfaces simples en dimension 3, avec le double aspect: nombre d'équations et nombre de paramètres, avec la technique de l'élimination pour passer de l'un à l'autre, et le rapport avec la dimension de l'espace tangent; un peu plus tard, l'étude des applications linéaires apportera un autre éclairage sur ces notions...

- * pour les concepts d'image et noyau d'une application linéaire, on peut rapprocher: une approche géométrique, en particulier les projections (mais gare à l'effet pervers de la somme directe!); une approche calculatoire, en termes d'équations; une approche par les matrices; une approche avec des équations différentielles ou fonctionnelles ou dans le cadre des polynômes...

De façon générale, organiser la convergence de diverses connaissances déjà acquises autour d'un concept de l'algèbre linéaire va demander une

relecture simultanées de ces connaissances: est-ce supportable et efficace s'il ne s'agit que du discours du maître ? Sinon, quels problèmes, quelles situations créer susceptibles de confier aux étudiants une partie, cruciale pour l'acquisition du sens, de ce travail de "comparaison" ?

De plus, il n'est pas clair du point jusqu'où il faut créer des savoirs linéaires "locaux". L'approche par confluence semble imposer de telles créations, puisqu'il faut bien faire confluer quelque chose. Par exemple: développer l'approche linéaire des droites et plans de l'espace (faisceaux), tout savoir sur les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ définis par des équations linéaires, rassembler de nombreuses connaissances sur les polynômes s'exprimant linéairement... Mais ne se trouvera-t-on pas alors devant un saut conceptuel aussi difficile que si on avait enseigné directement les concepts correspondant de façon abstraite et "parachutée" ? La question était déjà posée dans [3], et notre expérience ne permet pas encore, me semble-t-il, de trancher. De plus le déroulement du temps va limiter nécessairement le nombre et la profondeur de ces savoirs locaux.

B. Comment utiliser le levier métamathématique ?

On trouvera dans [21] les raisons d'utiliser un tel levier, en particulier pour les théories ou les concepts qui ne sont pas, au niveau où on se place, outils avant d'être objet.

1/ Comment développer et utiliser la pratique de la modélisation linéaire *dans* les mathématiques ?

L'efficacité de la modélisation linéaire peut en effet être un levier intéressant pour saisir les enjeux de l'algèbre linéaire. Mais cela demande d'élaborer des situations de modélisation particulièrement aptes à mettre en valeur ce point. J.-L. Dorier a bien montré dans [3] que les problèmes traditionnels d'algèbre linéaire, même quand ils prétendent se placer dans cette perspective, n'atteignent pas leur but parce qu'ils ne laissent pas le travail de modélisation à la charge de l'étudiant, et passent sous silence le fait que c'est l'une des tâches importantes en algèbre linéaire. Il semble qu'il y ait lieu de dire explicitement quel est l'enjeu de connaissance, c'est à dire d'utiliser le levier métamathématique. Il y a ainsi lieu d'organiser les situations de nature métamathématique, de façon que les enjeux et l'économie soient des ressorts de l'apprentissage.

Mais d'autres difficultés interviennent. Parfois, les concepts d'autres secteurs ont été étudiés antérieurement dans un cadre si restreint que les regarder avec un point de vue algébrique étonne violemment les étudiants, est une rupture brutale avec tout un mode antérieur de fonctionnement; c'est semble-t-il le cas pour les fonctions numériques, voir [1] et l'exclamation spontanée d'un étudiant lillois "pour nous, une fonction, c'est

pas un vecteur!". Cet aspect peut être renforcé quand les objets mathématiques étudiés sont déjà assez complexes: y rajouter de l'algèbre linéaire ne fait que rebuter encore plus les étudiants, ou bien la complexité cache la simplification qu'apporterait l'algèbre linéaire (cf [12]).

On retrouve aussi le fait qu'utiliser une structure algébrique, c'est ne considérer qu'une facette des objets mathématiques étudiés, donc c'est à la fois perdre de l'information et comprendre en profondeur les raisons d'une démonstration ou les ressorts d'une méthode: on ne se sert que de telle propriété, donc on peut axiomatiser ainsi.

2/ Peut-on motiver l'apprentissage de l'algèbre linéaire par des situations mettant en évidence l'intérêt de la simplification qu'apporte le recours au général ?

Il s'agit bien sûr du côté axiomatique de l'algèbre linéaire, mais aussi de l'avantage du cadre de modélisation qu'elle propose. On peut approcher cet aspect par d'autres domaines des mathématiques: algèbre, évidemment (en théorie des groupes par exemple); mais aussi en analyse (donner un nom à un "groupement" dans l'expression définissant une fonction, une suite, et n'en retenir ainsi qu'un aspect utile au problème en jeu, par exemple).

Quels types de situations construire, susceptibles d'un traitement métamathématique, pour faire saisir les enjeux de l'algèbre linéaire ? J.-L. Dorier en présente quelques unes dans sa thèse (l'axiomatique, le choix d'un repère), mais il y a encore fort à faire.

3/ Quel enseignement de méthodes faire en algèbre linéaire ?

Le problème de cerner ce qui ressort de l'approche méthodique dans cette discipline n'est déjà pas simple, et la difficulté est accentuée par le double aspect de l'algèbre linéaire: théorie pour elle-même/cadre de modélisation intra-mathématique. Quand à savoir comment enseigner des méthodes, à quel moment, à l'occasion de quelles situations, il est loin d'être certain que nous ayons les réponses (mais il est vrai que c'est souvent le cas pour l'enseignement de méthodes, cf [14], [15], [21]).

4/ Faut-il, et si oui comment, apprendre à utiliser des dessins symboliques en algèbre linéaire ?

Spontanément, beaucoup de mathématiciens utilisent des dessins pour tester une affirmation, contrôler un résultat, se donner des idées dans la recherche d'un problème. C'est très difficile en algèbre linéaire pour les étudiants, à qui on n'a absolument pas appris à se servir de dessins en dehors du cadre de la géométrie pure ou des graphes de fonctions. Or, quand on dessine sur une feuille deux sous-espaces vectoriels et trois

vecteurs, ce n'est absolument pas "figuratif", on perd volontairement de l'information (sur les dimensions, par exemple), et il faut savoir laquelle il est pertinent de garder compte tenu du problème étudié. Il est fréquent que les cours, y compris d'algèbre linéaire abstraite, utilisent beaucoup de dessins au tableau, mais quel sens cela a-t-il pour nos étudiants, si on ne parle jamais de ces problèmes de choix de l'information à perdre, si on ne les fait pas travailler explicitement sur la question de la représentation graphique symbolique, sur ses règles, ses difficultés et ses avantages ? On peut ainsi se demander s'il peut être utile de faire un enseignement ayant pour objectif de familiariser les étudiants avec la pratique du dessin "non figuratif" en algèbre linéaire. Mais comment enseigner ce genre de choses ? Quelles situations créer, quels enjeux faire intervenir ? Y a-t-il des dessins canoniques auxquels se référer ? L'utilité des dessins symboliques est-elle assez grande pour y faire s'investir explicitement les étudiants ?

IV. Les objectifs généraux d'apprentissage

Nous les avons évoqués très sommairement plus haut, revenons-y avec plus de détails. Que voulons-nous, dans l'enseignement que nous présentons, que les étudiants "sachent" après un an d'algèbre linéaire ? Il est classique de distinguer, en cette matière, entre connaissances disponibles (auxquelles les étudiants doivent spontanément penser devant un problème) et connaissances mobilisables (qu'il doit être possible d'utiliser si on indique qu'il faut y avoir recours).

Quels sont les critères de choix pour répartir entre ces deux types de connaissances les objectifs du cours d'algèbre linéaire ? A vrai dire, nous avons du mal à les déterminer. Entre deux pôles assez clairs, nos choix restent assez pragmatiques, et d'autres que ceux que nous proposons sont sans doute aussi légitimes.

A. Connaissances techniques disponibles

Il est assez clair que l'algèbre linéaire demande d'avoir à sa disposition des connaissances techniques auxquelles il faut pouvoir faire appel de manière spontanée. Elles sont d'ailleurs peu nombreuses, et peuvent souvent se mettre en œuvre au moyen de la méthode de Gauss. Il s'agit de:

- 1/ la résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Gauss, avec interprétation en terme de "nombre" de solutions;
- 2/ la détermination du rang d'un système de vecteurs donnés par la matrice de leurs coordonnées;
- 3/ quelques résultats classiques sur des critères d'indépendance de vecteurs de certains espaces particuliers (polynômes et degré, etc...);
- 4/ la détermination de la matrice d'une application linéaire.

- 5/ la pratique du changement de bases;
- 6/ la pratique des opérations usuelles sur les matrices, en particulier le produit de deux matrices;
- 7/ l'inversion d'une matrice carrée par résolution du système associé;

Si ces activités sont de nature technique, il faut bien voir que certaines demandent des connaissances conceptuelles pour y être à l'aise, et en particulier pour disposer de moyens de vérification et de contrôle. C'est en particulier le cas pour les activités 2, 4 et 5.

B. Les concepts, questionnements internes à l'algèbre linéaire et méthodes que nous voulons rendre disponibles

1/ La capacité de se demander si un ensemble auquel on s'intéresse est un sous-espace d'un espace vectoriel, et la capacité de le vérifier, par la stabilité par les deux lois de composition de base, doivent pouvoir être des démarches autonomes chez les étudiants.

2 / La notion de rang est pour nous centrale; elle doit être disponible. En particulier, on doit pouvoir l'invoquer spontanément devant une situation où le nombre minimum d'équations utiles, ou bien le nombre de vecteurs ou de paramètres utiles, est inconnu: c'est le "bon" cadre pour se poser cette question, à laquelle nous voulons que les étudiants pensent seuls.

Bien sûr, les notions de dimension et de base vont de pair avec le concept de rang, et ces notions doivent être disponibles (on doit y penser spontanément) devant tout problème de détermination d'un sous-espace vectoriel; la première question à se poser est: quelle est sa dimension ? Puis-je en trouver une bonne base ?

3/ Dans le même registre de détermination de sous-espaces vectoriels, nous souhaitons rendre disponible la dualité de définition équations/paramétrage, avec la relation entre le nombre minimum d'équations et le nombre minimum de paramètres, et le moyen de passer d'une représentation à une autre; il est souhaitable que soient disponibles, avec cette notion, quelques images mentales, par exemple empruntées à la géométrie en dimension 3. Et nous souhaitons que le questionnement méthodologique "Quelle est la représentation que j'ai intérêt à prendre ?" soit disponible.

4/ Le concept de linéarité, c'est à dire d'application linéaire, doit lui aussi être disponible, étant entendu, et on y reviendra, que le plus utile sera de reconnaître spontanément le caractère linéaire d'une application définie à l'occasion de l'étude d'un autre domaine des mathématiques. En fait, il est nécessaire que le questionnement "j'ai là une application; et si elle était linéaire ?" soit spontané, renvoyant au constat qu'on sait résoudre beaucoup de problèmes dans le cadre linéaire et bien peu en dehors !

5/ Les concepts de noyau et d'image d'une application linéaire doivent évidemment être spontanément utilisables, en particulier pour réinterpréter la surjectivité et l'injectivité, et pour traduire l'équation $T(x)=y$ ou un système d'équations numériques linéaires. Avec ces concepts, doivent être aussi disponibles les deux méthodes (paramétrique-vectorielle ou avec des équations) pour déterminer effectivement noyau et image d'une application donnée par une matrice. Et il faut bien sûr connaître le lien entre les dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire.

6 / Un certain nombre des méthodes que nous pensons pouvoir dégager et enseigner en algèbre linéaire doivent être disponibles, dans la mesure où elles donnent accès au démarrage sur de nombreux problèmes. En particulier, nous semblent relever de ce caractère de disponibilité: le jeu entre les points de vue global, semi-global ou ponctuel pour les problèmes d'inclusions et égalité de sous-espaces; la dualité de méthode pour déterminer la matrice d'une application; la dualité paramétrique/équations à l'œuvre dans plusieurs problèmes: changement de base, détermination de sous-espaces, en particulier du noyau et de l'image d'une application.

C. Les notions internes à l'algèbre linéaire que nous voulons rendre mobilisables à la demande

1/ La notion de somme directe et de projections associées doit pouvoir être utilisée par les étudiants si on le demande, mais nous n'attendons pas qu'ils pensent spontanément à y faire appel dans un problème, car y penser exige en fait d'avoir déjà prévu un supplémentaire, c'est à dire de compléter de façon pertinente la base d'un sous-espace déjà donné.

2/ Certaines méthodes "abstraites" dans la recherche de l'indépendance de vecteurs doivent pouvoir être utilisées si on le demande, mais il paraît peu réaliste d'exiger des étudiants qu'ils y pensent seuls (utiliser une application linéaire convenable, par exemple...).

3/ L'axiomatique précise des espaces vectoriels est pour nous relativement secondaire, mais il faut être capable de vérifier qu'une structure sur un ensemble, qui n'est pas naturellement héritée d'un espace vectoriel plus grand, est une structure vectorielle, si on le demande (ce qui est somme toute assez rare...). Ceci ne veut pas dire que nous sous-estimons l'importance de la compréhension métamathématique de la démarche algébrique et axiomatique, mais nous préférons la développer à propos du rôle de modélisation interne aux mathématiques de l'algèbre linéaire.

4/ L'utilisation de l'équivalence entre l'injectivité et la surjectivité d'une application en dimension n doit pouvoir être utilisée si on le suggère. Mais nous n'avons pour l'instant pas mis au point de situation permettant suffisamment aux étudiants l'appropriation de ce principe très utile. Il ne faut donc pas attendre une démarche autonome des étudiants en cette

matière dans l'état actuel de l'ingénierie. Mais le problème reste ouvert de savoir s'il n'y a pas là un effort particulier à faire. Par ailleurs, ce point réapparaît dans les problèmes de modélisation, comme on le verra plus loin.

D. Des méthodes et questionnements mobilisables pour l'utilisation de l'algèbre linéaire comme cadre de modélisation intra-mathématique

Il nous paraît difficile dans ce domaine d'exiger des connaissances disponibles, dans la mesure où il s'agit plus d'état d'esprit et de méthodes assez générales que de connaissances sous forme d'énoncés précis. En fait, nous nous limitons à ce qu'un certain nombre de situations types soient suffisamment connues par les étudiants pour qu'ils y pensent lorsqu'on leur demandera explicitement de modéliser dans l'algèbre linéaire un problème d'un autre domaine, et qu'ils soient alors capables de se poser les mêmes questions et de travailler "de façon analogue". Nous ne savons guère faire mieux actuellement, et il n'est même pas sûr que nous soyons arrivés à obtenir ce type d'apprentissage. Mais ce n'est que très récemment qu'il nous a paru possible de faire jouer un rôle à cet aspect de l'algèbre linéaire dans l'enseignement de celle-ci.

1/ La recherche de bases adaptées à un type de problème nous paraît une stratégie efficace, qui trouve son application aussi bien en géométrie que dans des problèmes sur les polynômes ou les fractions rationnelles, domaines dans lesquels nous choisirons certaines situations typiques qui seront particulièrement étudiées (cf annexe 1). Cette stratégie aura en deuxième année d'autres champs d'application avec la diagonalisation, la réduction de Jordan, les formes quadratiques, les systèmes d'équations différentielles linéaires.

2/ La modélisation de problèmes sous la forme $T(x)=y$ est au cœur de bien des questions d'analyse, dès la première année d'université. Une telle activité de modélisation demande une capacité disponible: savoir se poser la question du caractère linéaire d'une situation par rapport à une variable qui est une fonction f , et savoir reconnaître si elle est linéaire (l'inconnue f n'apparaît qu'au premier degré, les termes qui en dépendent résultent d'opérations linéaires: dérivation, intégration, valeur en un point,...). Il faut aussi savoir distinguer la partie affine qui ne dépend pas de f (ce sera le "second membre" y). Le plus difficile est alors d'identifier les espaces vectoriels à introduire et l'application T , et c'est pour cette étape que l'analogie avec des exemples types peut se révéler efficace. Nous étudierons donc de façon plus approfondie quelques situations de référence: équations différentielles, suites récurrentes linéaires...

3/ Nous introduisons alors une idée générale, et nécessairement un peu vague, de méthode de "variation de la constante", vue sur des cas types:

suites récurrentes lineaires, équations différentielles. Il est entendu qu'il faut fabriquer une telle méthode concrète pour chaque problème modélisé par $T(x)=y$, afin de déterminer une solution particulière f_0 à partir de laquelle les solutions s'écriront $\ker(T)+f_0$.

4/ Nous insistons enfin sur l'outil puissant que constitue l'équivalence entre injectivité et surjectivité en dimension finie pour ramener des problèmes d'existence (souvent difficiles) à des problèmes d'unicité (souvent plus faciles), toujours en mettant en évidence un ou deux cas types (décomposition des fractions rationnelles, équation fonctionnelle), et en espérant simplement qu'alors un appel à cette méthode permettra de la mobiliser et d'imiter la démarche utilisée dans ces cas types.

E. Ce à quoi nous renonçons en première année

Nous avons choisi de renoncer totalement, en première année, à la notion de déterminant. Outre le problème du temps, nous pensons que l'introduction de cette notion incite trop les étudiants à se lancer dans des exercices stériles de virtuosité calculatoire, au moment où la compréhension des concepts de base devrait être encore prioritaire. L'utilisation pratique des déterminants est par ailleurs illusoire en terme de calculs numériques: il n'est par exemple guère possible d'inverser une matrice en calculant des déterminants, sauf problème ad hoc. L'utilisation des déterminants relève en fait de considérations théoriques: algèbre multilinéaire; mesures de surfaces ou de volumes en géométrie; valeurs propres, surtout utiles pour les formes quadratiques, les opérateurs, les systèmes linéaires d'équations différentielles; résultant de deux polynômes. Ces domaines d'intervention ne sont pas au programme de la première année. Nous renonçons donc aussi aux notions de valeurs et vecteurs propres.

Enfin, nous renonçons aussi à parler formellement de dualité en première année. Nous insistons beaucoup sur la "double représentation" des sous-espaces par équations ou paramétrage, et cela nous semble suffisant, tout en préparant le terrain pour des développements ultérieurs: formes linéaires, dual, base duale, polarité.

V. Les choix et l'organisation globale

A. Les choix globaux

Nous les mettrons en évidence à quatre niveaux différents. Celui de l'organisation des connaissances et des activités regroupe les paragraphes suivants, de 1 à 6. L'enseignement de méthodes est un autre aspect (paragraphe 7). Les modes de travail des étudiants sont évoqués aux

paragraphes 8 et 9. Enfin des principes concernant l'évaluation sont signalés en 10.

1/ Développer des préliminaires en même temps que le début de l'algèbre linéaire

Nous procédons ainsi pour la géométrie dans l'espace, le raisonnement mathématique et les éléments de langage de théorie des ensembles.

Le raisonnement donne lieu à une activité en amphi préalable à tout le cours de mathématique: "le circuit électrique", tel que M. Legrand l'a mis au point (cf. [8]). Il s'agit d'un enseignement où le sens du raisonnement mathématique est dégagé, et pas seulement ses règles et conventions. Un renforcement a lieu ensuite en TD. La géométrie dans l'espace et les éléments de théorie des ensembles sont développés à travers des activités en TD seulement. Voir les annexes 2 et 3 pour la géométrie.

2/ Donner dès le premier cours la méthode de Gauss

Cela nous donne tout de suite un moyen puissant de résolution de problèmes tant en algèbre qu'en géométrie du plan et de l'espace. De plus, cela nous permet de situer ce qui va être pour nous la problématique de base de l'algèbre linéaire: la résolution des systèmes d'équations linéaires, dont nous voulons tirer les concepts de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, de rang, de double représentation par équations et par paramétrage. Les questions de base, dont nous tentons qu'elles deviennent des questions pour les étudiants, et qui vont justifier l'introduction des concepts de l'algèbre linéaire, sont:

- * ai-je trop d'équations, pas assez, juste ce qu'il faut ?
- * combien de paramètres me faut-il pour décrire l'ensemble des solutions de ce système ? et les seconds membres permettant de résoudre ?

3/ Faire un enseignement de géométrie cartésienne dans $\mathbb{R}^3$ centré sur le double aspect équations/paramétrage

Nous pensons en effet que ce double aspect est trop pauvre quand on reste dans le linéaire pour en comprendre la généralité. Nous étudions donc des courbes et des surfaces, quitte à faire saisir l'imperfection de cette dualité si on ne se restreint pas au linéaire (dans $\mathbb{R}^3$ la droite $x^2+y^2=0$ n'est décrite que par un paramètre et par une équation...non linéaire). Un atelier (travail en petits groupes) est organisé sur l'appariement de formules d'équations et/ou de paramétrages avec des dessins de courbes et de surfaces. Voir annexe 4.

4/ Développer une théorie autonome des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, en liaison avec les équations linéaires et la géométrie dans $\mathbb{R}^3$.

"Autonome" signifie ici que la dualité nombre d'équations/dimension sera développée sans le recours à la notion abstraite, axiomatique, des

espaces vectoriels. Les équations servent de moteurs dans cette question: à quoi ressemblent l'ensemble des solutions et celui des seconds membres vérifiant les conditions de résolution ? La géométrie sert à soutenir l'intuition, donner des images mentales et un vocabulaire.

5/ Utiliser des méthodes linéaires dans divers domaines avant la notion générale d'espace vectoriel

C'est ce que nous avons appelé antérieurement des "savoirs linéaires locaux". Ce sera le cas, par exemple, pour: les polynômes, les suites récurrentes linéaires, les équations différentielles linéaires.

6/ Après l'introduction de l'axiomatique des espaces vectoriels, développer fortement l'aspect "cadre de modélisation interne aux mathématiques" de l'algèbre linéaire.

Cela se fait en reprenant les "domaines linéaires locaux" et en donnant aux étudiants des problèmes riches où le contrat soit de modéliser dans l'algèbre linéaire la situation proposée, en choisissant les caractéristiques de la modélisation (choix d'une base, par exemple) pour obtenir le maximum de simplicité ou le maximum de généralité dans les types de problèmes qui pourront ainsi être résolus (cf annexe 5). Cela s'accompagne d'un discours des enseignants sur les enjeux de la démarche algébrique et/ou axiomatique de l'algèbre linéaire, et sur son rôle de cadre de modélisation.

7/ Donner des méthodes en algèbre linéaire, et, quand cela paraît difficile, des situations de référence qui pourront servir de modèles pour "faire pareil" (en particulier pour la modélisation). Voir à ce propos ce que nous avons écrit au § IV, B et D; voir aussi l'annexe 1.

8/ Utiliser un logiciel pour visualiser la méthode de Gauss et acquérir une intuition géométrique de la combinaison linéaire d'équations et de l'élimination d'une variable (cf. annexe 6).

9/ Faire travailler les étudiants en petits groupes (cf. [21]) sur des problèmes riches et cruciaux pour certains aspects de l'algèbre linéaire (bases et carrés magiques, dualité équations/paramétrage; voir annexes 4 et 7); procéder de façon analogue pour l'initiation à la démarche algébrique (éléments de théorie des groupes, voir annexe 8), ainsi que pour l'utilisation de dessins symboliques en algèbre linéaire (voir annexe 9).

10/ Evaluer de façon différente ce qui relève de la technique et ce qui relève des concepts: interrogations écrites après travail personnel d'entraînement sur des fiches d'exercices, pour tout ce qui se traite directement par la méthode de Gauss, par exemple; examens

partiels à problèmes plus élaborés, avec si possible une modélisation dans l'algèbre linéaire d'un problème externe, pour ce qui concerne les concepts. Voir annexes 10 et 11 pour des exemples de ces deux types d'évaluation.

Il faut noter que cette dualité d'évaluation est développée sur l'ensemble des mathématiques de la première année. Il faut noter aussi que les étudiants ont tous un mémoire à réaliser pendant l'année (par groupe de 3), et nous donnons un ou plusieurs sujets portant sur l'algèbre linéaire ou l'utilisant; mais, bien sûr, cela ne pourra avoir d'effet que sur les étudiants ayant choisi les sujets correspondants; aussi ne parlerons-nous pas ici de cette pratique des mémoires (cf. [18], [21]).

B. Le déroulement dans le temps

Compte tenu de notre projet explicite d'enseignement de préliminaires en début d'année, et d'organisation drapprochement de divers thèmes et de diverses activités vers certaines notions d'algèbre linéaire, le déroulement dans le temps va jouer un rôle important. Nous le précisons donc ci-dessous. On peut distinguer trois étapes principales.

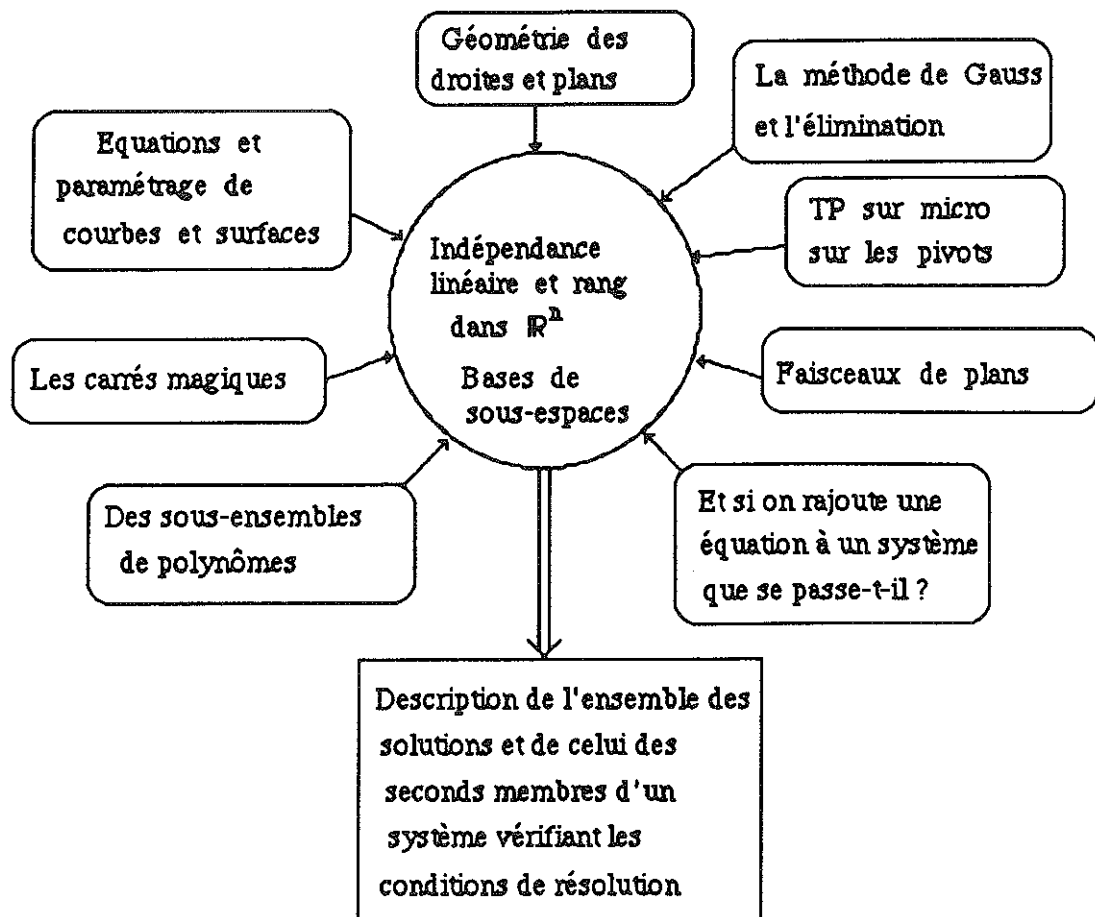
1 / Dans une première étape, nous essayons de fonder l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$ autour de la notion de rang, avec une double problématique: la dualité géométrique nombre d'équations/nombre de paramètres, d'une part; la description de l'ensemble des solutions et de l'ensemble des seconds membres vérifiant les conditions de résolution pour un système d'équations linéaires, d'autre part.

Nous essayons de mettre en évidence un rapprochement de divers point de vue et de diverses situations vers les notions d'indépendance linéaire, de rang, de base, pour des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

Pour la démonstration des résultats fondamentaux, nous utilisons une formulation abstraite, en évitant l'usage des coordonnées; nous le justifions par le recours à la démarche algébrique (à laquelle nous faisons réfléchir les étudiants lors d'activités sur des éléments de théorie des groupes à propos de groupes concrets), et pour favoriser la transition vers la théorie abstraite des espaces vectoriels.

On trouvera en annexe 12 la chronologie et la coordination des cours, TD, ateliers, TP sur micro-ordinateur, devoirs à la maison et contrôles.

En ce qui concerne la confluence de divers domaines vers les notions d'indépendance linéaire, de rang, de bases de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, le schéma suivant est explicitement proposé aux étudiants au moment de l'introduction de ces concepts. Nous leur demandons de réfléchir plus particulièrement aux liens existant entre certains des thèmes, activités ou questions qui figurent dans ce schéma.



2 / La deuxième étape est préparée dès la fin de la première par une assez longue série d'ateliers sur les éléments de la théorie des groupes, qui a pour but de montrer l'intérêt de la démarche algébrique. Nous traitons dans cette étape l'**algèbre linéaire abstraite** et son utilisation comme **cadre de modélisation interne aux mathématiques**, en même temps que nous dégageons explicitement un certain nombre de méthodes pour les types de problèmes de l'algèbre linéaire et pour son utilisation. Nous mettons à ce propos en évidence des situations types de référence, soit dans le cours soit à l'occasion de devoirs: suites récurrentes linéaires, polynômes, équations différentielles linéaires, une équation fonctionnelle.... La coordination avec d'autres domaines mathématiques du programme est, dans cette étape, essentielle. On en trouvera en annexe 13 une chronologie.

3 / La troisième étape est plus technique et plus brève. Elle comporte l'étude des **matrices** (en particulier de l'anneau des matrices carrées), les techniques de changement de bases, et l'inversion des matrices carrées. Bien sûr, l'outil "matrices", introduit comme tel à propos des applications linéaires,

est réinvesti, après avoir été étudié pour lui-même, dans divers problèmes, en particulier d'autres domaines des mathématiques. Mais nous ne cherchons absolument pas à faire des étudiants des virtuoses du calcul matriciel, et c'est d'ailleurs l'une des raisons pour laquelle nous l'introduisons somme toute assez tardivement.

VI. Quelle évaluation ?

Il est évidemment impossible de présenter une évaluation de cet enseignement de l'algèbre linéaire du point de vue véritablement intéressant: change-t-il l'apprentissage de cette matière chez les étudiants ? sur quels points ? comment changent leurs performances sur les problèmes du domaine ? Il y a à cela plusieurs raisons, assez classiques.

D'abord, l'enseignement de la section était "expérimental" sur de nombreux aspects, et il paraît impossible de distinguer l'influence d'un de ces aspects pris isolément. Par exemple, toute une démarche plus géométrique que dans l'enseignement habituel de DEUG est développée autour des courbes et fonctions et à propos de l'étude qualitative et géométrique des solutions des équations différentielles, avec une valorisation de la pratique du changement de cadre; peut-on distinguer son influence de celle de l'accent plus grand mis sur la géométrie cartésienne dans le cours d'algèbre linéaire et sur la double interprétation algèbre/géométrie de celle-ci? De même, un enseignement de la modélisation de problèmes par des équations différentielles est donné dans le cours; quelle va être son influence sur l'idée que nous voulons faire passer de l'algèbre linéaire "cadre de modélisation" interne aux mathématiques? La question analogue peut être posée à propos de l'enseignement de méthodes: il est développé sur plusieurs autres thèmes du programme (équations différentielles, recherche de primitives, étude des suites numériques, modélisation en calcul intégral, mise en équation en physique), et cela aura sans doute une influence sur la manière dont un enseignement de méthodes en algèbre linéaire sera ressenti par les étudiants...

Ensuite, certains des points forts des changements que nous proposons ont été essayés pour la première fois en 1990/91, et ne sont évidemment pas au point. C'est le cas pour l'explicitation de méthodes en algèbre linéaire, qui a surtout donné lieu à un texte distribué aux étudiants en fin d'année (celui qui se trouve à l'annexe 1), et a peu donné lieu à un enseignement se présentant comme tel (même si, bien sûr, des méthodes peuvent se dégager des activités faites en TD). C'est le cas aussi pour l'accent sur le rôle de l'algèbre linéaire comme cadre de modélisation interne aux mathématiques, pour lequel tant le discours des enseignants que les exercices et problèmes à donner aux étudiants sont encore largement à mettre au point.

De plus, nous ne nous sommes pas encore donné des moyens assez fins pour analyser la nature réelle de certains blocages que nous constatons, en particulier dans les rapports entre l'algèbre linéaire et les autres chapitres de mathématiques, ou pour "la peur de l'abstrait".

Enfin, nous sommes confrontés depuis 3 ou 4 ans à des évolutions rapides du public étudiant que nous ne contrôlons pas assez pour séparer toujours leur influence des effets propres de notre enseignement.

Nous ne disposons donc que de quelques indices, que nous allons passer rapidement en revue.

1 / L'interrogation écrite figurant en annexe 10 a été partiellement dépouillée du seul point de vue des notes obtenues par les étudiants. Elles figurent dans le tableau ci-dessous.

Question	1	2	3	4	5	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Succès	92	86	79	55	61	89	23	71	24	74
Moyen	3	6	10	26	15	5	5	16	21	11
Echec	5	8	11	19	24	6	72	13	55	15

Nous avons regroupé, pour plus de simplicité, les résultats en trois catégories: échecs, succès et notes moyennes. Nous donnons ces résultats pour chaque question, en pourcentage de l'effectif des 62 copies que nous avons pu récupérer. Pour l'énoncé précis des questions, voir l'annexe 10.

Ces notes révèlent une assez bonne réussite aux diverses questions. Il y a deux exceptions: la question (b) et la question (d). Pour résoudre la question (b) en respectant le contrat "plus d'autres calculs", il fallait se souvenir que les 5 vecteurs étaient en dimension 4; à ce stade du problème, peu y ont pensé, dans la mesure où il y avait une sorte de rupture de contrat, puisque l'argument ne résultait pas directement des calculs effectués dans la première question, comme l'énoncé poussait à l'envisager. L'échec, moins marqué, à la question (d), provient sans doute de ce qu'il fallait quand même faire un tout petit calcul: il fallait montrer que $\text{lin}\{X, Y\} = \text{lin}\{2X+Y, X-Y\}$ lorsque X et Y sont indépendants.

On peut quand même conclure que la notion de rang d'une famille de vecteurs est assez bien passée, ainsi que les techniques permettant de le déterminer.

2 / Le devoir sur la formule de Gregory figurant en annexe 5

Les copies de ce devoir ont été dépouillées par J.L.Dorier (cf [5]), qui a d'ailleurs comparé l'énoncé et son effet sur les étudiants avec une version

antérieure donnée dans une section de DEUG A première année à Paris 6, et qu'il avait étudiée dans [3].

L'objectif du problème était de faire sentir aux étudiants comment une conduite de détour théorique utilisant l'algèbre linéaire pour trouver un bon cadre de modélisation (ici: une "bonne" base) pouvait être extrêmement rentable; on visait donc la compréhension d'un enjeu, à travers une situation explicitement métamathématique.

Nous renvoyons à [5] pour l'étude détaillée des réactions des étudiants. Pour notre propos, nous noterons seulement que, malgré un défaut notable consistant à réduire un peu trop, dans la démarche mathématique du détour théorique, les possibilités de choix des étudiants, les trois quarts environ des étudiants ont à peu près saisi l'enjeu de simplification. La validité de la démarche de détour est d'ailleurs mieux discutée dans la fin du problème, c'est à dire lorsqu'une part plus grande du travail mathématique exigé par ce détour est à la charge des étudiants.

Du point de vue de l'évaluation de l'ingénierie, l'étude de ce devoir, malgré les défauts qu'il comporte encore, est encourageante. Elle montre, semble-t-il que de véritables situations de nature explicitement métamathématique peuvent être construites dans le domaine de l'algèbre linéaire, vérifiant les ressorts des situations mathématiques usuelles: dévolution du problème, variété de choix stratégiques, différents quand à l'économie de la résolution du problème, institutionalisation réflexive lancée par un questionnement approprié de nature méthodologique.

Il faudra vraisemblablement construire un plus grand nombre de situations de ce type, en particulier autour de la modélisation de problèmes mathématiques dans l'algèbre linéaire.

3 / L'examen partiel figurant en annexe 11 peut nous donner un autre renseignement. Nous en retiendrons uniquement ici le faible taux de succès à la première question. Ce fait semble montrer que l'enjeu de modélisation dans l'algèbre linéaire d'un problème d'un autre domaine mathématique n'est pas vraiment passé auprès des étudiants de l'année 1990/91. Il est vrai que les indications de l'énoncé permettaient de relativement s'en passer. Il est vrai, aussi, comme nous l'avons déjà signalé plus haut, que nous n'avions pas encore mis au point de séquence didactique destinée à utiliser fortement le levier que fournit l'activité de modélisation dans le cadre de l'algèbre linéaire.

4 / Enfin, nous disposons sur plusieurs années des réponses des étudiants à un questionnaire portant sur de nombreux aspects de l'enseignement. En particulier, une question portait sur leur appréciation sur 7 thèmes du programme, en ce qui concerne les points suivants: difficulté (cotée de 1: très difficile, à 4: très facile), intérêt (coté de 1: sans intérêt, à 4: très intéressant). Il est difficile d'interpréter les réponses pour une année

donnée. Par contre, l'évolution d'une année à l'autre, mise en rapport avec les changements de l'enseignement, permettent quelques hypothèses.

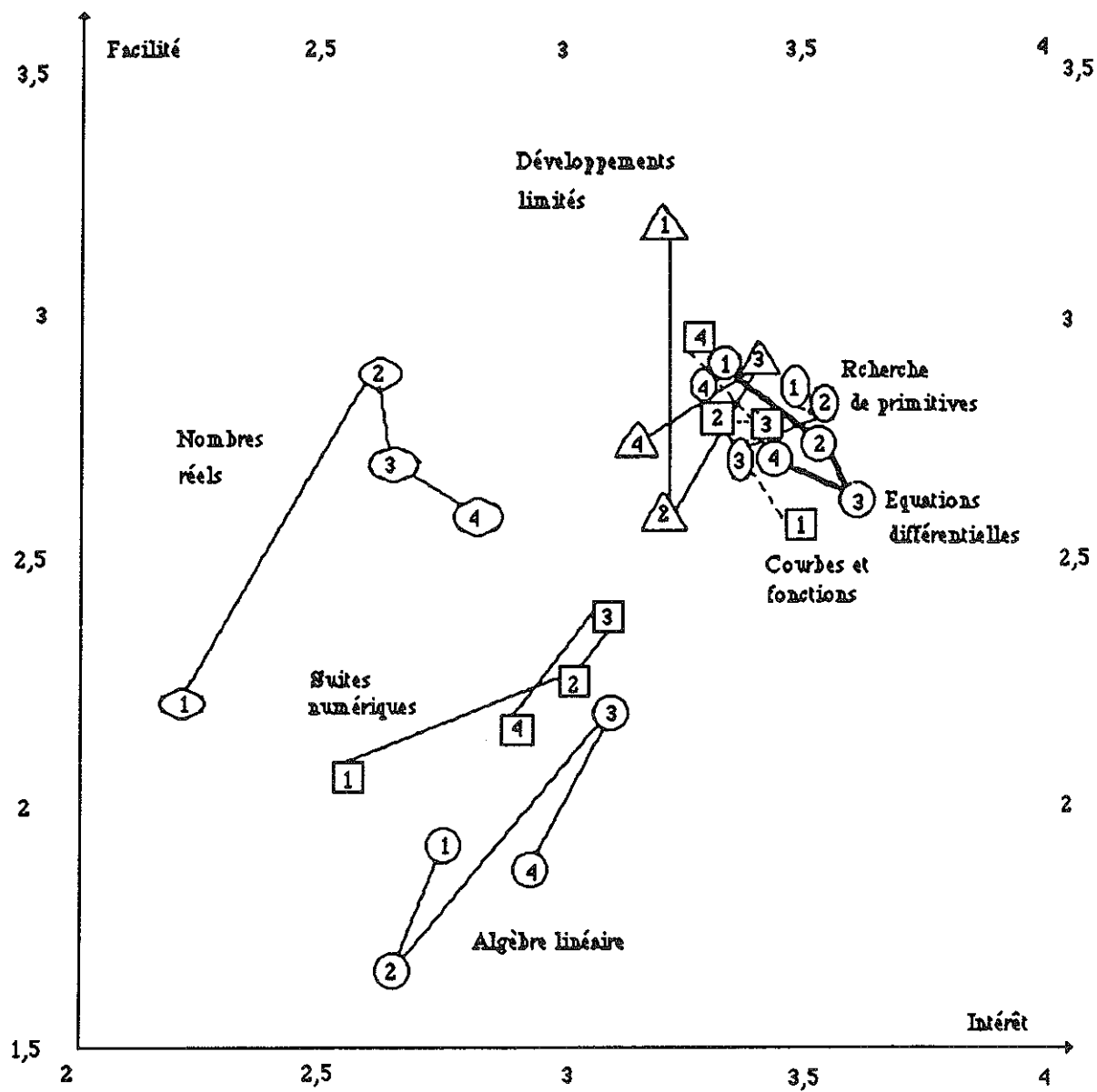
On peut ainsi constater que la forte progression vers le couple facile/intéressant s'est produite l'année où nous avons mis en place l'enseignement de géométrie cartésienne articulé avec la résolution des équations et l'insistance sur le double aspect nombre d'équations/nombre de paramètres.

La forte régression vers le sommet difficile/sans intérêt du graphique a coïncidé, pour sa part, avec l'arrivée d'une population particulièrement faible, n'ayant pas la moyenne aux épreuves scientifiques du bac (et regroupée sur ce critère). Il est donc difficile d'interpréter l'évolution des réponses cette année-là, ce facteur ayant sans doute camouflé toute autre modification.

La régression plus faible de l'année 90/91 est plus difficile à interpréter. Certes les enseignants ont l'impression qu'il y a eu une nette évolution de la population des étudiants dans un sens plus scolaire: l'enjeu d'études scientifiques (autre que la note d'examen) semblait assez absent chez eux. Mais peut-être est-ce justement cette modification qui a rendu plus difficile pour les étudiants un enseignement où le discours métamathématique et certaines activités explicites insistaient sur cette question des enjeux. Il peut être intéressant de noter à ce propos que notre section a acquis auprès des étudiants une réputation de plus grande difficulté (ils comparent en particulier nos épreuves à celles des autres sections, et se plaignent de les trouver plus "conceptuelles"), alors même qu'elle a un taux de succès qui est comparable voire parfois supérieur...

En tout cas, il est possible que la comparaison des scores obtenus par l'algèbre linéaire avec ceux obtenus par les autres points du programme dans les questionnaires donne des indications sur deux points. D'une part la position persistante dans le graphique semble révélateur d'une difficulté didactique particulière qui peut renvoyer à des obstacles épistémologiques (ceux dûs au caractère généralisateur plus qu'outil de l'algèbre linéaire ?). Se trouvent d'ailleurs dans le même cas les nombres réels et, de façon moins nette, les suites numériques.

De l'autre, les oscillations plus grande d'une année à l'autre mettent peut-être en évidence la non robustesse des choix didactiques faits, ou en tout cas leur caractère encore provisoire ou évolutif. Si on ne prend en compte que les trois dernières années, les 6 autres thèmes semblent avoir une appréciation assez stable, seule l'algèbre linéaire oscille fortement... Cela peut être d'ailleurs autant le reflet des modifications de notre enseignement que celui d'une plus grande sensibilité de l'enseignement de ce domaine des mathématiques aux variations de la population.



Bibliographie

- [1] P.Caron, E.Cousquer, R.Devoldere, A.D'Hoine: Enseignement d'algèbre en premier cycle. UFR de mathématiques de l'université de Lille 1.
- [2] J.L.Dorier: Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A en algèbre linéaire. Cahier de DIDIREM 6, 1990, IREM, université Paris 7.
- [3] J.L.Dorier: Thèse de l'université de Grenoble 1, juin 1990.
- [4] J.L.Dorier: Analyse de la genèse des concepts élémentaires de l'algèbre linéaire. Cahier de DIDIREM 5, 1990, IREM, université Paris 7.
- [5] J.L.Dorier: Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire; analyse comparative de deux devoirs...Travail en cours.
- [6] G.Harel: A comparison between two approaches to embodying mathematical models in the abstract system of linear algebra. Proceedings of the 8-th annual conference of PME, NA Michigan (pp 127-132), Ed G.Lappan, (Michigan 1986).
- [7] M.Legrand: Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale, dans: Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.
- [8] M.Legrand: "Circuit", ou les règles du débat mathématiques, dans: Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.
- [9] E.Lehmann: Mathématiques pour l'étudiant de première année, 1 et 2. Belin.
- [10] C.Leruste et J.L.Verley: Cours d'algèbre linéaire. EDF-GDF, Centre de formation des Mureaux.
- [11] A.Robert: Un projet long d'enseignement (algèbre et géométrie-licence en formation continuée), Cahier de DIDIREM n° 9, 1991.
- [12] A.Robert et J.Robinet: Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. Cahiers de didactique des mathématiques 53, 1989, IREM, université Paris 7.

[13] A.Robert, J.Robinet et I.Tenaud: De la géométrie à l'algèbre linéaire. Brochure de l'IREM, 1987, Université Paris 7.

[14] A.Robert, J.Rogalski, R.Samurcay: Enseigner des méthodes, Cahiers de Didactique des Mathématiques n°38, IREM Paris Sud.

[15] A.Robert et I.Tenaud: Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C, Recherches en Didactique des Mathématiques, n°9.1, 1989, la Pensée Sauvage, p.31-70.

[16] J.Robinet: Quelques réflexions sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG. Document de l'IREM, université Paris 7.

[17] M.Rogalski: Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire ? dans : Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.

[18] M.Rogalski: Un exemple de pratique des mémoires en DEUG A première année. Gazette des Mathématiciens, n° spécial: Rénover les enseignements, journées de Luminy; 1991.

[19] M.Rogalski: 2 brochures: Comment chercher une primitive?, et Comment étudier la convergence d'une suite réelle?, Université de Lille 1, UFR de Mathématiques.

[20] Contrat de rénovation pédagogique, universités de Lille 1, Paris 6 et Paris 7: Rapport intermédiaire, juin 1990, UFR de Mathématiques de l'université de Lille 1.

[21] Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année. Brochure de la Commission Inter-IREM Université, 1990.



TABLE des ANNEXES

- 1** Eléments de méthodologie en algèbre linéaire
- 2** Géométrie: introduction à l'algèbre linéaire
- 3** Un exemple de devoir utilisant la méthode des équations
 en géométrie
- 4** Appariement de formules et de dessins pour la dualité
 équations/paramétrage
- 5** Un devoir avec un enjeu de modélisation dans l'algèbre linéaire
- 6** TP sur micro-ordinateur pour la méthode de Gauss
- 7** L'atelier sur les carrés magiques
- 8** Les ateliers sur les groupes
- 9** L'atelier sur l'usage du dessin symbolique en algèbre linéaire
- 10** Une interrogation écrite
- 11** Un examen partiel
- 12** Chronologie de la première étape de l'enseignement
- 13** Chronologie de la deuxième étape de l'enseignement



ELEMENTS DE METHODOLOGIE EN ALGEBRE LINEAIRE

I. Cinq idées centrales



Une technique de base: la méthode de Gauss.

Pour résoudre des équations, trouver le nombre d'équations minimum pour définir un sous-espace, déterminer le rang d'une famille de vecteurs, identifier l'image d'une application linéaire...



Un concept central: le rang, sous divers aspects:

- rang d'une famille de vecteurs;
- rang d'un système d'équations;
- rang d'un tableau rectangulaire;
- rang d'une application linéaire.

Avec ce concept, fonctionnent en même temps:

- l'indépendance linéaire;
- la notion de sous-espace engendré;
- la notion de base;
- la notion de dimension.



Un double point de vue permanent: équations et paramétrage.

Deux manières de définir un sous-espace de dimension k dans un espace de dimension n : par $n-k$ équations, ou engendré par k vecteurs au moyen de k paramètres.



Un modèle central de problématique: l'équation $T(x)=y$.

Un grand nombre des problèmes internes à l'algèbre linéaire et de ceux qui concernent les applications de l'algèbre linéaire peuvent se mettre sous cette forme, l'application $T : E \rightarrow F$ étant linéaire.



Une préoccupation constante: choisir des bases adaptées à la résolution des problèmes qu'on étudie.



II. Les types de problèmes fréquents en algèbre linéaire

@ Les problèmes internes (mais pouvant se poser dans des contextes extérieurs à l'algèbre linéaire, celle-ci servant de modèle dans lequel les problèmes ont été traduits):

- ✎ déterminer le rang d'une famille de vecteurs;
- ✎ déterminer la dimension d'espaces vectoriels;
- ✎ décrire un sous-espace par des équations ou par des générateurs et des paramètres;
- ✎ trouver une base d'un espace vectoriel;
- ✎ déterminer des éléments caractéristiques d'une application linéaire: rang, noyau, image;
- ✎ déterminer la matrice d'une application linéaire;
- ✎ inverser une matrice...

@ Les problèmes externes, où l'on modélise *dans* l'algèbre linéaire des problèmes posés dans d'autres domaines mathématiques:

- ✎ résoudre l'équation $T(x)=y$ dans des domaines variés, où il faudra chaque fois, dans la *modélisation linéaire*, préciser les espaces, l'application linéaire T , ce qu'est y ...
- ✎ choisir des bases bien adaptées à la modélisation linéaire puis à l'étude d'un problème.



III. Des méthodes utiles pour les problèmes internes

A. Inclusion et égalité de sous-espaces

Trois points de vue peuvent être adoptés, selon le problème.

@ Un point de vue global, utilisant des *arguments d'équations* (si E est défini par une partie des équations qui définissent F , alors $F \subset E$); ou bien des *arguments de dimension* (si $F \subset E$, et si $\dim(F)=\dim(E)$, alors $F=E$); ou en utilisant une *application linéaire* (si $G \subset H$ et si $F=T(G)$ et $E=T(H)$, alors $F \subset E$).

@ Un point de vue semi-global, utilisant des *générateurs*: si tous les vecteurs d'une famille engendrant F appartiennent à E , alors $F \subset E$.

@ Un point de vue ponctuel , raisonnant sur les vecteurs pris individuellement: si tout vecteur de F est combinaison de vecteurs de E , ou vérifie les équations de E , alors $F \subset E$.

B. Indépendance linéaire ou rang d'une famille de vecteurs

* Pour l'indépendance de vecteurs, il y a souvent intérêt à adapter la technique à la nature des vecteurs en jeu.

@ Pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, ou représentés par des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans une base convenable, la méthode des 0 et des 1 dans le tableau des coordonnées est un bon critère; on s'y ramène par la méthode de Gauss.

@ Pour des polynômes, il y a souvent intérêt à utiliser les degrés ou les ordres , soit dans la base usuelle $1, x, \dots, x^n$, soit dans une base $1, x-a, \dots, (x-a)^n$.

@ Pour des fonctions, il y a souvent intérêt à utiliser des valeurs en des points particuliers, et/ou des valeurs des dérivées des fonctions , de façon à trouver des équations simples pour les coefficients λ_i qui doivent vérifier $\sum \lambda_i f_i = 0$.

* Une méthode générale plus abstraite consiste à regarder les images des vecteurs considérés par une application linéaire: si ces images sont indépendantes, il en est de même des vecteurs initiaux. Par exemple, si les projections de vecteurs sur un sous-espace sont indépendantes, les vecteurs le sont aussi. Autre exemple: $1, \sin x, \dots, \sin^n x$ sont indépendantes, car si on considère l'espace E qu'elles engendrent et l'application linéaire T de E dans l'espace F des polynômes de degré au plus n qui à f fait correspondre son développement limité à l'ordre n en 0, les images des $n+1$ fonctions sont des polynômes d'ordres tous différents.

Une autre technique est d'exprimer les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ dont on cherche l'indépendance linéaire comme les images $T(v_1), \dots, T(v_n)$ de vecteurs $v_1, \dots, v_n$ linéairement indépendants par une application linéaire T injective.

* Rappelons enfin le lemme utile suivant: si u_1 n'est pas nul, et si pour tout k vérifiant $1 < k \leq n$ u_k n'est pas combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{k-1}$, alors $u_1, \dots, u_n$ sont indépendants.

* En ce qui concerne la recherche du rang d'une famille de vecteurs, la méthode la plus fréquente est d'appliquer *la méthode de Gauss au tableau des coordonnées des vecteurs dans une base*. Si on veut extraire de la famille une sous famille maximale indépendante, il vaut mieux faire des combinaisons linéaires des colonnes représentant les vecteurs (cette méthode donne de plus les dépendances linéaires existant entre les vecteurs).

* Une technique un peu plus abstraite (et qui demande souvent d'utiliser la méthode de Gauss en intermédiaire) est donnée par l'énoncé qui suit:

les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (a) $\sum \lambda_i v_i = 0 \iff \lambda_1, \dots, \lambda_r$ (par exemple) sont des combinaisons linéaires fixées de $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$;
- (b) $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants et $\text{rg}(v_1, \dots, v_n) = r$.

C. Trouver la matrice d'une application linéaire

Si $T: E \rightarrow F$ est une application linéaire, si $B=(e_1, \dots, e_n)$ et $C=(f_1, \dots, f_m)$ sont des bases de E et F , et si $M^{CB}(T)=(a_{ij})$ désigne la matrice de T dans les bases B et C , il y a deux méthodes principales pour déterminer cette matrice.

@ *Utiliser les images $T(e_1), \dots, T(e_n)$ des vecteurs de la base de E , en écrivant les matrices colonnes de leurs coordonnées dans la base de F* : les colonnes de la matrice $M^{CB}(T)$ sont précisément ces matrices colonnes.

Cette méthode est souvent utilisée pour les applications entre espaces de polynômes, par exemple, et chaque fois que les $T(e_i)$ sont simples à déterminer.

@ *Exprimer directement les coordonnées y_i dans la base C de l'image $y=T(x)$ d'un vecteur x quelconque de F , au moyen des coordonnées x_j de x , sous la forme $y_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j$, pour $i=1, \dots, m$. Les a_{ij} sont alors les coefficients de la matrice.*

Cette méthode est recommandée lorsque les vecteurs de la base de E n'ont aucune particularité: chercher l'image de chacun des e_j est aussi difficile que chercher directement l'image d'un vecteur x . C'est souvent le cas pour les applications linéaires d'origine géométrique, par exemple la projection sur un plan dans $\mathbb{R}^3$, ou une rotation autour d'un axe en position quelconque.

@ On peut simplifier ces deux méthodes en décomposant l'application T en composée et/ou en somme d'applications $U, V, \dots$ plus simples, et en faisant le produit et/ou la somme des matrices correspondantes.

Par exemple, si D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur U , si $R_{U,\theta}$ est la rotation d'angle θ autour de D , et si P_D est la projection orthogonale sur D , on a $R_{U,\theta}(x) = (1-\cos\theta)P_D(x) + \cos\theta x + \sin\theta U \wedge x$, et il suffit de déterminer la matrice de P_D et celle du produit vectoriel par U .

D. Effectuer un changement de base

Selon l'objectif du changement de base, il y a deux manières de le faire.

Soient $B=(e_1, \dots, e_n)$ et $C=(f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E . Soient $M^{CB}(I)$ et $M^{BC}(I)$ les matrices de l'application identité $I: E_B \rightarrow E_C$ et $I: E_C \rightarrow E_B$.

@ La première matrice s'appelle *la matrice de passage* ; elle se fabrique au moyen de l'expression des anciens vecteurs de base (B) dans la nouvelle base C , et donne les nouvelles coordonnées d'un vecteur en fonction de ses anciennes.

Elle est utile lorsqu'on veut *trouver le paramétrage dans la nouvelle base* d'un "objet" donné en paramétrique dans l'ancienne base par $x_j=f_j(t_1, \dots, t_k)$:

on remplace les x_j par ces valeurs dans les formules $y_i=\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j$.

@ La deuxième matrice s'appelle *la matrice de changement de base* ; elle se fabrique au moyen de l'expression des nouveaux vecteurs de base (C) dans l'ancienne base B , et donne les anciennes coordonnées d'un vecteur en fonction de ses nouvelles.

Elle est utile lorsqu'on veut *trouver les équations dans la nouvelle base* d'un "objet" donné par ses équations $f_p(x_1, \dots, x_n)=0$ dans l'ancienne base: on y remplace les x_j par leurs expressions en fonction des y_i .

@ Si $M^{CB}(I)=(a_{ij})$ et si $M^{BC}(I)=(b_{ij})$, on passe de l'une à l'autre en résolvant le système $y_i=\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j$ en $x_i=\sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij}y_j$. Ces deux matrices sont en fait inverses l'une de l'autre.

E. Inverser une application linéaire ou une matrice

Une fois choisies des bases et la matrice de l'application déterminée dans ces bases, le premier problème peut se ramener au second.

@ Pour inverser une matrice $M=(a_{ij})$, la seule méthode raisonnable est de résoudre le système $y_i = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j$ en $x_i = \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij}y_j$, par la méthode de Gauss. On a alors $M^{-1}=(b_{ij})$.

La méthode avec les déterminants et cofacteurs est complètement illusoire: pour une matrice $n \times n$, la méthode des équations demande environ $(2/3)n^3$ opérations, la méthode des déterminants en demande environ $n \times n(n!)$; pour $n=4$, les valeurs précises sont 62 et 303, pour $n=6$ elles sont 191 et 48755; ce dernier nombre est encore 3580 si on utilise la méthode de Gauss pour calculer chacun des n^2+1 déterminants nécessaires au calcul de l'inverse (cette méthode demande environ $(2/3)n^5$ opérations).

@ Certaines remarques permettent parfois de trouver plus simplement l'inverse d'une application linéaire, par exemple la relation $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; ou bien le fait que si $T: E \rightarrow E$ vérifie $T^k=0$, alors $(I-T)^{-1}=I+T+T^2+\dots+T^{k-1}$.

F. Passer des équations d'un sous-espace à une représentation paramétrique et inversement

@ Pour passer des équations $\sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}x_j = 0$, $i=1, \dots, m$, d'un sous-espace F de E dans une certaine base, à une représentation paramétrique, on résout le système par la méthode de Gauss. Si, par exemple (pour simplifier l'écriture), $x_{r+1}, \dots, x_n$ sont les inconnues non principales, on les choisit comme paramètres, on exprime les $x_1, \dots, x_r$ au moyen d'elles et on écrit le résultat sous forme vectorielle $x = \sum_{r+1 \leq j \leq n} x_j V_j$. Les V_j forment alors une base du sous-espace F donné initialement par des équations.

@ Si on part d'un paramétrage $x = \sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j V_j$ d'un sous-espace F de E , on écrit que les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ d'un vecteur x de F dans une certaine base doivent vérifier les relations correspondantes au paramétrage, c'est à dire qu'il doit exister des λ_j vérifiant $\sum_{1 \leq j \leq k} \lambda_j a_{ij} = x_i$, $i=1, \dots, n$. On élimine les λ_j de ces équations, c'est à dire qu'on écrit les conditions de résolutions

par rapport aux inconnues λ_j (par exemple en appliquant la méthode de Gauss); ces conditions sont les équations, portant sur les x_i , du sous-espace F .

G. Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire

Si $T: E \rightarrow F$ est une application linéaire, si $B=(e_1, \dots, e_n)$ et $C=(f_1, \dots, f_m)$ sont des bases de E et F , et si $M^{CB}(T)=(a_{ij})$ désigne la matrice de T dans les bases B et C , il y a deux méthodes principales pour déterminer $\text{Im}T$ et $\text{ker}T$.

@ La méthode paramétrique-ou vectorielle: "Gauss sur les colonnes" . On considère les colonnes de la matrice comme des vecteurs générateurs de $\text{Im}T$, et on en cherche un sous-ensemble linéairement indépendant maximal en faisant la méthode de Gauss sur les colonnes $T(e_1), \dots, T(e_n)$, c'est à dire par combinaisons linéaires de celles-ci. Les colonnes finales obtenues s'écrivent $u_1=T(v_1), \dots, u_r=T(v_r), 0=T(v_{r+1}), \dots, 0=T(v_n)$. Alors $\text{Im}T=\text{lin}\{u_1, \dots, u_r\}$ et ces vecteurs en forment une base; et $\text{ker}T=\text{lin}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$, et ces vecteurs en forment une base. On a donc $\text{Im}T$ et $\text{ker}T$ paramétriquement. En prime, l'espace $\text{lin}\{v_1, \dots, v_r\}$ est un supplémentaire de $\text{ker}T$ isomorphe par T à $\text{Im}T$.

@ La méthode des équations: "Gauss sur les lignes" . On résout les systèmes $T(x)=0$ et $T(x)=y$, par la méthode de Gauss sur ces équations, c'est à dire sur les lignes de la matrice. On obtient d'une part un système minimal d'équations pour $\text{ker}T$, système qui est "triangulaire", donc permet immédiatement de paramétrer cet espace (cf F.). On obtient d'autre part les conditions de résolutions sur les seconds membres y_i , c'est à dire un système, lui aussi en "triangle", d'équations pour $\text{Im}T$, avec paramétrage immédiat si on le désire.



IV. Des méthodes pour les problèmes externes

Les problèmes qui peuvent se modéliser en terme d'algèbre linéaire sont évidemment très nombreux, et nous ne donnons des indications que sur quelques types de problèmes pour lesquels l'algèbre linéaire intervient efficacement grâce à ses concepts. Nous ne parlons pas ici des multiples

problèmes, en particulier issus de la physique ou de la technologie ou de l'économie, qui se ramènent simplement à des équations linéaires.

A. Choisir des bases adaptées aux problèmes étudiés

Nous donnons uniquement des exemples, afin de montrer l'efficacité de cet abord des problèmes, car il n'y a guère de méthode générale.

@ Une base adaptée à la recherche des polynômes P vérifiant $P(a)=b_0$, $P'(a)=b_1$, ... $P^{(n)}(a)=b_n$ est évidemment la base de la formule de Taylor en a : $1, (x-a)/1!, \dots (x-a)^n/n!$. L'opérateur de dérivation a une matrice très simple dans cette base.

@ Pour la recherche des polynômes P valant b_0 en 0 , b_1 en 1 , ... b_n en n , il y a intérêt à choisir la base de Gregory: $1, x/1!, x(x-1)/2!, x(x-1)(x-2)/3!, \dots x(x-1)\dots(x-n+1)/n!$. L'application linéaire qui s'exprime simplement dans cette base est l'application $\Delta: P \rightarrow \{x \rightarrow P(x+1)-P(x)\}$.

@ Si on travaille avec les fractions rationnelles de dénominateur donné $P(x)=(x+1)(x-2)^2(x^2+x+1)$ et de numérateur de degré au plus 17, la base à choisir va dépendre de l'objectif. Si on veut la dimension de cet espace, la bonne base est évidemment $1/P, x/P, x^2/P, \dots x^{17}/P$. Si on cherche à calculer les primitives des fractions en question, la bonne base sera celle de la décomposition en éléments simples:

$$x^{12}, x^{11}, \dots x^2, x, 1, 1/(x+1), 1/(x-2), 1/(x-2)^2, 1/(x^2+x+1), x/(x^2+x+1).$$

@ En géométrie, il y a intérêt à choisir les vecteurs de base du repère affine de façon à donner des calculs simples si on se propose de résoudre un problème par la géométrie analytique (vecteurs de base portés par des droites remarquables de la figure par exemple...).

B. Modéliser des problèmes sous la forme $T(x)=y$

Des problèmes importants peuvent se modéliser sous cette forme. Là encore, plutôt qu'une méthode générale qui n'existe pas, il importe de connaître certains exemples afin d'être capable, devant de nouveaux problèmes, de penser à une approche analogue. Il faut bien sûr être capable de reconnaître au premier coup d'œil le caractère linéaire d'une situation (l'inconnue n'apparaît qu'au premier degré dans les formules, les termes qui en dépendent résultent d'opérations linéaires: dérivation, intégrale, valeur en un point,...), puis voir l'application correspondante, les espaces vectoriels, etc...

L'apport principal de cette formalisation est de pouvoir affirmer alors que l'ensemble des solutions de $T(x)=y$ est vide ou est un sous-espace affine s'écrivant $S = \ker T + x_0$, où x_0 est une solution particulière ("on obtient toutes les solutions de l'équation en ajoutant à une solution particulière n'importe quelle solution de l'équation sans second membre"). L'étude se fait donc souvent en deux temps: d'abord détermination du noyau de T , puis ensuite recherche d'une solution particulière de l'équation. Pour cette deuxième étape, on a souvent recours à une "méthode de variation de la constante", sous une forme qui dépend du problème considéré.

Une méthode parfois plus rapide, lorsque $\ker(T)=\{0\}$, est de profiter d'une forme particulière de T pour obtenir facilement son inverse (par exemple si $T=I-S$ avec $S^k=0$).

@ *L'équation différentielle "linéaire"* $y' = a(x)y + b(x)$ se met sous la forme $T(y)=b$, où $T: C^1(I) \rightarrow C(I)$ est l'application $y \rightarrow y' - ay$. Le noyau de T est de dimension 1, engendré par la fonction $\exp[A(x)]$, où A est une primitive de la fonction a . Pour trouver une solution particulière, on pose $y(x)=z(x)\exp[A(x)]$ (variation de la constante).

@ *L'équation différentielle "linéaire" du second ordre à coefficients constants et second membre exponentielle-polynôme*

$$y'' + ay' + by = \sum P_i(x) \exp[\alpha_i x]$$

peut se mettre sous la forme $T(y)=\phi$, où $T: C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ est l'application qui à la fonction y fait correspondre la fonction $y'' + ay' + by$. Le noyau de T est de dimension 2 et engendré par les fonctions $\exp[r_1 x]$ et $\exp[r_2 x]$ si les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ sont distinctes, et par $\exp[rx]$ et $x \cdot \exp[rx]$ si elles sont confondues et égales à r . Si $\mathcal{EP}$ désigne l'espace vectoriel des exponentielles polynômes, on a l'égalité $T(\mathcal{EP}) = \mathcal{EP}$. On peut donc considérer T comme une application surjective de $\mathcal{EP}$ sur lui-même dont le noyau est de dimension 2.

@ *La détermination des suites récurrentes* vérifiant la relation $u_{n+1} = au_n + b_n$ (a constante non nulle) peut se modéliser d'une manière analogue: si $T: S \rightarrow S$ est l'application de l'espace S des suites dans lui-même qui à la suite (u_n) fait correspondre la suite $(u_{n+1} - au_n)$, il faut résoudre l'équation $T(u)=b$. Le noyau de T est formé des suites géométriques de raison a : $u_n = \lambda a^n$, de dimension 1, et une méthode de variation de la constante donne une suite particulière solution du problème (poser $u_n = v_n a^n$).

@ Si on cherche les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+1)=2f(x)+2^x$, on introduit l'opérateur $T: C(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$ défini par $(Tf)(x)=f(x+1)-2f(x)$. Son noyau est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $f(x)=2^x g(x)$, avec g continue et de période 1 arbitraire (si on pose $f(x)=2^x g(x)$, on trouve $g(x+1)=g(x)$). Le noyau est cette fois de dimension infinie. Pour trouver une solution particulière, on pose $f(x)=2^x u(x)$ ("variation de la fonction arbitraire").

C. Quand l'unicité implique l'existence

Une propriété remarquable des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension n est l'équivalence: T injective $\Leftrightarrow T$ surjective. On peut interpréter cette équivalence sous la forme: il est équivalent de dire que pour tout y l'équation $T(x)=y$ a au plus une solution (unicité) ou de dire que pour tout y l'équation a au moins une solution (existence).

De façon analogue, si des vecteurs e_i d'un espace E de dimension n sont en nombre n , il est équivalent de dire que pour tout x de E il existe une décomposition de x sur les e_i (ils sont générateurs) ou qu'une éventuelle décomposition est unique, c'est à dire que les e_i sont indépendants.

Or il est souvent bien plus facile de montrer l'unicité d'objets mathématiques vérifiant certaines conditions que de montrer qu'il en existe. On dispose ainsi, grâce à l'algèbre linéaire, de la possibilité de montrer simplement des résultats d'existence pour des problèmes mathématiques variés.

Par exemple, il est facile de montrer que les éléments simples associés à une fraction rationnelle sont linéairement indépendants; comme leur nombre est exactement celui qu'il faut, on en déduit l'existence de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

Dans le même ordre d'idée, pour tout polynôme P de degré n il existe un polynôme (et un seul) solution de l'équation $y(x+1)=3y(x)+P(x)$. En effet, l'application T définie par $(Ty)(x)=y(x+1)-3y(x)$ envoie l'espace $\mathcal{P}_n$ des polynômes de degré au plus n dans lui-même. Or un élément du noyau s'écrit $y=3^x g(x)$, avec g 1 périodique (cf le dernier exemple de B.), et n'est donc dans $\mathcal{P}_n$ que s'il est nul. Par suite T est injective, donc surjective, et tout P de $\mathcal{P}_n$ est bien l'image par T d'un polynôme y (unique par injectivité) de $\mathcal{P}_n$.



Annexe 2

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

AlgLin.Pr.001.04

Introduction à l'algèbre linéaire

Dans les exercices suivants, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont supposés munis d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Problèmes plans :

Ex 1. L'équation de la droite support d'un côté d'un rectangle est $2x - 3y + 5 = 0$. Les coordonnées d'un des sommets du rectangle sont $(2, -3)$ et on donne les coordonnées d'un point du rectangle $(7/3, 0)$; ce point appartient à un des côtés.

Former les équations des trois autres côtés du rectangle. Donner les coordonnées de son centre. Ce problème a-t-il une solution unique?

Ex 2. Les coordonnées d'un des sommets d'un triangle ABC sont $(2, -7)$; les équations de la hauteur et de la médiane issues des deux autres sommets sont respectivement $3x + y + 11 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$.

Donner les équations des côtés du triangle. Y-a-t-il unicité?

Dans l'espace :

Ex 3. On se donne les points A, B, C de coordonnées $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

1) Que peut-on dire de la projection de O sur le plan P déterminé par les points A, B et C ? Donner ses coordonnées.

2) Quelle est l'équation du plan P ?

3) Trouver les équations de la hauteur et de la médiane issues de A dans le triangle ABC .

Ex 4. Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 1)$ et $(0, 1, 1)$.

Ces points sont-ils coplanaires? Quelles sont les équations des faces et des arêtes du tétraèdre qu'ils définissent? De façon générale, comment peut-on définir un tétraèdre à partir d'équations de plans? Donner un exemple.

Ex 5. Parmi les 12 groupes d'équations suivants, reconnaître ceux qui correspondent à deux plans (resp. droites, ou droite et plan) parallèles ou perpendiculaires. Préciser le cas échéant s'il y a coplanarité.

$$1) \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{-2} \quad ; \quad x - 3y + 6z + 7 = 0$$

$$2) \quad 4x + 2y - 4z + 5 = 0 \quad ; \quad 2x + y + 2z - 1 = 0$$

$$3) \quad x = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad ; \quad x = 2t + 1, \quad y = 3t - 2, \quad z = -6t + 1 \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$4) \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = z \quad ; \quad x + y - z = 0, \quad x - y - 5z - 8 = 0$$

- 5) $3x - y - 2z - 5 = 0$; $x + 9y - 3z + 2 = 0$
 6) $x - 3z + 2 = 0$; $2x - 6z - 7 = 0$
 7) $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 4z + 1 = 0$; $3x - 2y + z + 1 = 0$
 8) $2x - 5y + z = 0$; $x + 2z - 3 = 0$
 9) $x = 2t + 5$, $y = -t + 2$, $z = t - 7$ ($t \in \mathbb{R}$) ;
 $x + 3y + z + 2 = 0$, $x - y - 3z - 2 = 0$
 10) $x = 2t + 1$, $y = 3t - 2$, $z = -6t + 1$ ($t \in \mathbb{R}$) ;
 $2x + y - 4z + 2 = 0$, $4x - y - 5z + 4 = 0$
 11) $5x - 3y + 2z - 5 = 0$, $2x - y - z - 1 = 0$; $4x - 3y + 7z - 7 = 0$
 12) $x = 3 + 2t$, $y = 5 - 3t$, $z = 2 - 2t$ ($t \in \mathbb{R}$) ; $-3x + 2y + 3z - 5 = 0$

Ex 6. Déterminer les réels a et b de manière que les plans d'équations :

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y - z + b = 0, \quad x + ay - 6z + 10 = 0$$

- 1) aient un point commun et un seul.
- 2) passent par une même droite.
- 3) se coupent suivant trois droites distinctes et parallèles.

Ex 7. Pour quelles valeurs de l les droites dont les équations suivent se coupent-elles?

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad ; \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

Les exercices suivants ne nécessitent pas l'utilisation d'un repère orthonormé.

Ex 8. Dans le plan P , on se donne un quadrilatère $ABCD$; on note I et J les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. A tout réel t on associe les points U_t , V_t et O_t tels que $\overrightarrow{AU_t} = t\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BV_t} = t\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{U_tO_t} = 1/2 \overrightarrow{U_tV_t}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{IO_t}$ en fonction de $\overrightarrow{IJ}$.
- 2) Quel est l'ensemble E des points O_t lorsque t appartient à $\mathbb{R}$? Peut-on choisir $ABCD$ de telle sorte que E se réduise à un point?

Ex 9. On se donne 4 points A, B, C, D du plan; existe-t-il toujours 4 points I, J, K, L tels que A soit le milieu de $[IJ]$, B le milieu de $[JK]$, C le milieu de $[KL]$ et D le milieu de $[LI]$?

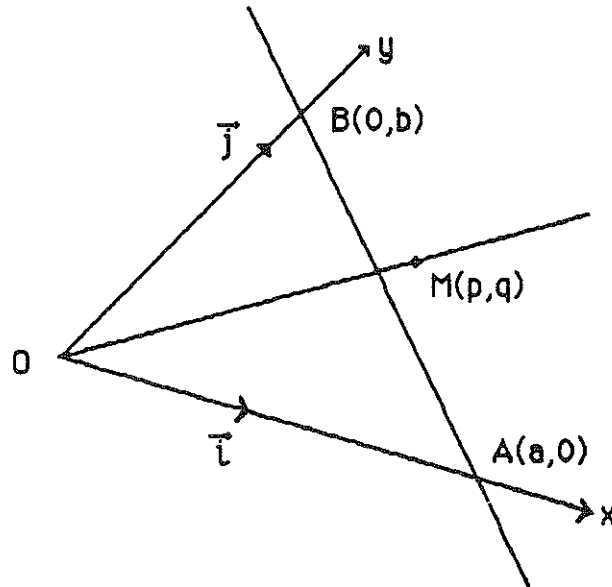
Le cas échéant, on pourra traiter le problème dans le cadre analytique d'abord.

Ex 10. A quelle condition, exprimée vectoriellement, étant donné 6 points A, B, C, D, E, F , existe-t-il 6 autres points I, J, K, L, M, N tels que A soit milieu de $[IJ]$, B le milieu de $[JK]$, ..., F le milieu de $[NI]$?

Ex 11. Traiter de même le cas de 5 points...

PROBLEME 2

1°/ On prend comme repère (ni orthogonal ni normé) du plan deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et un point O. Montrer que l'équation de la droite passant par les points A(a,0) et B(0,b) est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Quelle est l'équation de la droite passant par O et le point M(p,q) ?



2°/ Les notations de la suite du problème n'ont plus rien à voir avec celles de 1°.

On se donne un triangle ABC, et 3 nombres λ, μ, ν dans $]0,1[$; on définit les points C' de AB, A' de BC et B' de CA par

$$AC' = \lambda AB, \quad BA' = \mu BC \quad \text{et} \quad CB' = \nu CA.$$

On se propose de chercher la condition sur λ, μ, ν pour que les trois droites AA', BB' et CC' soient concourantes (quel que soit le triangle).

(a) Connaissez-vous des valeurs de λ, μ, ν qui vérifieront certainement la condition que vous trouverez ?

(b) Choisissez un repère du plan adapté à ce problème [on suggère de prendre $O=A$, et pour $\vec{i}$ le vecteur AB...], écrivez les équations des trois droites, et exprimez la condition de concourance par un système d'équations linéaires.

(c) En déduire que la condition sur λ, μ, ν s'écrit

$$\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu).$$

3°/ On suppose $\lambda = \frac{1}{2}$. A quoi se réduit la condition sur μ et ν ? Donnez un énoncé géométrique précis qui traduise cette condition (portant par exemple sur la direction de la droite A'B').

4°/ Montrez que pour tout choix de μ et ν dans $]0,1[$, il y a bien un choix et un seul de λ dans $]0,1[$ qui répond au problème.

5°/ Montrez que la condition trouvée peut s'écrire

$$\frac{C'A}{C'B} \times \frac{A'B}{A'C} \times \frac{B'C}{B'A} = 1. \quad \text{Connaissez-vous le nom de ce théorème ?}$$

6°/ Etendre ce qui précède au cas où λ, μ, ν sont des réels quelconques, et réécrire la condition de 5°/ avec des mesures algébriques de segments portés par les droites orientées AB, BC, CA.

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

AlgLin.Ex.013.01

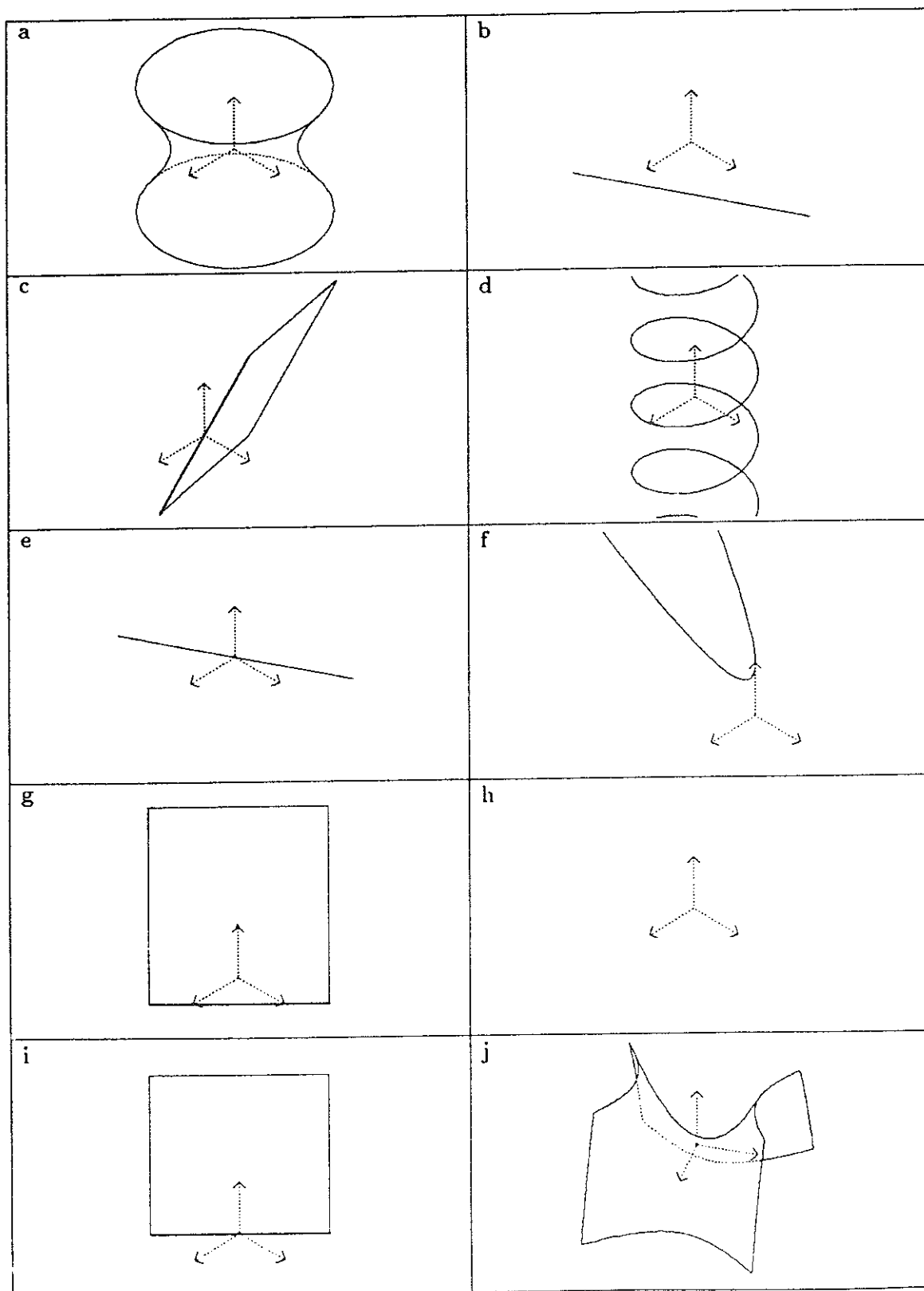
Equations cartésiennes et équations paramétriques ; dimension

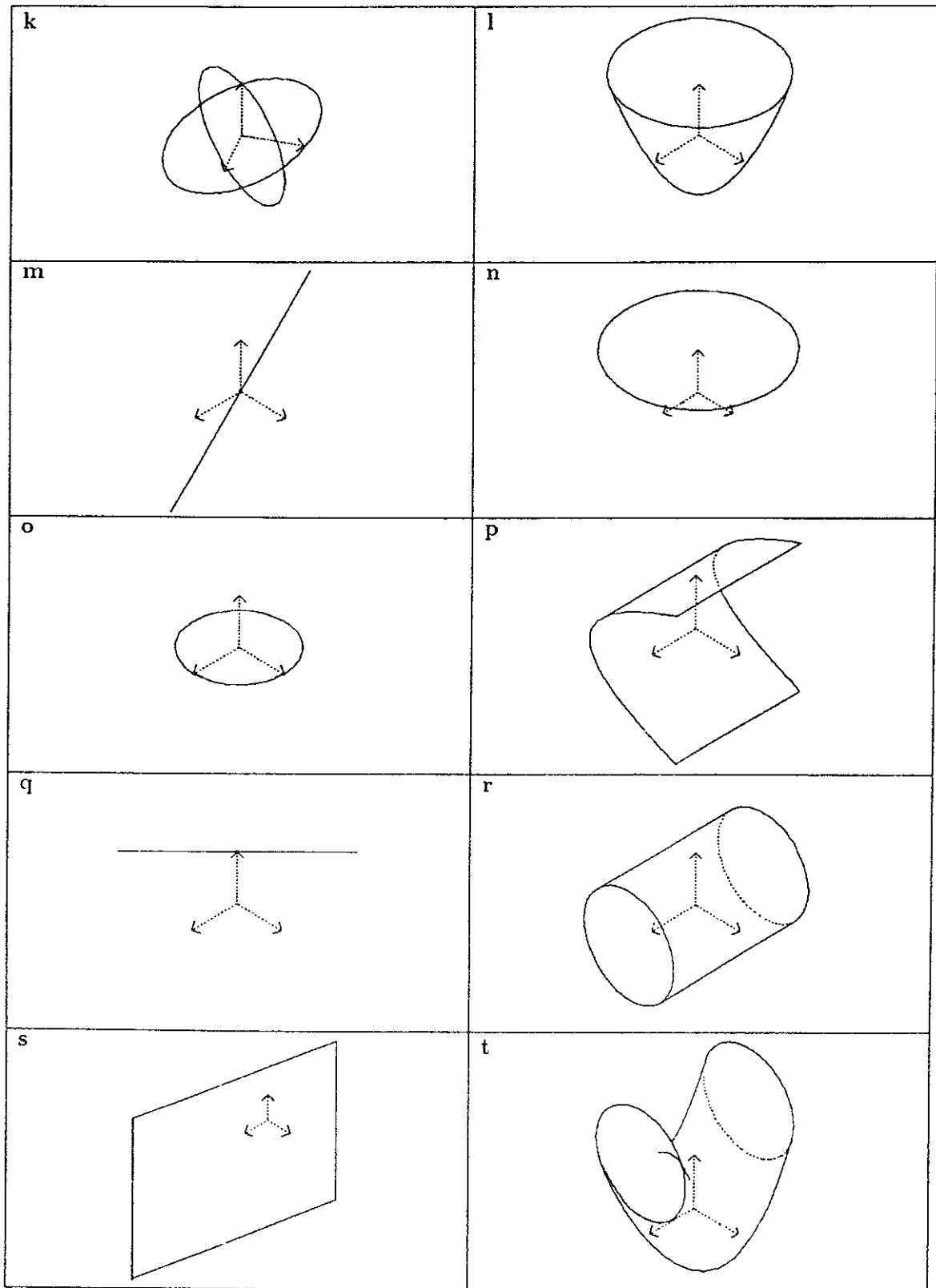
Apparier les dessins et les formules. Classer les paquets "dessin-formule(s)" en explicitant les critères utilisés.

1 $x - 2y + 2z = 0$	2 $z = x^2 + y^2 - 1$	3 $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y = -1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$
4 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$	5 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \\ z = 1 \end{cases}$	6 $y^2 + z^2 = 1$
7 $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = t \end{cases}$	8 $\begin{cases} z - y^2 = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$	9 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \\ z = \theta/5 \end{cases}$
10 $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 \end{cases}$	11 $x^2 - y^2 + z = 0$	12 $\begin{cases} x = u \\ y = \cos \theta \\ z = \sin \theta \end{cases}$
13 $y = z^2 - 1$	14 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$	15 $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = -v \end{cases}$
16 $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \\ z = -uv \end{cases}$	17 $\begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$	18 $\begin{cases} x = \frac{t^2 + 1}{2} \\ y = t \\ z = t^2 + 1 \end{cases}$

19	$\begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 3s \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$	21	$\begin{cases} x = \cos v - u \sin v \\ y = \sin v + u \cos v \\ z = u \end{cases}$
22	$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta^2 - 1 \\ z = \beta \end{cases}$	23	$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$	24	$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 1 \\ z = -x^2 - y^2 + 1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x = 2u \\ y = u + v \\ z = v \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2z - x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$	27	$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$
28	$y + z = 0$	29	$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$	30	$x - y + 3z = 6$
31	$\begin{cases} x = \cos \mu \operatorname{ch} \lambda \\ y = \sin \mu \operatorname{ch} \lambda \\ z = \operatorname{sh} \lambda \end{cases}$	32	$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ z = 1 \end{cases}$	33	$x + y + z = 1$
34	$\begin{cases} x = 1 - u - v \\ y = u \\ z = v \end{cases}$	35	$\begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$	36	$\begin{cases} x = \sqrt{1 + v^2} \cos u \\ y = \sqrt{1 + v^2} \sin u \\ z = v \end{cases}$
37	$z^2 - 2zx^2 + x^4 + y^2 = 1$	38	$\begin{cases} x = \frac{1 + 2uv - u^2}{1 + u^2} \\ y = \frac{v(u^2 - 1) + 2u}{1 + u^2} \\ z = v \end{cases}$	39	$\begin{cases} x = u \\ y = \cos \varphi \\ z = u^2 + \sin \varphi \end{cases}$

Dans les figures ci-dessous représentant un plan, la droite renforcée représente l'intersection de ce plan avec le plan xOy .





Annexe 5

USTL DEUGA 1 Section 1 Mathématiques Février 1991

Devoir n° 7

A rendre la semaine du 18 mars

Le but de ce problème est de vous faire saisir l'aspect simplificateur et généralisateur de l'algèbre linéaire. Il est recommandé de faire ce devoir à deux ou trois, de façon à en discuter entre vous.

I. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré au plus égal à 3 vérifiant $P(1)=0$, $P(2)=2$, $P(3)=10$, $P(4)=30$.

II. On veut déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 7 valant 3 en 0, 5 en 1, -1 en 2, 2 en 3, 0 en 4, 4 en 5, 0 en 6, 3 en 7.

A priori, quel système d'équations êtes-vous amené à résoudre?

Plutôt que de se lancer dans cette résolution (avec un grand risque d'erreurs!), on va faire un détour par l'algèbre linéaire, en utilisant pour exprimer un polynôme, d'autres monômes que $1, X, X^2, \dots, X^n$, qui paraissent mal adaptés à notre problème.

Soit $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n .

1°/ Soit $\Delta: \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ l'application qui à un polynôme P fait correspondre le polynôme ΔP défini par $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$.

Exprimer $\Delta(P+Q)$ en fonction de ΔP et de ΔQ . Exprimer de même $\Delta(aP)$ et $\Delta(aP+bQ+cR)$.

Dans la suite on notera Δ^k l'application $\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (k fois) et Δ^0 l'application identique de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$.

2°/ On considère les polynômes

$U_0(X)=1$, $U_1(X)=X$, $U_2(X)=X(X-1)$, $U_3(X)=X(X-1)(X-2)$,
..... $U_n(X)=X(X-1)(X-2)\dots(X-n+1)$.

On demande, en utilisant la structure d'espace vectoriel de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$, les polynômes U_k et l'application Δ , de montrer que tout polynôme P de $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire à coefficients bien définis des polynômes U_k , et précisément qu'on a

$$P = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(\Delta^k P)(0)}{k!} U_k \quad [\text{formule de Gregory}]$$

[on pourra calculer $\Delta^k U_q$ et $(\Delta^k U_q)(0)$, en distinguant selon les valeurs de k et q , puis $(\Delta^k P)(0)$, en copiant la méthode utilisée pour montrer qu'un polynôme P peut aussi s'écrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k].$$

III. On reprend le problème de déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 7 valant 3 en 0, 5 en 1, -1 en 2, 2 en 3, 0 en 4, 4 en 5, 0 en 6, 3 en 7. Pour cela on suggère de dresser un tableau triangulaire présentant sur la première ligne les valeurs de P aux 8 points considérés, sur la deuxième ligne les valeurs de ΔP aux 7 premiers points, sur la troisième celles de $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$ aux 6 premiers points, etc...et d'appliquer la formule de Gregory. Si on vous demande de calculer $P(10)$, est-il utile de développer P sur 1, X , X^2 , ... ?

Comparer les calculs de cette méthode à ce qu'aurait demandé comme calculs le système que vous avez proposé au début du II.

IV. 1°/ Déterminer tous les polynômes P de degré au plus égal à 3 qui vérifient $P(2)=1$, $P'(2)=-3$, $P''(2)=6$, $P'''(2)=-24$, par la méthode de I.

2°/ Développer brièvement dans $\mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$ la même théorie qu'en II, avec les polynômes 1, $X-2$, $(X-2)^2$, $(X-2)^3$, ... $(X-2)^n$, et avec une application $D: \mathfrak{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{P}_n(\mathbb{R})$, à définir. En déduire une autre démonstration de la question IV.1°/. Laquelle est la plus simple?

Extraits de la feuille de séance "PIVOT DE GAUSS"

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

AlgLin.TP.001.02

Pivot de Gauss et intersection de plans

Nom :

Nom :

Rendre un questionnaire par binôme. Pour les dessins demandés, les faire dans le cadre correspondant au numéro du dessin. Utiliser une couleur pour le cube, une couleur pour chacun des plans, une couleur pour les droites d'intersection de deux plans.

Préparation du TP :

Tracer en perspective le cube dont les faces sont les plans d'équation : $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$. Représenter sur la même figure les deux plans d'équation $x + y + z = 2$ et $2y + 3z = 1$ (se limiter à la portion de ces plans contenue à l'intérieur du cube).

Faire un dessin analogue pour les deux plans $x + y + 3z = 2$ et $2x - y = 0$.

Imaginer un système de 3 équations en x, y, z représentant 3 plans distincts sécants suivant une droite qui ne soit pas parallèle à l'un des axes et qui ne passe pas par l'origine. Ce système sera étudié au cours du TP (Système personnel).

Présentation du logiciel

L'objet du TP est la comparaison entre :

- les équations d'un système linéaire d'équations à 3 inconnues x, y, z .
- la représentation dans l'espace des plans correspondant à ces équations dans un repère orthonormé fixé.

Pour représenter un plan dans une figure, il est nécessaire d'en sélectionner une partie bornée. Le logiciel sélectionne l'intersection du plan avec un certain cube appelé *cube de référence*. Ce cube est centré à l'origine du repère ; ses arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées ; il est alors caractérisé par sa *demi-arête* qui est au départ fixée par le logiciel, mais qui peut être ensuite modifiée par l'utilisateur (commande `[c]ube`). Le polygone intersection du plan que l'on veut représenter avec le cube de référence est projeté orthogonalement sur un plan, et la projection est dessinée ; la direction de projection est au départ fixée par le logiciel, mais peut être modifiée ensuite par l'utilisateur (commande `[v]ue différente` — remarquer qu'il n'y a pas d'accent dans le texte qui cohabite sur l'écran avec des graphiques).

Quand il y a, et c'est pratiquement toujours le cas, plusieurs plans à représenter, le logiciel considère ces plans comme *opaques* : seules les parties normalement visibles depuis la direction du point de vue sont dessinées.

Pour pouvoir représenter le système à la plus grande échelle possible, la place laissée à l'affichage du système a été réduite au minimum, ce qui ne laisse qu'un chiffre avant la virgule pour les coefficients et le second membre des équations. Cette contrainte impose que

les systèmes soient automatiquement *recalibrés* à chaque saisie ou opération. Par exemple l'équation $x + y + z = 50$ sera transformée par le logiciel en $0.02x + 0.02y + 0.02z = 1$.

L'utilisateur peut en général commander le *pivotage* du système en choisissant un pivot parmi ceux *possibles* (il n'est pas possible de *revenir en arrière*). Si le pivot choisi n'occupe pas sa place naturelle sur la diagonale, les opérations suivantes sont effectuées : échange de place entre deux inconnues (et des coefficients correspondants), échange de place entre deux équations, de façon à amener le pivot à sa place naturelle sur la diagonale. Surveiller donc la première ligne $x \ y \ z$ qui donne la place des inconnues.

Enfin, de façon à ce que les coefficients qui sont nuls après pivotage le soient effectivement pour la représentation interne des nombres dans la machine, les coefficients *trop petits*, pratiquement ceux dont la valeur absolue calculée est inférieure à 10^{-5} , sont forcés à 0 ; cela peut conduire dans certains cas à une modification accidentelle du système (à équivalence près).

Mise en route

Après démarrage de l'ordinateur, on se trouve au niveau de commande de MS/DOS A

Taper

gauss↵

↵

Commentaires

Les parties encadrées d'un trait mince correspondent à l'affichage.

Les parties encadrées d'un trait épais sont celles qu'il faut remplir pour le compte-rendu.

Mise en mémoire vive du programme, et mise en route.

En cas d'incident ultérieur, par exemple en cas d'opération illicite, il faudrait reprendre cette commande. Si cela ne suffit pas, réamorcer en appuyant simultanément sur les trois touches Control Alt Annul.

Affichage du système ; après un temps de calcul, permettant de déterminer les parties cachées, affichage du dessin.

$$\text{I. Etude du système} \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - z = 4 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

Comparer au système affiché. Noter les renseignements suivants :

Demi-arête du cube :

Direction du point de vue :

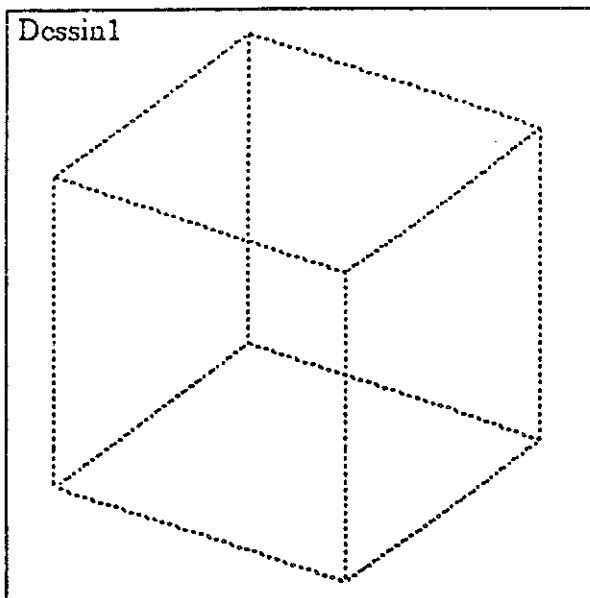
t

↵

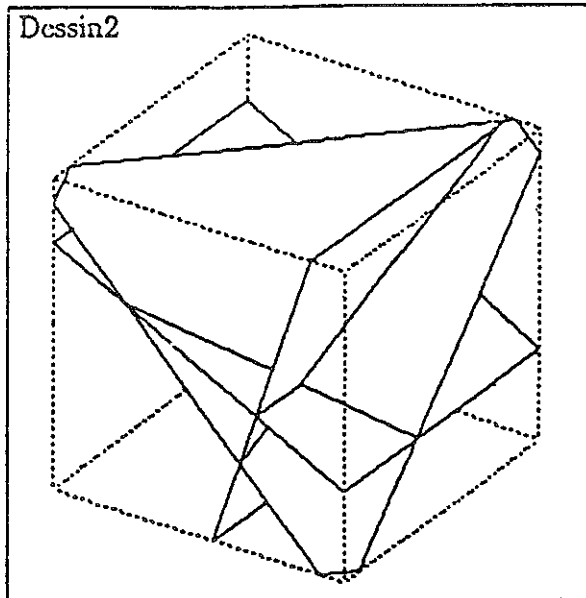
Pour tracer le cube et mieux voir la figure (le cube représenté est transparent).

Pour revenir au tracé initial.

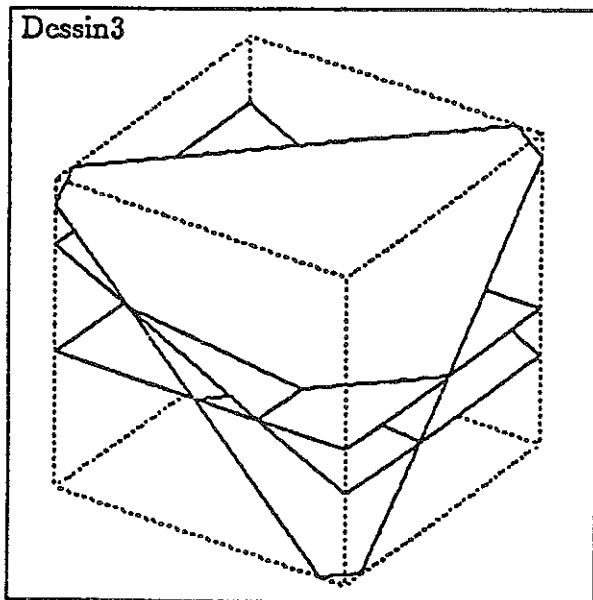
Dessin1



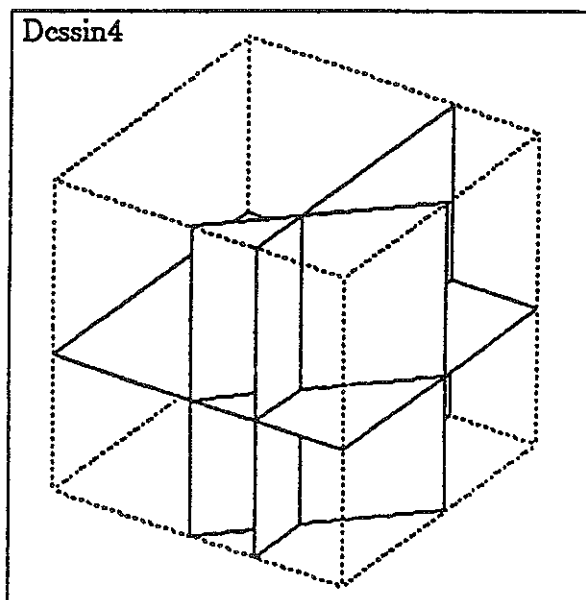
Dessin2



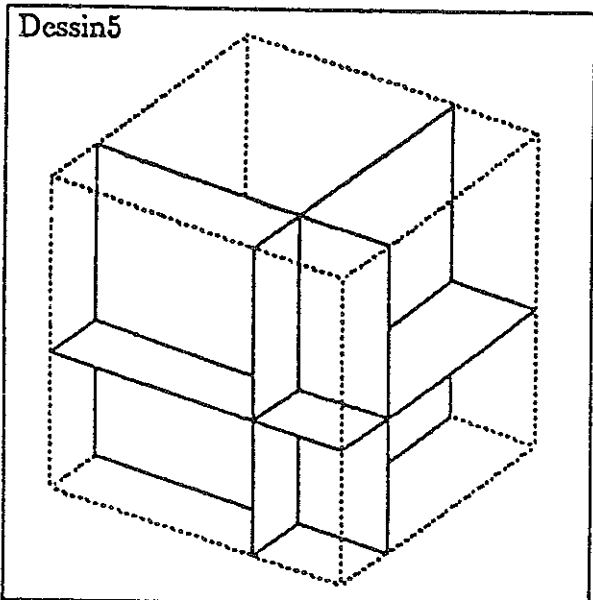
Dessin3



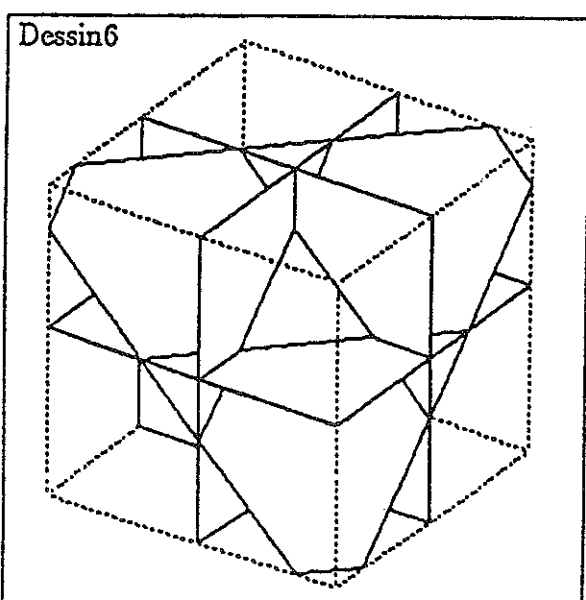
Dessin4



Dessin5



Dessin6



Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

AlgLin.SD.001.01

Carrés magiques d'ordre 3 : Introduction à l'algèbre linéaire

Cette fiche n'est pas destinée à être distribuée aux étudiants. Elle est faite pour être traitée, soit avant le cours d'introduction au langage de l'algèbre linéaire, soit immédiatement après, pour fixer ce langage dans un cadre à peu près concret. Suivant les réactions de l'auditoire, on peut être amené à modifier plus ou moins profondément l'ordre adopté ici.

Définition des carrés magiques :

Poser a priori la définition : Tableau carré

a	b	c
d	e	f
g	h	i

de réels tel que la somme des

termes d'une ligne, d'une colonne et de chacune des deux diagonales soit toujours la même. Ecrire explicitement $a + b + c = S \dots a + d + g = S \dots a + e + i = S, g + e + c = S$, où S s'appelle la somme du carré.

Si cela est justifié par des réactions d'étudiants, préciser que les amateurs de casse-tête, imposent d'autres conditions : termes entiers, tous différents, etc. ce qui donne lieu à des développements théoriques très intéressants, mais d'une autre nature, et bien plus difficiles que ce que l'on fera ici.

On se pose la question de déterminer tous les carrés magiques (c'est à dire trouver un procédé qui permette de les fabriquer tous). Pour cela, plusieurs étapes :

- 1) Demander aux étudiants de donner des exemples de carrés magiques. On obtiendra

facilement

1	1	1
1	1	1
1	1	1

, et quelques carrés du même type, par exemple

2	2	2
2	2	2
2	2	2

. Peut-être

aussi

α	α	α
α	α	α
α	α	α

 où α est paramètre : introduire dans ce cas une notation telle que K_α pour

le carré constant α . Dans la discussion il devrait sortir que si C est un carré magique, et λ un réel, on obtient un nouveau carré λC .

Essayer d'obtenir un carré de type différent. Souvent un étudiant donnera un exemple

tel que

8	3	4
1	5	9
6	7	2

 ou plus simplement tel que

1	-1	0
-1	0	1
0	1	-1

.

2) Demander comment à partir de carrés magiques déjà connus on peut en fabriquer d'autres. On obtiendra ici λC si on ne l'a pas déjà obtenu. On peut obtenir des réponses fausses (permuter les lignes (?)) ou des réponses inutilisables immédiatement (diverses symétries du carré qui peuvent conduire ultérieurement à la notion d'application linéaire). On obtiendra aussi des réponses telles que : ajouter un même λ à tous les termes d'un carré magique C ; dans un tel cas, il est facile de faire constater que cela revient à additionner terme à terme C et K_λ . On dégagera ainsi la notion de somme de deux carrés magiques $C + C'$ obtenue en additionnant terme à terme. Bien faire remarquer que l'on définit une nouvelle opération. Faire dégager les propriétés classiques de cette opération, ainsi que celles

de $(\lambda, C) \mapsto \lambda C$ et celles reliant les deux opérations, éventuellement en lien avec le cours s'il est déjà fait ; sinon introduire le terme d'*espace vectoriel*. Prendre une notation, E par exemple, pour l'ensemble des carrés magiques muni de ces opérations.

Faire surgir plus généralement la notion de *combinaison linéaire* ; il n'y a aucun problème pour admettre implicitement qu'une combinaison linéaire de carrés magiques est un carré magique.

3) Faire constater : on n'est pas sûr d'avoir trouvé tous les carrés magiques. Demander des exemples de *remplissage* de quelques cases parmi les 9 du carré, de façon que la suite du remplissage du carré soit déterminée. Ceci est destiné, et on peut le dire aux étudiants, à éviter de traiter un système de 7 (ou 8 si on considère S comme inconnue) équations pour 9 (ou 10) inconnues. Il n'est pas très facile de faire comprendre la question. On espère trouver

des schémas du type

x	x	x
	x	

 ou

x	x	
	x	
		x

. En écrire au tableau plusieurs trouvés par les étudiants.

4) Chacun ayant choisi son schéma, faire compléter dans les carrés les termes non présélectionnés. Demander si le résultat est vraiment un carré magique (il reste une ou deux conditions à écrire). La résolution donnera des carrés tels que

a	b	c
$?$	$\frac{a+b+c}{3}$	$?$
$?$	$?$	$?$

5) Demander comment les réponses précédentes permettent d'exprimer les carrés trouvés à partir de quelques carrés particuliers. Dans l'exemple ci-dessus, on attend : $C = aC_1 + bC_2 + cC_3$ où l'étudiant aura bien entendu précisé les termes de C_1 , C_2 et C_3 .

A partir de ces calculs, dégager la notion de *base* de E , qui permet d'exprimer de façon unique tout carré magique à l'aide de 3 coefficients : quand on a précisé une base, donner un carré magique revient à donner un élément de $\mathbb{R}^3$. Faire constater, grâce à la diversité des schémas choisis par les étudiants, ou à la diversité des choix des pivots, l'existence de plusieurs bases. Eventuellement, si le temps a obligé à se restreindre aux calculs d'une seule base, donner à préparer pour une prochaine séance le calcul d'autres bases.

La séquence ci-dessus prend une séance de 2 heures.

Des variantes possibles : Utiliser la propriété *tout carré magique est somme d'un carré magique constant et d'un carré de somme nulle*. Cela peut se faire, soit dans la séance décrite ci-dessus, après avoir introduit la notion de combinaison linéaire, soit en deuxième séance, avec l'inconvénient dans le premier cas de ne plus pouvoir obtenir en 2 heures la notion de base.

Cette façon de faire permet de dégager les notions suivantes :

- *application linéaire* : celle qui à un carré fait correspondre sa somme ; sa linéarité est aisée à faire imaginer.
- *noyau* de cette application linéaire, et *sous-espace* : sous-espace des carrés de somme nulle.
- *somme directe* : E est somme directe du sous-espace précédent et du sous-espace des carrés constants. Ce dernier a une base évidente, et la recherche d'une base du premier se fait comme dans la séquence standard, mais dans un contexte un peu plus simple. On peut constater que la réunion des bases des deux sous-espaces supplémentaires donne une base de l'espace entier.

Annexe 8

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

Alg.Ex.001.02

Un peu d'algèbre

I. Etude de quelques ensembles.

Entiers modulo n .

n étant un entier naturel, on appelle classe d'un entier relatif p modulo n l'ensemble $\bar{p} = \{p + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$. L'ensemble des classes modulo n est noté $\mathbb{Z}_n$.

- 1) Ecrire la liste des éléments distincts de $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$ et $\mathbb{Z}_5$.
- 2) Montrer que si $x \in \bar{p}$ et $y \in \bar{q}$, alors $x + y \in \overline{p+q}$ et $xy \in \overline{pq}$.

En posant $\bar{p} + \bar{q} = \overline{p+q}$ et $\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{pq}$, on définit deux lois de composition, addition et multiplication sur $\mathbb{Z}_n$.

- 3) Ecrire la table d'addition et de multiplication de $\mathbb{Z}_4$. A préparer hors TD : Même question pour $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, et $\mathbb{Z}_5$.

Isométries planes laissant une figure donnée invariante.

- 1) Etablir la liste des isométries qui laissent un triangle équilatéral ABC invariant.
- 2) Qu'obtient-on en composant deux de ces isométries ?
- 3) Ecrire la table donnant la composition de ces isométries.
- 4) A préparer hors TD : Reprendre les questions précédentes pour une autre figure de votre choix.

Permutations d'un ensemble de n éléments.

Une permutation de l'ensemble de n éléments $\{1, 2, \dots, n\}$ est une bijection de cet ensemble dans lui-même. Il est commode de désigner une telle permutation s par le tableau de valeurs suivant : $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s(1) & s(2) & \dots & s(n) \end{pmatrix}$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble de ces permutations pour n donné.

- 1) Ecrire les éléments de $\mathfrak{S}_2$ et de $\mathfrak{S}_3$.
- 2) Etablir les tables de composition de ces deux ensembles.
- 3) De la table de $\mathfrak{S}_3$ on peut extraire des parties *stables* ne faisant intervenir que certains éléments ; lesquelles ? Peut-on les trouver toutes.
- 4) Voyez-vous des analogies (totales ou partielles) entre ces tables et des situations rencontrées plus haut ?
- 5) On peut obtenir tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ à partir de la composition de certains d'entre-eux ; lesquels ?
- 6) Combien d'éléments possède $\mathfrak{S}_n$? Combien de cases contient la table de composition de $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5, \dots$? Pourrait-on étudier $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$ à partir de ces tables ?

A suivre (Voir Fiche Alg.Ex.002)

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

Alg.Ex.002.01 (Suite de Alg.Ex.001)

Un peu d'algèbre (suite)

II. Groupes — Groupes finis.

Pour toutes les définitions données ci-dessous, retrouver des exemples dans la partie I.

Soit G un ensemble muni d'une loi de composition notée $*$:

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

On dit que cette loi détermine sur G une *structure de groupe* si

- i) La loi est associative.
- ii) Il existe dans G un élément neutre noté e pour cette loi.
- iii) Pour tout élément x de G il existe un élément x' de G , appelé *inverse* de x , tel que $x * x' = x' * x = e$.

On dit aussi que $(G, *)$ est un groupe, ou même s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la loi, que G est un groupe. G sera dit *abélien* si la loi est commutative. Si l'ensemble G a un nombre fini n d'éléments, on dit que $(G, *)$ est un *groupe fini d'ordre n* .

Soit une partie H de l'ensemble G . Si $(H, *)$ est un groupe, on dit que c'est un *sous-groupe* de $(G, *)$.

On appelle *sous-groupe engendré* par une partie E de G le plus petit sous-groupe $(H, *)$ de $(G, *)$ tel que $E \subset H$. E est alors un *système de générateurs* de H . Un tel système sera dit *système irréductible* de générateurs si toute partie stricte E' de E ($E' \neq E$) engendre un sous-groupe H' strictement inclus dans H .

Si $(G, *)$ et $(G', \circ)$ sont deux groupes, on dira qu'une bijection φ de G dans G' est un *isomorphisme* si :

$$\forall x \in G, \forall y \in G, \varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

$(G, *)$ et $(G', \circ)$ sont alors dits *isomorphes*.

1) On suppose que φ est un isomorphisme de $(G, *)$ sur $(G', \circ)$. Si e est l'élément neutre de G , que peut-on dire de $\varphi(e)$? Si x' est l'inverse de x dans G , que peut-on dire de $\varphi(x')$? Si G est d'ordre n , que peut-on dire de l'ordre de G' ?

2) Pouvez-vous citer des exemples de groupes ? de groupes isomorphes ?

3) Si $(G, *)$ est un groupe fini et si on établit la table de la loi $*$, peut-on rencontrer deux fois le même élément dans la même ligne, dans la même colonne ? Etablir les tables de composition possibles pour des groupes à 2, 3, 4 éléments. Pouvez-vous donner des exemples de groupes correspondant à ces tables.

On appelle *ordre d'un élément* d'un groupe $(G, *)$ l'ordre du sous-groupe engendré dans G par cet élément.

4) Montrer que si x est d'ordre p , p est le plus petit entier tel que $x^p = e$.

5) Déterminer les ordres des éléments des groupes rencontrés au I.

6) Soit G un groupe fini, a un élément de G , H un sous-groupe d'ordre p de G ; on note aH l'ensemble $\{ay \mid y \in H\}$

a) Montrer que pour tout $a \in G$, aH a p éléments.

b) Montrer que si $a \in G$ et $b \in G$, $(aH = bH)$ ou $(aH \cap bH = \emptyset)$.

c) En déduire que l'ordre de H divise l'ordre de G .

7) Montrer que si G est un groupe fini d'ordre n , les ordres de tous ses éléments divisent n .

8) Trouver des sous-groupes de $Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, S_2, S_3$.

9) Si G est un groupe d'ordre 5, que peut-on dire de l'ordre de ses éléments ? En déduire les tables de composition possibles pour un groupe d'ordre 5. Que peut-on dire de deux groupes quelconques d'ordre 5 ? Mêmes questions pour les groupes d'ordre 23. Généraliser.

III. Groupes de permutations.

On se propose d'utiliser les résultats obtenus au II. pour trouver des sous-groupes de S_4 sans avoir à établir une table de multiplication complète de ce groupe.

1) Quel peut-être l'ordre d'un sous-groupe de S_4 ?

2) En pensant aux résultats vus pour S_3 , trouver dans S_4 des éléments d'ordre 2, 3, 4 ; en déduire des sous-groupes d'ordre 2, 3, 4.

3) Les résultats de la question précédente peuvent être généralisés à S_n , comment ?

4) Que peut apporter à la recherche des sous-groupes de S_4 l'étude des isométries laissant un carré invariant ?

5) Dans S_n , on note t_{ij} la *transposition* qui permute i et j ; s étant un élément de S_n tel que $s(i) = j$, que peut-on dire de $t_{ij} \circ s$? En déduire que toute permutation est un produit de transpositions.

6) Utiliser la question précédente pour obtenir des sous-groupes de S_4 non encore rencontrés.

Annexe 9

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées

Deug A1

AlgLin.Ex.015.01

Atelier : algèbre linéaire et représentations géométriques

Si A est une partie d'un espace vectoriel E , on note $\text{lin } A$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A .

Ex 1. 1) Dessiner un plan vectoriel P et une droite vectorielle D de $\mathbf{R}^3$, D n'étant pas incluse dans P .

2) Dessiner dans $\mathbf{R}^3$ un plan vectoriel P et deux vecteurs u et v non colinéaires n'appartenant pas à P ; dessiner $P \cap \text{lin}\{u, v\}$.

3) Dessiner 2 plans vectoriels de $\mathbf{R}^3$ non confondus, et dessiner une base de chacun d'eux de telle sorte que la réunion des deux bases forme une base de $\mathbf{R}^3$.

4) Dessiner deux plans vectoriels P et Q dans $\mathbf{R}^3$, non confondus, et une droite vectorielle D distincte de leur intersection ; faire des dessins différents selon les dimensions de $D + P$ et $D + Q$.

5) Dessiner dans $\mathbf{R}^3$ quatre sous-espaces vectoriels se coupant 3 à 3 en $\{0\}$ et 2 à 2 selon une droite.

Ex 2. Dans $\mathbf{R}^4$, on appelle hyperplan un sous-espace de dimension 3, plan un sous-espace de dimension 2 et droite un sous-espace de dimension 1.

1) Quelle est l'intersection de deux hyperplans ?

2) Si H est un hyperplan et D une droite, quelle est la dimension de l'espace $H + D$?

3) Quelle est l'intersection d'un plan P et d'un hyperplan H ? Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui symbolise la position respective de P et H . Que perd-on comme information sur les dimensions dans cette représentation ?

4) Si P est un plan de $\mathbf{R}^4$ et D une droite, combien d'équations linéaires faut-il pour définir le sous-espace $P + D$?

5) Quelle est l'intersection de trois hyperplans de $\mathbf{R}^4$?

Ex 3. 1) Soit $\mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, et soit $A = \text{lin}\{1, (x-1)^2\}$ et $B = \text{lin}\{x\}$. Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui schématise les positions relatives de A et B . Faire un schéma analogue dans $\mathbf{R}^2$. Perd-on alors des informations sur les dimensions de A ou de B ?

2) Dans $\mathbf{R}^5$, soit $H = \text{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ et $F = \text{lin}\{e_4, e_5\}$, où les e_i forment la base usuelle. Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui schématise les positions relatives de H et F . Un tel dessin peut-il garder toutes les informations qu'on a sur les dimensions de ces espaces ?

3) Etudier les deux questions suivantes, qui ont un rapport étroit :

a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : Si F et G sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel E de dimension n , et si $F + G = E$, alors $\dim F + \dim G = n$.

b) Dans $\mathbf{R}^5$ muni de la base usuelle $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, soit $H = \text{lin}\{e_1, e_2, e_3\}$ et $G = \text{lin}\{e_3, e_4, e_5\}$. Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui schématise les positions relatives de H et G , en y faisant figurer e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . Qu'est-ce qui est faux dans le dessin ?

- 4) Etudier les questions suivantes qui sont elles aussi en rapport étroit :
- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 - Si deux vecteurs u et v n'appartiennent pas à un sous-espace F d'un espace E , alors $\text{lin}\{u, v\} \cap F = \{0\}$.
 - Soit E de dimension n , $F \subset E$, avec $\dim F = p$. S'il existe des vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_k$ linéairement indépendants de E qui n'appartiennent pas à F , alors $n \geq p + k$.
 - Dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, soit $E = \text{lin}\{e^x, e^{-x}, x, 1\}$. Dans E , soit $F = \text{lin}\{e^x, e^{-x}\}$, $u = e^x + x$, $v = e^{-x} + 1$. Représenter dans $\mathbf{R}^3$ les positions relatives de F , u , v et $\text{lin}\{u, v\}$. Qu'est-ce qui est faux dans le dessin ? Et si on remplace v par $w = e^{-x} - x$, que devient le dessin ?
 - La question 2) de l'exercice 1.
- 5) Etudier ensemble les questions suivantes :
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : si trois vecteurs d'un espace vectoriel sont 2 à 2 linéairement indépendants, ils sont indépendants.
 - Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui schématise les positions relatives des 3 fonctions ch , sh , $\exp$.
- 6) Etudier ensemble les questions suivantes :
- L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : soit E de dimension n , et $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs de E . On suppose que, pour un entier p , avec $p < n$ et $p < k$, on a $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_k) = n$. Alors $\text{rg}(x_{p+1}, \dots, x_k) = n - p$.
 - Même question, mais en supposant de plus, dans les hypothèses, que $\text{lin}\{x_1, \dots, x_p\} \cap \text{lin}\{x_{p+1}, \dots, x_k\} = \{0\}$.
 - Représenter dans $\mathbf{R}^3$ les positions relatives des vecteurs suivants de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$: $x \mapsto \sin^2 x$, $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$.
- 7) Dans $\mathbf{R}^4$, on pose $E_1 = \text{lin}\{e_1, e_2\}$, $E_2 = \text{lin}\{e_2, e_3\}$, $E_3 = \text{lin}\{e_3, e_4\}$, $E_4 = \text{lin}\{e_4, e_1\}$ (les e_i forment la base usuelle). Faire un dessin dans $\mathbf{R}^3$ qui schématise les positions relatives de ces quatre sous-espaces. Que perd-on dans cette représentation ?



Annexe 10

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

FLANDRES-ARTOIS

ANNEE 1990/1991

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

* * * * *

DEUG A₁ - SECTION 1

Interrogation écrite du 11 mars 1991

* * * * *

I. Soient, dans $\mathbb{R}^4$, $X = (1, -1, 2, 0)$, $Y = (0, 3, 1, -1)$,
 $Z = (-1, 1, -1, 0)$, $T = (2, 1, 5, -1)$, et pour λ réel, on pose
 $V_\lambda = (1, \lambda, 1, 1)$.

1°) Déterminer le rang des systèmes de vecteurs suivants

- (1) $\{X, Y\}$
- (2) $\{X, Y, Z\}$
- (3) $\{X, Y, T\}$
- (4) $\{X, Y, V_\lambda\}$
- (5) $\{X, Y, Z, V_\lambda\}$

2°) Dire, sans faire d'autres calculs, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. (justifier les réponses).

- (a) $Z \in \text{lin}\{X, Y\}$
- (b) le rang des systèmes $\{X, Y, Z, V_{-1}, V_1\}$ est 5
- (c) la dimension de $\text{lin}\{X, T\}$ est 2
- (d) $\text{lin}\{X, Y\} = \text{lin}\{T, V_{-4}\}$
- (e) $V_1 \in \text{lin}\{X, Y, Z\}$

II. Calculer: $\arcsin\left(\sin\frac{17\pi}{5}\right) + \arccos\left(\cos\frac{9\pi}{5}\right)$.

(les résultats numériques fournis sans explication ne sont pas admis).

.../...

Annexe 11

USTL

DEUG A1 Section 1

Mathématiques Juin 1991

Quatrième devoir surveillé

Durée: 3 heures

PREMIER PROBLEME

On cherche les polynômes f de degré au plus n vérifiant l'équation

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+1) - 3f(x) = Q(x),$$

où Q est un polynôme donné de degré au plus n .

1°/ Définir un espace vectoriel E et une application linéaire T de E dans lui-même, tels que l'équation $(*)$ prenne la forme $T(u)=v$.

2°/ On désigne par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n . Soit $\Delta: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ définie par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

On considère les polynômes $V_0, \dots, V_1, V_2, \dots$
 $V_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)/n!$ [c'est une base de Gregory de $\mathcal{P}_n$].

(a) Quelle est la matrice $\mathcal{A}$ de Δ dans cette base de Gregory ?

(b) Déterminer la matrice $\mathcal{A}^k$ (k entier ≥ 0).

(c) Evaluer Δ^{n+1} .

3°/(a) Montrer que pour tout λ l'application $I - \lambda\Delta: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ est

inversible, et que son inverse est
$$\sum_{k=0}^n \lambda^k \Delta^k.$$

(b) Résoudre complètement l'équation $(*)$ [on pourra exprimer T au moyen de Δ et de I , et calculer f en fonction des $\Delta^k(Q)$].

4°/(a) Quelle est la matrice $\mathcal{B}$ de T dans cette base ?

(b) Dédurre de 3° la matrice $\mathcal{B}^{-1}$.

5°/ Faites une conjecture concernant les nombres ∂ par lesquels on peut remplacer le nombre 3 figurant dans $(*)$, pour qu'on puisse encore résoudre l'équation correspondante, quel que soit Q dans $\mathcal{P}_n$.

@@@@@@@@@@@

TSVP

COURS	TD	ATELIER	TP	DEVOIRS /CONTROLES
Le vrai et le faux en math.	Exercices de raisonnement			
Equations et méthode de Gauss	Théorie élémentaire des ensembles			
Structure vectorielle de $\mathbb{R}^n$, espaces affines et vectoriels des solutions	Géométrie des droites et plans ↓		TP de visualisation de Gauss sur micro-ordinateur →	Devoir sur application de Gauss à la géométrie
Droites et plans dans $\mathbb{R}^3$, paramétrage et équations, courbes et surfaces, faisceaux de plans	Exercices sur Gauss Exercices de géométrie cartésienne	Appariement de dessins et de formules		Compte-rendu du TP
Trop d'équations ? Indépendance linéaire d'équations, de vecteurs de $\mathbb{R}^n$	Une activité sur des polynômes ↓	Les carrés magiques ↓		
Théorie du rang dans $\mathbb{R}^n$, sans coordonnées	Exercices sur l'indépendance linéaire et le rang	Théorie des groupes, la démarche algébrique		Interrogation écrite sur le rang, l'indépendance linéaire, la dimension dans $\mathbb{R}^n$, $n \leq 6$
Description en paramétrique et en implicite des solutions et des "conditions de résolution" d'un système linéaire, dimension et bases "concrètes" dans $\mathbb{R}^n$				

Annexe 12

Chronologie de la première étape de l'enseignement: l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$, équations et paramétrage, le rang, la géométrie

COURS D'ALGÈBRE LINEAIRE	AUTRES MATHÉMATIQUES	TRAVAUX DIRIGES	ATELIERS	DEVOIRS/CONTROLES
	Suites récurrentes linéaires, avec variation de la constante ↓ Polynômes ↓ Fractions rationnelles, éléments simples ↓ Equations linéaires différentielles du premier ordre, variation de la constante ↓		Théorie des groupes, la démarche algébrique ↓	
Axiomatique des espaces vectoriels, sous-espaces, indépendance linéaire, rang, dimension, bases, espaces engendrés Méthodologie: comparaison de sous-espaces, indépendance de vecteurs selon leur nature		Exercices sur le rang Exercices d'algèbre linéaire dans des espaces de fonctions, de polynômes...		Un devoir sur le choix de bases dans les polynômes
Applications linéaires, leurs matrices Méthodologie: trouver la matrice d'une application Noyau et image Diverses notions de rang Méthodologie: 2 manières de trouver noyau et image		Exercices sur la détermination de matrices d'applications Exercices sur noyau et image	Usage de dessins symboliques en algèbre linéaire	Un devoir de modélisation en algèbre linéaire (équation fonctionnelle ou...) Examen partiel: déterminer image et noyau d'une application dans $\mathbb{R}^n$ ou dans les polynômes ou...

Annexe 13

Chronologie de la deuxième étape de l'enseignement: l'algèbre linéaire abstraite, unification de plusieurs domaines et cadre de modélisation interne aux mathématiques; introduction de méthodes

TITRE :

Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année

AUTEUR :

Rogalski Marc

RESUME :

Ce fascicule décrit une ingénierie d'enseignement de l'algèbre linéaire enseignée de 1984 à 1996 à l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Elle vise à surmonter l'obstacle que constitue pour les étudiants le caractère formalisateur, unificateur et généralisateur de cette théorie. Elle met au premier plan l'accès au concept de rang via les équations linéaires, organise de fait la convergence de plusieurs domaines mathématiques vers la généralisation que constitue l'algèbre linéaire, en montrant le rôle unificateur joué par les "calculs linéaires".

MOTS CLES :

algèbre linéaire- formalisation-ingénierie didactique

Editeur : IREM

Université PARIS 7-Denis Diderot

**Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE**

Case 7018 - 2 Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05

Dépôt légal : 1991

ISBN : 2-86612-104-X