



**HAL**  
open science

**Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de  
DEUG A(\*) en algèbre linéaire. (\*) Premier cycle  
scientifique des universités françaises.**

Jean-Luc Dorier, Christian Lavergne

► **To cite this version:**

Jean-Luc Dorier, Christian Lavergne. Analyse dans le suivi de productions d'étudiants de DEUG A(\*) en algèbre linéaire. (\*) Premier cycle scientifique des universités françaises.. IREM de Paris. IREM de Paris, 6, 1990, Cahier de DIDIREM, Régine Douady, 2-86612-099-X. hal-02138114

**HAL Id: hal-02138114**

**<https://hal.science/hal-02138114>**

Submitted on 23 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

Analyse dans le suivi  
de productions d'étudiants de DEUG A (\*)  
en algèbre linéaire.

par Jean-Luc DORIER  
Institut Fourier

Equipe de Didactique des mathématiques  
B.P. 74 - 38 402 St Martin d'Hères Cedex

et avec la collaboration de  
Christian LAVERGNE  
IMAG-TIM3  
Equipe de statistique  
B.P. 53X 38 041 Grenoble Cedex

(\*) Premier cycle scientifique des universités françaises.

**DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

**UNIVERSITÉ - PARIS VII**

**CAHIER DE DIDIEREM**

Analyse dans le suivi  
de productions d'étudiants de DEUG A (\*)  
en algèbre linéaire.

par Jean-Luc DORIER  
Institut Fourier  
Equipe de Didactique des mathématiques  
B.P. 74 - 38 402 St Martin d'Hères Cedex

et avec la collaboration de  
Christian LAVERGNE  
IMAG-TM3  
Equipe de statistique  
B.P. 53X 38 041 Grenoble Cedex

(\*) Premier cycle scientifique des universités françaises.





## SOMMAIRE

### Introduction

- 1) Nos objectifs p 1
- 2) Présentation de la section de DEUG étudiée p 3
- 3) Méthodologie p 4

### A - Prêtest de logique et d'algèbre (octobre)

- I- Analyse a priori et mode de traitement
  - 1) Objectifs et méthode p 6
  - 2) Définition des blocs p 6
    - a- Pour la logique
    - b- pour l'algèbre
  - 3) Analyse des questions regroupées par blocs
    - i- Bloc EQ1 p 7
    - ii- Bloc EQ3 p 8
    - iii- Bloc QA1 et QA2 p 8
    - iv- Bloc QA3 p 10
    - v- Bloc AN p 12
    - vi- Bloc AS p 14
  - 4) Attribution des notes p 15

### II- Interprétation des résultats

- 1) Niveaux par blocs p 16
- 2) Interprétation générale p 22

### III- Comparaison par groupes p 24

### B- Premier devoir surveillé - 7 janvier

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 27
- II- Attribution d'une note p 31
- III- Comparaison par groupe p 32
- IV- Corrélation avec le prétest p 33

### C- Examen partiel - 18 janvier

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 36
- II- Attribution d'une note p 44
- III- Comparaison par groupe p 45
- IV- Corrélation avec le prétest p 46

### D- Deuxième devoir surveillé - 4 mars

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 48
- II- Attribution d'une note p 51
- III- Comparaison par groupe p 52
- IV- Corrélation avec le prétest p 53

### E - Test "vrai/faux" - 13 mars

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 55
- II- Attribution d'une note p 66
- III- Comparaison par groupe p 68
- IV- Corrélation avec le prétest p 69

### F - Troisième devoir surveillé - 1er avril

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 76
- II- Attribution d'une note p 82
- III- Comparaison par groupe p 83
- IV- Corrélation avec le prétest p 83

### G - Quatrième devoir surveillé - 7 janvier

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 86
- II- Attribution d'une note p 93
- III- Comparaison par groupe p 94
- IV- Corrélation avec le prétest p 94

### H - Examen final - 31 mai

- I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs p 97
- II- Attribution d'une note p 104
- III- Comparaison par groupe p 105
- IV- Corrélation avec le prétest p 106

## J - Analyse globale

p 109

### I- Les corrélations avec le prétest et entre les devoirs

- 1) caractéristique du nouvel échantillon p 110
- 2) Présentation des outils statistiques utilisés p 112
- 3) Les résultats
- a- La matrice des corrélations p 112
- b- Les corrélations prétest/devoirs p 113
- c- Les corrélations entre les devoirs p 118

### II- Analyses des données regroupées par thèmes

- 1) Définition des thèmes et de leurs variables p 122
- a- La résolution des systèmes d'équations linéaires p 125
- b- Les questions élémentaires d'algèbre linéaire p 127
- c- Les questions de techniques algébriques p 128
- d- Les questions de synthèse p 128
- e- les questions d'algèbre linéaire p 128
- f- Le calcul matriciel p 132
- 2) Les corrélations globales p 132
- 3) ACP sur les nouvelles variables p 135
- 4) Corrélation avec le prétest p 135

### III- Quelques réflexions en guise de conclusion

- 1) Résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire
- a) Les tâches p 139
- b) Les évolutions individuelles p 141
- c) Critiques méthodologiques p 143
- d) Quelques propositions p 145
- 2) Réflexions didactiques sur ce type de recherches p 147
- 3) Conclusions p 148

### Bibliographie

p 151

## Introduction

Des travaux ont mis en évidence un certain constat d'échec dans l'enseignement des premiers concepts de l'algèbre linéaire en première année du cursus des études universitaires scientifiques ([6], [7] et [8]). Principalement, il apparaît que l'aspect particulièrement formel de certains concepts élémentaires de l'algèbre linéaire est une barrière à leur bonne mise en fonctionnement, si bien que, souvent, la faiblesse des acquis antérieurs dans le domaine de la logique est l'objet d'un reproche récurrent des enseignants à leurs étudiants. Cette remarque un peu vague et quelques autres constatations issues de la pratique des enseignants, nous ont conduit à vouloir essayer de mieux cerner la nature des liens entre la logique élémentaire et l'algèbre linéaire, et de mieux délimiter différents aspects de l'enseignement et de l'apprentissage de ces premiers concepts, à travers une analyse de productions d'étudiants sur le sujet, dans leur suivi.

Ainsi l'étude qui suit a été réalisée à partir d'analyses de copies d'étudiants dans une section de première année de DEUG A (premier cycle scientifique des universités françaises) en algèbre linéaire. Nous avons pour certains étudiants, analysé tous les exercices (ou problèmes) des devoirs réalisés en temps limité et sous surveillance, pendant l'année universitaire 1988/89. En plus nous avons analysé les résultats à un prétest de logique et d'algèbre élémentaires, destiné à nous permettre de mieux cerner les acquis antérieurs des étudiants dans ces domaines.

Les sujets des devoirs et du prétest ont été élaborés par les enseignants seuls, parfois à l'aide de sources didactiques, mais jamais en liaison avec notre analyse. On peut donc dire qu'ils sont représentatifs d'un enseignement assez standard (cf. §2).

### 1) Nos objectifs

Nous voulions tout d'abord mieux baliser le contenu de l'algèbre linéaire telle qu'elle est enseignée et évaluée en première année d'université, au moins en relevant les types de tâches proposées et les procédures utilisées par les étudiants pour les aborder. Les différentes analyses devaient par devoir devraient nous permettre de répondre à cette première question.

- Nous voulions ensuite mieux décrire des types d'évolution dans les compétences en algèbre linéaire pour un même individu, en particulier en fonction des connaissances antérieures en logique et en algèbre élémentaires. La méthodologie employée (cf §3) devrait ainsi permettre, à partir d'un échantillon représentatif de tracer des types d'histoire individuelle.

- Nous voulions enfin dégager des hypothèses sur les interactions entre les différents domaines soit à l'intérieur de l'algèbre linéaire soit

autour de celle-ci. Cette dernière étape nous a conduit à nous interroger sur les contenus possibles de différents objectifs d'apprentissage.

Notre analyse se situe à quelques nuances près (cf §2) dans un contexte standard, c'est-à-dire que l'enseignement dont il est question, ainsi que le contrat global, en particulier en ce qui concerne l'évaluation, sont "classiques". Il s'agit donc de se concentrer sur les méthodes, procédures et erreurs des étudiants en fonction des tâches proposées d'une part, et des connaissances antérieures de chaque individu.

Notre analyse préalable de la nature des concepts d'algèbre linéaire, que nous partageons avec d'autres ([6], [7] et [8]), nous laisse supposer que leur aspect unificateur et simplificateur, ainsi que l'absence de problème "simple" permettant de justifier à lui seul l'introduction de concepts qui n'ont de réelle justification que dans leur emploi répété, conduisent à un enseignement dichotomique.

D'un côté, on propose des problèmes qui soulèvent de "vraies" questions, mais pour lesquels l'algèbre linéaire n'est qu'une façon plus générale, mais pas indispensable, de résolution. Ce nouveau point de vue apporte éventuellement une simplification mais qui n'est vraiment effective que, d'une part, si on maîtrise bien les concepts d'algèbre linéaire et d'autre part, si on a à résoudre plusieurs problèmes du même type. En situation d'enseignement le risque est que la résolution du problème par la méthode utilisant l'algèbre linéaire ne soit qu'un effet du contrat global : "on est en cours d'algèbre linéaire, donc il faut s'en servir", ou bien que les questions qui découpent la tâche obligent à cette démarche. Il n'est par contre pas certain que libre de son choix l'étudiant privilégie la méthode issue de l'algèbre linéaire, on a d'ailleurs observé quelques "dérapages" dans ce sens. Par ailleurs la résolution de ce type de problème nécessite souvent des prérequis liés à des techniques algébriques spécifiques au domaine en jeu (calcul polynomial, calcul intégral ou dérivation etc...). Les difficultés que ce phénomène engendre, peuvent dans certains cas prendre des proportions telles que l'enjeu se trouve entièrement déplacé, et que les questions d'algèbre linéaire n'apparaissent plus que comme secondaires.

D'un autre côté, le deuxième type de problèmes proposés en algèbre linéaire se situe dans un cadre entièrement formel sans référence extérieure. Les espaces utilisés sont généraux, on peut dire que les questions sont de vraies questions d'algèbre linéaire, mais leur intérêt hors ce cadre n'est en général pas visible dans le problème, ce qui peut poser un problème de motivation. L'enseignement visé ici est celui de "techniques-objets", les difficultés qu'il soulève sont liées à l'utilisation du formalisme du langage ensembliste, dont on sait que les étudiants ont beaucoup de mal à l'adopter, surtout en l'absence de point d'appui sur un cadre de référence plus concret.

Cette dualité souffre bien sûr quelques nuances et la plupart des problèmes empruntent un peu des deux types. Pourtant il est rare que le tout se mêle en harmonie et que les deux démarches se complètent.

Cette brève description, qui ne s'appuie pour le moment que sur des présupposés est à garder en mémoire pour la lecture des analyses de tâches, menées dans les chapitres suivants. Mais elle est aussi importante pour la lecture des analyses des procédures. On peut se demander en effet, au vu de cette dualité, ce qui est problématique pour les étudiants, comment ils perçoivent de tels enjeux et dans quelle mesure leur bagage initial influe sur ces deux points. Nous espérons pouvoir répondre au moins partiellement à cette question dans le dernier chapitre.

Du point de vue psycho-cognitif, il sera intéressant de voir dans quelle mesure un étudiant est capable de reconstruire la connaissance en jeu, de voir si dans certaines conditions une reconstruction partielle suffit pour gérer un certain type de tâche. Nous essaierons également de voir si certains étudiants sont mieux "préparés" que d'autres à apprendre dans certaines conditions.

Par contre notre analyse est bien sûr limitée par la méthodologie employée, en particulier, l'analyse de devoirs ne permet pas de distinguer réussite et apprentissage, même si l'analyse en terme de procédures permet de pallier un peu cette lacune, mais nous n'insisterons jamais assez pour dire que tous nos résultats ne sont valables que dans le cadre restrictif décrit ci-dessous.

## 2) Présentation de la section de DEUG étudiée

Les étudiants, dont nous avons testé les copies, sont issus de trois groupes de travaux dirigés (TD) d'une même section de DEUG A (premier cycle scientifique des universités françaises).

Le fonctionnement de cette section est dans les grandes lignes le suivant :

- Les horaires hebdomadaires de mathématiques sont de deux fois deux heures de cours par bigroupes d'une soixantaine et de trois fois une heure et demi de travaux dirigés par groupes d'une trentaine, avec quelques séances supplémentaires de TD sur machines. Les trois groupes analysés sont issus de trois bigroupes distincts.

- Chaque bigroupe dispose d'un même enseignant pour les cours et les TD d'analyse et d'un autre pour les TD et les cours d'algèbre. Sauf pour le bigroupe du groupe 4, qui possède des enseignants distincts pour les cours et les TD.

- Les enseignants se réunissent en réunion pédagogique d'une heure à une heure trente, une fois par semaine, pour coordonner les différents bigroupes.

- En plus d'un partiel en février et de l'examen de juin (épreuves de quatre heures), il y a en alternance trois devoirs surveillés (de trois heures, comptant pour le contrôle continu) et trois devoirs à la maison, par semestre. Il y a en outre quelques tests passés de façon irrégulière, sous surveillance en TD. C'est le cas de ce que nous avons appelé le test "vrai/faux".

- L'enseignement de l'algèbre linéaire s'est étalé sur 17 semaines (pour environ la moitié des enseignements hebdomadaires de mathématiques) de fin novembre à la fin de l'année. Ceci représente un temps plus long que la moyenne que l'on peut observer dans les autres sections de DEUG A première année. Souvent ce cours n'occupe en effet que la moitié des plages horaires sur un semestre environ.

Pour introduire les cours d'algèbre linéaire, les enseignants ont fait faire en TD les exercices tirés du cahier DIDIREM n°72 "De la géométrie analytique à l'algèbre linéaire" ([4]). De plus, J. Robinet a fait un exposé de deux heures en amphithéâtre sur l'histoire des concepts d'algèbre linéaire ([7]). Puis les enseignants ont fait un discours inaugural de type métamathématique pour souligner le caractère simplificateur et unificateur de l'algèbre linéaire. Enfin il a été montré en TD, sur machine, la simplification apportée par l'algèbre linéaire dans le calcul des termes d'une suite de Fibonacci.

Après ces interventions, que l'on peut qualifier d'expérimentales, et qui avec le choix de se laisser beaucoup de temps pour enseigner l'algèbre linéaire, donnent une certaine spécificité à la section étudiée, le cours est resté assez "classique". Son contenu est le contenu standard depuis la définition des espaces et sous-espaces vectoriels, de familles libres et génératrices, de supplémentaires etc ... aux applications linéaires et matrices jusqu'aux questions de diagonalisation.

Cette section a donc été l'objet de soins particuliers pour l'enseignement de l'algèbre linéaire. Pourtant malgré les quelques interventions à caractère expérimental de l'introduction, l'enseignement n'a pas subi de modification très sensible, on peut donc considérer que la section observée est une section assez "classique" de DEUG A.

## 3) Méthodologie

Pour le prétest, à partir d'une analyse a priori, nous avons défini, en fonction des tâches proposées et des cadres d'intervention des concepts, des "blocs de connaissance", sur le modèle proposé par A. Robert et F. Boschet ([1] et [2]) (chapitre A). Ces blocs, qui rendent compte des résultats de chaque étudiant au prétest, nous ont permis d'obtenir une information plus maniable pour la suite de l'analyse.

Pour chaque devoir (DS, partiel, test ou examen), nous avons fait une analyse détaillée des tâches impliquées dans les questions ainsi que des procédures employées par les étudiants. Nous avons codifié les

procédures les plus souvent rencontrées, et donné sous forme de tableau les résultats quantitatifs du dépouillement. Nous avons également, à l'aide de tableaux croisés, essayé d'évaluer la corrélation entre les résultats à chaque devoir et ceux du prétest (chapitres B à H).

Nous avons analysé les copies du prétest et de sept devoirs. Pour chacun nous donnons ci-dessous l'identificateur utilisé et le nombre de copies analysées :

- Prétest : 84 copies.
- Devoir surveillé n°1 : 39 copies.
- Partiel : 74 copies.
- Devoir surveillé n°2 : 46 copies.
- Test "vrai/faux" : 58 copies.
- Devoir surveillé n°3 : 58 copies.
- Devoir surveillé n°4 : 50 copies.
- Examen : 73 copies.

Nous disposons des huit copies pour malheureusement seulement dix-neuf étudiants, à cause de raisons matérielles qui seront évoquées au dernier chapitre.

Dans un dernier temps (chapitre I) nous avons tenu une analyse globale des corrélations entre tous les devoirs et le prétest. Pour cette partie, en collaboration avec C. Lavergne, nous avons utilisé le logiciel SPAD.N (système portable pour l'analyse des données), pour réaliser les analyses en composantes principales.

Nous espérons que la lecture de ce qui suit pourra éclairer le lecteur sur les questions que nous posons plus haut. Il nous faut toutefois insister sur le caractère spécifique, par ses choix, de notre analyse. C'est-à-dire la nature des prérequis tels qu'ils sont évalués par le prétest, le nombre relativement réduit d'étudiants, la nature même des tâches suggérées dans les devoirs, qui sont autant de paramètres qui conditionnent notre étude et qui auraient pu être l'objet de choix entièrement différents.

## A - Prétest de logique et d'algèbre - Octobre.

Ce prétest (comme son nom l'indique) a été donné aux étudiants dans les premiers jours de la rentrée et ne porte sur aucun enseignement spécifique fait en DEUG. Il doit permettre d'évaluer le niveau des étudiants à l'arrivée en première année sur des questions de logique "élémentaire" (questions: 1-i) à iv)/ 3/ 4/ 5/ 8/ 9/ 10 ) et d'algèbre de base (questions 1-v) à viii)/ 2/ 6/ 7). Le test a été passé par groupes de TD en environ une heure; les étudiants savaient qu'il ne compléterait pas pour le contrôle continu. Nous avons analysé 84 copies.

On trouvera, en annexe A-1, le texte de ce prétest.

### **I. Analyse a priori et mode de traitement.**

#### 1) Objectifs et méthode:

Nous nous sommes inspiré d'un travail d'A. ROBERT et F. BOSCHET portant sur "l'acquisition des premiers concepts d'analyse sur  $\mathbb{R}$  dans une section ordinaire de première année de DEUG" ([1] et [2]).

Nous voulons ici caractériser les connaissances de chaque étudiant sous forme d'acquis ou d'insuffisances par rapport à un prérequis en logique ou en algèbre. Pour ce faire nous allons déterminer des "blocs" de questions liées à un même prérequis que l'on définira. Pour chaque bloc de questions on déterminera une note entre 0 et 1. Pour mieux visualiser on déterminera alors par rapport aux résultats globaux et pour chaque bloc trois niveaux d'acquisition (blocs vides, pleins et demi-pleins). La perte d'information sera compensée par la possibilité d'interpréter ces résultats de façon opérationnelle.

#### 2) Définition des blocs:

Pour définir les blocs de connaissances que l'on veut regrouper autour d'un même prérequis on a procédé comme suit:

##### a- Pour la logique:

On a distingué tout d'abord deux catégories suivant les contenus:

(EQ) Les questions faisant intervenir une implication et/ou une équivalence logique (Quest. 1-i) à iv)/ 3) .

(QA) Les questions liées à des problèmes de quantification (Quest. 4/ 5/ 8/ 9/ 10).

On a ensuite distingué trois niveaux :

(N1) La compréhension brute: on demande si une proposition écrite en langage formel est vraie ou fausse (Quest. 1-i) à iv)/ 8/ 9bis et ter/ 10bis et ter).

(N2) On demande d'effectuer une tâche entièrement dans le domaine formel, en l'occurrence de donner la négation d'une proposition quantifiée (Quest. 9 et 10).

(N3) Il faut passer d'un cadre "informel" (langage usuel, graphisme,...) à la traduction en langage formel ou vice-versa (Quest.3/4 et 5).

Il n'y a pas à priori de hiérarchie évidente entre les trois niveaux; si ce n'est peut-être que N1 correspond à la tâche la plus simple. Il s'agit en fait au sens de R. DOUADY ([4]), pour chaque niveau d'être capable de faire fonctionner un même concept dans différents cadres. Or des travaux ([1] et [2]) ont montré qu'à certains seuils, il est plus efficace d'avoir des connaissances même moindres dans plusieurs cadres, ce qui justifie cette différenciation en niveaux. Nous donnerons après l'analyse des questions, une interprétation des blocs par rapport aux connaissances prérequisées.

Cette grille nous permet en théorie de dégager 6 blocs (on regarde chaque catégorie à chacun des trois niveaux) pour la logique. En fait la catégorie (EQ) n'intervient pas au niveau (N2) dans le prétest, il reste donc cinq blocs: EQ1; EQ3; QA1; QA2 et QA3.

#### b) Pour l'algèbre:

Le nombre de questions est beaucoup plus réduit et l'on ne fera que la distinction entre celles touchant au numérique (AN) (Quest.1-v) à viii) et 2) et celles relatives aux structures (AS) (Quest.6 et 7).

#### 3) Analyse des questions regroupées par blocs:

Comme il a été dit en introduction nous allons vers une schématisation des résultats, c'est à dire une compactification des données recueillies permettant des interprétations plus souples et plus accessibles. Néanmoins soucieux de ne pas trop perdre d'information rapidement, nous commencerons par une analyse assez fine question par question, dont nous rassemblerons les données brutes dans un tableau (annexe A-2), qui sera notre base de travail.

On va regarder les questions bloc par bloc. Pour chacune on fait une analyse a priori et en dégagant les types d'erreurs significatives (on attribue pour le tableau un code à chaque type). On définit ensuite une note qui sera le résultat qualitatif à la question. Il nous faudra alors harmoniser ces notes, c'est à dire les pondérer par rapport à l'importance relative de chaque question. On pourra alors en faisant la moyenne des questions attachées à un même bloc, attribuer à chaque étudiant une note par bloc. On verra plus loin comment on réduira ces informations en terme de blocs pleins, vides et demi-pleins.

Tout d'abord quelques remarques pour comprendre le tableau:

Dans tout les cas on a laissé une case vide s'il n'y avait pas de réponse (si cela advient dans une colonne de note on l'interprétera par défaut comme un 0).

Dans tous les cas une réponse entièrement exacte est codée 1.

On a enfin codé 0 toutes les réponses fausses qui ne rentreraient dans aucun de nos types soit parce qu'elles correspondent à des erreurs anecdotiques soit pour des raisons de non hisibilité.

#### i) Bloc EQ1:

Questions 1 - i) à iv):

Ces questions sont du type vrai/faux; il y a donc une part de hasard... Elles testent la compréhension de l'implication et de l'équivalence logique à un niveau élémentaire: on demande de se prononcer sur la véracité de propositions du type  $P \Rightarrow Q$  ou  $P \Leftrightarrow Q$  où P et Q sont supposées assez simples pour ne pas créer de difficultés.

Chaque item a été codé de façon binaire: 1=juste, 0=faux (sauf le blanc pour l'absence de réponse). La colonne tot1, donnant le total des quatre précédentes, représente la note.

Comme on pouvait le prévoir les résultats sont très bons, c'est surtout le dernier item qui fait la différence: il est réussi par 71% des étudiants, contre 100% pour les deux premiers items et 90% pour le troisième. Il n'y a, par ailleurs, aucune non réponse à aucun des items.

Ces quatre questions déterminent à elles seules le bloc EQ1, ce qui est déjà une critique sur sa consistance. Néanmoins un score non parfait à ce bloc est, à moins d'une étourderie, l'indicateur d'un manque de maîtrise de l'équivalence logique.

#### ii) Bloc EQ3:

Question 3:

On teste ici la compréhension d'une proposition comportant une équivalence logique, mais de façon plus fine que précédemment puisqu'on demande de "traduire" cette propriété formelle par la donnée d'un ensemble explicite. On demande en plus une démonstration qui doit faire le lien. C'est un changement de cadre explicite, le concept doit pouvoir fonctionner, dans un univers moins clos, en interaction avec des problèmes de récurrence et d'arithmétique. Examinons tout d'abord une démonstration possible pour mieux voir les difficultés logiques du problème.

Une façon de répondre consiste à faire une récurrence portant sur deux indices successifs: on prend comme hypothèse  $(H_p)$   $2p \in X$  et  $2p+1 \notin X$ . On peut déjà remarquer que la deuxième partie de l'hypothèse est vérifiée dès que la première l'est. Or pour  $p=0$ ,  $0 \in X$  donc  $(H_0)$  est vraie. On suppose alors que  $(H_p)$  est vraie, ensuite il y a au moins deux façons de voir que  $(H_{p+1})$  est vraie:

On peut dire que si  $2p+2 \in X$  alors  $(2p+2)-1=2p+1 \in X$  ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence donc  $2p+2 \notin X$ .

On si on remarque que  $a \in X \Leftrightarrow a+1 \notin X$  s'écrit encore  $a \in X \Leftrightarrow a+1 \in X$  on peut aussi dire  $2p \in X \Leftrightarrow 2p+1 \notin X \Leftrightarrow 2p+2 \in X$ .

Dans les deux cas, on démontre par récurrence que  $X = \{2p/p \in \mathbb{N}\}$ . On peut donc mettre en évidence trois tâches différentes dans la démonstration: la nécessité d'une récurrence, l'idée que si  $n \in X$  alors  $n+1 \in X$ , et enfin le passage plus délicat de  $n$  à  $n+2$ . La troisième tâche semble être la véritable difficulté de logique de la question, cela nécessite une bonne manipulation de l'équivalence et/ou de la contraposée (ou du raisonnement par l'absurde).

Pour rendre compte des résultats à cette question, on a utilisé trois colonnes: une pour la réponse, une pour la démonstration et une pour attribuer une note.

La réponse n'est pas intéressante en soi, par ailleurs le dépouillement a montré qu'elle n'a pas donné lieu à des erreurs significatives (ni par leur nombre ni par leur lien avec les difficultés de logique) aussi a-t-on codé 1 pour la bonne réponse (82% des cas), M quand l'ensemble était "maladroïtement écrit" (ie l'écriture est formellement fautive mais traduit imparfaitement la bonne idée) par exemple:  $X = \{n \in \mathbb{N} / a=2n\}$ ;  $X = \{ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in X \text{ tel que } x=2n \}$  ou  $x=2n$  (4 cas).

Enfin on a reproduit la réponse donnée dans les 9 autres cas.

La démonstration pose un problème plus délicat de traitement. 32% des étudiants n'ont rien écrit.

A partir des trois tâches explicitées plus haut, on a distingué quatre types d'erreurs significatives (superposables) :

Code A: Seule la partie directe ( $a \in X \Rightarrow a+1 \in X$ ) est utilisée et le passage à  $a+2$  n'est pas acquis. On peut attribuer cela à un échec de la mise en fonctionnement de l'équivalence dans un nouveau cadre, le concept semble ne pas être encore assez maîtrisé pour servir d'outil à une démonstration plus complexe. Toutefois les raisons de blocage peuvent être plus liées à la nature réursive de la démonstration si bien que le problème de l'équivalence a pu être escamoté... (22 cas).

Code B: En plus de la partie directe il y a (au moins pour  $a=0$ ) une démonstration du passage de  $a$  à  $a+2$ . C'est un indicateur assez fiable de la bonne maîtrise du concept d'équivalence. Cela représente seulement 21% des démonstrations au moins entamées (12 cas).

Code R: Il y a explicitement mise en œuvre d'une récurrence. Ceci est donné à titre indicatif. On n'en a pas déduit de corrélation avec la difficulté logique, sauf la remarque faite plus haut (8 cas).

Code I: Il y a de bonnes idées mais qui restent à un niveau intuitif. On peut supposer que dans ce cas le niveau A est atteint mais il serait très hasardeux de s'avancer au delà dans les interprétations... (14 cas).

Pour la note (tot3) on compte:

- Pour la réponse : 0,5 si elle est juste, 0 sinon.

- Pour la démonstration : 1 pour le code B, 0,5 supplémentaire s'il est associé à un R (3 cas), 1,5 si la réponse est exacte (2 cas) et 0 dans tous les autres cas.

Ceci donne une note sur 2. On ne paye pas cher la réponse elle-même, qui n'est que peu sans la démonstration. Et, dans la démonstration, on privilégie la difficulté logique, au détriment de la récurrence. Enfin une réponse incomplète codée B/R reçoit la même note qu'une réponse exacte, étant donné la rareté de ces deux cas (5 au total).

Ici encore le bloc EQ3 est représenté par une seule question. Elle a cependant assez de poids, par l'importance de la tâche à accomplir. Une très bonne note 1,5-2 (14 cas soit 17%) est un indicateur de la bonne maîtrise du concept d'équivalence et de la capacité à le faire fonctionner dans un cadre assez complexe.

### iii) Blocs QA1 et QA2 :

On traite ces deux blocs ensemble, car ils font tous les deux intervenir les résultats aux questions 9 et 10. Le bloc QA1 est également en partie déterminé par la question 8.

#### Question 8 :

On a ici un type de question semblable aux quatre premiers items de 1 sauf qu'on ne vise plus l'implication et l'équivalence mais les problèmes de quantification. On a opéré de même par un traitement binaire avec report d'une note globale par sommation (colonne tot8). Cette question est également fort bien réussie à 90% pour le premier item, et 95% pour les deux autres, avec aucune non réponse.

#### Questions 9 et 10 :

Ces deux questions sont faites sur le même modèle: on demande d'abord de nier une proposition formelle, ceci teste la compréhension du fonctionnement interne du langage formel (niveau N3), puis il faut dire si la proposition puis sa négation sont vraie ou fautive (niveau N1). Les questions ter et bis sont donc du même type que les questions 1 ou 8 (contrôle de véracité de proposition en langage formel) mais elles peuvent également nous fournir des indices sur le contrôle du sens dans la première activité. En effet si la négation a été mal faite, que valide la dernière réponse? Doit-on compter comme exacte la bonne réponse pour la vraie négation ou pour celle proposée par l'étudiant? Il y a là un premier type de cohérence à tester. Par ailleurs une bonne connaissance de la logique devrait amener systématiquement deux réponses opposées à 9bis et 9ter puisqu'on doit se prononcer successivement sur la véracité d'une proposition et de sa négation. Il y a donc un autre type de cohérence que l'on peut tester qui est interne à la logique (on a essayé de rendre compte de cette dualité dans la note et pour les blocs).

Pour le début de chaque question voici les codes utilisés:

Code I\*: tout est bien sauf que l'inégalité n'est pas stricte (pour 9) et large (pour 10). Ce problème de négation des inégalités se superpose à d'autres erreurs mais pour des raisons de lisibilité on n'y fait référence que dans ce cas. Nous n'avons pas retenu comme significatif cette erreur qui nous semble seulement liée aux inégalités et très périphérique à nos

préoccupations (14 cas pour 9) et/ou 10)).

Code N: la phrase est recopiée telle quelle en remplaçant "il existe" par "il n'existe pas", c'est donc une négation avec les conventions du langage usuel sans tenir compte des règles du langage symbolique (18 cas pour 9) et 18 aussi pour 10), dont 17 en commun).

Code S: les quantificateurs sont bien niés (on remplace un existentiel par un universel et vice-versa et on garde le même ordre) mais l'inégalité est inchangée. Cela révèle une perte de sens, l'activité dans le langage formel est mécanique (14 cas pour 9) et 15 pour 10), dont 12 en commun).

Code A: c'est un peu le cas symétrique du précédent les quantificateurs sont inchangés, seule l'inégalité est niée. Il y a dans ce cas un indice certain d'une mauvaise connaissance dans l'utilisation des quantificateurs (2 cas pour 9) et 6 pour 10), dont 2 en commun).

Code B: le quantificateur existentiel reste inchangé (le reste est exact). Ce cas relativement fréquent (14%) semble attester d'une plus grande difficulté à nier un existentiel, peut-être y a-t-il là un effet pervers du langage usuel?... (13 cas pour 9) et 11 pour 10), dont 10 en commun).

Code L: il y a inversion dans l'ordre des deux quantificateurs. Il est alors délicat de savoir à quel moment cette inversion s'est faite : est-ce à la lecture de la proposition ou seulement au moment de la nier? De plus cette inversion peut se superposer avec d'autres erreurs précédemment citées. Par exemple à la question 9 une réponse du type: "pour tout p il n'existe pas n tel que p>n" est codée I/N ou "pour tout p il existe n tel que p<n" est codée I/B (10 cas pour 9) et 7 pour 10), dont 3 en commun).

Il serait délicat d'essayer d'établir une sorte de hiérarchie entre ces différents types d'erreurs, que nous ne relevons qu'à titre indicatif. Ils pourront nous être utiles à posteriori pour affiner les corrélations prérequis/connaissances acquises, de façon individuelle. Pour l'instant nous retiendrons que, dans leur ensemble, toutes ces erreurs révèlent un obstacle dans le maniement du formalisme dû à une méconnaissance de règles de logique et/ou à une incapacité à les faire fonctionner. Aussi a-t-on donné une note de façon binaire à ces deux débuts de questions (colonnes 9' et 10').

Il y a, avec un taux très faible de non réponses, un taux de réussite de 30% dans les deux cas et 24 % de doubles bonnes réponses.

Pour les questions bis et ter on a opéré comme pour les questions 1)-i) à iv) et 8. Elles sont inégalement réussies: 43% pour 9bis, 69% pour 9ter, 86% pour 10bis 65% pour 10ter et seulement 7 non réponses partielles ou totales.

Voici comment on a attribué des notes à ces questions en tenant compte des remarques faites plus haut.

On a créé une note partielle pour chacune des cohérences citées plus haut:

Coh1: on attribue 0,5 chaque fois que la réponse à 9ter est cohérente avec la réponse de l'étudiant à 9 (même si la réponse à 9 était la bonne), on fait pareil pour 10 et on additionne (il y a 38% de 1, 50% de 0,5 et 12% de 0).

Coh2: on attribue 1 si dans les colonnes 9bis et 9ter et 10bis et 10ter il y a deux valeurs identiques (i.e deux fois de suite la réponse à la négation est l'opposée de celle à l'affirmative). On met 0 dans tous les autres cas; c'est en quelque sorte une prime à la cohérence par rapport à la négation. Pour pallier à l'arbitraire du vrai/faux on exige volontairement la double cohérence pour donner un bonus (78% de réussite).

Pour tenir compte des deux niveaux: contrôle de véracité et activité interne au langage formel, on a regroupé ces résultats sur deux notes:

$$\text{tot9} = 9\text{bis} + 9\text{ter} + 10\text{bis} + 10\text{ter} + \text{coh1} \quad \text{pour le premier niveau}$$

$$\text{tot10} = 9' + 10' + \text{coh2} \quad \text{pour le deuxième.}$$

Un mauvais score global à tot8 et tot9 sera l'indicateur d'une mauvaise connaissance de la quantification à un niveau élémentaire, tandis qu'un résultat moyen peut provenir des difficultés rencontrées au début des questions 9 et 10.

Tot10 mesure le degré d'acquisition des règles du fonctionnement interne du langage formel propres aux quantificateurs.

#### iv) Le bloc OA3:

##### Question 4:

Il s'agit dans cette question de donner une traduction dans un cadre graphique de propositions exprimées dans le cadre du langage symbolique. La difficulté de la tâche est concentrée sur le type et la position des deux quantificateurs qui ouvrent chaque proposition, le reste de la phrase étant identique dans les quatre cas. On teste ainsi la résistance des connaissances sur la quantification à un passage obligé dans un cadre plus concret.

On a utilisé cinq colonnes: une pour chaque cas, plus une pour une note globale.

On a fait essentiellement un traitement binaire (0/1). Il y a quelques cas où au lieu d'un dessin les étudiants répondent par une périphrase ("les trois courbes passent par un même point ..."), on a traité ces copies pareillement aux autres. Par contre on a mis 0 à celles où les graphes ne représentent pas des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (2 cas).

On a relevé les erreurs suivantes :

-Pour a) (pour tout entier i,  $i=1;2;3$ , il existe un élément a de  $\mathbb{R}$  tel que  $f_i(a)=1$ ) un dessin représentant trois courbes concurrentes en un point d'ordonnée 1 est fort ambigu. Il n'est pas contradictoire avec la proposition, cependant il est restrictif. On a considéré qu'il correspond à une confusion avec le cas c) (il existe un réel a tel que, pour tout entier i,  $i=1;2;3$ ,  $f_i(a)=1$ ). Ce cas très fréquent (53% des réponses) est codé C et il



donne un 0 pour la note. On a opéré de même pour la confusion inverse (plus facilement détectable et plus rare: 2 cas), le code C est alors dans la colonne 4-c).

- De plus il y a possibilité du même genre de confusion entre 4-b) (il existe un entier  $i, i=1;2;3$ , tel que pour tout réel  $a, f_i(a)=1$ ) et 4-d) (pour tout réel  $a$ , pour tout entier  $i, i=1;2;3, f_i(a)=1$ ) on utilise alors les mêmes conventions que ci-dessus. Ce cas est beaucoup moins courant: 18% des réponses.

Chaque question est notée 0 ou 1 et la colonne tot4 donne la somme des quatre notes partielles. A part la première confusion, c'est une question globalement assez bien réussie. Les taux de réussite sont respectivement de 39%, 71%, 83% et 92%, et il y a 31% de réponses entièrement exactes.

#### Questions

Il y a ici une démarche inverse de la question précédente puisqu'on demande de traduire une phrase en langage usuel dans un langage le plus formalisé possible. Il y a donc nécessité de la prise en charge de la formalisation, le changement de cadre s'opère vers le domaine propre à la connaissance visée.

Une bonne réponse est " Eiant donnée une suite de réels  $u_n$ : pour tout  $a$  réel positif, il existe  $n$  tel que:  $a < u_n < a$ ". Du point de vue de la compréhension de la phrase, l'important ce sont les deux quantificateurs "pour tout  $a$ " et "il existe  $n$ " (la quantification sur la suite est secondaire d'autant qu'elle apparaît déjà dans la formulation initiale et qu'elle est ambiguë). La propriété est formellement très proche de la convergence de  $u_n$  vers 0, aussi une telle confusion est possible (bien que peu doivent connaître cette définition de la convergence). La formulation initiale rend également peu probable la possibilité d'inversion des quantificateurs. Voici les codes utilisés:

Code1\*: bonne quantification mais petite erreur d'une autre nature (oubli de  $a>0$  par exemple ...), on ne relève ceci qu'à titre indicatif (7 cas).

Code A: oubli des deux quantificateurs. On peut voir ici une méconnaissance quasi-totale de l'utilisation des quantificateurs ou une perte de sens telle, que l'étudiant ne comprend pas la nécessité de quantifier (1 cas).

Code B: oubli du quantificateur existentiel. C'est peut-être un degré de moindre méconnaissance. On peut rattacher ce genre d'erreur à celle des questions 9 et 10 (codée B également). Elle est certainement due à la plus grande difficulté conceptuelle liée à l'utilisation du quantificateur existentiel, ce qui peut être une déviation du langage usuel (8 cas).

Code C: le quantificateur existentiel est remplacé par un universel. C'est une erreur de même nature que précédemment, et il serait difficile de dire la quelle des deux est la plus sérieuse(8 cas).

Code D: confusion avec l'expression de la convergence de la suite vers 0. On se raccroche à ce que l'on sait sans trop l'avoir compris. Le sens est donné par "approximation visuelle".

Code E: inversion des quantificateurs. A rapprocher des confusions de la question 4; c'est un signe de la fragilité de la compréhension de l'utilisation des quantificateurs (3 cas).

Comme en 9 et 10 on ne se hasarderait pas à faire de hiérarchie et la note tot5 est donnée de façon binaire (1 pour les codes 1 et 1\* et 0 dans tout les autres cas). Il y a 20% de non réponses et un taux de réussite de 46% sur les réponses exprimées (39% sur le total).

Un très bon score au bloc QA3 atteste de la réussite à faire deux changements de cadre dans des sens différents, il est le signe d'une bonne maîtrise de la quantification que l'on sait aussi bien utiliser pour revenir à une formulation plus concrète que pour formaliser des propositions du langage usuel. Par contre un score nul est certainement le signe d'une inaptitude à utiliser la quantification en tant qu'outil.

#### v) Le bloc AN:

##### Question 1)-(iv) à viii):

On teste ici de façon un peu sommaire la connaissance de certaines conventions d'écriture courantes en algèbre sur les racines carrées.

On a fait un traitement binaire des réponses. Il n'y a pas de non réponses et il y a 70% de réussite au premier item, 80% au deuxième et 90% aux deux derniers.

##### Question 2):

Cette question met en jeu une implication elle n'est pourtant pas sur le fond une question de logique. Elle teste la capacité à traiter une information numérique de façon globale sur une variable, dans le cadre des inégalités. Ce sont donc essentiellement des concepts d'algèbre qui sont en cause.

La deuxième partie de la question est assez mal formulée, à cause de l'emploi d'inégalités strictes. Du coup on complètera exacte la réponse avec 0 à gauche, qui est majoritaire. D'ailleurs la formulation de la question qui dit "quelle est l'inégalité..." avec l'emploi de l'article défini, favorise la réponse avec maximum d'information ( $0 < x^2 < 9$ ) qui est ici fautive à cause des inégalités strictes.

On fait également un traitement binaire des deux réponses, réussie également à 90% sans non réponse.

On met une note globale (tot2) pour ces deux groupes de questions qui déterminent le bloc AN, en faisant la somme des six notes partielles. Le score au bloc évalue ainsi de façon très partielle un certain degré de connaissance des outils de l'algèbre sur les nombres. C'est surtout un

score faible qui pourra être vu comme l'indicateur d'une lacune dans ce domaine. Il faudrait beaucoup d'autres questions par contre pour déceler une bonne maîtrise de ce domaine à peine ébauché dans ce test.

#### v) Le bloc AS:

##### Question6:

C'est une question sur les structures algébriques. On cherche à savoir si les étudiants sont familiers du vocabulaire et des premières définitions de cette partie de l'algèbre (qui englobe entre autres l'algèbre linéaire). On a répété un seul grand type d'erreur.

Code1\*: réponse exacte mais les 3 variables ne sont pas quantifiées explicitement. On a seulement relevé ce point pour information; c'est une pratique courante qui peut aussi bien attester d'une bonne maîtrise que d'une ignorance totale de la quantification (23 cas).

Code C: confusion avec la commutativité. Les propriétés des lois ont été vues mais elles ne sont pas encore intégrées par l'étudiant qui ne se souvient plus de ce qui se cache derrière les noms (8 cas).

La note (tot6) est donnée de façon binaire. Il y a 10% de non réponses et un réussite de 85% sur les réponses exprimées.

##### Question7:

De même qu'à la question précédente on teste une connaissance de base de l'algèbre de structure.

Pour le dépouillement on reporte dans une première colonne (7) les réponses de chaque étudiant. La notation employée n'est pas toujours celle des étudiants (par exemple on note  $(\mathbb{R}, +)$  la réponse: "les réels pour l'addition."). Les bonnes réponses tournent à quelques rares exceptions près autour des 4 ou 5 exemples classiques. Il pourra être intéressant de relever à posteriori ceux qui citent de bons exemples plus originaux (cf tableau). Les réponses inexactes sont des copies non conformes de bons exemples (telles que  $(\mathbb{R}, x)$ ); des conceptions naïves (telles que  $(\mathbb{N}, +)$ ) ou des exemples apparemment incohérents ou mal formulés (par exemple {1,2} ou l'addition).

Dans la colonne tot7 on attribue une note de façon binaire. Il y a 8% de non réponses et une réussite de 75% sur les réponses exprimées.

Un bon score au bloc AS sera donc le garant d'une connaissance de base de l'algèbre de structure au moins au niveau "culturel" sans pour cela que les connaissances aient un caractère "outil" très développé; on ne teste en effet ici que "l'objet" de connaissance pas sa fonctionnalité. Un mauvais score pourra par contre révéler une lacune totale sur les structures algébriques.

#### 4) Attribution de notes :

Nous allons comme il a été dit plus haut définir maintenant une

pondération des questions en tenant compte de l'importance relative de la tâche à accomplir chaque fois. C'est en fait le barème du prétest. On va déjà ramener toutes les notes sur 1, on obtient ainsi les nouvelles notes:

$$n1 = \text{tot}1/4 ; n2 = \text{tot}2/6 ; n3 = \text{tot}3/2 ; n4 = \text{tot}4/4 ; n5 = \text{tot}5 ; n6 = \text{tot}6 ; n7 = \text{tot}7 ; n8 = \text{tot}8/3 ; n9 = \text{tot}9/5 \text{ et } n10 = \text{tot}10/3.$$

Ensuite pour chaque note on définit son coefficient de pondération Ci en distinguant essentiellement deux grands groupes:

$$C1=C2=C5=C6=C7=1 \text{ et } C3=C4=C8=C9=2 ; C10=3$$

Ceci est assez grossier mais sera suffisant pour notre analyse d'autant que chaque bloc recouvre finalement peu de questions.

Il est alors facile d'attribuer une note pour chaque bloc:

$$EQ1=n1;$$

$$EQ3=n3;$$

$$QA1=1/2(n8+n9);$$

$$QA2=n10;$$

$$QA3=1/3(2n4+n5);$$

$$AN=n2;$$

$$\text{et } AS=1/2(n6+n7).$$

On donnera également une note pour les deux catégories:

$$EQ=1/3(n1+2n3) \text{ et } QA=1/10(2n8+2n9+3n10+2n4+n5)$$

et pour les trois niveaux:

$$N1=1/5(n1+2n8+2n9); N2=n10 \text{ et } N3=1/5(2n3+2n4+n5)$$

On détermine enfin la note globale N sur 20 au prétest :

$$N=20/(EQ1+EQ3+QA1+QA2+QA3+AN+AS)$$

arrondie à l'entier le plus proche.

Ces dernières données sont regroupées dans un deuxième tableau en annexe A-3.

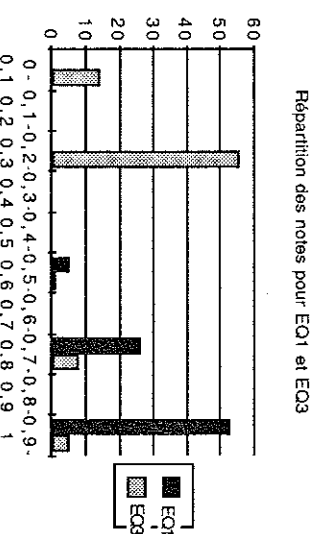
## II - Interprétation des résultats:

### 1) Niveaux par blocs:

Pour chaque bloc, on va définir trois niveaux (bloc vide, semi-plein et plein) en fonction de la répartition des notes attribuées au bloc.

### Blocs "EQuivalence":

Voici le graphe montrant la répartition des notes par tranches aux blocs EQ1 et EQ3 pour tous les étudiants:



On donne en abscisse les tranches de notes de 0,1 en 0,1. Par ex: 0,2-0,3 signifie que la note EQ1 est telle que  $0,2 \leq EQ1 < 0,3$  (sauf pour la dernière tranche où les deux inégalités sont larges). En ordonnée on reporte le nombre d'étudiants (sur les 84 testés) dans la tranche considérée.

Au vu de ce graphe on détermine les trois tranches suivantes :

EQ1(2) (bloc plein) si  $EQ1=1$   
 EQ1(1) (bloc semi-plein) si  $1 > EQ1 \geq 0,7$   
 EQ1(0) (bloc vide) si  $EQ1 < 0,7$

Avoir EQ1(0) (très rare) veut dire avoir fait des étourderies ou signale de graves lacunes sur l'équivalence et/ou l'implication.

Avoir EQ1(1) correspond en majorité à une erreur en 1)-iv) et montre, à moins d'une étourderie, un manque de familiarité avec l'équivalence.

Avoir EQ1(2) (le plus fréquent) veut dire savoir utiliser l'équivalence et l'implication à un niveau élémentaire. C'est un prérequis de base.

De même on détermine:

EQ3(2) si  $EQ3 \geq 0,7$   
 EQ3(1) si  $0,2 \leq EQ3 < 0,7$   
 EQ3(0) si  $EQ3 < 0,2$

Avoir EQ3(2) veut dire savoir utiliser le concept d'équivalence comme outil dans un cadre complexe.

Avoir EQ3(1) (largement majoritaire) est très ambigu, cela veut dire trouver le bon ensemble en 3 et éventuellement amorcer une démonstration, mais ne pas avoir su interpréter l'équivalence dans un nouveau cadre. La difficulté liée à la récurrence dans la question 3 n'autorise malheureusement qu'une interprétation très nuancée de ce score.

Avoir EQ3(0) veut dire avoir une lacune certaine sur le prérequis "manipement de l'équivalence" dont le caractère outil n'est même pas opérationnel à un niveau intuitif dans un cadre numérique.

La répartition pour ces deux blocs est la suivante:

score	0 (vide)	1 (demi)	2 (plein)
bloc	effectif %	effectif %	effectif %
EQ1	5 6%	26 31%	53 63%
EQ3	14 17%	57 68%	13 15%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Les deux répartitions sont très distinctes; il est clair que le bloc EQ3 est moins accessible. Pour les deux blocs une majorité assez nette se dégage (EQ1(2) et EQ3(1)); les cas "intéressants" seront ceux dégaçés de cette majorité (avec une distinction intrinsèque délicate entre EQ1(0) et EQ1(1)).

Pour voir la corrélation entre les deux nous avons croisé les résultats aux deux blocs.

	EQ1(0)	EQ1(1)	EQ1(2)
EQ3(0)	0 0%	7 27%	7 13%
EQ3(1)	5 100%	15 58%	37 70%
EQ3(2)	0 0%	4 15%	9 17%

(les pourcentages sont calculés sur la colonne)

En fait la corrélation n'est pas du tout évidente, contrairement à ce qu'on aurait pu croire. Le plus surprenant est le résultat de la première colonne, qui laisse supposer que EQ1(0) qui concerne d'ailleurs peu de gens, n'est guère significatif. Cela confirme l'idée que EQ1 vide ou semi-plein ne sont guère différenciables.

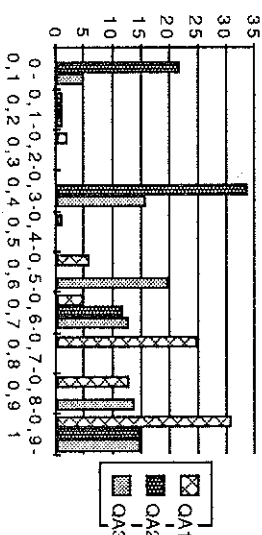
Les blocs qui nous semblent à priori significatifs sont: EQ1(2) (avoir EQ1 vide ou semi plein est en effet un signe de lacune grave); EQ3(2) et EQ3(0).

Par exemple: avoir EQ1(2) et pas EQ3(0) ou avoir EQ3(2) (donc pas EQ1(0)) signifie avoir atteint le niveau prérequis (selon le prétest) pour un maniement satisfaisant de l'équivalence. Cela représente 62% des cas.

#### Blocs "OuAntiification":

Voici le graphe donnant la répartition des notes par tranches aux blocs QA1; QA2 et QA3 pour les 84 étudiants:

Répartition des notes pour QA1, QA2 et QA3.



On a utilisé le même type de représentation que plus haut.

On définit ainsi:

QA1(2) si  $QA1 \geq 0,8$

QA1(1) si  $0,6 \leq QA1 < 0,8$

QA1(0) si  $QA1 < 0,6$

Avoir QA1(2) veut dire à priori être capable de lire une phrase avec deux quantificateurs.

Avoir QA1(1) dénote un doute sur la connaissance des quantificateurs.

Avoir QA1(0) (rare) est à moins d'étourderie ou de fatigue un indicateur de lacunes importantes. Le prérequis sur les quantificateurs n'est pas atteint.

De même on détermine:

QA2(2) si QA2=1  
QA2(1) si  $0,3 \leq QA2 < 1$   
QA2(0) si  $QA2 < 0,3$

Avoir QA2(2) veut dire être capable de nier des phrases en langage symbolique comportant deux quantificateurs, c'est à dire avoir un assez bon maniement du formalisme.

Avoir QA2(1) peut vouloir dire soit ne pas avoir su nier une des deux phrases 9 et10 ou (exclusif) ne pas avoir respecter la cohérence 2. Les règles de fonctionnement interne du langage formel ne sont pas encore bien maîtrisées.

Avoir QA3(0) pointe une méconnaissance du formalisme.

Enfin on a:

QA3(2) si QA3 =1  
QA3(1) si  $0,6 \leq QA3 < 1$   
QA3(0) si  $QA3 < 0,6$

Avoir QA3(2) veut dire savoir interpréter une phrase quantifiée dans un nouveau cadre moins formel ainsi que quantifier une phrase non formalisée.

Avoir QA3(1) veut dire avoir répondu juste aux quatre items de la question 4 ou avoir réussi la question 5 et au moins 2 items de la 4 (sans avoir tout exact bien sûr).

Avoir QA3(0) est le signe d'une insuffisance de connaissance des quantificateurs, le prérequis n'est pas atteint.

La répartition pour ces trois blocs est la suivante:

score	0(vide)	1(Demi)	2(plein)
bloc	effectif %	effectif %	effectif %
QA1	10 12%	30 36%	44 52%
QA2	23 27%	46 55%	15 18%
QA3	22 26%	47 56%	15 18%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Dans chaque cas, un bloc emporte une majorité. Pour QA1 c'est le bloc plein, alors que pour QA2 et QA3 c'est le bloc semi plein.

En outre ces deux derniers blocs ont une répartition identiques. On va examiner les corrélations entre les trois blocs.

Examinons d'abord la corrélation de QA1 avec les deux autres.

	QA1(0)	QA1(1)	QA1(2)
QA2(0)	5 50%	13 43%	5 11%
QA2(1)	5 50%	15 50%	26 59%
QA2(2)	0 0%	2 7%	13 30%
	effectif %	effectif %	effectif %
QA3(0)	2 20%	9 30%	11 25%
QA3(1)	7 70%	19 63%	21 48%
QA3(2)	1 10%	2 7%	12 27%

(les pourcentages se calculent sur la colonne)

A une exception près, personne n'a QA2(2) ou QA3(2) avec QA1(0). On peut donc dire que avoir QA1(0) est significatif d'une lacune importante sur les quantificateurs. Par contre avoir QA2 ou QA3 plein semble un indicateur de solidité, il faudra voir comment les deux sont corrélés. A part ces deux cas extrêmes, les répartitions suivent l'allure générale, néanmoins avoir QA1(1) augmente les chances d'avoir QA2 et/ou QA3 vides tout en diminuant celles d'avoir QA2 et/ou QA3 pleins alors que pour QA2(1) et QA3(1), les proportions ne sont guère modifiées. Ceux qui ont QA1 plein sont répartis de façon quasi identique à la répartition générale des blocs QA2 et QA3 avec un très léger glissement vers le bas.

On peut dire qu'avoir QA1 est le prérequis de base sur les questions de quantification. Sa faible corrélation avec QA2 et QA3 laisse toutefois apparaître sa fragilité.

Voici maintenant le tableau croisé donnant la corrélation entre QA2 et QA3:

	QA2(0)	QA2(1)	QA2(2)
QA3(0)	5 22%	15 33%	2 13%
QA3(1)	16 70%	24 52%	7 47%
QA3(2)	2 8%	7 15%	6 40%

(les pourcentages sont calculés sur la colonne)

QA2 et QA3 avaient des répartitions globales quasiment identiques, leurs répartitions en fonction de QA1 n'étaient pas sensiblement différentes. Or il apparaît qu'ils ne sont que très peu corrélés. En fait pour les trois scores à QA2 on retrouve une répartition à QA3 peu différente de la répartition générale: dans les trois cas il y a une forte majorité de blocs semi-pleins. La seule différence significative est que ceux ayant obtenu QA2 plein sont plus nombreux à avoir QA3 plein (40%) que vide (13%).

Ces différentes remarques nous amènent à considérer un nouveau bloc Q:

Q(0) si QA1 est vide ou si un bloc est vide aucun des deux autres n'étant plein.

Q(2) si QA1 est plein et ni QA2 ni QA3 n'est vide.

Dans tous les autres cas le bloc Quantificateurs sera semi-plein.

Voici la répartition que l'on obtient:

Q(0)	Q(1)	Q(2)
28 33%	26 31%	30 36%

Avoir Q(0) signifie ne pas avoir assez d'assurance dans la manipulation des quantificateurs alors qu'avoir Q(2) veut dire avoir le prérequis de base et dans deux cadres plus complexes un minimum de compétence.

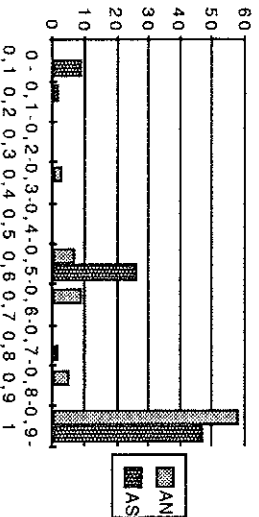
La répartition est cette fois assez uniforme pour les trois niveaux. Ce nouveau bloc devrait assez bien mesurer le degré d'acquisition des prérequis sur la quantification.

Les blocs qui nous semblent à priori significatifs sont donc: Q(0); Q(2); QA2(2) et QA3(2) (à cause de leur rareté).

#### Blocs Algèbre:

Voici le graphe donnant la répartition des notes aux blocs AN et AS:

Répartition des notes pour AN et AS.



On ne définita que deux niveaux pour AN : le bloc plein si  $AN \geq 0,8$  et le bloc vide sinon. Avoir AN atteste d'une certaine familiarité avec des écritures et des calculs algébriques simples.

On définit ensuite:

AS(2) si  $AS = 1$

AS(1) si  $0,5 \leq AS < 1$

AS(0) si  $AS < 0,5$

Avoir AS(2) veut dire connaître les premières définitions relatives aux structures algébriques.

Avoir AS(0) est le signe d'une méconnaissance totale des structures algébriques.

AS(1) peut provenir d'une étourderie mais est certainement le signe d'une connaissance très superficielle.

On ne teste que la connaissance "objet", on n'a aucune information sur l'aptitude à utiliser celle-ci en situation.

La répartition à ces deux blocs est la suivante :

AN	AS(0)	AS(1)	AS(2)
63 75%	9 11%	28 33%	47 56%

Nous garderons AN et AS(2) comme blocs significatifs des prérequis d'algèbre évalués dans le prétest.

Les indications sont très faibles pour ce qui concerne l'algèbre. Ce test n'évalue pas finement des compétences en algèbre, les résultats mêmes grossiers qu'il fournit pourront cependant mesurer l'acquisition d'un certain prérequis.

#### 2) Interprétation générale:

On trouvera, en annexe A-4, le tableau récapitulatif donnant pour chaque étudiant sa note globale N au test et son niveau aux blocs EQ1; EQ2; QA1; QA2; QA3; Q; AN; et AS. Ainsi que le nombre Nb(0) de blocs vides (lacunes graves) parmi EQ1; EQ2; QA1; QA2; QA3; AN et AS.

Ce dernier tableau donne une information assez compacte. Elle est bien sûr schématique et partielle, mais aussi d'une lisibilité rapide. Ce sera le point de départ de la suite de notre travail. Pour chaque étudiant on a ainsi un "profil" donnant le degré d'acquisition des prérequis de logique et d'algèbre en termes de mise en fonctionnement de certains concepts dans différents cadres, mise à part la restriction que nous avons émise sur AS. Nous pourrions par la suite mesurer la corrélation entre ce profil et les compétences en algèbre et plus particulièrement en algèbre linéaire.

Voici sur deux exemples comment on peut lire ce tableau.

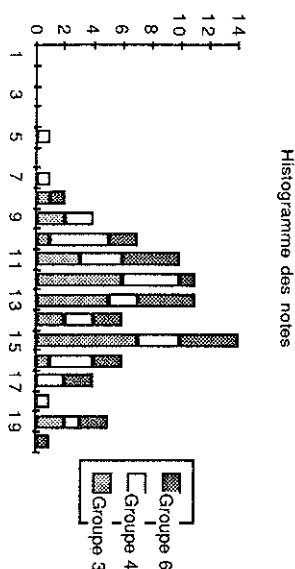
-3a n'a pas de blocs vides il ne semble donc pas avoir de lacune trop importante. D'ailleurs sa note globale au test est 16 donc atteste un bon niveau. Il semble à l'aise avec la quantification et posséder les prérequis de base en algèbre. Ses résultats sur l'équivalence sont un peu plus incertains sans être alarmants. C'est un étudiant qui ne devrait pas être gêné a priori dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire par des lacunes antérieures dans ces domaines.

-3k a quatre blocs vides (sur sept) donc des lacunes importantes; en particulier sur les deux prérequis d'algèbre ce qui risque d'être un handicap au moment de l'introduction de la structure d'espace vectoriel. Pour la logique les deux blocs de base sont pleins, ce qui assure une certaine compétence, d'autant que le bloc de formalisme est à demi plein. Mais les deux blocs de niveau 3 vides semblent montrer une incapacité à utiliser ces concepts dans des cadres différents sous leur caractère outil. On peut craindre des difficultés au moment de l'introduction de la notion de dépendance linéaire par exemple, où quantificateurs et équivalence sont des outils nécessaires à la construction du concept.

### III - Comparaison par groupes:

Nous allons maintenant comparer les résultats à ce prétest dans les trois groupes.

Voici l'histogramme des notes globales au test dominant la répartition par groupes. On donne en abscisse la note et en ordonnée les effectifs par chaque groupe.



On a une moyenne globale de 13,2 avec un écartype de 3,02.

Pour le groupe 3 la moyenne est de 13 avec un écartype de 2,59.

Pour le groupe 4 la moyenne est 12,8 avec un écartype de 3,36.

Pour le groupe 6 la moyenne est 13,8 avec un écartype de 3,08.

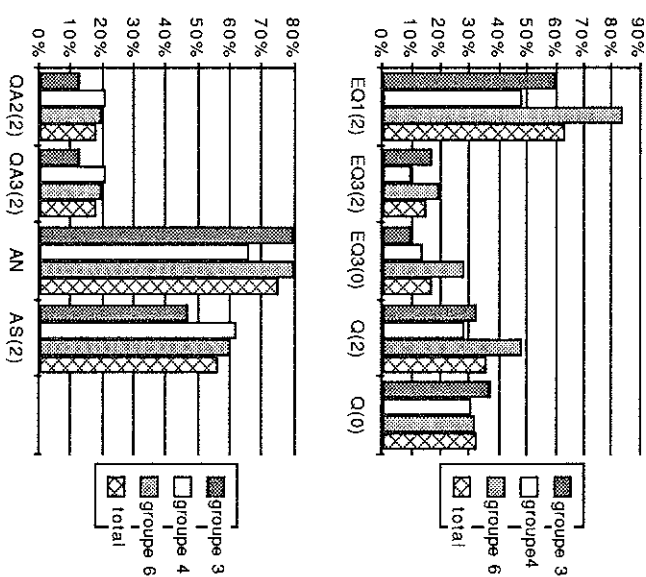
Les différences dans la répartition des notes pour les trois groupes ne sont donc pas très significatives.

Voici maintenant un tableau dominant par groupe le nombre d'étudiants ayant obtenu chacun des blocs dont nous avons dit plus haut qu'ils nous semblaient significatifs:

n° du groupe	3		4		6		tout	
blocs	effectif	%	effectif	%	effectif	%	effectif	%
EQ1(2)	18	60%	14	48%	21	84%	63	63%
EQ3(2)	5	17%	3	10%	5	20%	15	15%
EQ3(0)	3	10%	4	14%	7	28%	17	17%
Q(2)	10	33%	8	28%	12	48%	36	36%
Q(0)	11	37%	9	31%	8	32%	33	33%
QA2(2)	4	13%	6	21%	5	20%	18	18%
QA3(2)	4	13%	6	21%	5	20%	18	18%
AN	24	80%	19	66%	20	80%	75	75%
AS(2)	14	47%	18	62%	15	60%	56	56%

(Les pourcentages sont calculés sur l'effectif du groupe)

Pour mieux visualiser ces résultats nous donnons les graphiques suivants :



On peut tout de suite dire que les répartitions par blocs ne sont pas très différentes dans chaque groupe puisque l'allure générale se retrouve et que pour chaque bloc les différences n'excèdent jamais 20%.

Voici néanmoins quelques remarques significatives:

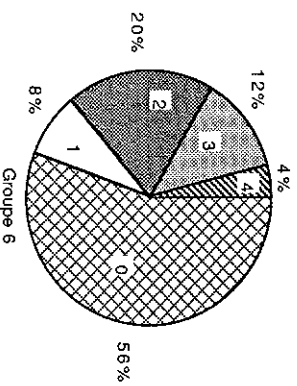
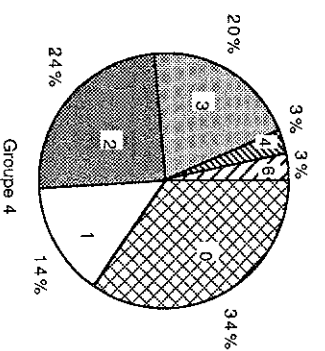
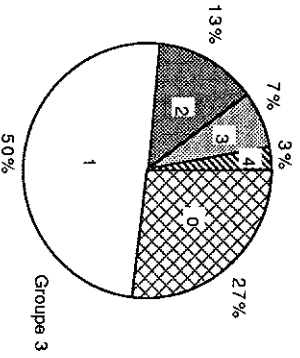
- On constate que le groupe 6 est toujours en tête pour les blocs pleins; en particulier pour Q(2) où l'avance est sensible. Ce point est d'autant plus important que ce bloc est comme on l'a dit plus haut un bon indicateur des compétences sur la quantification dans différents cadres. Ce résultat concorde avec la moyenne globale légèrement meilleure pour le groupe 6. Pourtant ce groupe est aussi nettement en tête pour le bloc vide EQ3(0), ce qui pourrait indiquer une assez forte hétérogénéité de niveau; mais ceci n'est pas confirmé par l'écartype des notes (3,08 pour le groupe 6 contre 3,02 pour le total) ni par les résultats au bloc Q(0) très identiques dans les trois groupes. La particularité la plus visible du groupe 6 est donc son niveau globalement plus élevé que les deux autres.

- Comparons maintenant les groupes 3 et 4. Le groupe 3 obtient de meilleurs résultats pour les blocs EQ. Pour les blocs "quantification" Il est en tête pour Q(2) mais avec moins de QA2(2) et QA3(2) que le groupe 4, qui a par ailleurs moins de blocs Q vides. Plus d'étudiants obtiennent AN dans le groupe 3 mais c'est l'inverse pour AS(2). Les moyennes globales de ces deux groupes sont également très proches, on ne peut donc faire de comparaison globale sur leur niveau. La plus grosse distinction que l'on puisse peut-être faire entre ces deux groupes vient de la répartition des notes qui est plus éclatée pour le groupe 4 (écartype le plus élevé: 3,36) que pour le groupe 3 qui semble plus homogène (écartype le plus faible: 2,59).

Voici maintenant un tableau et trois graphiques donnant pour chaque groupe la répartition du nombre de blocs vides parmi EQ1; EQ2, QA1, QA2, QA3, AN et AS :

n° du groupe	3	4	6	Tout
nb de blocs 0	effectif	effectif	effectif	%
0	8	10	14	38%
1	15	4	2	25%
2	4	7	5	19%
3	2	6	3	13%
4	1	3%	1	4%
5	0	0	0	0%
6	0	1	0	1%
7	0	0	0	0%

(Les pourcentages sont calculés sur l'effectif du groupe)



C'est de nouveau dans le groupe 6 que l'on trouve le plus d'étudiants n'ayant aucun bloc vide. Pourtant si on fait le total des étudiants ayant zéro ou un bloc vide il est distancé par le groupe 3 (77% contre 64%). Dans les deux cas le groupe 4 arrive en queue (48% d'étudiants ne possédant qu'un ou aucun bloc vide).

Le nombre d'étudiants ayant un ou pas de blocs vides est en partie influencé par le niveau général du groupe, ce qui explique en partie les résultats du groupe 6. Mais c'est aussi un signe d'homogénéité, surtout comme pour le groupe 3 dont le niveau global est plutôt faible, alors que beaucoup d'étudiants n'ont que peu de blocs vides. Ces résultats confirment donc doublement nos remarques précédentes.

En conclusion on peut donc dire que le groupe 6 a un niveau légèrement plus élevé que les deux autres. Les groupes 3 et 4 ont des niveaux assez semblables mais le premier est très homogène alors que le second est au contraire plus dispersé. Il sera intéressant de voir ce que ces distinctions relevées sur les prérequis deviendront plus tard.

## B - Premier devoir surveillé - 7 janvier.

Ce premier devoir surveillé contenant de l'algèbre linéaire, a été passé par tous les groupes pendant les mêmes 3 heures, il contenait deux exercices d'algèbre et deux exercices d'analyse. On trouvera en annexe B-1 le texte des deux exercices d'algèbre. Nous avons analysé 40 copies : 10 du groupe 3, 12 du groupe 4 et 18 du groupe 6.

### I - Analyse a priori - Résultats quantitatifs :

Pour chaque question on a attribué ce que nous appellerons une note binaire c'est-à-dire de 0 ou 1 et éventuellement un code correspondant à un type d'erreur voire de bonne réponse. Nos choix sont explicites dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont récapitulés dans un tableau en annexe B-2.

#### Premier exercice :

Le premier exercice d'algèbre consiste en la résolution d'un système de quatre équations linéaires à quatre inconnues avec un paramètre  $\lambda$ .

La dimension quatre est un choix intermédiaire, c'est ni trop, ni trop peu d'équations et d'inconnues. Le choix d'un système carré est un élément rassurant (pour les étudiants), car habituel. En choisissant le premier pivot classiquement en haut à gauche, on arrive, en une opération, au système triangulaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ \quad \quad \quad z = -1 \\ \quad \quad \quad 2z = -2 \\ \quad \quad \quad 3z + (\lambda-8)t = -3 \end{array} \right.$$

On peut donc dire que la partie calculatoire de l'exercice est volontairement rendue élémentaire par le choix des données, d'autant que la technique dite du "pivot de Gauss" a fait l'objet d'un enseignement explicite. De fait, la plupart des étudiants arrivent, même si ce n'est pas toujours en une opération, à ce dernier système.

On peut donc dire que l'évaluation de la réussite à l'exercice ne va pas porter sur l'habileté à utiliser la technique du pivot, qui n'est qu'un outil supposé acquis. La difficulté que l'on veut évaluer réside bien plutôt dans la capacité à interpréter le système obtenu, en fonction des valeurs du paramètre  $\lambda$ . D'une façon un peu large, on peut dire que l'enjeu réside dans le contrôle du sens dans la manipulation d'objets algébriques formels.

Ainsi la note binaire N1, que nous avons attribuée à cette question, ne porte que sur cette deuxième phase de la résolution. Le taux de réussite est de 58%. Un seul étudiant n'a pas répondu à la question.

Pour les réponses exactes (N1=1), nous avons distingué :

- Code EXT, pour ceux donnant l'ensemble des solutions en extension sous forme de quadruplets avec variables principales. Ce type de réponses semble le plus achevé. On peut penser que c'est le reflet d'une forme de savoir qui devrait bien préparé à l'algèbre linéaire. Par exemple une telle formulation permet une lecture directe de la dimension, de l'origine et des générateurs de la variété linéaire affine des solutions (7 cas).

- Code EQUA, pour ceux donnant un système minimal de deux ( $\lambda=8$ ) ou trois ( $\lambda \neq 8$ ) équations indépendantes déterminant l'ensemble des solutions. Ce type de réponse, qui avait été validé par l'enseignement préalable, est mathématiquement correct. Cependant il peut laisser, à cause de son côté formel, un doute sur la compréhension profonde de ce qu'est l'ensemble des solutions. Parfois certains indices - du genre "t est arbitraire", "on prend y et z comme paramètres" etc... - rendent la réponse plus affirmée, mais dans la plupart des cas la réponse n'est accompagnée d'aucun commentaire (15 cas).

- Code CAL, pour ceux ayant fait une erreur de calcul lors du premier pivot (en général dans le second membre de la dernière équation) mais donnant une bonne interprétation de leur résultat par la suite (2 cas) donnant les solutions avec équations indépendantes).

On peut a priori envisager deux grands types d'erreurs : des erreurs d'interprétation dans les phases finales d'équivalence entre les systèmes et la confusion entre variable et paramètre.

- Code INT pour des erreurs dans l'interprétation des derniers systèmes. Par exemple, si l'équation  $z=-1$  (ou  $t=0$ ) est délaissée dans une dernière équivalence ou si après avoir retrouvé une équation déjà existante, on conclut " $S=\mathbb{R}$ " (10 cas).

- Code PARA pour des confusions entre paramètre et variable. Typiquement ce sont les discussions articulées sur les deux alternatives "si  $\lambda=8$  ..." et "si  $t=0$ ...". Souvent la suite de la discussion révèle d'autres indices de cette confusion, en particulier l'équation  $z=-1$ , mise au niveau des conditions, disparaît de l'ensemble des solutions (6 cas).

Une bonne résolution de cet exercice semble un prérequis assez incontournable pour aborder de nombreux problèmes d'algèbre linéaire. Ici l'absence de contexte rend la tâche identifiable, plus ciblée. Dans une activité plus complexe, où la tâche de résolution d'un système est un outil, des erreurs des types repétés plus haut risquent d'être handicapantes, mais on peut aussi s'interroger sur la résistance de certaines "bonnes" réponses (avec seulement un système minimal d'équations) à une demande d'interprétation dans un cadre différent.



### Deuxième exercice

Cet exercice est classique. Un ensemble est identifié comme une variété linéaire affine, on l'explique alors en cherchant un élément origine et la nature des vecteurs de sa direction. Ici le découpage donne la démarche à suivre et chaque question ne présente pas de grosses difficultés. Le déroulement "imposé" pour la résolution du problème initial est censé être plus simple que la résolution "brute" du système  $4x4$  auquel conduisent les conditions  $P(1) = P(2) = P'(1) = P'(2) = 1$ . Pourtant ceci n'apparaît que dans la mesure où l'on peut comparer les deux méthodes, c'est-à-dire que d'une part, on a eu accès aux deux et d'autre part on est assez compétent dans les deux cadres (en particulier celui de l'algèbre linéaire) pour apprécier le gain. De plus pour un seul calcul, le gain n'est pas évident, ce qui l'est surtout, c'est le caractère généralisable de la démarche à d'autres ensembles. Enfin à la question 2-e, si on ne voit pas immédiatement que  $\mathfrak{q}$  est généré par  $(X-1)^2(X-2)^2$ , on doit résoudre un système  $4x4$  qui n'est guère plus simple que le système initial (c'est le système homogène associé), si bien que finalement le tout paraît plus long que la démarche "naturelle". Dans les faits une dizaine d'étudiants ont, avant de répondre aux questions, posé le système  $4x4$  et commencé sur leur copie sa résolution. Seuls trois sont allés jusqu'au bout, un s'est arrêté là, les deux autres sont revenus aux questions de l'énoncé, en exploitant assez mal leur calcul initial. Par ailleurs sur les 25 étudiants ayant abordé la question 2-e, seuls 4 ont donné sans calculs la composition de  $\mathfrak{q}$  (code DIR). On peut également se demander si les abandons soudainement nombreux à cette question, ne viennent pas aussi de la déroute face à un calcul s'annonçant laborieux.

Il semble donc que cet exercice, posé dans de telles conditions, ne soit pas, malgré les apparences, une illustration du caractère simplificateur de l'algèbre linéaire. Il faudrait peut-être, pour qu'il joue ce rôle, qu'il soit placé dans un contexte métamathématique explicite où les enjeux soient clairs.

### Questions 2-a et 2-c

Dans ces deux questions, classiques pour des débutants, on demande si un ensemble est un espace vectoriel. Dans le premier cas (2-a), ça n'en est pas un, c'est en fait une variété linéaire affine. Dans le deuxième cas (2-c), c'en est bien un (d'ailleurs la question est affirmative), et c'est la direction de la variété.

Ces deux questions ont un taux de réussite assez important de respectivement 73% et 70%.

Pour la première nous avons relevé 6 cas où la raison invoquée est l'absence dans  $P$  du polynôme nul (code  $P=0$ ). La majorité préfère donc un argument plus général, comme : " $\lambda.P(1)=\lambda$  donc ce n'est pas stable pour la loi externe", ou quelque chose d'identique avec l'addition.

Peut-être peut-on voir ici le même phénomène que ce qui se passe quand les étudiants, plutôt que de se contenter d'un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fautive, donnent un ensemble d'objets vérifiant certaines hypothèses qui en font des contre-exemples. C'est-à-dire que pour (se) convaincre les étudiants ont besoin d'un argument plus général qu'un contre-exemple isolé ou comme ici de la seule non appartenance de 0 à l'ensemble, il leur faut un argument plus général, or en pratique c'est souvent moins convaincant, voire faux si aucun objet ne vérifie les hypothèses données.

Ici la méthode d'investigation a aussi joué un rôle, car beaucoup d'étudiants essaient d'abord de montrer que  $P$  est un espace vectoriel, ils découvrent ainsi la non-stabilité des lois, avant de se poser la question de l'appartenance du 0.

On a d'ailleurs relevé 6 cas (code CTR), où la contrainte de montrer que  $\mathfrak{P}$  est un sev est si forte que les étudiants y arrivent soit en paraphrasant la définition, sans se soucier du sens, soit en contournant les difficultés par des ellipses fallacieuses.

3 étudiants en 2-a, dont un également en 2-c (et c'est le seul), utilisent une définition fautive d'un espace ou d'un sous-espace vectoriel (code DEF). En 2-c, 4 étudiants utilisent la définition axiomatique des espaces vectoriels (code AX). Ces types d'erreurs ou de maladresses ne sont guère significatifs en début d'apprentissage, il est toutefois important de les noter pour en tester la persistance.

Enfin en 2-c, 5 étudiants déduisent, avec des arguments plus ou moins valables, que  $\mathfrak{q}$  est un espace vectoriel de leur croyance que  $\mathfrak{P}$  en était un. (code DED).

Pour des débutants, les résultats à ces deux questions peuvent être considérés comme bons, il sera intéressant de regarder le devenir de ceux qui ont échoué à une de ces questions dans les problèmes à venir.

### Question 2-b

Cette question est essentiellement technique, la formulation adoptée, bien qu'un peu lourde, la rend très télévisée. Cela revient à montrer que  $P$  est une variété linéaire affine.

En fait 25 étudiants, soit 62%, ne montrent que la plus évidente des deux inclusions et concluent à l'égalité (code INC), nous leur avons attribué une note N2b de 0.

4 étudiants ont abandonné le problème à cette question.

Les 11 restants, soit 28%, ont répondu correctement.

Ce type de question, que l'on retrouve dans de nombreux problèmes d'algèbre linéaire, pose donc une difficulté identifiée à beaucoup d'étudiants.

### Questions 2-d, 2-e et 2-f

La question 2-d se ramène facilement à la résolution d'un système 3x3.

Il y a en fait un taux de réussite de 75% (dont trois erreurs de calcul bénignes non pénalisées) et un seul abandon supplémentaire par rapport à la question précédente. Les 5 erreurs sont dues à un abandon du calcul (2), à l'oubli de deux conditions (2), ou à une impossibilité à traduire le problème en terme de système d'équations linéaires (1).

On a déjà parlé de la question 2-e dans l'introduction, le taux de réussite est de 43%, avec trois cas seulement de réponse directe, sans résolution de système. On compte 8 cas où l'on pose le système 4x4 puis abandonne la résolution.

La question 2-f est une question de synthèse, facile si on a répondu aux précédentes, quasi-inabordable sinon. De fait il n'y a que des abandons ou de bonnes réponses, ces dernières correspondant exactement aux bonnes réponses à la question précédente.

### II- Attribution d'une note :

Nous avons attribué au problème la note globale N sur 10 :

$$N = (3N1 + 2(N2a + N2c) + N2b + N2d + N2e).$$

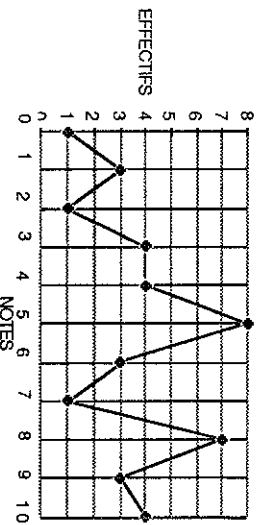
On rappelle que chaque note partielle vaut 0 ou 1.

Le premier exercice présente une tâche plus importante que n'importe laquelle des questions du deuxième exercice. Les questions 2-a et 2-c nous semblent être primordiales pour des débutants en algèbre linéaire. Avec son taux d'échec massif sur le même problème, la question 2-b n'est guère significative. La question 2-d est fort simple. Enfin on a vu que les questions 2-e et 2-f donnent des résultats identiques et posent un problème technique, c'est pourquoi il nous a semblé juste de ne les faire intervenir que peu dans la note, chacune d'elle comptant pour moitié dans N2e.

Nous avons écarté de la suite de notre analyse, la copie (3ab), où l'étudiant a résolu (correctement) le système initial de l'exercice 2, sans répondre aux questions posées.

Le graphique suivant donne la répartition des notes.

REPARTITION DES NOTES



On obtient alors pour les 39 copies restant, une moyenne de 5,7 avec un écart-type de 2,8. La moyenne est donc plutôt bonne et la répartition assez hétérogène. L'écart-type étant relativement élevé surtout pour une note sur 10, il faudra se méfier des interprétations utilisant des écarts-types, dans la suite de notre analyse. Il y a deux gros pics en N=5 et N=8.

On peut distinguer trois tranches de notes suivantes :

-  $N \leq 4$  : 13 étudiants.

-  $5 \leq N \leq 7$  : 12 étudiants.

-  $N \geq 8$  : 14 étudiants.

Ce découpage semble assez bien rendre compte de trois niveaux distincts décelés par ce devoir.

### II - Comparaison par groupes

Avec le nouvel échantillon (par rapport au prétest) nous obtenons pour ce prétest une moyenne de 13,6 avec un écart-type de 2,84. Globalement il n'y a donc pas de grande différence, puisqu'avec l'échantillon total, on avait une moyenne de 13,2 avec un écart-type de 3,02.

Dans le tableau suivant nous récapitulons pour chaque groupe, pour le prétest et pour le premier devoir surveillé, la moyenne et l'écart-type et, seulement pour le devoir, la répartition dans chacun des trois groupes de notes:

N° GR	EFF	PRETEST		PREMIER DEVOIR SURVEILLE				
		MOY	ECAR	MOY	ECAR	$N \leq 4$	$5 \leq N \leq 7$	$N \geq 8$
3	9	12,8	2,4	3,2	2,7	6	2	1
4	12	13,5	3,3	4,8	2,2	6	5	1
6	18	14	3	7,4	2	1	5	12

Tout d'abord, on n'observe pas de grande modification dans les données par groupe du prétest, avec notre échantillon réduit, tout au plus le léger écart entre les groupes 3 et 4 s'est inversé au profit du dernier. Ce constat confirmerait une hypothèse émise par A.Robert et F.Boschet ([1] et [2]) sur l'invariance des résultats lorsque l'on ne prend au hasard que la moitié d'une classe.

Pour le premier devoir, la suprématie du groupe 6 se confirme, elle est même beaucoup plus nette, le groupe 3 est légèrement plus en queue, sans que ce soit encore trop significatif. Par contre nos remarques sur l'homogénéité ne sont pas du tout confirmées par les nouveaux écart-types, mais cela confirme ce que nous avons souligné plus haut, on ne peut guère se fier à ces données. La répartition en trois groupes de

notes accentue encore l'effet de suprématie du groupe 6, et montre que l'écart entre les deux autres vient d'une plus grande concentration dans la tranche médiane pour le groupe 4.

Il faudrait bien sûr, pour nuancer ces résultats, pouvoir déterminer dans quelle mesure on évalue l'enseignement fait dans chaque groupe à travers les résultats des étudiants. Une hypothèse serait que cet effet est plus visible en début d'apprentissage (comme ici pour l'algèbre linéaire) parce que les étudiants n'ont pas encore acquis une autonomie suffisante.

#### IV - Corrélation avec le prétest

Pour examiner la corrélation avec le prétest, il nous faut tout d'abord examiner les variations obtenues dans les résultats au prétest entre la population initiale et l'échantillon de 39 étudiants testé ici. Le tableau qui suit donne sur deux lignes les principales données chiffrées du prétest en regard pour la population du prétest (1er ech) et pour le nouvel échantillon (2ème ech) :

Tableau de comparaison avec la population du prétest :

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2
1er ech	84	13.2	63%	15%	17%	36%	36%	75%	5.6%	38%	63%	82%
2ème ech	39	13.6	59%	13%	21%	36%	31%	92%	6.4%	51%	62%	87%

On voit que ce nouvel échantillon donne une répartition assez semblable pour les blocs du prétest.

Certaines données sont un peu à la hausse, en particulier B=0 (aucun bloc vide) qui réalise 51% avec le nouvel échantillon contre 38% avec le précédent, mais l'effectif pour B<1, avec deux effectifs identiques vient contre-balancer cet écart. De même AN et AS(2) totalisent respectivement 92% et 64% avec le nouvel échantillon contre 75% et 56% avec l'ancien.

Ces différences peuvent s'expliquer par la prépondérance dans le nouvel échantillon du groupe 6, pour lequel les résultats au prétest étaient globalement meilleurs. Néanmoins, pour tous les autres blocs, les écarts sont infimes.

Nous donnons maintenant le tableau croisé des résultats au prétest et au premier devoir surveillé.

Dans l'en-tête des colonnes, apparaissent la moyenne au prétest, les différents blocs définis lors du prétest, ainsi que le nombre de blocs vides (B).

Dans l'en-tête des lignes apparaissent la moyenne au premier devoir et les trois tranches de notes.

Nous donnons deux versions du tableau, une où les pourcentages sont calculés sur la ligne et une autre où ils le sont sur la colonne.

Dans chaque version la première ligne donne la répartition selon les blocs du nouvel échantillon de 39 étudiants, dans le premier en pourcentage sur les 39, dans le second en effectif réel.

De plus, pour la répartition en nombre de blocs vides, plutôt que les colonnes B=0 et B=1 etc ..., nous donnons B=0, B<1, B<2 et B>2.

Cela nous a semblé plus juste, en effet s'il y a un pourcentage élevé de gens n'ayant aucun bloc vide, dans une catégorie donnée (par exemple  $N \geq 8$ ), il se peut, que dans cette même catégorie, le pourcentage de gens ayant un bloc vide soit assez faible (voire plus faible que celui de la répartition globale), mais que la corrélation dans le sens positif soit tout de même très forte. Ce qui est significatif alors, c'est le nombre d'étudiants ayant au plus un bloc vide. De même, pour une corrélation négative, si le nombre de gens n'ayant pas de blocs vides est faible, le nombre de gens ayant un bloc vide peut être élevé alors que le nombre de gens ayant au plus un bloc vide peut encore être inférieur à la moyenne. Comme au delà de 3 blocs vides, il n'y a que 3 étudiants ayant 4 blocs vides et un ayant 6 blocs vides, nous avons regroupé ces cas avec le précédent en B>2.

Tableau croisé n°1

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	39	13.6	59%	13%	21%	36%	31%	92%	6.4%	51%	62%	87%	13%
MOY	5.7	6.4	6	5.9	6	5.7	5.6	5.6	6.4	6	5.8	5	
N<4	13	12.4	38%	8%	23%	38%	38%	92%	6.2%	23%	46%	77%	23%
5<N<7	12	14.3	50%	17%	8%	42%	17%	92%	6.7%	67%	67%	92%	8%
N≥8	14	14.1	86%	14%	29%	43%	36%	92%	6.4%	64%	71%	93%	7%

(Les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	39	13.6	2.3	5	8	1.4	1.2	3.6	2.5	2.0	2.4	3.4	5
MOY	5.7	6.4	6	5.9	6	5.7	5.6	5.6	6.4	6	5.8	5	
N<4	13	12.4	2.2%	2.0%	3.8%	2.1%	4.2%	3.3%	3.2%	1.5%	2.5%	2.9%	6.0%
5<N<7	12	14.3	2.6%	4.0%	1.3%	3.6%	1.7%	3.1%	3.2%	4.0%	3.3%	3.2%	2.0%
N≥8	14	14.1	5.2%	4.0%	5.0%	4.3%	4.2%	3.6%	3.6%	4.5%	4.2%	3.8%	2.0%

(Les pourcentages sont calculés sur la colonne)

Ces deux tableaux semblent montrer une corrélation assez forte entre le prétest et le premier devoir. La très grande majorité des résultats laisse penser que de bons prérequis de logique favorisent la réussite dans les débuts d'algèbre linéaire et vice versa. Néanmoins on observe une certaine similitude entre les deux tranches qui correspondent à  $N \geq 5$ . Ceci tendrait à prouver qu'un minimum de prérequis est nécessaire à une assez bonne réussite en début d'algèbre linéaire, sans que de très bons prérequis assurent une très bonne réussite. Le plus probant sur ce point semble être la répartition en nombre de blocs vides où l'on voit très nettement la corrélation : 75% de ceux ayant au plus un bloc vide

ont plus de 5 au devoir, alors que 60% de ceux ayant plus de 2 blocs vides ont moins de 5. Les blocs EQ1, EQ3 et Q montrent également bien cette corrélation.

Il semblerait par contre que les deux blocs d'algèbre (AN et AS) n'aient pas d'influence sur les résultats au devoir.

Par ailleurs deux résultats sont en contradiction avec l'ensemble, il s'agit, dans les étudiants ayant une note au devoir supérieur à 8, des effectifs de ceux ayant soit le bloc EQ3, soit le bloc Q, vide. Ces deux effectifs étant particulièrement élevés, on pourrait penser que quelques lacunes en logique, du moment qu'elles ne sont pas trop nombreuses (cf les résultats en fonction du nombre de blocs vides) ne sont pas un obstacle infranchissable à une réussite en début d'algèbre linéaire.

Les effectifs dont nous disposons dans cette analyse sont faibles, ce qui nous engage à la prudence. Par ailleurs nous avons remarqué, lors de nos analyses a priori, les imperfections du prétest et du devoir, qui sont des évaluations ponctuelles. Il semble bien cependant que nous puissions avancer, modulo ces réserves, l'hypothèse d'une tendance à la corrélation entre l'acquisition de prérequis de logique et les premiers résultats en algèbre linéaire.

### C - Examen partiel - 18 janvier

Cet examen partiel a été passé par les trois groupes, dans les mêmes quatre heures. Il contenait, dans cet ordre, deux exercices d'algèbre linéaire, un d'arithmétique des polynômes et un d'analyse. Le barème utilisé par les correcteurs, qui n'était pas connu des étudiants, est respectivement pour chaque exercice de : 2,5; 8; 2,5 et 7.

Nous donnons, en annexe C-1, le texte des trois premiers exercices.

Nous avons analysé les résultats aux deux exercices d'algèbre linéaire. Nous disposons de 74 copies, 29 du groupe 3, 23 du groupe 4 et 22 du groupe 6. C'est donc un échantillon très proche de la population initiale du prétest, qui nous sert de référence.

#### **I - Analyse a priori - Résultats quantitatifs :**

Nous avons attribué à chaque question - voire sous-question - une note, nous avons également éventuellement donné un code à un certain type d'erreur ou de bonne réponse. Nos choix sont explicités dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont récapitulés dans un tableau en annexe C-2.

##### Premier exercice

Cet exercice est à rapprocher du premier exercice du DS n°1, qui a été passé 10 jours avant. Pourtant, nous avons dégagé, lors de l'analyse de cet exercice, en quoi il risquait fort de ne pas apparaître comme l'exemple d'une méthode plus générale. De plus, dans le cas présent, la méthode suggérée par cet exercice serait particulièrement peu efficace, étant donné qu'il n'y a qu'un polynôme de degré 4 ayant 4 valeurs fixées, et que cela reviendrait à chercher une solution particulière, puis à voir que la variété est de dimension 0 donc qu'il n'y a que cette solution "particulière"; alors qu'une résolution soignée du système  $4 \times 4$  donne d'un seul coup l'unicité et la valeur de la solution.

Bien sûr les étudiants n'ont pas forcément les moyens d'anticiper ce résultat, encore que cela puisse faire partie de leurs connaissances plus ou moins empiriques, liées à une certaine expérience.

Néanmoins sur les 74 étudiants, aucun n'a essayé de réinvestir quoi que ce soit de la méthode du DS n°1.

Le plus simple est en fait de raisonner en prenant un polynôme avec des coefficients indéterminés et en résolvant le système  $4 \times 4$  qui découle des conditions de l'énoncé. En fait on peut économiser quelques calculs en remarquant qu'on peut mettre (X-1) en facteur, on a alors seulement un système  $3 \times 3$  à résoudre. 6 étudiants ont utilisé cette méthode (code DIV), nous les avons gratifié d'une note NI de 1,5.

Tous les autres ont posé le système  $4 \times 4$ . S'ils l'ont résolu correctement, nous leur avons mis la note N1 de 1. C'est le cas de 47 étudiants, si on rajoute les 6 précédents, cela fait un taux de réussite de 69%.

Dans le cas d'une erreur de calcul (code CAL : 16 cas) nous avons mis une note de 0,5, même si l'erreur n'est pas très grave (en fin de parcours par exemple). Cela peut paraître un peu injuste, pourtant il nous semble qu'il ne faut pas minimiser l'importance d'une erreur de calcul dans un exercice où l'aspect calculatoire a un rôle justement essentiel ; par ailleurs dans le cas présent, une vérification était très simple à faire. Ce n'est pas un calcul gratuit pour le plaisir d'utiliser le pivot de Gauss, on obtient un résultat par rapport à un problème concret, il semble bon de s'assurer de sa validité a posteriori. C'est encore ici, à un niveau élémentaire, un problème de contrôle du sens dans une activité algébrique abstraite.

Comme on trouve une solution unique, le système triangulaire obtenu après avoir appliquée la méthode du pivot est simple à interpréter. Pourtant dans deux copies, après avoir trouvé une solution unique au système, les étudiants écrivent : "donc les polynômes  $P(X) = \lambda(X^3 - 3X^2 + 4X - 2)$  vérifient les conditions de l'énoncé." (code MULT). Bien que peu fréquent, ce type de réponse nous a semblé intéressant à être relevé, nous avons mis une note de 0,5 à ces deux copies. Cette erreur semble être due à un manque de discernement dans les domaines d'intervention de la notion de linéarité.

Dans 4 copies également (code DEG), les étudiants reprennent la recherche pour un polynôme de degré deux puis un, voire même zéro. Or comme dans la première recherche, il n'ont pas eu à supposer que le coefficient du degré 3 n'était pas nul, dès le départ la recherche est faite pour un polynôme de degré au plus 3. Quand cette surcharge n'engendrait pas d'erreur supplémentaire, nous ne l'avons pas pénalisée dans la note.

Un étudiant utilise la méthode des déterminants dite de Cramer (code DET), mais bien qu'il donne la bonne solution, n'explique aucun des calculs, nous lui avons mis une note de 0,5.

Enfin, deux étudiants cumulent des erreurs assez grossières de calcul et d'interprétation et obtiennent donc une note nulle.

Cette question est élémentaire, le taux de réussite de 69%, est bon dans l'absolu, pourtant il reste encore trop faible. Le nombre d'erreurs de calcul, surtout vu les moyens de contrôle, est finalement élevé. Dans un contexte plus large, une résolution de système peut être une activité centrale, si bien que, ne pas y arriver sans se tromper, peut alors être un handicap fort gênant pour le reste du problème.

### Deuxième exercice.

Cet exercice présente une méthode générale pour trouver un polynôme dont on connaît les valeurs sur autant d'entiers successifs que son degré plus un. Le but est d'arriver à la formule dite de Gregory, qui permet le calcul explicite. La dernière application permet de comparer avec la méthode du I. Comme dans le DS n°1, ceci n'est pas vraiment explicite et la méthode du II n'est une simplification que dans la mesure où elle est utilisée sur de nombreux exemples.

Par ailleurs cet exercice est également l'occasion de travailler sur l'opérateur aux différences finies  $\Delta$ , qui est un classique. Les questions ne présentent pas de grandes difficultés du point de vue de l'algèbre linéaire, par contre elles ont souvent un côté technique, lié à la manipulation d'écritures formelles, assez délicat.

### Question 1

Cette première question permet de prendre contact avec les objets introduits, ici l'opérateur  $\Delta$  aux différences finies. On ne demande cependant pas encore de montrer qu'il est linéaire.

Il est facile de voir que dans  $\Delta(P)$ , il n'y a plus de terme du degré de  $P$ , donc que  $\Delta(P)$  est de degré au plus  $(n-1)$  (si  $\deg(P)=n$ ). En fait le coefficient du terme de degré  $(n-1)$  est  $n$  fois celui du terme de degré  $n$  dans  $P$ , il est donc toujours non nul. Ainsi on peut voir que  $\Delta(P)$  est finalement exactement de degré  $(n-1)$ .

Pour tenir compte de ces deux niveaux, nous avons mis une note comme suit.

N1=1 si et seulement si, l'étudiant constate non seulement la disparition des termes de degré  $n$  dans  $\Delta(P)$ , mais aussi fait état explicitement de la non annulation du coefficient des termes de degré  $n-1$  (6 cas seulement).

N1=0,5, dans les 2 cas suivants :

- Quand la formulation de  $\Delta(P)$ , à l'aide des coefficients de  $P$ , est assez claire pour qu'il n'y ait pas de terme de degré  $n$  et que le terme de degré  $(n-1)$  apparaisse avec le bon coefficient : on peut alors supposer, même si ce n'est pas explicite, que la non annulation du terme de degré  $(n-1)$  apparaisse de façon assez évidente pour ne pas avoir à être explicitée (code FORM : 18 cas).

- Quand, une fois constatée la disparition des termes de degré  $n$ , on conclut que  $\Delta(P)$  est au plus de degré  $(n-1)$ . L'information est incomplète par rapport à ce qui peut être dit, mais au moins il n'y a pas d'erreur ou de point non justifié (code INF : 6 cas)

N1=0, dans tous les autres cas (37 cas soit 50%). En particulier quand on déduit directement de la disparition des termes de degré  $n$  que  $\Delta(P)$  est de degré  $(n-1)$  (ce qui représente une grosse majorité), ou encore

quand on se contente de dire que  $\Delta(P)$  est au plus du degré de  $P$ , sans signaler la disparition des termes de degré  $n$  (plus rare).

Il y a en plus 2 non réponses.

Les résultats à cette question montrent qu'il y a chez les étudiants, une certaine méconnaissance de la notion de degré d'un polynôme. Il est pourtant fort utile, surtout en algèbre linéaire, de distinguer les polynômes de degré  $n$  (qui ne forment pas un espace vectoriel) des polynômes de degré au plus  $n$  (qui en sont l'espace engendré).

### Question 2

Cette question ne fait toujours pas intervenir d'algèbre linéaire. Elle est en fait calculatoire et technique. Nous l'avons divisé en trois sous-questions:

2-a Le calcul de  $\Delta U_k$ .

2-b Le calcul de  $\Delta^n U_k$ .

2-c Le calcul de  $\Delta^n U_k(0)$ .

2-a est une question simple, il suffit de ne pas se tromper en écrivant  $U_k(X+1)$  et ensuite dans la factorisation. Nous avons mis une note binaire N1a (0/1). Il y a 47 bonnes réponses, 7 non réponses et 20 mauvaises réponses. Là encore, bien qu'élevé, le taux de réussite de 64%, aurait pu, sur une question aussi simple, l'être un peu plus. En particulier la substitution de  $(X+1)$  à  $X$  semble poser des problèmes à plusieurs étudiants.

Par ailleurs, nous avons repéré par le code REC, les étudiants qui croient faire une récurrence, alors qu'ils démontrent la propriété au rang  $n+1$  sans utiliser l'hypothèse au rang  $n$ . C'est un comportement fréquent dans ce type de démonstration qui, bien que dépendant d'un entier, se fait directement (5 cas).

La question 2-b demande déjà plus de dextérité dans les calculs, d'autant qu'il faut distinguer des cas entre  $k < n$ ,  $k > n$  et  $k = n$ . De plus, il est nécessaire de bien maîtriser la notion de composition des applications.

Nous avons mis une note N2b de 1, lorsque la formule donnant  $\Delta^n U_k$  pour  $k \geq n$  est exacte et qu'on reconnaît que  $\Delta^n U_k = 0$  pour  $k < n$ . Nous n'avons pas été très regardant sur le cas frontière  $k = n$ , car il apparaît plus particulièrement dans le calcul de  $\Delta^n U_k(0)$ . Il y a 7 bonnes réponses.

Nous avons mis une note de 0,5 dans les 2 cas suivants :

- Quand la formule donnant  $\Delta^n U_k$  pour  $k \geq n$  est exacte, mais quand, le cas  $k < n$  est soit délaissé, soit considéré comme "impossible" (code  $K \leq N$  : 6

cas). Il y a là un problème d'interprétation d'un résultat numérique que l'on pourrait rapprocher de celui des discussions de cas lors de la résolution d'un système dépendant d'un paramètre, comme dans le I du DS n°1. Des valeurs particulières de certains paramètres donnent une solution atypique, gênante, alors on ignore ce cas, ou on dit qu'il est "impossible".

- Quand au contraire, on reconnaît que  $\Delta^n U_k = 0$  pour  $k < n$ , mais qu'il y a une erreur dans la formule pour  $k \leq n$  (code  $K \geq N$  : 3 cas).

Il y a 38 non réponses.

Nous avons mis la note 0 dans les 19 cas restants.

Pour la formule donnant  $\Delta^n U_k$  pour  $k \geq n$ , nous n'avons pas tenu compte de petites erreurs d'indiciation, mais nous avons distingué deux types d'erreur, à notre avis plus significatifs :

- Code ITER, quand on trouve  $\Delta^n U_k = k^n U_{(k-n)}$ , c'est-à-dire qu'on ière  $n$  fois la même fonction sans voir que l'argument changeant à chaque fois,  $k$  ne reste pas  $k$  mais diminue d'une unité à chaque itération (7 cas). Dans les 3 cas où ce type d'erreur est couplé avec une bonne réponse pour  $k < n$  on a codé  $K \leq N/L$ .

- Code PRD, quand la composition de  $\Delta$  avec lui-même, est confondu avec un produit, c'est-à-dire qu'on écrit quelque chose du genre : " $\Delta^n U_k = \Delta^{(n-1)} U_k (\Delta U_k) = \dots = k^n (U_{(k-1)})^n$ " (6 cas). Il y a souvent d'autres étapes intermédiaires redondantes, qui permettent de glisser de la composition des applications au produit des arguments de façon moins abrupte.

On voit que la composition d'applications opérant sur des objets un peu complexes ne va pas sans poser de problème. C'est pourtant un prérequis nécessaire à l'algèbre linéaire, si on veut pouvoir utiliser des espaces comme des ensembles de polynômes.

La question 2-c ne peut être bien traitée sans avoir fait la question 2-b. En fait  $\Delta^n U_k(0)$  est nul, sauf quand  $n=k$  où il vaut  $k!$ . Il est assez fréquent de trouver dans des copies que  $\Delta^n U_k(0) = 0$  pour tout  $(k,n)$  ; nous avons mis une note N2c de 0 même dans ces cas. Par contre nous avons mis une note de 1 même si on donne  $\Delta^n U_k(0) = k^n$  pour  $k=n$ , à la suite d'une erreur du type ITER en 2-b. Au total, il y a 7 "bonnes" réponses, 17 mauvaises ou incomplètes et 50 abstentions !

Finalement cette question est assez peu réussie, déjà 2-a, malgré la facilité, ne l'est qu'à moitié et la suite est plutôt un échec. Voici l'exemple d'un problème du domaine de l'algèbre linéaire, dont la résolution est avortée à cause d'un manque de prérequis relatifs à la manipulation de notations fonctionnelles sur des espaces de polynômes ou de substitution de variables dans un polynôme.

Les étudiants n'ayant pas répondu à cette question ne pourront aboutir à la formule de Gregory, qui demande la connaissance des  $\Delta^n U_k(0)$ .

### Question 3

Cette question est indépendante de ce qui précède. C'est aussi la première question qui a directement trait à l'algèbre linéaire. Pourrait avec la formulation adoptée, elle est réduite à une démonstration par récurrence. Or elle aurait pu être une question réellement d'algèbre linéaire. En effet pour montrer que les  $U_k$  ( $k=0, \dots, n$ ) engendrent l'espace des polynômes de degré au plus  $n$ , puisqu'ils sont au nombre de  $(n+1)$ , cela revient au même de montrer qu'ils sont indépendants. Or ces polynômes ayant des degrés 2 à 2 distincts, il est ici plus simple de regarder l'indépendance que le caractère générateur, qui présente des difficultés techniques.

Un étudiant a proposé cette méthode, nous lui avons mis la note N3 maximale de 1 et le code LIB.

Mais la formulation de l'énoncé incite fortement à montrer directement et par récurrence que la famille est génératrice. Et c'est bien sûr ce qu'ont tenté de faire tous les autres étudiants ayant abordé cette question.

La plupart du temps, ça démarre assez bien. Ils posent l'hypothèse de récurrence, la vérifie pour quelques valeurs (il est rare que  $n=0$  suffise), puis ils écrivent moyennant l'hypothèse au rang  $n$ , que la propriété doit être vraie au rang  $(n+1)$ . Ils isolent alors le terme de degré  $n$  en disant que le reste est, d'après l'hypothèse au rang  $n$ , combinaison des  $U_k$  ( $k=0, \dots, n$ ). Il reste alors à montrer que  $X^{n+1}$  est combinaison linéaire des  $U_k$  ( $k=0, \dots, n+1$ ). Mais cette tâche n'est pas beaucoup plus simple que la tâche initiale.

De fait, c'est en général à ce stade de la démonstration, que le dérapage a lieu, comme si d'avoir repoussé la vraie démonstration trop loin la rendait finalement inaccessible, à la dernière étape. On trouve alors des arguments creux, voire même pas de justification, le point essentiel étant entièrement escamoté. Nous avons attribué une note de 0 dans ces cas et le code VIDE (7 cas).

Dans d'autres copies, on démontre, par des chemins détournés, une sorte de réciproque évidente (code REC : 6 cas). C'est-à-dire que d'une façon plus ou moins édulcorée, on dit que les  $U_k$  ( $k=0, \dots, n$ ) sont des polynômes de degré au plus  $n$  donc qu'ils engendrent cet espace. Bien sûr cet argument est masqué dans des méandres qui en cachent l'absurdité. Il est intéressant de remarquer par ailleurs, que ce type d'erreur est assez fréquent dans les exercices où l'on demande de montrer qu'une famille est génératrice. C'est sûrement l'indicateur d'une difficulté conceptuelle dans la nature de la notion de famille génératrice.

Enfin souvent les démonstrations s'arrêtent à ce stade (code BLOC : 9 cas).

Dans les 9 cas où la question est convenablement traitée, souvent les arguments n'en finissent pas de se répéter et la démonstration est pour le moins peu claire et quelque peu redondante (code LONG).

En fait le plus simple est, de remarquer que  $a_{n+1} X^{n+1} - a_{n+1} U_{n+1}$  est un polynôme de degré  $n$  et qu'il est donc combinaison des  $U_k$  ( $k=0, \dots, n$ ).

Nous avons attribué une note binaire à cette question.

Il y a 9 bonnes réponses, 33 mauvaises et 32 abstentions.

Avec la formulation de l'énoncé, cette question présente une difficulté d'approche, qui peut expliquer en partie l'échec relevé ici, sans toutefois en justifier l'étendue, qui reste un peu surprenante.

Il serait intéressant, a posteriori, de montrer aux étudiants, les simplifications possibles en utilisant le théorème de la dimension, comme nous l'avons expliqué plus haut.

### Question 4

Nous avons divisé cette question en deux sous-questions :

4-a Montrer que  $\Delta$  et  $P \rightarrow \Delta^k P(0)$  sont linéaires.

Montrer que  $\Delta$  est linéaire est élémentaire et ne devrait pas poser de difficulté à une grosse majorité d'étudiants. L'erreur la plus probable risque de venir d'une confusion dans le niveau des variables, c'est-à-dire que certains étudiants peuvent vouloir montrer une linéarité sur le polynôme, réalisant un amalgame entre la variable dans le polynôme et le polynôme en tant que variable de l'application  $\Delta$ .

Pour montrer que  $P \rightarrow \Delta^k P(0)$  est linéaire, le plus simple semble être de remarquer que c'est la composée de  $\Delta^k$  et de  $P \rightarrow P(0)$ , qui sont toutes deux linéaires. Pourtant ce raisonnement demande de bien maîtriser la notion de composition des applications et nécessite un certain recul par rapport au problème. On peut aussi s'en tirer, plus ou moins bien, en signalant la linéarité de  $\Delta^k$  et en faisant le reste "à la main". N'ayant jamais rencontré la première méthode, nous avons été assez indulgent par rapport à la seconde.

Nous n'avons pas réellement relevé beaucoup d'erreurs significatives, mais plutôt des absences de réponse. Nous nous sommes donc contentés d'une note N4a sur 1, partagée en moitiés égales entre les deux applications. Dans tous les cas, une note de 0,5, signifie que seule la linéarité de  $\Delta$  a été démontrée.

Il y a 7 notes de 1, 15 de 0,5, 7 de 0 et 45 abstentions.

Le nombre élevé d'absentions rend les interprétations délicates. Il semble toutefois que si, dans un cas simple comme  $\Delta$ , la question de la linéarité ne pose pas trop de problème, dans un cas un peu plus

comme  $P \rightarrow \Delta^k P(0)$ , avec un taux d'échec de 75% (en ne comptant pas les non réponses), il y ait une difficulté réelle. Le plus souvent, les étudiants se contentent d'écrire la relation de linéarité (quelquefois mal) et de dire qu'elle est vraie, sans comprendre réellement semble-t-il sur quel point doit porter la démonstration.

La notion d'application linéaire est délicate car elle interfère avec le concept de fonction, qui présente souvent lui-même une difficulté conceptuelle importante, même pour les étudiants de ce niveau.

#### 4-b La formule de Gregory.

Pour vérifier l'authenticité de la formule de Gregory, on peut soit déterminer les coordonnées sur la base des  $U_k$  en calculant les  $\Delta^k P(0)$ , soit remarquer que la formule est "linéaire", il ne reste alors qu'à la vérifier sur les  $U_k$ , c'est-à-dire pour une famille génératrice, pour dire qu'elle est valable pour tous les polynômes de degré au plus  $n$ . Les deux méthodes sont à peu près équivalentes en difficulté et en quantité de calculs.

En fait cette question a été très majoritairement délaissée, puisqu'il y a 66 non réponses. Il n'y a par ailleurs qu'une seule bonne réponse, par la méthode de recherche des coordonnées. Sur les 7 réponses inexacts ou incomplètes, 5 étudiants ont essayé de faire une analogie avec la formule de Taylor (code TAYL). Ce genre d'amalgame est sans doute un indice du manque de sens donné aux formules algébriques.

Il est bien sûr difficile de tirer des conclusions dans de telles circonstances. Pourtant, si la question du temps limité a sûrement joué un grand rôle, il semble également que ce type de question, assez typique finalement de plusieurs problèmes d'algèbre linéaire (cf les problèmes d'interpolation), déroute facilement les étudiants. On peut se demander si cela est seulement dû à la complexité extérieure de la formule ou si il y a des raisons plus profondes liées peut-être à la méconnaissance des méthodes d'approche face à un tel problème.

#### Question 5

Dans l'esprit du problème, cette question est une application de la formule de Gregory. Les valeurs de  $P$  en 0, 1, 2 et 3 permettent en effet de calculer facilement  $\Delta^k P(0)$  pour  $k=1$  à 4, la formule de Gregory donne l'unicité du polynôme (implicitement admise dans l'énoncé), et ses coordonnées sur la base des  $U_k$ .

En fait seulement 8 étudiants ont répondu à cette question en suivant cette voie. 3 n'ont pas su trouver les valeurs des  $\Delta^k P(0)$ , nous leur avons mis une note N5 de 0. Les 5 autres répondent correctement (un fait une erreur de calcul dont nous n'avons pas tenu compte), nous leur avons mis une note N5 de 1.

24 étudiants ont répondu comme ils l'avaient fait en I, sans tenir compte des questions précédentes, en résolvant un système  $4 \times 4$  (code SYS). Nous avons mis systématiquement la note 0 à ce genre de réponse.

Enfin un étudiant a essayé d'utiliser la formule de Taylor.

Le nombre d'abstentions est de 41 soit 55%.

On peut mesurer avec cette question, la distance qui sépare la tâche que suggère la démarche de l'énoncé de la tâche réellement accomplie par les étudiants. Chaque question est plus ou moins réussie dans son contexte propre, mais l'interaction des questions entre elles est entièrement occultée par le morcellement du problème.

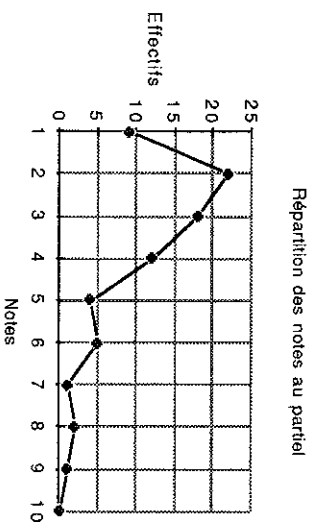
Dans ce contexte, l'ultime question sur la comparaison avec le I est bien sûr entièrement négligée.

#### II - Attribution d'une note

En essayant de tenir surtout compte des questions faisant intervenir de l'algèbre linéaire, nous avons attribué une note globale sur 11, mais que l'on considèrera sur 10 (vu qu'une seule personne a une note de 1 en 4b), calculée comme suit et arrondie à l'entier le plus proche :

$$N = 2N1 + 1/2(N1+N2a+N2b+N2c) + 2(N3+N4a) + N4b+N5$$

Le graphique suivant donne la répartition des notes ainsi obtenues :



La moyenne est de 3,2 avec un écart-type de 1,8. C'est donc faible, avec une certaine homogénéité vers le bas.

82% des étudiants ont une note de 4 au plus dont 42% ont 1 ou 2, alors que seuls 5 étudiants ont 7 ou plus.

On peut considérer que ce problème est un échec. Doit-on en conclure que la raison principale en est une mauvaise connaissance des concepts d'algèbre linéaire en jeu ?

Il n'y a finalement que peu de questions d'algèbre linéaire à proprement parler. Les concepts de famille génératrice ou d'application linéaire interviennent à des niveaux assez complexes où ils dépendent d'activités algébriques préliminaires. Si bien que plus qu'une



connaissance de ces concepts, on teste ici la possibilité de les faire intervenir dans un cadre algébrique (ici les polynômes) déjà complexe en soi. Par exemple la démonstration de 3), bien qu'étant une question typique d'algèbre linéaire, nécessite une bonne connaissance de la récurrence et des polynômes, aussi une mauvaise réponse ne veut-elle pas forcément dire que l'étudiant ne connaît pas le concept de famille génératrice, si le contexte extérieur crée une barrière trop forte.

Dans ce problème beaucoup de questions présentent un aspect que l'on peut qualifier de "technique" : avec des calculs, des discussions en fonction du degré, beaucoup d'écritures avec des indices et des coefficients généraux, du maintien d'expressions algébriques formelles (polynômes à coefficients indéterminés)... Les concepts d'algèbre linéaire n'interviennent que dans "l'ossature" du problème et restent indissociables de ce contexte technique.

Pourtant ce genre de difficulté se présente souvent dans des problèmes, où intervient de l'algèbre linéaire, les résultats de ce partiel sont donc intéressants parce qu'ils représentent une aptitude à résoudre un certain type de problèmes classiques d'algèbre linéaire.

Avec la répartition de notes obtenue, nous avons distingué les trois tranches suivantes :

- $N \leq 2$  : 31 étudiants. Ceux-ci n'ont pas surmonté les difficultés techniques du deuxième exercice et ont, au mieux, bien résolu le premier.

- $3 \leq N \leq 4$  : 30 étudiants. Ceux-ci ont un peu moins de difficultés avec les aspects techniques sur les polynômes ou la récurrence, mais ils n'arrivent toutefois pas à dégager une problématique d'approche dans le deuxième exercice.

- $N \geq 5$  : 13 étudiants. Ceux-ci semblent avoir suffisamment de recul pour donner quelques réponses cohérentes dans le II. Le handicap du contexte technique semble être surmonté.

## II - Comparaison par groupes

Le nouvel échantillon est, comme nous l'avons dit, peu modifié par rapport au prétest (10 étudiants de moins). La moyenne et l'écart-type recalculés pour chaque groupe sont donc sensiblement les mêmes, comme on peut s'en rendre compte dans le tableau ci-dessous.

Nous donnons également, dans ce tableau, la moyenne, l'écart-type et la répartition dans les trois tranches de notes, par groupe, pour le partiel.

N° GR	EFF	PRETEST			PARTIEL			
		MOY	ECAR	MOY	ECAR	$N \leq 2$	$3 \leq N \leq 4$	$N \geq 5$
3	29	13,1	2,6	2,7	1,6	15	12	2
4	23	12,7	3,4	3,2	2	12	6	5
6	22	13,9	3,1	3,9	1,5	4	12	6

Entre le prétest et le partiel, l'ordre entre les groupes 3 et 4 s'est inversé assez nettement, alors que le groupe 6 conserve toujours une avance assez marquée.

Pour les écarts-types, les groupes 3 et 6 sont "dans un mouchoir", alors que le groupe 4 confirme son hétérogénéité.

Pour la répartition des notes, le groupe 6 se caractérise par deux effectifs dominants dans les deux tranches de notes les plus élevées, alors que le groupe 4, malgré un bon score dans la tranche  $N \geq 5$ , a également un fort taux dans la tranche  $N \leq 2$ , qui fait sa faiblesse. Le groupe 3 se confirme comme étant homogènement faible avec presque tous ses étudiants également répartis dans les deux tranches du bas.

## IV - Corrélation avec le prétest

La répartition totale par blocs au prétest est très semblable à celle trouvée avec la population totale du prétest, ce qui n'est pas surprenant, étant donné le peu d'écart numérique entre les deux échantillons.

Nous donnons ci-dessous les deux tableaux croisés des résultats prétest/partiel, sur le modèle de ceux donnés pour le croisement du prétest avec le premier devoir surveillé.

Tableau croisé n°1 : prétest/partiel

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	74	13,2	65%	16%	18%	34%	32%	78%	57%	39%	65%	84%	16%
MOY	3,2		3,4	5,1	2,7	4	2,5	3,4	3,8	4,1	3,6	3,4	2,25
$N \leq 2$	31	12,2	55%	6%	16%	29%	39%	68%	42%	23%	58%	77%	23%
$3 \leq N \leq 4$	30	12,9	70%	13%	23%	27%	37%	83%	57%	40%	60%	83%	17%
$N \geq 5$	13	16,5	77%	46%	9%	62%	8%	92%	92%	77%	92%	100%	0%

(Les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2 : prétest/partiel

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B≤1	B≤2	B>2
TOTAL	74	13,2	48	12	13	25	24	58	42	29	48	62	12
MOY	3,2		3,4	5,1	2,7	4	2,5	3,4	3,8	4,1	3,6	3,4	2,25
$N \leq 2$	42%	12,2	35%	17%	38%	36%	50%	36%	31%	24%	38%	39%	58%
$3 \leq N \leq 4$	41%	12,9	44%	33%	54%	32%	46%	43%	40%	41%	38%	40%	42%
$N \geq 5$	18%	16,5	21%	50%	8%	32%	4%	21%	29%	34%	25%	21%	0%

(Les pourcentages sont calculés sur la colonne)

Ces deux tableaux semblent montrer une corrélation assez forte entre le prétest de logique et d'algèbre et le partiel.

Toutes les données vont dans ce sens. Même les blocs d'algèbre, définis au prétest, donnent une bonne corrélation, contrairement à ce que l'on avait observé avec le premier devoir surveillé.

On trouve cependant ça et là quelques résultats qui viennent nuancer cette corrélation.

Parmi les étudiants ayant le bloc EQ3 vide, par exemple, on en trouve plus en proportion ayant une note de 3 ou 4 au partiel que de ceux ayant moins de 2 ; dans une moindre mesure pour ceux ayant le bloc Q vide, les répartitions des deux tranches sont si ce n'est inversées en tout cas à peu près équivalentes.

Ces deux données semblent signifier qu'avoir quelques lacunes en logique, mais pas trop (cf le nombre de blocs vides), tout en étant une barrière pour une bonne réussite au partiel, n'est pas systématiquement synonyme d'échec complet.

Plus que jamais le nombre de blocs vides est un paramètre avec une très forte corrélation. Le pourcentage d'étudiants ayant 5 ou plus au partiel est près du double parmi ceux n'ayant aucun bloc vide de ce qu'il est pour l'échantillon total. A l'autre extrême, aucun étudiant ayant au moins trois blocs vides n'a eu 5 ou plus au partiel.

Ces résultats ne sont pas surprenants, quand on se rappelle l'analyse que nous avons faite plus haut sur le type du problème proposé à ce partiel.

Il apparaît donc que de bon prérequis en algèbre (sûrement d'ailleurs plus étendus que ceux évalués lors du prétest) et aussi en logique soient un atout incontestable pour réussir des problèmes d'algèbre linéaire un peu techniques, sur des espaces comme ceux de polynômes et qu'un contraire des lacunes trop importantes dans ces domaines soit un facteur important de échec. C'est, résumé, la signification des résultats donnés dans les deux tableaux ci-dessus.

## D - Deuxième devoir surveillé - 4 Mars

Ce deuxième devoir surveillé contenant de l'algèbre linéaire, a été passé par tous les groupes pendant les mêmes trois heures, il contenait deux exercices d'analyse - un calcul d'intégrale d'une fraction rationnelle et un problème mêlant suites numériques et intégrales- et un exercice d'algèbre linéaire. On trouvera, en annexe D-1, le sujet complet de ce devoir.

Nous avons analysé 46 copies : 13 du groupe 3, 15 du groupe 4 et 18 du groupe 6.

### I- Analyse a priori - Résultats quantitatifs :

A chaque question (ou partie de question) on a attribué une note binaire (0/1) et éventuellement un code correspondant à un type d'erreur voire de bonne réponse. Nos choix sont explicités dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont récapitulés dans un tableau en annexe D-2.

Nous avons distingué (dans la première colonne du tableau) ceux qui ont débuté par l'algèbre (code DEB) de ceux qui l'ont gardé pour la fin (code FIN). Les premiers ne représentaient que 12 cas sur les 46 étudiés. Aucun étudiant n'a traité l'exercice d'algèbre entre les deux exercices d'analyse ; 74% des étudiants ont donc choisi de suivre l'ordre de l'énoncé pour répondre. On peut penser que ce phénomène peut avoir eu une influence sur les résultats, en particulier sur la forte désaffection dans les dernières questions, aussi nous faudra-t-il garder ce point en mémoire dans nos analyses.

Le but de l'exercice est, après avoir reconnu un endomorphisme, de trouver son noyau et son rang. Ce but n'est pas annoncé, ainsi toute la question 3 consiste à établir des résultats techniques, dont on ne trouve une justification qu'a posteriori. De même la question 1, qui sert à établir que l'application donne bien des images dans E, est une part de la question 2, mais n'est jamais reconnue en tant que telle, d'ailleurs très peu d'étudiants le reconnaissent, au moins explicitement.

### Question 1

Cette question est purement technique. Il s'agit en fait d'interpréter une écriture algébrique. Il faut distinguer le rôle de chacune des deux variables et réorganiser l'écriture de façon à lire l'information demandée. En somme tout repose, via la formule du binôme, sur l'égalité suivante :

$$(a) \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt = x^n \left( \int_0^1 P(t) dt \right) + \int_0^1 t^n P(t) dt$$

Les connaissances mathématiques en jeu sont donc simples (formule du binôme et linéarité de l'intégrale). La difficulté réside dans la distinction qu'il reste à faire sur les variables.

Cette question est en fait assez peu réussie puisqu'il y a un taux de succès de 59% dont 2 non réponses.

Dans tous les cas d'erreur (sauf pour le groupe 6, cf ci-dessous) les réponses commencent par : " $(x+t)^n P(t)$  est un polynôme donc sa primitive aussi, donc  $Q$  est un polynôme." Il est clair que les rôles respectifs de  $x$  et  $t$  ne sont pas identifiés. Pour la question du degré, soit on dit que le polynôme à intégrer est de degré  $n$  en  $x$  donc que  $Q$  est de degré  $n+1$  (code VAR1 : 5 cas) soit que le polynôme est de degré  $2n$  (code VAR2 : 5 cas), grâce à des intégrations par partie successives (incorrectes) soit à cause d'erreurs cumulées.

Dans le groupe 6, on a trouvé (dans 5 cas sur 8 erreurs) des réponses de la forme : " Montrons que  $(x+t)^n P(t)$  a une primitive de la forme  $(x+t)^{n+1} R(t)$ .  $((x+t)^{n+1} R'(t)) = (x+t)^n (R'(t) + (x+t)R''(t))$  ; il suffit donc de poser  $P(t) = (n+1)R'(t) + (x+t)R''(t)$ . Donc  $Q(x) = (x+1)^{n+1} R(1) - x^{n+1} R(0)$ , c'est donc un polynôme de degré  $n+1$ ." Ce type de réponse repose certainement sur une analogie avec un exercice traité en TD dans ce groupe.

Dans le cas de l'exercice c'est inexact puisqu'une primitive de  $(x+t)^n P(t)$  ne peut en effet contenir de puissances de  $x$  plus élevées que  $n$ . Le point délicat est quand on écrit : " il suffit donc de poser  $P(t) = (n+1)R'(t) + (x+t)R''(t)$ ". Ici encore, bien d'une façon plus cachée et moins systématique, il y a une méprise sur le rôle des variables  $x$  et  $t$ .

On voit donc que sous des aspects plus ou moins évolués, une large majorité des étudiants (59%) n'arrivent pas à distinguer clairement variable libre et liée dans un problème assez élémentaire de deux variables. On revient à ce niveau aux prérequis d'algèbre avant l'algèbre linéaire. Dans le cas présent les conséquences sur la suite du problème sont importantes : la question 3 ne peut être en effet convenablement résolue, si on n'a pas vu l'égalité (a), de plus pour la question 4, il est nécessaire d'avoir compris que  $d^0 Q \leq n$ , pour voir que  $\text{rg}(u) \leq (n+1)$ .

Enfin sur les 18 bonnes réponses, un tiers (seulement) des étudiants obtiennent l'égalité (a) (code DEY), les autres énoncent un argument plus allusif mais convaincant, sans développer tout le calcul.

#### Question 2 :

Cette question ne pose pas de problème, c'est une question élémentaire sur la notion d'application linéaire. Il faudrait normalement rappeler que, par le résultat de la question précédente, on sait que  $u$  a bien  $E$  comme ensemble d'arrivée, cela reste en fait implicite dans la plupart des copies, et on peut se demander dans quelle mesure le lien entre les deux questions a été fait.

La seule chose à montrer reste donc la linéarité, qui est une conséquence quasi-immédiate de la linéarité de l'intégrale.

De fait, le taux de réussite est de 89%, avec une seule non réponse.

#### Question 3 :

On revient ici à une question technique de calcul algébrique formel, dans la lignée de la première.

Si on a bien développé  $Q$ , les termes  $\int t^k P(t) dt$  apparaissent comme les coefficients du polynôme en  $x$ , le début de la question est donc aisé. On remarquera au passage que jusque là, l'hypothèse sur le degré de  $P$  est inutile. Par contre elle le devient pour montrer que  $\int P^2(t) dt = 0$ . La suggestion faite pour montrer qu'alors  $P$  est nul, se réfère à une connaissance des étudiants au moment du devoir (passage par une primitive), on peut le démontrer directement en utilisant le fait qu'une fonction continue positive n'a une intégrale nulle que si elle est identiquement nulle sur l'intervalle d'intégration.

Ces trois résultats sont donc indépendants les uns des autres et l'on peut démontrer chacun d'eux en admettant les précédents. On peut d'ailleurs rien démontrer aucun et faire la suite en les admettant. Aucun ne fait intervenir de connaissance en algèbre linéaire. Nous avons mis deux notes N3 pour le premier et N3bis pour les deux autres.

Pour le premier il y a 16 non réponses et 54% de bonnes réponses sur les réponses effectives, soit 33% de bonnes réponses sur le total.

Pour les deux autres, il y a 24 non réponses et 38% de bonnes réponses sur les réponses effectives, soit 11% de bonnes réponses sur le total.

Dans les deux cas nous n'avons pas relevé d'erreurs significatives par rapport à notre problématique ; il y en aurait toutefois d'autres, par exemple, certains étudiants utilisent un faux théorème qui consiste à dire que l'intégrale du produit est égale au produit des intégrales.

Dans l'ensemble, c'est donc plutôt un échec, qui peut s'expliquer d'une part par le facteur temps, qui a pu jouer surtout pour ceux ayant commencé par l'analyse, d'autre part par la barrière que formait la première question.

#### Question 4 :

Comme nous l'avons dit plus haut, cette question pouvait être traitée en admettant les résultats de la question précédente. On obtient alors que  $\text{Ker}(u)$  ne contient aucun polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  autre que le polynôme nul, autrement dit la restriction de  $u$  à l'ensemble  $F$  des polynômes de degré au plus  $n$  est injective, ou encore en utilisant le théorème du rang puisque  $\text{Dim}(\text{Ker}(u)) \leq n$ ,  $\text{rg}(u) \geq n+1$ . Il suffit alors de se souvenir que, en 1, on a vu que  $d^0 Q \leq n$  donc que  $\text{rg}(u) \leq n+1$  pour pouvoir conclure que  $\text{rg}(u) = n+1$  et  $\text{dim}(\text{Ker}(u)) = n$ . La restriction de  $u$  à  $F$  est en fait un automorphisme.

A condition de pouvoir exploiter les résultats des questions précédentes, cette question est une question très intéressante d'algèbre linéaire, où la notion de rang est centrale. Malheureusement, elle arrive après un labyrinthe de résultats algébriques que la plupart des étudiants ne dominent pas, si bien que cette dernière question n'évalue plus grand chose, faute de combattants.

Le taux d'abandon est de 52%. Sur les 22 réponses, 18 étudiants tombent dans le piège de dire qu'en 3) on a montré  $\text{Ker}(u) = \{0\}$  (Code B1), oubliant l'hypothèse sur le degré de  $Q$  (beaucoup ne l'ayant d'ailleurs jamais utilisée). Ils concluent alors que le rang est la dimension de  $E$  soit  $2n+1$ , donc que  $u$  est bijective.

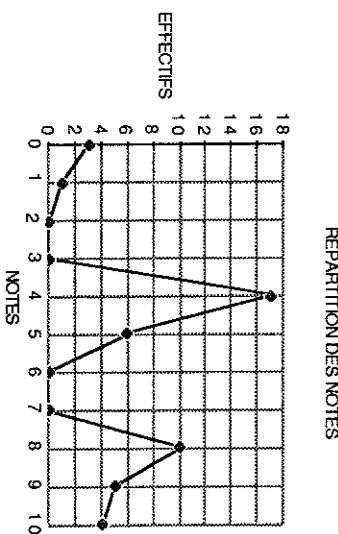
Dans les 4 cas restant, les étudiants n'utilisent que la question 1, c'est-à-dire, comme ils l'ont vu, que le degré de  $Q$  est borné (pas toujours par  $n$ !), ils en concluent abusivement que  $\text{Im}(u) = F$  (ou l'équivalent avec leur erreur), alors qu'ils n'ont montré qu'une inclusion et en déduisent le rang.

Cette question est donc un échec total. On pourrait rediscuter le découpage des questions, qui en voulant faciliter les tâches, note les vraies questions au milieu de problèmes algébriques plus techniques. Il faut aussi s'interroger sur la difficulté du concept de rang, qui est un des points les plus forts et les plus riches en début d'algèbre linéaire. Enfin on n'oubliera pas non plus de rappeler le facteur temps qui a pu jouer un rôle non négligeable lors de ce devoir, étant donné la prédominance de l'analyse dans le sujet.

## II - Attribution d'une note :

Ce point est délicat étant donné le taux d'abandon très élevé à certaines questions. Il est inutile de tenir compte de la question 4, qui n'a été réussie, même partiellement par personne, il ne faudra pas trop compter la question 3, à cause des abandons et de son aspect un peu technique. Malgré leur dissemblances, nous ne voyons pas pourquoi faire plus peser la question 1 que 2 ou vice versa. Nous avons donc décidé d'attribuer la note  $N$  sur 10 suivante :  $N = 4(N1+N2) + (N3+N3bis)$ .

Le graphique suivant donne la répartition des notes ainsi obtenues :



La moyenne générale est de 5,74 avec un écart-type de 2,8. Il y a un gros pic sur 4 suivi d'un remous sur 5 et d'un creux en 6. Le creux en 7 (comme en 3) est logique vu le barème. Un second pic (moins important) se trouve en 8 suivi de deux remous assez importants en 9 et 10.

Ceci s'explique fort bien. La question 2 a été massivement réussie, ce qui explique que très peu d'étudiants aient moins de 4 (et alors en général 0). Pour passer la barre du 8, il faut alors avoir réussi la question 1. En dessous de la barre du 8, les notes sont resserrées sur 4 et 5 (ce qui veut dire qu'avoir réussi la 2 sans la 1 ne permet pas de réussir la 3) alors que passer la barre du 8, la répartition est plus homogène sur 8, 9 et 10 (la réussite à 1 et 2 assure une meilleure réussite en 3).

Nous avons distingué les trois tranches de notes suivantes :

-  $N \leq 3$  : 4 étudiants. Pour ceux-ci ce devoir est un échec total, ils n'ont pas su dépasser les difficultés liées au contexte algébrique.

-  $4 \leq N \leq 7$  : 23 étudiants. Cette moitié d'étudiants a su dépasser un peu les problèmes techniques mais ils n'ont pas encore des connaissances assez assurées pour s'en dégager entièrement.

-  $N \geq 8$  : 19 étudiants. Pour ces étudiants les calculs algébriques ne semblent pas poser de problème et ils peuvent mettre en œuvre leurs connaissances d'algèbre linéaire dans un nouveau cadre.

La moyenne des étudiants ayant commencé l'épreuve par l'exercice d'algèbre linéaire et de 5,42 contre 5,85, pour ceux l'ayant gardé pour la fin. Ce choix dans l'ordre ne semble donc pas avoir eu de conséquences très significatives, ce n'est en tout cas pas en commençant qu'on semble réussir le mieux, au contraire. Il faut remarquer que ce sont surtout des étudiants du groupe 3 qui ont choisi de commencer par l'algèbre (tous sauf 2 du groupe 6), alors que c'est le groupe le plus "faible".

## III - Comparaison par groupes.

Avec le nouvel échantillon, nous obtenons, pour le prétest, une moyenne globale de 13,4 avec un écart-type de 3,2, ce qui n'est guère différent des données pour la population totale.

Le tableau qui suit nous donne, pour le nouvel échantillon, et par groupes, la moyenne et l'écart-type au prétest et au DS n°2 ainsi que la répartition par tranches de notes au DS n°2 :

N° GR	PRETEST		DS N°2		TRANCHES DE NOTES			
	EFF	MOY	ECAR	MOY	ECAR	$N \leq 3$	$4 \leq N \leq 7$	$N \geq 8$
3	13	13,62	2,47	5,08	3,20	2	7	4
4	15	12,53	3,70	5,33	2,92	2	8	5
6	18	14,06	3,32	6,36	2,31	0	8	10

Par rapport à la population totale du prétest, les données au prétest sont assez modifiées par groupes. L'ordre des moyennes est identiques, mais le groupe 3 et, dans une moindre mesure, le groupe 6 ont une moyenne supérieure, alors que le groupe 4 a une moyenne légèrement plus basse. Donc les écarts sont modifiés, les groupes 3 et 4 sont plus nettement distants et le groupe est plus éloigné du groupe 4 mais légèrement plus proche du groupe 3. Les écart-types conservent eux aussi le même ordre mais le groupe 3 est encore un peu plus homogène alors que les deux autres sont par contre un peu plus dispersés.

Néanmoins ces variations ne sont pas très importantes et on peut dire que les caractéristiques principales de trois groupes ne sont guère modifiées.

Pour les résultats au DS n°2, l'avance du groupe 6 est beaucoup plus nette, puisque la moyenne de ce groupe est supérieure d'au moins un point à celle des autres groupes. Les groupes 3 et 4 sont assez proches mais cette fois-ci, c'est le groupe 4 qui est légèrement en tête. L'ordre des écart-types est lui bouleversé, puisque le groupe 6 est le plus homogène sur le DS n°2 alors que le groupe 3 est le plus hétérogène, le groupe 4 étant légèrement plus proche sur ce point du groupe 3 que du 6.

Ainsi les caractéristiques des 3 groupes ont assez nettement évolué par rapport au prétest, soit qu'elles se soient accentuées soit au contraire qu'elles aient été inversées.

#### IV - Corrélation avec le prétest.

Examinons tout d'abord, si le nouvel échantillon introduit des variations importantes dans la répartition par blocs au prétest. Le tableau qui suit, compare ces résultats pour les deux échantillons :

Tableau de comparaison avec la population du prétest  
(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2
1er échl	84	13.2	63%	15%	17%	36%	33%	75%	56%	38%	63%	82%
2ème échl	46	13.4	59%	17%	20%	37%	33%	80%	59%	46%	61%	83%

Les données ne diffèrent pas de façon significative. Tout au plus on peut voir une certaine tendance à la hausse dans le nouvel échantillon (surtout pour le pourcentage d'étudiants n'ayant aucun bloc vide) qui peut s'expliquer par une surreprésentation du groupe 6 (qui est le plus "fort") dans le nouvel échantillon comparé à la population du prétest.

Nous donnons maintenant sur le modèle de ce qui a été fait pour le DS n°1 et le partiel, deux versions du tableau des corrélations avec le prétest. L'effectif des étudiants dans la dernière tranche de notes (N<3), étant très faible, nous avons préféré donner les effectifs dans la ligne correspondante du premier tableau, les pourcentages n'ayant dans ce cas que peu de signification.

Tableau croisé n°1 : prétest/DS n°2

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	46	13.4	59%	17%	20%	37%	33%	80%	59%	46%	61%	83%	17%
MOY	5.74		6.48	5.62	5.89	6.65	5.27	5.62	6.07	6.48	6.07	5.6	6.38
N<3	4	11	2	0	0	0	2	3	1	0	1	4	0
4<N<7	23	13.6	39%	22%	22%	35%	30%	87%	61%	48%	65%	83%	17%
N>8	19	13.7	84%	16%	21%	47%	32%	74%	63%	53%	63%	79%	21%

(Les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2 : prétest/DS n°2

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	46	13.4	27	8	9	17	15	37	27	21	28	38	8
MOY	5.74		6.48	5.62	5.89	6.65	5.27	5.62	6.07	6.48	6.07	5.6	6.38
N<3	9%	11	7%	0%	0%	13%	8%	4%	0%	4%	11%	0%	0%
4<N<7	50%	13.6	33%	63%	56%	47%	47%	54%	52%	52%	54%	50%	50%
N>8	41%	13.7	59%	38%	44%	53%	40%	38%	44%	48%	43%	39%	50%

(Les pourcentages sont calculés sur la colonne)

Globalement, il semble déjà que la corrélation n'est pas très bonne.

Si on regarde les moyennes au prétest, par tranche de notes au DS n°2, on voit que les deux tranches du haut (qui sont les seules vraiment significatives) ont quasiment la même moyenne au prétest, qui est elle-même presque la moyenne générale.

Si on regarde maintenant la moyenne au DS n°2 par bloc du prétest, seuls EQ1(2), Q(2) et B=0 dépassent (et de peu) un écart de 5% par rapport à la moyenne globale. De plus certaines moyennes ont tendance à montrer une corrélation négative comme celle de EQ3(2), EQ3(0) AN ou B>2.

Si on regarde plus dans le détail, les pourcentages ne dessinent pas de tendance générale nette et donnent des résultats contradictoires.

Les blocs les mieux corrélés positivement sont : EQ1 plein, Q plein et B=0.

Ceux qui sont le plus en contradiction avec une corrélation positive sont : EQ3 plein, AN, B<2 et B>2.

Il n'y a toutefois pas de corrélation négative qui se dessine de façon significative.

De même que nous avons émis quelques réserves plus haut sur la fiabilité de ce que teste ce devoir, les résultats de notre étude de corrélation nous renforcent dans notre prudence. Ce devoir permet-il de bien évaluer des compétences en algèbre linéaire ou même dans un domaine algébrique plus large ? Le nombre important d'abandons et le poids des exercices d'analyse dans le devoir permettent-ils de donner une interprétation valable ?

Ces questionnements nous obligent à la modération. Nous verrons plus loin quelle place donner à ce devoir dans les interprétations globales.

### E. Test "vrai/faux" - 13 mars.

Le contenu de ce "vrai/faux" est inspiré de "algèbre vol.1" collection Léonhard Epistemon rédigé par J-L Ovaert et J-L Verley (151).

Il a été passé en mars, et joue en quelque sorte le rôle de bilan intermédiaire sur les connaissances acquises en algèbre linéaire. Il est à ce titre doublement intéressant pour notre analyse, puisque il nous permettra de repérer et de quantifier des erreurs de débutants en algèbre linéaire et aussi d'estimer la corrélation avec les prérequis en logique et en algèbre (cf prétest).

Dans un premier temps, nous présentons une analyse a priori du test "vrai/faux", en essayant de donner quelques typologies d'erreurs. Nous donnons également, en regard dans cette première partie, question par question, les résultats quantitatifs obtenus, après dépouillement, que nous analysons brièvement. Ensuite nous nous attacherons plus précisément à étudier la corrélation éventuelle entre ces résultats et ceux du prétest de logique.

Deux variantes de ce test ont été distribuées aux étudiants. La première au groupe 3 et la seconde aux groupes 4 et 6. Le lecteur trouvera les deux textes en annexe E-1. Chaque question (sauf la partie C) est en fait, une affirmation dont on demande si elle est vraie ou fautive. Il est explicitement dit dans la consigne, que l'on doit donner une démonstration (pour vrai) ou exhiber un contre-exemple (pour faux). En conséquence nous avons systématiquement compté faux une réponse non justifiée.

Nous avons analysé 58 copies d'étudiants dont nous disposons du prétest, 24 dans le groupe 3, 18 dans le groupe 4 et 16 dans le groupe 6. Nous avons regroupé en annexe E-2, les résultats bruts dans un tableau, qui outre les conventions générales identiques à celles des chapitres précédents, utilise des codes explicites ci-dessous. Le numérotage des questions (A1 à A7, B1 à B4 et C1 et C2) fait référence à la première version du test (celle du groupe 3). CA1 désignera un code pour un type d'erreur rencontré à la question A1, et NA1 est une note 0 ou 1 pour cette question. Certaines questions plus complexes ont 2 colonnes de codes, pour certaines de ces questions également, on a été amené à mettre des notes de 0,5.

### I - Analyse a priori- Résultats quantitatifs.

#### Question A1.

"Soient  $x, y, z$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Si aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des deux autres, la famille  $(x, y, z)$  est libre."

Dans la variante, cette question est la A2, elle est identique sauf que  $x, y$  et  $z$  sont écrits avec des flèches. Nous n'avons pas tenu compte (dans

cette question comme dans toutes celles du A) de cette différence typographique, qui, dans ce contexte, ne nous a pas paru déterminante.

C'est une question à la limite de la question de cours. Certaines réponses du genre : "c'est vrai, car c'est la définition d'une famille libre" sont de fait un peu ambiguës. En effet, ce n'est pas exactement la définition d'une famille libre, mais c'est une critère pratique qui a pu, surtout en TD, être utilisé par les enseignants comme définition. Il est frappant de remarquer, dans ce sens, que ce type de réponses ne se trouve pas dans le groupe 3, alors qu'il y en a 6 dans le groupe 4, et 2 dans le groupe 6. Ainsi ce genre de "parasitage" dépend vraisemblablement de la pratique de chaque groupe. Ce sera un effet de "broutille" dans nos analyses qu'il faudra prendre en compte. Nous avons compté NA1=0,5 dans ces cas et dans ces cas seulement.

Si on exclut ces cas, donc au nombre de 8, le taux de réussite à cette question est étonnamment faible : 13 bonnes réponses soit 26% de réussite.

Nous avons distingué essentiellement deux types de réponses erronées ou incomplètes :

- code REC, pour les réponses qui démontrent en fait la réciproque, en général par fausse contraposée. Ce sont des démonstrations du genre : "si  $x$  est combinaison linéaire de  $y$  et  $z$ , alors :  $x-\alpha y-\beta z=0$  donc la famille est liée." Ces réponses pourraient être dûes à des difficultés de logique. on a repéré 11 cas soit 19% des réponses.

- code EV, pour les réponses qui se contentent de dire que c'est vrai, au plus en recopiant l'énoncé, sous-entendant que c'est évident. On a également étiqueté sous ce code les réponses décrites plus haut, faisant référence à une définition. Il y a 23 réponses de ce genre, soit 40%. Ce pourcentage est très élevé et rend les interprétations délicates. Il semble difficile de savoir ce que cachent ces "évidences" qui ne sont sûrement pas les mêmes pour tous.

Dans les 13 réponses exactes, nous avons seulement codé CA les réponses utilisant la contraposée ou un raisonnement par l'absurde. Elles sont au nombre de 8 (soit 62% des bonnes réponses). Les 5 autres bonnes réponses, sont des démonstrations directes, du genre : " si  $ax+by+cz=0$ , alors  $x=0$  sinon  $x=(-1/a)(by+cz)$  donc  $x$  serait combinaison linéaire de  $y$  et  $z$ , etc..."

Cette question semble avoir souffert de ce que l'on pourrait appeler le "piège de la fausse question de cours". Il faudra donc être prudent dans nos analyses ultérieures. Si avoir bien répondu, ou avoir essayé de démontrer la réciproque, peuvent être significatifs, les autres réponses, par contre, seront difficilement interprétables.

Question A2

"Si les vecteurs  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}^3$  sont deux à deux non colinéaires, la famille  $(x, y, z)$  est libre."

C'est la question A1 dans la variante, et elle est identique aux flèches près.

Cette proposition est fautive, un contre-exemple est donné par 3 vecteurs coplanaires, non colinéaires 2 à 2.

C'est une question dans l'ensemble bien réussie : 45 bonnes réponses soit 78% de réussite.

Comme précédemment on a relevé dans les réponses erronées les démonstrations de réciproques (REC) -bien moins nombreuses (5 cas)-, tous déjà dans le type REC pour la question précédente, et les réponses sans justification (EV) (seulement 4).

Pour les bonnes réponses, nous avons distingué les contre-exemples explicites (CEX), que ce soit un dessin ou trois vecteurs donnés avec leurs coordonnées ou en fonction d'une base... et les contre-exemples généraux (CEG) du genre :  $x=\alpha y+\beta z$ . On a recensé 31 contre-exemples explicites contre 14 généraux. Un contre-exemple "général" donne l'impression (à l'étudiant) d'avoir mieux cerné toute la question. A la limite pour certains étudiants un contre-exemple, s'il n'est pas général n'est pas vraiment probant. Pourtant, d'un point de vue logique, il n'apporte rien de mieux qu'un contre-exemple explicite qui suffit à prouver la fausseté d'une proposition. Dans une certaine mesure un contre-exemple général est une moins bonne réponse, car on y perd en clarté, d'autant que, comme dans le cas présent, on oublie souvent des conditions qui font que ce n'est pas toujours un contre-exemple (ici si  $\alpha$  ou  $\beta=0$ ).

Les résultats à cette question semblent attester d'une bonne perception de la notion de dépendance dans  $\mathbb{R}^3$ .

Questions A3

"Soit  $P$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  et  $D$  une droite de  $\mathbb{R}^3$  non contenue dans  $P$ . Alors  $\mathbb{R}^3=P\cup D$ ."

Cette fois les deux versions diffèrent beaucoup plus. Dans la deuxième version l'équivalent est la question A4 qui est à la négative et avec deux plans : "soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $\mathbb{R}^3=P_1\cup P_2$ ."

Il semble assez évident que si la version affirmative va induire une confusion avec la somme, par contre la forme négative incite beaucoup plus à la méfiance. Dans la colonne CA3 nous avons mis le code SOM, chaque fois que cette confusion était indéniable. Ce sont des réponses du genre : " $D\cap P=\{0\}$  et  $\dim(P)+\dim(D)=3$  donc  $\mathbb{R}^3=P\cup D$ ." ou pour la deuxième version : "c'est faux car  $\dim(P_1)+\dim(P_2)=4$ ".

Les remarques précédentes se constatent dans les faits, puisque le taux de réussite est de 13% dans le groupe 3 alors qu'il est

respectivement de 61% et 38% dans les groupes 4 et 6, pour un taux global de 34%. De plus, on dénombre 14 confusions nettes avec la somme dans le groupe 3, contre 2 dans chacun des deux autres groupes (pour des effectifs respectifs de 24, 18 et 16).

Globalement, on peut dire qu'il y a un problème de confusion entre somme et union ; toutefois les différences de résultats entre les deux versions laissent supposer qu'il est pour une grande part, au moins superficiellement gérable. La question A5 laisserait par contre supposer qu'en profondeur, la difficulté est plus tenace.

Question A4

"Soient  $D_1, D_2$  et  $D_3$  trois droites de  $\mathbb{R}^3$  distinctes deux à deux. Alors

$$\mathbb{R}^3=D_1\oplus D_2\oplus D_3."$$

L'équivalent dans la deuxième version est la question A3 qui est quasiment identique, si ce n'est qu'on a écrit explicitement : " $\mathbb{R}^3$  est somme directe de  $D_1, D_2$  et  $D_3$ ". Donc la différence est, semble-t-il, peu déterminante.

Cette proposition est bien sûr fautive, il suffit de prendre 3 droites dans un même plan. C'est en fait le même argument que la question A2, mais très peu dénotants s'en sont rendu compte.

Le taux de réussite à cette question est de 40% avec de gros écarts selon les groupes, 13% pour le groupe 3, 72% pour le 4 et 44% pour le 6. Nous ne voyons pas d'autres raisons plausibles à ces écarts que des effets extérieurs au test, venant de la spécificité de chaque enseignement dans les différents groupes.

Nous avons distingué les trois types d'erreurs suivants :

Nous avons codé LIB les réponses du type : "c'est vrai car trois vecteurs directeurs de chacune des droites, étant non colinéaires deux à deux, forment une base de  $\mathbb{R}^3$ ." C'est en fait le même type d'erreur qu'en A2, par contre le concept de somme directe de trois ensembles semble être compris. Il y a 7 de ces cas soit 12%. En fait cette erreur n'est pas très corrélée à la question A2 puisque 4 étudiants sur les 7 avaient répondu correctement à A2 !

Code DIM, pour l'utilisation d'un faux théorème de dimension : ce sont des raisonnements du genre : " $\dim(D_1)=\dim(D_2)=\dim(D_3)=1$  donc  $\dim(D_1)+\dim(D_2)+\dim(D_3)=3$  donc c'est vrai". Parfois il est même clairement dit que  $\dim(D_1+D_2+D_3)=\dim(D_1)+\dim(D_2)+\dim(D_3)=3$ . Il y a 6 soit 10% de ces cas.

Code ABU, pour l'utilisation d'une généralisation abusive de la condition  $D_1\cap D_2=\{0\}$  à trois droites en :  $D_1\cap D_2\cap D_3=\{0\}$  ou  $D_1\cap D_2=\{0\}$   $D_1\cap D_3=\{0\}$  et  $D_2\cap D_3=\{0\}$ . Il y a 17 soit 29% de ces cas. Il apparaît ici

que le passage d'une somme directe de deux à trois ensembles semble être conceptuellement mal compris.

On peut supposer que, dans ces deux derniers cas, le concept de somme directe est resté au niveau mécanique d'une vérification formelle et n'a pas (encore) de réelle signification pour l'étudiant. Cela représente 39% des réponses et 66% des mauvaises.

On a, par ailleurs, relevé des réponses exactes ou fausses mais avec de mauvaises justifications du genre : "c'est faux parce que les droites peuvent avoir une intersection vide", ou "...réduite à un autre point que 0" ou bien faisant référence au parallélisme des droites. Ce genre de parasitage avec la structure affine se rencontre également, mais dans une moindre mesure, à la question précédente. On a regroupé dans la colonne CA sous le code AFF, ce type de réponses aux questions A3 ou A4. Celui-ci peut bien sûr se superposer aux codes précédents. On dénombre ainsi 21 cas de confusion affine/vectoriel soit 36% des réponses. Donc pour un peu plus du tiers des étudiants, il semble qu'il y ait un mauvais transfert de la géométrie à l'algèbre linéaire, parce qu'ils distinguent mal les concepts vectoriels dans la structure affine.

#### Question A5

"Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et soit D la droite engendrée par  $e_1$ .

Alors tout sous-espace vectoriel supplémentaire de D contient  $e_2$  et  $e_3$ ."

Dans la deuxième version, on a remplacé D par le plan engendré par  $e_1$  et  $e_2$  et on dit qu'un supplémentaire contient toujours  $e_3$ . Les deux versions n'ont donc guère de différences significatives.

C'est faux et un contre exemple est donné par le plan engendré par  $e_1 + e_2$  et  $e_3$  par exemple.

Le taux de réussite est de 22%. Pour beaucoup, ce résultat est juste et c'est une quasi-évidence. Les justifications sont très peu consistantes et ne font souvent que réécrire l'énoncé. Ce sentiment d'évidence peut s'expliquer par l'existence d'une confusion plus ou moins consciente au niveau des représentations entre la somme et l'union et donc entre le supplémentaire et le complémentaire. Ainsi face à une question d'abord difficile, portant sur la somme, un étudiant répondrait par intuition, d'après une fausse conception attachée à la notion de complémentaire et non de supplémentaire, même si à un niveau simple il peut consciemment faire la différence (cf question A4).

Dans ces conditions, néanmoins, il est difficile de faire une typologie d'erreurs sans risquer de "lordre" les interprétations. Nous avons donc préféré nous contenter de la note binaire.

#### Question A6

"Les fonctions 1,  $x \rightarrow shx$ ,  $x \rightarrow chx$ ,  $x \rightarrow sh^2x$ ,  $x \rightarrow ch^2x$  sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des fonctions réelles."

Dans la deuxième version les fonctions hyperboliques ont été remplacées par les fonctions trigonométriques. Il se peut que la plus grande familiarité des fonctions trigonométriques ait rendu cette deuxième version plus simple.

La proposition est fausse puisque  $ch^2x - sh^2x = 1$ . Il est vrai que la relation  $\cos^2x + \sin^2x = 1$  est plus familière aux étudiants.

Le taux de réussite global est de 71% avec des taux respectifs de 70%, 78% et 67% pour chaque groupe 3, 4 et 6. Tout d'abord on peut dire que c'est une question bien réussie, ensuite que notre hypothèse sur la plus grande familiarité des fonctions trigonométriques n'est pas vérifiée, et enfin que les trois groupes sont assez homogènes.

Les échecs sont soit des non réponses, soit des conclusions hâtives du genre "si  $a+b(shx)+c(chx)+d(sh^2x)+e(ch^2x)=0$  alors  $a=b=c=d=e=0$ " sans justification. Il y a 2 cas d'oubli de la fonction 1, ce qui rend le résultat exact.

Cette fois encore nous n'avons pas fait de typologie d'erreurs, à cause du peu de réponses fausses.

#### Question A7

"On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par  $u_n = \sin(n\pi/2)$  et  $v_n = \cos(n\pi/2)$ .

Le sous-espace vectoriel engendré par  $(u_n)$  et  $(v_n)$  dans l'espace vectoriel des suites réelles est de dimension 2."

Dans la variante on a remplacé  $v_n$  par  $(-1)^n$ . Sans changer fondamentalement la preuve, ce changement la rend un peu plus complexe. En effet dans le premier cas, si on suppose  $a(u_n) + b(v_n) = 0$  en regardant  $n=0$  et  $n=1$  on a directement  $a=b=0$ ; par contre dans le deuxième cas on obtient facilement  $b=0$  avec  $n=0$ , mais il y a un peu plus de travail pour avoir  $a=0$ . Toutefois cette différence ne devrait pas avoir d'effet très significatif.

Donc la proposition est vraie. Pour le démontrer, il suffit de dire que le problème revient à l'indépendance des deux suites puis de la prouver.

Le taux de réussite à cette question est très faible : 18%. Or une seule copie montre un signe de difficulté à interpréter le résultat en terme de famille libre (codée INT). Aussi, vu le succès de la question précédente, on peut avancer deux hypothèses pour interpréter cet échec. D'abord il semble souvent plus difficile de montrer qu'une famille est liée que de montrer quelle est libre. Ensuite les suites sont difficiles à manier en tant qu'objets algébriques (même plus que les fonctions) (cf thèse d'A.Robert).

Nous avons répertorié 4 types d'erreurs, mais encore beaucoup échappent à notre grille et il y a 19 non réponses, soit 33%.



Code GEN, pour ceux qui reconnaissent une relation de liaison sur quelques valeurs seulement et que l'on généralise (4 cas).

Code IND, pour ceux qui traitent les valeurs de  $n$  indépendamment les unes des autres. Par exemple : "pour  $n$  pair, on peut prendre  $a$  non nul et pour  $n$  impair, on peut prendre  $b$  non nul donc c'est lié" ( $U_n$  seul cas).

Code DER, pour les dérapages au niveau du sens. Ce sont des justifications du genre : " $u_n=(0,1,0,-1,0,1,0,\dots)$  et  $v_n=(1,0,1,0,1,0,\dots)$  donc (1,0) est une base de l'espace vectoriel engendré par les deux suites." Il y a 11 cas semblables soit 19% des réponses et 28% des réponses effectives ou encore 38% des réponses fausses effectives. Dans ce cas, la difficulté vient apparemment de la complexité des suites comme objet algébrique ; ce qui rend impossible le contrôle du sens des concepts d'algèbre linéaire dans ce cadre.

Il semble bien donc que les résultats à cette question, a priori simple, au niveau des concepts d'algèbre linéaire, attestent de la difficulté conceptuelle que l'on ajoute en travaillant dans un espace de suites numériques.

#### Questions B1 et B2

B1-"Si  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$  aussi."

B2-"Si  $(u(e_1), u(e_2))$  est une famille libre, alors,  $(e_1, e_2)$  aussi."

Dans la deuxième version la question B1 est identique aux flèches près à la question B2 ci-dessus. Par contre, au lieu de la question B1 ci-dessus, il y a deux questions, une sur la conservation de la liberté (pour une famille de 2 éléments, question B3) et une sur la conservation du caractère générateur (pour une famille de 4 éléments, question B2). Nous avons traité globalement ces deux questions comme la B1 de la première version. En fait nous n'avons pas tenu compte de la confusion fréquente, dans B2, entre famille génératrice de  $\text{Im}(u)$  et famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ , car il n'y avait aucun moyen de tester cela dans la première version. De fait, la question B3 de la deuxième version a pratiquement joué à elle seule le rôle de la question B1 de la première version.

Donc B1 est fausse, il suffit de prendre  $u=0$  ou toute application non bijective. B2 est par contre exacte.

Le taux global de réussite est de 47% pour B1 et de seulement 6% pour B2. De plus il y a de gros écarts entre les groupes surtout pour B1 puisque les taux sont respectivement de 67%, 44% et 19% pour les groupes 3, 4 et 6. L'avance du groupe 3 pourrait venir de la différence entre les deux versions, mais rien d'interne au test n'explique l'écart entre les groupes 4 et 6.

Il y a une quasi réciprocité entre les deux propositions, c'est pourquoi nous avons traité les erreurs à ces deux questions globalement.

Nous avons codé REC (dans la colonne CB1) quand, dans l'une (au moins) des deux démonstrations, on démontre ou on essaie de démontrer la réciproque de la proposition ; par exemple si pour démontrer B1 on écrit : " $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$  alors  $u(\alpha e_1 + \beta e_2) = 0$  donc  $\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) = 0$  donc, comme  $(e_1, e_2)$  est libre,  $\alpha = \beta = 0$ ". En fait ce n'est pas toujours aussi clair, disons que l'on repère surtout ici les cas où la démonstration est abusive ou n'aboutit pas parce que l'hypothèse et conclusion ne sont pas clairement distinguées l'une de l'autre. Ce cas se présente 34 fois, soit dans 59% des réponses.

Ce type d'erreur fort répandu semble être lié à une difficulté logique intrinsèque à la définition de l'indépendance linéaire. Il semble que la formulation avec quantification et implication de cette définition, la rende peu maniable dans un raisonnement, surtout formel.

Un autre type d'erreur assez fréquent, vient de l'existence chez certains étudiants, d'un modèle implicite ou explicite de bijectivité systématique des applications linéaires. Certains étudiants écrivent en toutes lettres : " $u$  étant linéaire,  $u$  est bijective" on trouve encore : " $u(x)=0$  donc  $x=0$ , (car  $u$  est linéaire)". Les deux propositions précédentes deviennent alors vraies, et la difficulté de la démonstration est court-circuitée. Pourtant ce type d'erreur, se superpose quasi systématiquement avec le précédent (sauf dans un cas). Cette erreur codée BII (dans la colonne CB2) se trouve dans 16 copies, soit dans une proportion de 28%. Ce pourcentage peut sembler a priori relativement élevé, pour une erreur assez grossière. Dans quelques cas on peut déceler dans le discours, une interférence avec le théorème du rang qui dit qu'une application linéaire seulement injective ou surjective est bijective, du genre : "car toute application linéaire est injective donc bijective". Comme si ce résultat déjà fort, induisait par contagion la bijectivité systématique. Dans d'autres cas, on peut se demander si le modèle bijectif implicite ne s'étend pas à toutes les applications. Le cas le plus édifiant est une réponse où les " $u$ " sont rayés comme dans un simplification de produit, dans l'expression  $\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) = u(0)$ , pour obtenir  $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$ .

Ces deux questions représentaient donc des difficultés à plusieurs niveaux. La relative meilleure réussite à la première peut s'expliquer par deux raisons. D'abord c'est une question plus classique que sa réciproque, elle a donc pu faire l'objet d'une remarque de la part d'un enseignant. Par ailleurs, étant fausse, elle possède un contre-exemple (le plus simple étant  $u=0$ ), ce qui évite l'écueil de la démonstration formelle inévitable pour répondre correctement à la deuxième question.

Question B3

"Si  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et si  $(u(e_1), u(e_2))$  est une base de  $\text{Im}(u)$ , alors  $e_3$  appartient à  $\text{Ker}(u)$ ."

Dans la deuxième version la conclusion, " $e_3$  appartient à  $\text{Ker}(u)$ ", est remplacé par " $(e_1, e_2)$  est une base d'un supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$ ", avec les mêmes hypothèses.

Dans les deux versions, on est proche du théorème du rang, qui dit que  $\dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)$ , et que tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image, donc que toute base d'un supplémentaire du noyau donne une base de l'image. Les deux versions sont des réciproques de ce résultat. La première version est un peu plus complexe, puisqu'elle superpose au problème précédent, la confusion supplémentaire/ complémentaire déjà testée en A5. De fait la proposition est fautive, et un contre-exemple est assez simple à trouver, par exemple  $u(e_1)=e_1$ ,  $u(e_2)=e_2$  et  $u(e_3)=e_2$ .

A part deux, tous les étudiants du groupe 3 ont essayé de répondre à cette question, et seulement trois ont trouvé un bon contre-exemple. Les autres ont donné des résultats soit avec peu de démonstration, soit peu cohérents. Ceci rend l'analyse des erreurs difficile.

La deuxième version est un résultat exact, si on interprète le "un" de la conclusion de façon existentielle, c'est-à-dire comme voulant dire que  $\text{vect}(e_1, e_2)$  est un supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  et non que l'ou supplémentaire de  $\text{Ker}(u)$  est ainsi.

Alors, il faut voir que  $(u(e_1), u(e_2))$  étant une base de  $\text{Im}(u)$ , aucun vecteur autre que 0 de la forme  $ae_1+be_2$  ne peut être dans le noyau de  $u$ , donc que  $\text{Ker}(u) \cap \text{vect}(e_1, e_2) = \{0\}$ , et comme d'après le théorème du rang  $\dim(\text{Ker}(u))=1$ , ils sont donc supplémentaires.

Si on donne au "un" une valeur universelle, la proposition est fautive, et le contre-exemple ci-dessus convient.

Apparemment, les étudiants, ayant répondu, ont interprété le "un" comme un existentiel.

La démonstration est alors assez délicate et demande une bonne maîtrise de plusieurs concepts qui s'enchaînent. L'énoncé même de la proposition est déjà compliqué, et fait appel à beaucoup de notions non encore entièrement assimilées par un débutant.

En fait, seulement 4 étudiants des groupes 4 et 6 ont abordé cette question, dont deux se sont contentés de dire qu'elle était fautive sans justifier. Et aucun ne l'a résolue.

Il semble que cette question, dans les deux versions, soit, pour la population testée au moment du test, d'un niveau de compréhension trop élevé pour que l'on puisse tirer des conclusions intéressantes sur l'utilisation du théorème du rang.

Question B4

" $v=0$  si et seulement si  $\text{Im}(u)=\text{Ker}(v)$ ."

Cette question est identique dans les deux versions.

La proposition est fautive, on a en effet en général seulement l'inclusion de l'image de  $u$  dans le noyau de  $v$ . Un contre-exemple simple est donné par  $u=v=0$ . Ici encore, il était facile de répondre si on cherchait un contre-exemple, par contre la question pouvait avoir un abord plus complexe si on cherchait à faire une démonstration. On a dénombré 17 non réponses soit un taux de 29%.

On a relevé une seule réponse entièrement satisfaisante avec un contre-exemple et 3 réponses douteuses (codées DOUT) du genre : " $v=0 \Rightarrow v=0$  on a seulement  $\text{Ker}(v) \subset \text{Im}(u)$ ", accréditées de NB4=0,5. Parmi les réponses inexactes ou insuffisamment justifiées, nous avons distingué trois types:

- Code ABU, pour les réponses où, après avoir démontré l'inclusion, on prétend avoir démontré l'égalité. Il y a 10 de ces cas soit 24% des réponses effectives. Il est difficile de faire ici, la part entre la "mahonnéteté" et la réelle méprise entre l'inclusion et l'égalité.

- Code RES, pour les réponses restrictives où, après avoir démontré l'inclusion, on conclut qu'il n'y a pas égalité. Cela arrive 12 fois, soit dans 29% des réponses effectives. Ce comportement met en évidence un manque de nécessité par rapport au contre-exemple. L'impossibilité à démontrer la deuxième inclusion suffit à conclure. La démonstration d'un résultat partiel, par ailleurs inutile pour répondre stricto sensu à la question, semble donner satisfaction aux étudiants, par rapport à la consigne de justification des réponses, alors que l'essentiel de cette justification est délaissé.

- Code INC, pour les réponses où l'inclusion est démontrée en tant que telle, et la conclusion à la question, laissée en suspens. Il y a 4 de ces cas soit 10% des réponses effectives.

Pour ces deux derniers types d'erreurs (RES et INC), on a attribué une note NB4, de 0,5, quand la démonstration de l'inclusion était exacte. Finalement, avec les trois réponses douteuses, on arrive à 18 notes de 0,5, donc environ un tiers des étudiants ont 0,5 ou 1 à cette question.

Question C1

"Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts deux à deux. Montrer que les polynômes  $(X-a)(X-b)$ ,  $(X-a)(X-c)$  et  $(X-b)(X-c)$  forment une base  $B$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ ."

Dans la deuxième version on a pris les polynômes  $(X-a)^2$ ,  $(X-a)(X-b)$  et  $(X-b)^2$ .

Dans les deux cas la consigne est de démontrer, il n'y a donc pas de doute sur la réponse. Pour ce faire, on peut démontrer que la famille est libre puis génératrice, mais comme on connaît ici la dimension de  $\mathbb{R}_2[X]$ , il suffit de montrer l'un des deux. En l'occurrence, comme souvent

d'ailleurs, il est ici plus simple de montrer l'indépendance que le côté générateur.

D'autre part pour montrer l'indépendance, il y a essentiellement deux méthodes. Après avoir écrit qu'une combinaison linéaire des trois polynômes est nulle, on peut soit tout redévelopper et réorganiser sur la base  $(1, X, X^2)$ , ce qui conduit à un système  $3 \times 3$ , soit on peut remplacer  $X$  par des valeurs (judicieusement choisies) pour avoir des relations plus simples.

Dans le cas présent la première méthode aboutit à un système techniquement lourd à résoudre, à cause des valeurs arbitraires de  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Il semble un peu plus simple dans la deuxième version. Donner des valeurs est dans ce cas plus astucieux, surtout dans la première version.

Dans la colonne CC1 nous avons mis :

- Le code SYS, pour les étudiants ayant utilisé la première technique et ayant échoué, soit par abandon soit qu'ils concluent sans avoir presque fait de calcul que le système ne donne que la solution  $(0,0,0)$ . Ceux-là représentent 13 cas, soit 22% du total. Le seul cas où cette méthode a abouti est codé S\*.

- Le code VAL, pour ceux ayant utilisé, avec succès, la substitution de valeurs dans la combinaison linéaire. Il y a 17 cas soit 29%. On n'a pas relevé de cas où cette méthode ait abouti à un échec.

- Le code DIY, pour ceux qui dans la deuxième version, divisent par  $(X-a)^2$ . Il y a 3 tels cas et aucun ne donne un argument convaincant pour conclure.

Nous avons fait compté pour 0,5 cette démonstration de la liberté dans la note NCI.

Dans la colonne CC2, nous avons mis :

- Le code DIM, quand il est explicitement fait allusion au théorème de la dimension, ou aux familles libres maximales pour, après avoir montré la liberté, dire que la famille est une base. C'est le cas de 25 copies soit 43%.

- Le code GEN, quand on essaie de montrer que la famille est génératrice. Personne n'arrive à montrer correctement ce résultat. L'argumentation est le plus souvent inconsistante, nous avons relevé avec un code spécial RGN, ceux qui montrent une sorte de réciproque évidente du caractère générateur -c'est-à-dire du genre, une combinaison linéaire des trois polynômes est un élément de  $\mathbb{R}_2[X]$  donc la famille est génératrice-. Ce genre de démonstration est assez fréquent au tout début de l'algèbre linéaire, mais c'est une erreur qui semble s'estomper rapidement chez la plupart. On a relevé 11 GEN et 4 RGN, soit au total 26% des étudiants.

Comme précédemment nous avons compté 0,5 dans la note NCI pour ceux ayant utilisé le théorème de la dimension.

Globalement, cette question est assez bien réussie. (si on ne tient pas compte des non réponses, la moyenne est de 0,46 sur 1). On peut supposer que le choix de la bonne technique pour la démonstration de la liberté est du domaine de la pratique, donc peu significatif en début d'apprentissage. La "triche" dans la résolution du système, quand on a décomposé sur la base  $(1, X, X^2)$ , peut s'expliquer par la nécessité, liée à diverses contraintes extérieures, de donner une réponse. Enfin la simplification apportée par le théorème de la dimension semble être adoptée par presque la moitié des étudiants.

#### Question C7

"Ecrire la matrice de l'application dérivée  $D: P \in \mathbb{R}_2[X] \rightarrow P' \in \mathbb{R}_1[X]$  relative aux bases  $B$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $(1, X)$  de  $\mathbb{R}_1[X]$ ."

Cette question est identique dans les deux versions.

Etant la dernière question du test, elle bénéficie d'un taux d'abstention assez élevé, 38%. Par contre sur les réponses effectives le taux de réussite est de 89%.

Il y a un cas de retour de calcul (CAL) dans les dérivées, que l'on n'a pas pénalisée au niveau de la note NC2, deux cas de retours de format (FOR) où la matrice est donnée avec  $\mathbb{R}_3[X]$  à l'arrivée et enfin deux cas où la matrice est donnée relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$  au départ, au lieu de B (CAN3).

Les résultats à cette question semblent donc indiquer une assez bonne maîtrise de l'écriture matricielle d'un endomorphisme, au moins dans la cas simple où c'est la tâche principale et que les bases sont identiques.

#### **II- Attribution d'une note :**

A cause des deux versions, mettre une note valable pour tout les groupes est délicat, surtout pour les questions A3 et B3.

De plus, on a vu que pour certaines questions des différences très nettes se dessinent entre les groupes. C'est notamment le cas des questions A4 et B1.

Pour la question A4, les taux de réussite sont respectivement pour les groupes 3, 4 et 6 de 13%, 72% et 44%, alors qu'il n'y a qu'une non-réponse. Etant donné le caractère très spécifique de la question, et la diversité d'origine des erreurs, il est très délicat d'interpréter ce résultat. Il est possible que ce ne soit en fait qu'une différence "culturelle" passagère. Peut-être qu'au moment du test, le groupe 3 avait très peu entendu parler de la somme de trois ensembles...

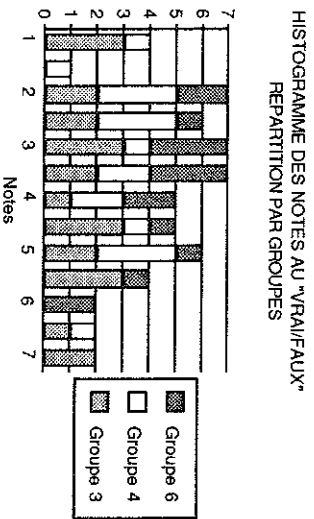
Pour la question B1 les taux de réussite sont de 67%, 47% et 20%, alors que là aussi il n'y a que 2 abandons. L'écart est moins important et dans un ordre différent. La question touche aussi à des points plus

fondamentaux, donc où les connaissances devraient être plus homogènes. Peut-être ici est-ce le facteur temps qui a fait la différence. Si les abandons à cette question sont très peu nombreux, on remarque que, déjà aux questions A5 et A7, et dans la suite, le groupe 6, et dans une moindre mesure le groupe 4, ont des taux de non réponses élevés, alors que dans le groupe 3 ce taux se maintient plus bas jusqu'à la fin. On mesure aussi cela à la densité des réponses, dans les groupes 4 et 6 les justifications deviennent de plus en plus courtes, voire inexistantes. Ce phénomène, sûrement lié aux conditions de passage du test, explique peut-être en partie les écarts importants relevés à cette question.

Compte tenu de ce que nous venons de remarquer, nous avons donné une note globale au test, en supprimant les questions A3, B2 et A4. Nous avons gardé B1 malgré nos doutes, car nous pensons qu'elle touche un point fondamental. Comme il est difficile de juger "objectivement" de l'importance relative des autres questions entre elles, nous avons tout simplement additionné les notes NA1, NA2, NA5, NA6, NA7, NB1, NB2, NB4, NC1 et NC2, nous obtenons ainsi une note N sur 10 au test "vrai/faux".

On obtient ainsi une moyenne globale de 3,68 avec un écart-type de 1,57.

Le graphique qui suit donne la répartition de ces notes, en distinguant la part de chaque groupe :



Globalement, la moyenne au test est faible et les notes assez peu dispersées. Ceci s'explique par la présence de questions très majoritairement ratées (A5, A7, B2, B3 et B4). Les notes s'échelonnent en fait de 1 à 7.

Nous avons distingué les trois tranches de notes suivantes :

- $N < 3$  : 18 étudiants.
- $3 \leq N < 5$  : 24 étudiants.
- $N \geq 5$  : 16 étudiants.

Ces trois tranches semblent rendre assez bien compte des différents niveaux de réussite à ce test.

### III - Comparaison par groupe

Nous avons, dans le paragraphe précédent, déjà donné des éléments de comparaison des 3 groupes.

Avec le nouvel échantillon de 58 étudiants, on obtient pour le prétest une moyenne de 13,33 et un écart-type de 3,05, ce qui est très voisin des résultats obtenus avec la population de départ.

Le tableau qui suit nous donne pour le nouvel échantillon la moyenne et l'écart-type de chaque groupe au prétest et à ce test "vrai/faux" ainsi que la répartition par tranche de notes au "vrai/faux" :

N°GR	PRETEST			TEST "VRAI/FAUX"				
	EFF	MOY	ECAR	MOY	ECAR	N<3	3≤N<5	N≥5
3	24	13,21	2,65	3,85	1,57	7	9	8
4	18	12,39	3,2	3,33	1,48	8	6	4
6	16	14,56	3,2	3,81	1,29	3	9	4

On voit qu'avec le nouvel échantillon, les données ne sont que très peu modifiées et on retrouve pour chaque groupe les caractéristiques exposés au chapitre A. Ceci confirme encore une fois l'hypothèse de conservation des données avec un échantillon réduit, ici d'un tiers.

Qu'en est-il de ces grandes lignes de distinction pour le "vrai/faux" ?

Le seul point qui se confirme, c'est la faiblesse du groupe 4, qui se retrouve encore dernier pour la moyenne.

Par contre le groupe 3 a rattrapé et même très légèrement devancé le groupe 6. Ceci est à nuancer, à cause de nos réserves par rapport à la question B1. Toutefois il semble que l'écart entre les deux groupes même s'il ne s'est pas inversé, a au moins sensiblement diminué.

Par ailleurs ce même groupe 3, fort homogène sur le prétest est celui qui a maintenant l'écart-type le plus élevé (d'assez loin).

L'évolution semble donc avoir favorisé le groupe le plus homogène ; tout en cassant peut-être cette homogénéité, puisque le groupe 3 se retrouve avec l'écart-type le plus élevé au "vrai/faux".

Le groupe 6 se maintient à un bon niveau, mais son évolution globale est relativement moins importante. Alors que le groupe 4 n'ayant, au départ aucun facteur positif, est resté, relativement, au niveau le plus faible.

Apparemment, les deux facteurs, que sont un bon score et une homogénéité de niveau au prétest, ont joué favorablement dans le score au "vrai/faux", le deuxième facteur ayant un poids plus important.

Ces conclusions sont bien sûr à nuancer, puisqu'elles ne tiennent pas compte de facteurs extérieurs incontrôlables.

#### IV - Les corrélations prétest-"vrai/faux".

La question de la corrélation est délicate, surtout sur une population aussi faible. Aussi n'essayerons-nous pas d'obtenir des résultats spectaculaires et tranchés. Nous voulons simplement essayer sur une analyse précise, avec des paramètres spécifiques, de voir si certaines hypothèses sur la corrélation entre prérequis de logique et algèbre linéaire se vérifient dans les faits.

Les questions de ce test étant indépendantes et ayant chacune une importance en soi, nous avons utilisé une méthodologie différente, de ce qui a été fait pour les devoirs et le partiel, pour étudier les corrélations.

##### Méthodologie

Nous avons construit un tableau de corrélation entre les deux tests (cf annexe E-3).

Chaque ligne du tableau, correspond aux étudiants ayant obtenu une certaine note ou ayant fait un certain type d'erreur à une question du "vrai/faux", c'est-à-dire correspondant à un certain Caractère relatif au "vrai/faux".

En général, nous avons seulement gardé "avoir la note 1" (voire 0,5) car la typologie d'erreur est plus fine que "avoir 0".

Dans les colonnes, nous donnons dans l'ordre, l'effectif de la population correspondant au critère de la ligne, son pourcentage calculé sur les 58 étudiants testés, la moyenne et l'écart-type des notes au prétest, le nombre et le pourcentage (sur l'effectif précédent) d'étudiants ayant les blocs EQ1, EQ3 plein et vide, Q plein et vide, AN et AS et enfin la répartition en nombre de blocs vides (B=0 etc...).

##### Remarques :

Pour B=4 et 6 nous n'avons pas donné de pourcentages, puisqu'il n'y a qu'un cas chaque fois. Aucun étudiant n'a obtenu 5 blocs vides.

Dans la première ligne (global), nous donnons ces résultats pour la population total des 58 étudiants. Et dans la dernière ligne (moy), nous donnons la moyenne au "vrai/faux" en fonction des blocs du prétest.

Pour faciliter la lecture, nous avons donné dans la même annexe E-3, un tableau simplifié. Nous y avons supprimé l'écart-type qui nous semblait une donnée difficilement exploitable, à cause des effectifs réduits. Nous avons donné seulement les pourcentages ; l'effectif de la ligne, sur lequel ces pourcentages sont calculés, est rappelé dans la colonne "EFF". Nous avons ensuite réorganisé les lignes en plaçant en tête les critères "positifs", la limite se trouve aux lignes CA4=LJB et NC1=0,5, qui ne sont des critères ni entièrement positifs ni vraiment négatifs.

De plus, nous avons remplacé les colonnes B=1 et B=2, par respectivement B≤1 et B≤2. Nous avons conservé les résultats à B=4 et B=6 tels quels, vu qu'un pourcentage, ne veut pas dire grand chose sur

une personne. Nous avons également conservé B=3, 4 et 6 tels quels, à titre indicatif, ces trois dernières colonnes sont le complémentaire de B≤2, et ne sont qu'un raffinement pas toujours très significatif, étant donné que seulement 2 étudiants ont eu plus de trois blocs vides.

##### Mode de lecture :

Ainsi, pour un critère positif au "vrai/faux", par exemple NA1=1, On pourra se faire une idée de la corrélation avec les prérequis de logique en comparant les pourcentages avec ceux de la population totale (ligne "global"). Si il y a une bonne corrélation, les pourcentages de gens ayant les blocs EQ1 EQ3, Q, AN et AS devraient être plus élevés, alors que ceux des gens ayant eu les blocs EQ3 et Q vides devraient être plus faibles, de même la moyenne des notes au prétest devrait être plus élevée et la progression des effectifs dans les blocs vides plus rapide. Pour un critère "négatif", par exemple NA2=0, ces données sont bien sûr à inverser.

Pour aider à la lecture du tableau, nous avons mis en gras, les pourcentages ou les moyennes contradictoires avec une bonne corrélation et en italique ceux qui sont neutre, c'est-à-dire qui pour un critère donné, ont un pourcentage quasi-identique (avec une marge d'environ 8%) à celui de la population globale.

On peut ainsi lire ces informations selon deux directions.

Sur les lignes, on mesure le poids des prérequis de logique sur la réussite à une question, ou sur un certain type d'erreur.

Sur les colonnes, on mesure le poids d'un prérequis donné sur l'ensemble du test "vrai/faux".

##### Interprétation des résultats

Les tentatives d'interprétation qui vont suivre n'ont qu'un caractère indicatif, elles ne portent que sur notre analyse avec des effectifs réduits.

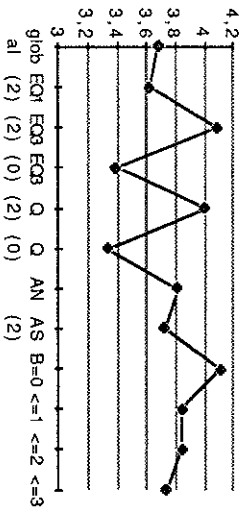
##### Analyse globale

Nous avons calculé le coefficient de corrélation linéaire entre les deux échantillons de notes on trouve  $r=0,30$ .

r est positif donc la tendance est vers une corrélation positive, c'est-à-dire que globalement, de bons résultats de logique, sembleraient avoir une influence bénéfique sur les résultats au "vrai/faux". Pourtant ce coefficient r est éloigné de 1, donc cette corrélation est faible. Ce renseignement est un peu limité, nous allons essayé d'affiner.

Si on s'intéresse à la répartition des notes au "vrai/faux" en fonction des blocs de logique et d'algèbre, on obtient des données plus détaillées, qui sont figurées dans le graphes suivant.

Moyenne au "vrai/faux" en fonction des résultats au prétest de logique.



Ainsi, globalement, il semblerait qu'avoir le bloc EQ3 ou n'avoir aucun bloc vide soient les critères les plus significativement liés à la réussite au test "vrai/faux", suivi de près par le fait d'avoir le bloc Q. A l'inverse, avoir les blocs EQ3 ou Q vides sont deux critères assez reliés à un échec à ce test. Par contre, les blocs AN, AS et surtout EQ1 ne semblent pas très corrélés avec la moyenne au "vrai/faux".

L'écart entre les différentes moyennes atteint jusqu'à 20%, suivant que l'on ait tel ou tel bloc. Ces résultats semblent donc confirmer une corrélation positive entre les prérequis de logique et les résultats au "vrai/faux".

Pour ce qui est du nombre de blocs vides, le seul critère vraiment décisif est de n'avoir aucun bloc vide (moyenne de 4,11). Ensuite les résultats sont contradictoires, en effet la moyenne de ceux ayant 2 blocs vides (3,85) est supérieure à celle de ceux ayant un seul bloc vide (3,39) alors qu'on obtient la même moyenne (3,84) pour ceux ayant au plus 1 ou 2 blocs vides. Ces résultats sont un peu déroutants et rendent les interprétations difficiles. Ils montrent en tous cas que la corrélation n'est pas parfaite.

#### Corrélation question par question du "vrai/faux"

Nous allons brièvement dégager pour chaque question du "vrai/faux", les tendances que l'on peut lire dans notre tableau.

##### Question A1

Cette question est plutôt bien corrélée, si on se réfère aux lignes NA1=1 et CA1=REC. Les facteurs les plus déterminants sont pour la réussite, d'avoir le bloc Q ou n'avoir aucun bloc vide et pour l'échec, d'avoir AN ou Q vide.

Nous avons toutefois écarté de nos critères la majorité de ceux qui se sont pris au piège de la question de cours, aussi les effectifs restant en jeu sont réduits, ce qui limite d'autant la portée de nos résultats.

Par ailleurs, avoir utilisé une contraposée ou un raisonnement par l'absurde (CA1=CA) ne semble pas être lié à une meilleure acquisition des prérequis en logique. Les pourcentages sur cette ligne donnent, en effet, des résultats contradictoires.

#### Question A2

Obtenir un mauvais score à cette question (NA2=0) ou au contraire réussir à donner un contre-exemple (CA2=CEG ou CEX) ne semble pas être en contradiction avec les résultats au prétest, le facteur le plus déterminant pour réussir semble être de n'avoir aucun bloc vide. Les autres critères, sans créer de contradiction, ne donnent pas de corrélation très forte.

Par contre, la distinction entre contre-exemple explicite et général ne semble pas être corrélée aux prérequis de logique, les données sont même légèrement contradictoires avec notre hypothèse.

De même les erreurs de type REC, c'est-à-dire de démonstration de réciproque, ne semblent pas être corrélées à des erreurs de logiques. C'est un résultat surprenant, d'autant que les 5 cas relevés sont des récidivistes de la question précédente. Le faible effectif ne permet pas de conclure toutefois.

#### Question A3

Cette question est très mal corrélée au prétest, les variations dans l'énoncé et le manque de justification expliquent sûrement ce fait.

#### Question A4

Pour cette question le rapport est assez neutre, la tendance générale va très légèrement dans le sens d'une corrélation et il y a très peu de résultats contradictoires (3 seulement dans les erreurs de généralisation abusive), mais la plupart suivent la répartition globale. Il semble donc que la construction de sens pour la notion de somme directe, ne soit que très peu corrélée à l'acquisition de prérequis de logique.

Pour la ligne CA4=LIR, qui correspond à une erreur que l'on peut qualifier de "positive", la tendance est à une légère corrélation dans le "bon" sens, mais il y a un point contradictoire dans la répartition en blocs vides, qui est plutôt à la baisse.

Par ailleurs, les erreurs de confusion entre les cadres affine et vectoriel (CA=AFP), ne semblent pas corrélées aux résultats du prétest, ce qui n'est pas surprenant en soi, mais dans une certaine mesure, confirme à nouveau la validité de notre méthode d'analyse.

#### Question A5

Comme nous l'avons dit plus haut, seule la réussite à cette question est significative, or ceci semble assez bien corrélé avec les résultats du prétest. Un des facteurs les plus déterminants est encore l'absence de bloc vide, mais aussi avoir le bloc EQ3 ou Q.

Ainsi avoir de bons prérequis en logique semble être un facteur positif pour bien répondre à cette question. Or nous avons dit plus haut que la source d'erreur la plus probable, pourrait provenir d'une

confusion complémentaire/supplémentaire, qui a priori n'est pas directement en rapport avec des problèmes de logique. Cette apparente bonne corrélation peut donc nous surprendre. Nous retiendrons toutefois que la question est d'un abord difficile, parce que la notion de supplémentaire est complexe et qu'il faut en avoir une bonne connaissance pour voir que la proposition A5 est fausse. Peut-on aller jusqu'à dire qu'avoir de bons prérequis en logique est un atout pour réussir certaines questions fines d'algèbre linéaire, même pas directement liées à des problèmes de logique ou est-ce seulement l'indicateur que d'autres prérequis ont été acquis?

#### Question A6

Pour cette question il ne semble pas y avoir réellement de corrélation, les pourcentages sont tous très proches de la répartition globale. Il faut dire que c'est une question dans l'ensemble bien réussie, et que nous n'avons pas relevé de type d'erreurs se rapprochant d'un problème de logique, ce résultat n'est donc pas surprenant.

#### Question A7

Pour ce qui est de la réussite à cette question, la corrélation est bonne, les critères les plus déterminants étant le bloc Q et l'absence de blocs vides. Par contre pour les deux types d'erreurs, les corrélations sont hasardeuses. Pour les erreurs de généralisation (GEN) c'est un peu surprenant, mais l'effectif de 4 est très faible, nos chiffres ne sont donc guère significatifs. Pour les erreurs de dérapage (DER), cela semblerait vouloir dire que les difficultés de sens créées par l'utilisation des suites en l'algèbre linéaire ne sont pas dues à des insuffisances dans les prérequis de logique.

#### Questions B1 et B2

Cette question nous avait semblé essentiellement être difficile à cause d'un problème de confusion entre hypothèse et conclusion, donc pour des raisons très liées à la logique. Or, sans qu'il y ait de contradictions flagrantes, nos données ne semblent confirmer cette hypothèse qu'avec timidité. La réussite à B1 donne une répartition très proche de la répartition globale, avec 2 contradictions guère significatives. Les deux types d'erreurs répertoriées donnent une corrélation légèrement meilleure, surtout l'erreur liée à un modèle de bijectivité. La meilleure corrélation se retrouve pour la réussite à B2, mais l'effectif de 3 rend ces résultats inexploitable.

Il semblerait donc qu'il y ait effectivement une corrélation mais celle-ci n'est pas systématique, ni très forte.

#### Question B3

Cette question ayant été massivement ratée (3 cas de réussite) pour des raisons complexes, nous préférons ne pas examiner la corrélation qui n'aurait pas beaucoup de sens.

#### Question B4

Avoir une note d'au moins 0,5 à cette question est, à part pour EQ2, bien corrélé aux résultats du prétest. L'effectif concerné étant de 19, c'est une donnée relativement importante. Les critères les plus déterminants de cette réussite sont EQ3, Q, AS et l'absence de bloc vide.

Par contre, dans les deux types d'erreurs relevés, la tendance est inversée, c'est-à-dire que la répartition est plutôt positive. Il faut dire que beaucoup des copies comportant l'erreur de conclusion restrictive (RES) ont été accréditées d'une note de 0,5 pour avoir correctement montré l'inclusion de  $\text{Im}(u)$  dans  $\text{Ker}(v)$ . De plus ces erreurs détectées montre une certaine compréhension du problème, ce qui peut être plus positif qu'une erreur moins repérable voire une non-réponse, et qui sont donc sans code.

#### Question C1

Avoir une note de 1 en C1 semble bien corrélé avec les résultats au prétest, avec comme facteurs déterminants, le bloc Q et l'absence ou même un seul bloc vide. Par contre avoir une note de 0,5 ne semble ni corrélé positivement ni négativement au prétest, bien que la tendance soit plutôt du côté négatif. Ceci semblerait signifier que de bonnes bases en logique sont un bon atout pour traiter entièrement ce genre de questions, classiques en algèbre linéaire.

Par ailleurs le choix de la méthode pour montrer la liberté de la famille (CC1=VAL ou SYS) ne semble pas corrélé avec le prétest de logique, ce qui n'est pas surprenant. Ce choix semble plutôt influencé par une pratique de ce type d'exercices.

Au contraire, la différence entre ceux qui emploient des arguments de dimension et ceux qui essaient de montrer que la famille est génératrice pour conclure (CC2=DIM GEN ou RGN), semble être légèrement liée aux résultats du prétest. Le cas de ceux qui croient montrer le caractère générateur par une réciproque (RGN), semble néanmoins donner une mauvaise corrélation, mais là encore l'effectif est très faible (4 cas) ce qui rend les données inexploitable.

Ainsi, il semblerait que cette question comprenne un aspect technique peu corrélé avec la logique et un aspect plus conceptuel qui serait plus lié aux prérequis de logique.

Question C2

Le succès à cette question, pourtant très majoritairement réussie par ceux l'ayant abordée, semble assez lié aux résultats du prétest. Les facteurs les plus déterminants sont les blocs Q et AN, l'absence de blocs vides et même la présence d'un seul bloc vide.

Il faut se méfier toutefois de cette dernière question qui peut être fortement conditionnée par la rapidité des étudiants, ou les différences dans les conditions de passage du test entre les trois groupes.

Conclusions

Comme nous ne cessons de le rappeler, il faut être prudent dans nos conclusions.

Avant tout, il semble important de rappeler que par "logique" nous entendons ce qui a été testé par le prétest. Nous avons vu (cf analyse du prétest) qu'il s'agit donc surtout de la capacité à raisonner sur des propositions en langage symbolique et dans une moindre mesure (bloc EQ3 et Q), de passer d'un cadre symbolique à un cadre plus concret ou vice versa.

Ceci dit, de notre étude question par question, se dégage la tendance suivante :

-Il semble exister une corrélation entre logique et algèbre linéaire. Mais la logique serait globalement plus liée à la réussite qu'à l'échec en algèbre linéaire. Ceci est confirmé par le nombre des cases en gras plus élevé dans le bas que dans le haut du tableau.

-Cette corrélation ne semble pas toujours due à un problème logique apparent dans une question d'algèbre linéaire (cf les résultats à A1, A5, B1, B2 et C2), et le rapport entre les deux domaines peut avoir des causes plus souterraines.

-Dans les prérequis les facteurs les plus importants sont l'absence de bloc vide et les blocs EQ3 et Q. Alors que le bloc EQ1 est celui qui a le plus mauvais report, et les deux blocs d'algèbre ne semblent guère déterminant au moins pour les questions d'algèbre linéaire examinées.

-Le fait que l'absence de bloc vide soit un facteur déterminant de réussite, dans quasiment toutes les questions, tendrait à prouver que les performances en algèbre linéaire sont plus élevées quand on n'a pas de lacune (bloc vide), même si on ne possède pas tous les prérequis entièrement (bloc plein). Cela confirme un résultat analogue, mis en évidence par A. ROBERT et F. BOSCHET ([1] et [2]) lors de travaux portant sur les connaissances des étudiants de DEUG en analyse.

F - Troisième devoir surveillé - 1<sup>er</sup> Avril :

Ce troisième devoir surveillé contenant de l'algèbre linéaire a été passé par les trois groupes dans les mêmes trois heures. Il contient (dans cet ordre) deux exercices d'analyse (sur des fonctions de deux variables) et un problème d'algèbre linéaire. On trouvera en annexe F-1, le texte complet de ce devoir. Nous avons analysé 49 copies : 20 du groupe 3, 16 du groupe 4 et 13 du groupe 6.

I - Analyse a priori - Résultats quantitatifs :

Nous avons divisé chaque question, et nous avons attribué une note à chaque sous-question, et éventuellement un code correspondant à un type d'erreur ou de bonne réponse. Nos choix sont explicités dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont récapitulés dans un tableau en annexe F-2.

Le but général du problème revient au calcul de la puissance même de la matrice d'un endomorphisme ; une application au calcul de suites récurrentes, est donnée à la fin (4<sup>ème</sup> question). Ni le but, ni l'application ne sont reconnus en tant que tels dans l'énoncé. La démarche est assez classique, mais aucun enseignement explicite sur les valeurs propres espaces propres ou caractéristique n'a encore été fait à ce stade, bien que ces notions soient sous-jacentes.

Question 1

Cette première question est une question élémentaire et classique. Il s'agit d'écrire la matrice d'un endomorphisme et de son carré, alors qu'on donne son expression analytique sur la même base.

La réussite est de 100%. On notera seulement 5 cas (code RET) où les étudiants reviennent à l'expression analytique de  $\phi^2$  au lieu de calculer le carré de la matrice. C'est une façon de faire un peu plus longue, cela peut signifier un manque de connaissance du calcul matriciel. Il serait pourtant hasardeux de l'affirmer, c'est pourquoi nous n'avons pas pénalisé cette méthode.

On a attribué une note N1 sur 1 à cette question.

Question 2

Cette question est longue et comporte plusieurs tâches, aussi l'avons-nous divisée en quatre sous-questions.

2-a Détermination du rang de  $\phi^2 + id$  et  $\phi^2 - id$  (note N2a sur 2).

2-b Donner des bases  $B_1$  et  $B_2$  de  $\text{Ker}(\phi^2 + id) = W_1$  et de  $\text{Ker}(\phi^2 - id) = W_2$  (note N2b sur 1).



Il y a, a priori, deux façons d'aborder ce type de questions :

On peut commencer par regarder le rang des images des vecteurs de la base (ou des vecteurs colonnes de la matrice), on a ensuite par le théorème du rang la dimension des noyaux, il suffit donc de choisir le bon nombre de vecteurs indépendants dans chaque noyau pour en avoir une base. On peut aussi commencer par déterminer une base de chaque noyau, on a alors immédiatement le rang grâce au même théorème du rang.

Il se trouve que tous les étudiants ayant abordé la question ont choisi de commencer par la détermination du rang, comme le suggère l'énoncé.

Dans le cas présent, les rangs sont respectivement 1 et 2. Le rang 1 se repère directement, pour le rang 2 on voit assez facilement une relation de liaison  $(\phi^2 - \text{id})(e_1) + (\phi^2 - \text{id})(e_2) + (\phi^2 - \text{id})(e_3) = 0$  donc que  $\text{rg}(\phi^2 - \text{id}) \leq 2$ , pourtant même si c'est évident, il ne faut pas oublier ensuite de justifier que le rang est deux exactement. On a rencontré 16 cas (code REC) soit 33%, où cette justification n'apparaît pas. Cet "oubli" peut être jugé comme insignifiant, tellement la chose est simple, pourtant, surtout en début d'apprentissage, il nous a semblé important de le remarquer et même de le pénaliser. Aussi nous avons attribué une note de 1 (sur 2) dans ce cas-là, ainsi que dans les cinq cas où les explications sont trop laconiques (code EV).

La question est entièrement réussie dans 24 copies soit un taux de 49%. En général, le raisonnement est du genre de celui ci-dessus, mais dans 4 copies, on utilise la méthode dite de Gauss (code GAUSS).

Il reste donc deux non réponses et un cas où l'étudiant annonce un rang 3 sans explication. On peut donc dire que ce début de question est un assez bon succès.

Pour la recherche des bases des noyaux, la plupart des étudiants écrivent les équations complètes (code EOUA) éventuellement après (ou avant) avoir déduit la dimension par le théorème du rang (code EO/DIM) 17+15 cas soit 65%. Dans ce cas, en fait, la connaissance de la dimension par le théorème du rang n'est qu'un moyen de valider des résultats trouvés indépendamment, et non pas un moyen de faciliter la recherche de la base. Dans 8 cas, soit 16%, on donne la base en exhibant un nombre égal à la dimension de vecteurs indépendants (code DIM). Cette façon de faire semble marquer la meilleure compréhension des concepts de base et de dimension, cependant il y a, parfois, un manque d'arguments explicites qui rend ces réponses un peu douteuses.

Les trois "bonnes" réponses sans code n'étaient pas justifiées clairement, nous les avons notées 1, au bénéfice du doute.

Cette deuxième partie de la question a été notée de façon binaire (N2b = 0 ou 1). Il y a 4 non réponses et le taux de réussite est de 86%.

Economiquement parlant, il aurait certainement été plus rentable de commencer par la recherche du noyau et de déduire ensuite le rang. Pourtant la méthode employée par les étudiants (et suggérée par

l'énoncé), même si elle fait double emploi, permet un contrôle intéressant avec le théorème du rang. Ce contrôle est rarement explicite chez les étudiants mais on trouve souvent des traces qui laissent penser qu'il a eu lieu. Bien sûr il existe des problèmes plus complexes, où l'économie devient une nécessité, il serait donc bon que les étudiants apprennent assez rapidement à utiliser le théorème du rang dans ce sens.

2-c Montrer que  $W_1 \oplus W_2 = E$  (note N2c sur 2).

2-d Montrer que  $B_1 \cup B_2$  est une base de  $E$  (note N2d sur 1+1).

Si on regarde l'union des deux bases comme une juxtaposition de  $n$ -uplet (c'est-à-dire qu'on répète deux fois le même élément si nécessaire), ces deux questions sont identiques. Dans le premier cas, il suffit, après avoir remarqué que  $\dim W_1 + \dim W_2 = 3$ , de démontrer que l'intersection est réduite à 0. Dans le deuxième cas, il suffit de montrer l'indépendance des trois vecteurs de  $B_1 \cup B_2$ . Il est ici certainement plus simple, "techniquement parlant", de commencer par 2-d, puis d'en déduire 2-c. Pourtant encore une fois, l'énoncé induit implicitement l'autre ordre.

En fait, à part 7 cas (dont 6 déduisent 2-c de 2-d, le septième ne répondant pas à 2-c), tous les étudiants ont effectivement traité ces 2 questions dans l'ordre de l'énoncé.

Dans la note N2d nous avons ajouté un point à ceux qui repèrent l'identité des deux questions et n'en démontrent qu'une, déduisant l'autre. Dans ce cas nous avons codé DED dans la colonne C2c quand la supplémentarité est déduite de la base (6 cas) et dans la colonne C2d si c'est l'inverse (8 cas).

Pour la question 2-c, nous avons attribué une note de 2 à ceux utilisant un argument de dimension et démontrant correctement que l'intersection est réduite à 0, aux six déduisant cette question de 2-d, ainsi qu'à un étudiant ayant raisonné entièrement de façon géométrique. Ce dernier remarque directement que  $W_1$  est un plan et  $W_2$  une droite qui lui est sécante donc qu'ils sont supplémentaires (code GEOM). Cela fait au total 17 notes 2, soit un taux de réussite de 35%.

Nous avons attribué une note de 1 :

- Aux réponses où l'argument sur la dimension est correct, mais la démonstration relative à l'intersection est fautive ou inexistante (code INT : 10 cas). Dans 6 de ces copies, nous avons retrouvé la même démonstration, elle consiste à faire le produit des deux matrices de  $\phi^2 + \text{id}$  et  $\phi^2 - \text{id}$ , à trouver la matrice nulle et en déduire que l'intersection des noyaux est réduite à 0. Ceci est bien sûr inexact, le produit de deux endomorphismes nul signifie que le noyau du deuxième contient l'image

du premier (cf "vrai/faux"), mais n'induit rien sur les deux noyaux. Un contre-exemple simple consiste à prendre pour deuxième endomorphisme, l'endomorphisme nul, le premier ne l'étant pas, tout en ayant un noyau non réduit à 0. Cette fausse démonstration doit être le fruit d'une analogie douteuse avec un exercice déjà traité en TD, mais nous nous contenterons de la signaler faute de pouvoir en faire une meilleure interprétation.

- Aux réponses où, au contraire, le problème de l'intersection est bien analysé, mais où l'argument sur la dimension est fallacieux (code DIM : 9 cas). Typiquement dans ce cas on déduit de  $\dim W_1 + \dim W_2 = 3$ , que  $W_1 + W_2 = E$  puis de  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ , que la somme est directe. Ce passage est délicat et suivant l'ordre dans lequel on dit les choses ce peut être vrai ou faux, en particulier un certain laconisme peut éviter des erreurs. Pourtant quand l'implication entre  $\dim W_1 + \dim W_2 = 3$  et  $W_1 + W_2 = E$  est clairement explicitée avant d'avoir regardé l'intersection, il est à peu près certain que les notions de somme et de somme directe ne sont pas comprises dans tout leur sens.

- Aux réponses où, le problème de l'intersection est bien traité mais, où cette fois au lieu d'utiliser un argument de dimension, on revient à la démonstration directe de  $W_1 + W_2 = E$  (code SOM : 5 cas). Ceci n'est pas inexact, mais c'est beaucoup plus lourd et plein de pièges, aussi nous a-t-il semblé juste de le sanctionner comme un manque de connaissance de techniques plus simples mais aussi conceptuellement plus fines.

Il y a enfin 3 réponses entièrement fausses et 7 non réponses.

Pour la question 2-d, nous avons mis une note binaire (0/1) (augmentée de 1 si elle est déduite de la précédent ou vice versa). Cette question est en général réussie du moment qu'elle est abordée ; on ne compte que 3 échecs, 9 non réponses et donc 37 bonnes réponses soit un taux de réussite de 76%.

Signalons enfin un cas particulier. Un étudiant (6K) répond à la question 2 ainsi : il donne le rang de chacun des endomorphismes (en oubliant la réciproque), en déduit la dimension du noyau, puis exhibe une base de  $E$ , qu'il partitionne en l'union d'une base de  $\text{Im}(\phi^2 + \text{id})$  et d'une base de  $\text{Im}(\phi^2 - \text{id})$ , il montre ainsi (sans le dire explicitement) que ces deux images sont supplémentaires. Alors en utilisant, semble-t-il une généralisation abusive du théorème du rang (sous sa forme complète qui dit que tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image), il conclut que la base de  $\text{Im}(\phi^2 - \text{id})$  est aussi une base de  $\text{Ker}(\phi^2 + \text{id})$  et de même avec  $\text{Im}(\phi^2 + \text{id})$  et  $\text{Ker}(\phi^2 - \text{id})$ . Il achève la question, en montrant clairement qu'il a compris la similitude entre les questions 2-c et 2-d.

Cette réponse est un cas particulier, l'erreur commise, même si elle est importante, semble déjà contenir des indices d'une maturation plus avancée que dans les autres réponses, du concept de supplémentaire. Nous avons néanmoins appliqué notre grille d'analyse et d'évaluation

même dans ce cas, si bien que cet étudiant a un code REC et une note de 1 pour 2-a, une note de 0 pour 2-b et deux notes de 2 pour 2-c et 2-d avec un code DED en en 2-d.

Finalement cette question qui peut paraître simple au premier abord, permet sur une trame assez élémentaire de raccrocher plusieurs concepts que l'on peut aborder différemment, surtout grâce au théorème du rang. Ce dernier est un résultat très condensé, mais très riche en information si bien que son utilisation peut présenter des degrés qu'il nous a semblé intéressant de repérer.

Globalement la réussite des étudiants est assez bonne, puisque si on additionne les 4 notes, on obtient une moyenne de 4,5 sur 7. Néanmoins on peut reprocher un certain manque d'unité dans les réponses d'un même étudiant ; en effet seulement 7 étudiants utilisent 2-a pour simplifier 2-b (code DIM) (aucun ne fait l'inverse) et 14 s'évitent 2 démonstrations en 2-c et 2-d, de plus un seul étudiant a utilisé ces deux simplifications. Ceci semble dénoter un manque de recul par rapport à la tâche à accomplir. Est-ce cependant une exigence que l'on peut avoir à l'égard de débutants ?

### Question 3

Nous avons également découpé cette question en 3 parties :

3-a Ecrire la matrice de  $\phi^2$  dans la nouvelle base (note N3a sur 2).

3-b Ecrire la relation entre les deux matrices (note N3b sur 1).

3-c calcul de  $A^n$  (note N3c sur 1).

C'est dans cette question que l'on recueille les fruits des questions précédentes. 3-a est une question simple, puisque la nouvelle base est formée de vecteurs des noyaux de  $\phi^2 + \text{id}$  et  $\phi^2 - \text{id}$ . Ecrire la matrice  $N$  de  $\phi^2$  dans cette base, n'est plus qu'une formalité. Il est alors facile de voir que le carré de  $N$  donc de  $\phi^2$ , c'est-à-dire  $\phi^4$  est l'identité. On sait alors que  $A^4$  est aussi la matrice identité et donc que  $A^n$  ne prend que 4 valeurs suivant la congruence de  $n$  modulo 4.

Toute la démarche du problème était implicitement axée sur ce "dénouement", or l'immense majorité des étudiants, ayant traité la question, n'a pas vu la simplicité du début en liaison avec ce qui précédait, ils ont "sauté" sur le changement de base (et certainement reproduit un mécanisme bien appris), et a donc écrit d'emblée, la matrice de passage, cherché son inverse (en résolvant un système de 9 équations à 9 inconnues) écrit (numériquement) la relation demandée en 3-b et enfin déduit (parfois avec une erreur de calcul) la nouvelle matrice

Ce comportement se retrouve dans 25 copies (code PASS). Nous avons alors mis une note N3a de 0.

Il y a par ailleurs 9 non réponses à 3-a.

Dans 4 copies, la matrice est donnée directement mais avec la base

canonique au départ au lieu de la base  $B_1, B_2$  (code DEP) ; dans une autre copie c'est à l'arrivée que l'on trouve la base canonique (code ARR).

Ces deux types d'erreurs sont bien sûr sanctionnés d'une note N3a nulle, ainsi que 3 autres cas dus à des erreurs cumulées.

Dans 4 copies, la matrice est donnée sans écrire le changement de base, avec la bonne base  $B_1, B_2$  au départ et à l'arrivée, mais en repreneant les calculs laborieux des  $\phi^2(e_j)$ , comme si les vecteurs de la base étaient quelconques (code LONG) ! (note N3a=1).

Il reste enfin 3 copies auxquelles nous avons attribué une note N3a de 2, dans ces trois cas on reconnaît immédiatement le caractère immédiat de la tâche grâce aux questions précédentes.

Pour la question 3-b, nous avons mis une note N3b de 1 si la formule de changement de base est bien écrite. Dans le cas où la matrice de passage et son inverse sont données explicitement nous avons diminué la note de 0,5, pour une erreur de calcul trop grossière (code CAL : 2 cas).

De même pour la question 3-c, nous avons mis une note binaire, avec éventuellement un 0,5 en cas d'erreur de calcul (code CAL : 3 cas). Dans la colonne C3c nous avons également repéré par le code DIR (10 cas), ceux qui trouvent la valeur de  $A^n$  en calculant directement  $A^3$  et  $A^4$  sans utiliser 3-b.

Encore plus qu'avec la précédente, on peut mesurer avec cette question le manque de recul des étudiants par rapport à leur activité. L'aspect calculatoire l'emporte sur le contrôle du sens dans la démarche induite par l'énoncé, les étudiants suivent pas à pas les instructions et exécutent des tâches ponctuelles précises, souvent bien, mais ils perdent, jusqu'à l'absurde, le sens de ce qu'on leur demande de faire.

#### Question 4

Dans cette question, il s'agit de voir que le triplet  $(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$  est l'image par A du triplet  $(u_n, v_n, w_n)$ . La suite est une question de formulation.

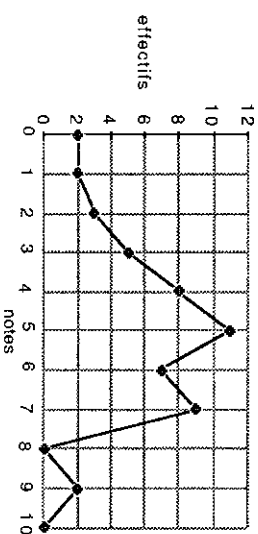
De tels exemples, classiques du reste, avaient été vus en TD auparavant si bien que le principal intérêt de la question est de rappeler aux étudiants une application du calcul de la puissance même d'un endomorphisme. Pour cette raison et parce que c'est la dernière question (à laquelle une non réponse n'est pas toujours significative à cause du facteur temps), nous avons choisi de ne pas tenir compte du 4) dans notre analyse.

## II - Attribution d'une note

La question 1 ayant été réussie par tous, il n'était pas utile de la faire intervenir dans la note, de même il nous a semblé que N2b n'était pas très significative, ayant été pratiquement systématiquement réussie par ceux ayant abordé la question. En additionnant les 6 notes restantes, on obtient la note N sur 10 suivante :  $N=N2a+N2c+N2d+N3a+N3b+N3e$  (nous avons arrondi le total au demi point supérieur).

Le tableau ci-dessous donne la répartition des notes ainsi obtenues.

Tableau de répartition des notes au DS n°3.



La moyenne globale est de 4,8 avec un écart-type de 2,1.

Etant donné que l'on a enlevé deux questions faciles du barème, on peut considérer que c'est plutôt bon.

La répartition n'est pas très homogène. Il y a un gros pic sur 5, avec une montée progressive depuis 0, mais avec par contre, une chute brutale après 7.

On peut avancer l'hypothèse que le manque de cohésion dans les réponses et les calculs dispersés, manquant de sens par rapport au contexte général du problème, sont une cause du manque de très bonnes notes, malgré une réussite globale assez bonne. Le barème que nous avons adopté accentue encore cet effet. Il est aussi important de souligner que cette attitude peut aussi être conditionnée par le fait qu'il s'agit d'un devoir surveillé où le temps est un facteur contraignant qui peut gêner la prise de recul et exagérer le parti pris systématique de "la fin justifie les moyens". Ceci est d'ailleurs une remarque très générale qui peut s'appliquer à toutes nos analyses.

Nous avons distingué 3 tranches de notes :

-  $N \leq 3$  : 12 étudiants soit 24%.

-  $4 \leq N \leq 5$  : 19 étudiants soit 39%.

-  $N \geq 6$  : 18 étudiants soit 37%.

On obtient ainsi trois groupes, numériquement assez bien équilibrés, qui rendent compte de trois niveaux de réussite à ce devoir.

### III - Comparaison par groupes

Regardons tout d'abord si notre nouvel échantillon présente des différences significatives, par groupe, pour les résultats au prétest.

La nouvelle moyenne au prétest est de 13,5 avec un écart-type de 2,97, contre 13,2 et 3,02. Donc globalement c'est assez identique.

Dans le tableau ci-dessous nous donnons, par groupe, l'effectif, la moyenne et l'écart-type au prétest et au devoir surveillé n°3, ainsi que la répartition dans les trois tranches pour ce dernier devoir.

N° GR	PRETEST		TROISIEME DEVOIR SURVEILLE					
	EFF	MOY	ECAR	MOY	ECAR	N≤3	4≤N≤5	N≥6
3	20	13,40	2,72	4,70	1,81	5	8	7
4	16	13,31	2,85	3,88	2,13	5	8	3
6	13	13,92	3,62	5,92	2,02	2	3	8

Les moyennes au prétest sont dans chaque groupe, légèrement supérieures, avec le nouvel échantillon, surtout pour les groupes 3 et 4. Les remarques sur l'hétérogénéité sont à reconsidérées, en effet si le groupe 3 est toujours le plus homogène, par contre le groupe 6 a un écart-type nettement plus important alors que le groupe 4 en a un plus réduit.

Pour le devoir n°3, on retrouve le même ordre dans les moyennes, c'est-à-dire 6-3-4 dans l'ordre décroissant. Pourtant cet ordre est ici plus net puisqu'il y a chaque fois environ 1 point d'écart entre les moyennes, ce qui sur 10 commence à être significatif. Les écart-types sont tous assez voisins, et nous donnent donc pas de renseignements, si ce n'est une tendance à l'uniformisation dans l'hétérogénéité dans tous les groupes. Pourtant la répartition en tranche montre qu'entre les groupes 3 et 4 c'est le nombre de gens en dessus de 6, qui fait la différence, alors que pour le groupe 6 la répartition est globalement plus vers le haut. Il semblerait donc que le groupe 3 réussisse mieux par la percée de quelques étudiants, et que le groupe 6 confirme son avance par progression uniforme.

### IV - Corrélation avec le prétest

Avant la corrélation, regardons si le nouvel échantillon comporte des différences significatives. Le tableau qui suit donne, en regard, pour la population du prétest (1er éch) et pour l'échantillon des 49 étudiants du DSn°3 (2ème éch), les caractéristiques au prétest.

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2
1er éch	84	13,2	63%	15%	17%	36%	33%	75%	56%	38%	63%	82%
2ème éch	49	13,5	55%	20%	18%	37%	35%	82%	61%	39%	66%	86%

( les pourcentages sont calculés sur la ligne)

A part peut-être, la différence pour les blocs EQ1 et EQ3 pleins, les deux échantillons ne présentent que des différences infimes. On peut dire ici encore, que l'hypothèse sur l'invariance des résultats quand on prend au hasard la moitié des effectifs d'un échantillon est confirmée.

Nous donnons maintenant sur le modèle de ce qui a été fait pour les DS n°1 et 2 et le partiel, deux versions du tableau croisé des résultats prétest/DSn°3 :

Tableau croisé n°1 : prétest/DS n°3

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2
TOTAL	49	13,5	55%	20%	18%	37%	35%	82%	61%	39%	66%	86%
MOY	4,8	5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	12	12,3	33%	8%	33%	17%	42%	83%	58%	25%	42%	67%
4≤N≤5	19	13,3	68%	11%	11%	32%	37%	89%	47%	37%	68%	95%
N≥6	18	14,6	56%	39%	17%	56%	27%	72%	78%	50%	78%	89%

(Les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2 : prétest/DS n°3

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS	B=0	B≤1	B≤2
TOTAL	49	13,5	27	10	9	18	17	40	30	19	32	42
MOY	4,8	5,1	6,1	3,8	5,6	4,4	4,7	4,9	5,4	5,3	5	3,1
N≤3	24	12,3	15%	10%	14%	11%	30%	25%	23%	16%	16%	57%
4≤N≤5	39	13,3	48%	21%	23%	34%	41%	42%	30%	37%	40%	43%
N≥6	37	14,6	37%	70%	34%	56%	29%	32%	47%	47%	44%	38%

(Les pourcentages sont calculés sur la colonne)

Ces tableaux semblent attester une assez bonne corrélation entre le prétest de logique et le troisième devoir, encore plus nettement peut-être qu'avec le premier. Encore une fois peu de blocs vides (0 ou 1) est un très bon critère de réussite. Les blocs d'algèbre (AN et AS) ne semblent pas ou très peu corrélés avec ce devoir.

La corrélation a lieu aussi bien dans le sens de la réussite que dans celui de l'échec. Cependant il est intéressant de constater quelques phénomènes dans les deux tranches 4≤N≤5 et N≥6. En effet dans les colonnes EQ1(2), EQ3(0) et B≤2, les résultats sont dans l'ordre inverse de ce qu'ils devraient être dans le cas d'une corrélation absolue. Le même effet se produit entre les deux tranches 4≤N≤5 et N≤3, pour la colonne Q(0). Ces quelques interventions semblent montrer que s'il y a globalement une corrélation assez forte, c'est une tendance qui souffre quelques nuances et n'a pas un côté systématique.

Pourtant certaines données sont significatives, par exemple 47% des étudiants n'ayant aucun bloc vide (aucune complète) en logique ont plus de 6 à ce devoir, alors que 57% de ceux ayant au moins trois blocs vides et 41% de ceux en ayant deux ou plus ont une note inférieure ou égale à 3.

Il semble donc bien que l'acquisition ou non de prérequis de logique soit un facteur assez déterminant dans la réussite en algèbre linéaire, au moins pour les prérequis testés par le prétest et pour les travaux d'algèbre linéaire de ce devoir, que l'on peut caractériser comme des tâches classiques de débutants sur les questions de noyau, rang et écriture matricielle des endomorphismes.

#### G - Quatrième devoir surveillé - 20 Mai.

Ce quatrième devoir surveillé contenant de l'algèbre linéaire, a été passé par les trois groupes pendant les mêmes trois heures. Il contient, dans cet ordre, un problème d'analyse (sur la résolution d'une équation différentielle) et deux exercices d'algèbre linéaire. On en trouvera, en annexe G-1, le texte complet, ainsi qu'un corrigé.

Nous avons analysé 50 copies, 19 du groupe 3, 20 du groupe 4 et 11 du groupe 6.

#### **I - Analyse a priori - Résultats quantitatifs :**

A chaque question, ou sous-question, nous avons attribué une note et éventuellement des codes correspondants à certains types d'erreurs ou de bonnes réponses. Nos choix sont explicités dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont regroupés dans un tableau que l'on trouvera en annexe G-2.

##### Premier exercice :

Ce premier exercice consiste en la résolution d'un système de trois équations linéaires à trois inconnues, dépendant d'un paramètre.

Au moment de ce devoir les étudiants venaient de voir la méthode de résolution par les déterminants dite de Cramer. Or dans le cas proposé, elle est certainement l'outil le plus adapté à la situation, car le système est carré de faible dimension (3x3) et de plus, le paramètre  $m$  intervient dans beaucoup de coefficients, ce qui rend la discussion de cas pénible si l'on fait une résolution avec la technique du pivot.

Il y a eu 4 non réponses à cette question.

Un seul étudiant a essayé d'appliquer directement la méthode du pivot de Gauss et abandonne (code GAUSS). Nous lui avons mis une note nulle.

Tous les autres appliquent la méthode de Cramer.

Il doit y avoir alors trois étapes :

-I-1 Calcul du déterminant général du système et recherche de ses racines (en  $m$ ). On trouve :  $D = -4(m-1)^2(m+2)$ .

-I-2 Dans les cas où ce déterminant n'est pas nul, calcul explicite de la solution unique, c'est-à-dire des trois déterminants associés.

-I-3 Pour les deux valeurs de  $m$  qui annulent le déterminant, résolution du système. Dans le cas  $m=1$ , on trouve une droite et dans le cas  $m=-2$ , il n'y a pas de solution.

Nous avons attribué une note sur 1 et des codes pour chacune des trois étapes séparément.

Etape I-1

Il y a 76% de réussite (sur les 45 réponses effectives).

Les mauvaises réponses sont soit dues à une erreur sur le signe du déterminant (code SGN : 6 cas), soit à une erreur sur le coefficient de  $(m-1)^2(m+2)$  (code COEF : 3 cas). Nous avons mis une note de 0,5 à ces erreurs qui nous ont semblé assez bénignes ; par contre, il y a deux cas d'erreurs de calcul plus importantes (code CAL), auxquels nous avons attribué une note nulle.

Etape I-2

Cette étape est beaucoup moins bien traitée. En fait la longueur des calculs à effectuer semble avoir rebuté la plupart des étudiants.

5 étudiants, bien qu'ils aient calculé le déterminant principal, étudient entièrement ce calcul et n'écrivent même pas les formules donnant les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

Un étudiant (code \*), après avoir calculé correctement le déterminant, revient à une résolution par la méthode du pivot et se perd dans des calculs méandriques.

24 étudiants écrivent correctement les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$  de façon formelle en fonction des déterminants non développés, sans essayer de les calculer (code FORM). Ceci confirme ce que nous disions plus haut, à propos du découragement des étudiants face aux calculs. Certains disent même qu'ils laissent momentanément les calculs et les traiteront à la fin, s'il leur reste du temps. C'est d'ailleurs une assez bonne stratégie dans une épreuve en temps limité. Pourtant, ces formules étant une recopie directe du cours, nous n'avons attribué aucun point à ce type de réponse.

8 étudiants donnent correctement, une ou deux valeurs de  $x$ ,  $y$  ou  $z$  et ensuite abandonnent (code INC). A ces cas nous avons attribué une note NI2 de 0,5.

Il y a 5 copies, où l'on trouve des erreurs de calcul (code CAL), dans ces cas, la note attribuée dépend de la gravité de la ou des erreurs rencontrée(s) et de la tâche accomplie par ailleurs.

Dans une de ces copies, nous avons même mis la note 1 (c'est d'ailleurs le seul cas où NI2=1), car les trois calculs sont entièrement faits et seul celui sur  $y$  comporte une erreur de calcul.

Etape I-3

La discussion des cas où le système n'est pas de Cramer peut se faire en traitant les deux cas par la méthode du pivot ou bien en utilisant des résultats plus théoriques sur les déterminants caractéristiques et les inconnues principales et secondaires.

Quand le nombre de cas particuliers et la dimension du système sont faibles, comme c'est le cas ici, il est sûrement plus simple de résoudre chaque système par la méthode du pivot. La deuxième méthode est surtout un outil théorique et n'est guère efficace (voire indispensable) que dans le cas d'un nombre indéfini de variables et d'équations. Nous avons mis le code D, dans les 4 cas où les étudiants ont employé cette dernière méthode, deux fois avec succès et deux fois en se trompant pour le cas  $m=1$  (code D/m=1).

Au total, il y a 13 non réponses à cette étape.

Dans 3 cas, les erreurs commises auparavant, superposées à celles commises ici ne permettent pas de mettre de point à la question.

Il y a 12 copies où le cas  $m=1$ , présente une erreur (code  $m=1$ ). Nous avons alors mis une note NI3 de 0,5, quel que soit le type d'erreur commise, considérant que la simplicité de la tâche n'autorisait aucune bévue.

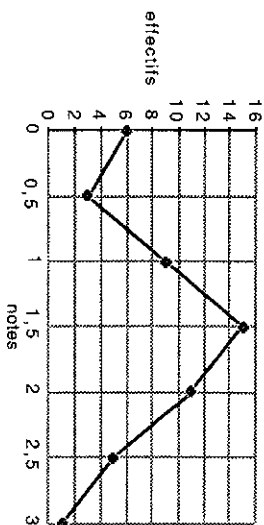
Quand il est traité, le cas  $m=-2$  l'est toujours correctement.

Il y a enfin 20 réponses entièrement bonnes, soit un taux de réussite absolue de 40%. Dans ces cas nous avons mis le code EXT, quand l'ensemble des solutions pour  $m=1$  est donné en extension de la forme  $S=\{(1/4, z-1/4, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$  (4 cas) et le code DRT, quand il est dit que ce même ensemble est une droite de  $\mathbb{R}^3$  (3 cas).

Globalement, on peut dire que cette question est assez réussie. Le calcul du déterminant principal et l'écriture de la solution unique dans le cas d'un système de Cramer sont deux points très majoritairement acquis. Mais les calculs explicites de déterminants un peu complexes, sont boudés et sujets à de nombreuses erreurs de calculs. On peut voir ici une trace du mépris à l'égard du calcul algébrique, mais ce peut être aussi l'effet d'une stratégie en temps limité, qui consiste à garder pour la fin (si on a le temps) les calculs longs et peu payants. De plus la résolution des deux cas particuliers par la méthode du pivot est loin d'être encore sans faille, puisque 45% des étudiants ayant abordé ce point en utilisant la méthode du pivot (33 au total) commettent une erreur dans le cas  $m=1$ . Finalement si l'aspect théorique de la résolution est compris, c'est le calcul explicite et le traitement des cas particuliers qui sont les moins bien réussis, ce qui est gênant quand on pense à l'utilité pratique que revêt (même en mathématiques) l'obtention explicite des solutions.

Nous avons attribué une note globale N1 sur 3, à l'exercice en additionnant les trois notes partielles. On obtient une moyenne de 1,41 et la répartition suivante :

Répartition des notes au 1<sup>er</sup> exercice du DS n°4



C'est une répartition assez régulière. Les 6 étudiants ayant obtenu 0 créent une certaine inertie qui explique entre autres la moyenne un peu basse. Si on enlève les 3 copies blanches on a une répartition encore mieux équilibrée. La barre de 1,5 représente bien la limite entre ceux qui connaissent plus ou moins la démarche de résolution et ceux qui sont capables de l'appliquer en pratique, en faisant un minimum de calculs sans erreur.

#### Deuxième exercice

Cet exercice porte sur l'étude d'un endomorphisme  $u$  de l'espace  $E$  des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Les questions sont classiques, assez élémentaires et très progressives dans la difficulté.

L'endomorphisme est donné de façon analytique, c'est-à-dire que l'image d'un polynôme à coefficients indéfinis est explicitée sur la base canonique  $(1, X, X^2)$ .

C'est donc typiquement une application directe du cours dans un cadre légèrement plus complexe que celui de la géométrie. Beaucoup d'étudiants ne s'y sont d'ailleurs pas trompés, et confondent le polynôme et ses coordonnées sur la base canonique, ce qui revient à travailler dans  $\mathbb{R}^3$ . Bien que cette confusion ne soit jamais explicitée et rendue licite, nous n'en avons pas tenu compte dans nos analyses, car elle nous semble être une étape de formulation nécessaire pour des débutants.

#### Question 1

On demande le noyau et l'image de  $u$ .

Un calcul très simple (résolution d'un système  $3 \times 3$ ) montre que le noyau est réduit à  $\{0\}$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème du rang pour en déduire que  $\text{Im}(u)=E$ .

A part deux étudiants n'ayant pas traité la question, tous ont trouvé que  $\text{Ker}(u)=\{0\}$  en résolvant le système  $3 \times 3$  soit par la méthode du pivot

soit par la méthode de Cramer (code DET : 3 cas). Dans le cas d'un système homogène, la méthode de Cramer est particulièrement efficace. Ici on déduit que le rang est 3, donc que  $u$  est bijectif si bien qu'il n'y a qu'un déterminant à calculer.

Par contre 21 étudiants, soit 44% de ceux ayant répondu, ne donnent pas l'image correcte. Les réponses entièrement exactes bénéficient d'une note de 1,5.

Dans 3 cas, l'image n'est pas donnée correctement, pourtant on dit que le rang est trois ! (code RANG). On pourrait croire que c'est juste un oubli, pourtant dans un de ces cas, l'étudiant donne une base explicite de l'image formée de 3 polynômes, or il est clair qu'il n'a pas saisi que  $\text{Im}(u)$  est en fait tout  $E$ . Il est toutefois délicat de dire, dans ces cas, si les notions de dimension et de rang sont vraiment mal comprises et jusqu'à quel point, sur une erreur aussi ponctuelle, qui peut n'être qu'une étourderie. Nous avons mis une note N1 de 1 dans ces 3 cas.

Dans 5 cas la réponse est :  $\text{Im}(u)=E/\{0\}$  (code COMP). Ceci semble être dû à une confusion entre supplémentaire et complémentaire, associée à l'idée plus ou moins explicitée que le noyau et l'image sont supplémentaires, ce qui est une fausse version classique du théorème du rang. Ce type d'erreur est le signe d'une incompréhension des notions de rang et de supplémentaire. On peut même dire que la notion de sous-espace vectoriel est en jeu, puisque  $E/\{0\}$  n'en est évidemment pas un.

Nous avons mis une note N1 de 0,5 (pour le noyau) dans ces cas, ainsi que dans les 13 autres cas où l'image de  $u$  n'est pas donnée ou est inexacte.

Il est assez surprenant de voir qu'une application aussi simple du théorème du rang ne soit pas mieux réussie. Il semblerait que dans les 13 cas de fausses ou non réponses sans code, beaucoup n'aient même pas envisagé ce théorème comme le bon outil de résolution et aient buté sur une résolution directe, dont on sait qu'elle pose des problèmes techniques. Donc plus que la méconnaissance du théorème du rang, c'est la méconnaissance de certains domaines de son application qui semble en jeu ici.

#### Question 2

Cette question est ultra classique et dans le cas présent très simple. Il suffit de traduire l'écriture analytique en terme de coordonnées sur la base canonique de  $E$ .

De fait, tous les étudiants ont répondu, et il n'y a qu'un seul échec. C'est un étudiant qui a gardé les coefficients  $a_i$  du polynôme dans l'écriture de la matrice.

Nous avons mis une note N2 binaire (0/1).

### Question 3

Cette question est aussi classique et simple, mais elle porte sur des notions un peu plus élaborées : valeurs et vecteurs propres.

Nous avons divisé la question en :

- 3-a Recherche des valeurs propres.
- 3-b Recherche des vecteurs propres associés.

3-a revient à un calcul de déterminant  $3 \times 3$  et à une mise en facteur dans un polynôme de degré 3. C'est donc une tâche simple.

Il n'y a qu'une seule non réponse.

Nous avons relevé 6 erreurs de signe (code SGN), dont deux seulement sont en correspondance avec une erreur de signe en 1-1. Nous n'avons pas pénalisé cette erreur au niveau de la note et mis  $N3a=1$ .

Un étudiant n'a pas factorisé le déterminant et n'obtient donc pas les valeurs propres (code FACT), nous lui avons mis une note de 0,5.

Un étudiant fait une erreur de calcul, autre que le seul signe, et trouve d'autres valeurs propres. Nous lui avons mis une note nulle.

Tous les autres ont tout juste.

En comptant les erreurs de signe, le taux de réussite est donc de 96%.

En 3a on trouve que 2 est une valeur propre simple et 4, une valeur propre double. En 3b, il s'avère que les deux espaces de vecteurs propres sont des droites, donc que  $u$  n'est pas diagonalisable.

Pour trouver ces vecteurs propres, il faut résoudre chaque fois, un système  $3 \times 3$ . La réponse peut être formulée sous la forme d'un ensemble donné en extension, d'équations indépendantes (ici 2) ou de la donnée d'une base de l'espace propre. Le plus utile pour la suite, c'est la donnée d'une base et en pratique, c'est ce que l'on cherche toujours directement. Mais certains étudiants ayant enregistré ce mécanisme, en ont perdu un peu le sens, si bien qu'ils disent donner l'ensemble alors qu'en fait ils en donnent une base.

Faut-il en conclure que ces étudiants croient vraiment qu'il n'y a qu'un ou deux vecteurs propres, ou est-ce seulement une maladresse de langage ? Considérant la fréquence de telles ambiguïtés, l'absence d'incidences vérifiables sur la suite du problème et l'hypothèse que ce type de réponse est induit par une pratique de classe mal explicitée, nous avons choisi de ne pas tenir compte de ces lapsus dans nos analyses.

Il y a 8 non réponses à cette question.

Sur les 42 réponses effectives, il y en a 29, soit 69% d'entièrement exactes. Signalons le cas d'un étudiant qui au lieu de calculer le polynôme caractéristique directement, calcule la trace et le déterminant de la matrice (code TR/D).

Nous avons relevé 6 cas d'erreur de calcul dans la résolution de l'un des systèmes (code CAL), ce qui fait baissé la note de 0,5. Ces erreurs ne mettent toutefois pas en cause la compréhension de la notion de vecteur propre

Dans 3 copies, par contre, après une résolution correcte du système pour  $\lambda=4$ , les étudiants donnent une base de l'espace propre associé contenant deux vecteurs (code 2VP). Ceci semble montrer que ces étudiants n'ont pas compris la distinction entre l'ordre et le rang d'une valeur propre. Ici 4 est une valeur propre double, ils donnent donc deux vecteurs propres, et même s'il est assez évident qu'ils sont liés (certains donnent même le vecteur nul!), ils annoncent que c'est une base de l'espace propre. On retrouve ici un comportement incohérent, induit par la règle : "la fin justifie les moyens". Il n'est pas du tout évident que ces étudiants n'aient pas bien compris la notion de dépendance linéaire, mais dans un contexte où ils sont poussés par une contrainte forte (ici la croyance que l'ordre de la valeur propre égale la dimension de l'espace propre), ils perdent leur moyen de contrôle et sont amenés à dire n'importe quoi pour coller à ce qu'ils croient être vrai par tous les moyens.

Nous avons diminué la note de 0,5 dans ces cas.

Au total il y a 10 notes de 0,5 et un 0 (CAL et 2VP cumulés), hormis les non réponses.

Comme en 1, c'est plus le côté calculatoire que l'aspect théorique qui est source d'échec ici. Pourtant encore une fois, la résolution explicite de la question est primordiale pour permettre de trouver la matrice de passage (non demandée dans le problème) donnant la forme triangulaire de la question 4, elle a donc une utilité pratique indéniable.

### Question 4

Cette question est plus technique. La triangulation des matrices par la méthode dite de Jordan n'était pas, pour les étudiants considérés, un objet d'enseignement explicite, mais elle avait été illustrée en TD sur un ou deux exemples explicites avant le devoir.

Cette dernière question est avant tout sujette aux abandons, puisque 33 étudiants, soit près des deux tiers, n'y répondent pas.

6 seulement y répondent correctement et bénéficient d'une note N4 de 1.

Nous avons mis une note de 0,5 à 2 étudiants ayant utilisé une méthode correcte mais ayant fait une erreur de calcul (code CAL) ainsi qu'à un étudiant ayant écrit une matrice de passage avec 3 indéterminées sur la dernière colonne (il a reconnu que les deux premières correspondent aux vecteurs propres), puis qui résout un système  $3 \times 3$  avec une erreur de calcul (code PASS).



Un autre étudiant a commencé cette méthode mais s'arrête immédiatement (code PASS). Nous lui avons mis 0.

Deux étudiants s'étant trompés en 3, trouvent que la matrice est diagonalisable (code DIAG). Nous leur avons mis 0.

L'échec relatif à cette question est difficile à interpréter étant donné que c'est la dernière question. Cependant le taux d'abandon est tel, comparé à celui des questions précédentes, qu'il semble bien que le manque de temps ne puisse pas, seul, tout justifier.

## II - Attribution d'une note.

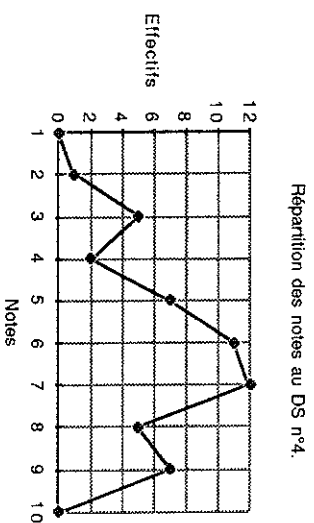
En essayant de tenir compte de l'importance relative de chaque question, nous avons attribué la note globale suivante sur 10 :

$$N = N1 + 2N1 + N3a + 2N3b + N4, \text{ arrondie à l'unité supérieure.}$$

Nous n'avons pas tenu compte de la question 2, parce qu'elle a été réussie par tous les étudiants sauf un. Le premier exercice mis à part, les questions 1 et 3b nous ont semblé le plus refléter les différences de niveaux, ce qui justifie leur plus fort coefficient.

On obtient ainsi une moyenne de 6,26 avec un écart-type de 1,85. Ce qui représente donc une bonne moyenne avec toutefois une assez grande dispersion.

Le graphique suivant donne la répartition de ces notes :



On peut distinguer les trois grandes tranches suivantes :

- $N \leq 5$  : 15 étudiants. Il semble que ces étudiants aient des difficultés assez importantes dans ces exercices simples un peu calculatoires de début d'algèbre linéaire.
- $6 \leq N \leq 7$  : 23 étudiants. Ceux-ci semblent être un peu plus à l'aise sans toujours maîtriser les concepts en jeu entièrement, et ont encore des difficultés avec les calculs.
- $N \geq 8$  : 12 étudiants. Ces étudiants semblent bien maîtriser les calculs et avoir une bonne connaissance des concepts en jeu.

## III - Comparaison par groupes

Avec le nouvel échantillon, nous obtenons pour le prétest une moyenne de 13 et un écart-type de 2,72, contre 13,2 de moyenne et un écart-type de 3,02 avec l'échantillon initial. Ceci s'explique par le peu d'étudiants du groupe 6 dans le nouvel échantillon, alors que ce groupe est le plus "fort" et assez hétérogène pour les résultats du prétest.

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons pour les 50 copies analysées, la moyenne et l'écart-type par groupe pour le prétest et pour le DS n°4, ainsi que pour ce DS, la répartition par tranches de notes.

N°GR	PRETEST			DEVOIR SURVEILLE N°4				
	EFF	MOY	ECAR	MOY	ECAR	N ≤ 5	6 ≤ N ≤ 7	N ≥ 8
3	19	1,3	2,5	6	2,1	8	6	5
4	20	12,9	2,8	6,3	1,9	5	11	4
6	11	13,1	3,1	6,5	1,1	2	6	3

La suprématie du groupe 6 au prétest n'est plus évidente avec le nouvel échantillon de même que la plus grande hétérogénéité du groupe 4. Par contre les autres caractéristiques restent identiques malgré la diminution de l'échantillon.

Pour le DS n°4 les moyennes des 3 groupes sont encore à peu près identiques, avec une légère avance du groupe 6, par contre les groupes 3 et 4 ont inversé leurs performances. Les écart-types sont assez élevés pour les groupes 3 et 4 et plus faibles pour le groupe 6 ce qui est une inversion totale par rapport au prétest, surtout pour les groupes 3 et 6.

Dans les groupes 4 et 6, il y a un fort noyau d'étudiants qui se trouvent dans la tranche de notes médiane, mais proportionnellement il y en a plus dans la tranche inférieure pour le groupe 4, que pour le 6 et vice versa pour la tranche supérieure. Le groupe 3 est, quant à lui, assez équitablement réparti sur les 3 tranches avec une certaine tendance vers le bas.

L'évolution des groupes pour ce DS est assez surprenante, surtout pour le groupe 4, qui s'en sort plutôt mieux que d'habitude. Le peu d'effectif du groupe 6 dans cet échantillon peut expliquer le semi échec apparent de ce groupe au DS n°4. On a déjà remarqué plus haut, que les résultats au prétest de ces 11 étudiants étaient plus faibles que ceux des 25 de l'échantillon initial.

## IV - Corrélation avec le prétest.

Avant tout, regardons les nouvelles données au prétest avec l'échantillon de 50 étudiants examinés pour le DS n°4, en comparaison avec la population de référence.

Comparaison entre les deux échantillons

EFF	MOY	ECAR	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2
8.4	13.2	3.02	63%	15%	17%	36%	33%	75%	56%	38%	63%	82%
5.0	1.3	2.72	54%	14%	14%	22%	36%	76%	56%	30%	60%	84%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Il est clair que le nouvel échantillon est globalement plus faible. Les plus grands écarts se trouvent pour les blocs EQ1 et Q et aussi pour la répartition par nombre de blocs vides. Tous ces écarts vont dans le même sens.

Ce phénomène s'explique par la sous-représentation dans le nouvel échantillon du groupe 6 qui est le plus fort au prétest de même que par une légère prédominance du groupe 4 qui est le plus faible.

Nous donnons, ci-dessous, sur le modèle de ce qui a été fait depuis le premier devoir, deux tableaux de corrélation entre le prétest et le DS n°4.

Tableau croisé n°1 : prétest/ DS n°4

EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	5.0	13	54%	14%	14%	22%	36%	76%	56%	30%	60%	16%
MOY	6.3	6.4	7.9	6	7.3	6.2	6.1	6.8	7.1	6.5	6.4	5.4
N<5	1.5	11.9	47%	0%	13%	13%	40%	87%	33%	20%	53%	20%
6<N<7	2.3	13.1	57%	13%	13%	17%	35%	74%	65%	30%	61%	87%
N>8	1.2	14.1	58%	33%	17%	42%	33%	67%	67%	42%	67%	17%

(Les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2 : prétest/ DS n°4

EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B<1	B<2	B>2
TOTAL	5.0	13	27	7	7	11	18	38	28	15	30	42
MOY	6.3	6.4	7.9	6	7.3	6.2	6.1	6.8	7.1	6.5	6.4	5.4
N<5	3.0%	11.9	26%	0%	29%	18%	33%	34%	18%	20%	27%	29%
6<N<7	46%	13.1	48%	43%	36%	44%	45%	54%	47%	47%	48%	38%
N>8	24%	14.1	26%	57%	29%	45%	22%	21%	29%	33%	27%	24%

(Les pourcentages sont calculés sur la colonne)

La plupart des données de ce tableau semblent montrer une assez bonne corrélation entre le prétest de logique et ce dernier devoir d'application des premières notions d'algèbre linéaire.

Avoir les blocs EQ3 ou Q pleins comme n'avoir aucun bloc vide ou en avoir au plus un, sont les prérequis les mieux corrélés avec le DS n°4. C'est-à-dire qu'au fur et à mesure que l'on descend dans les tranches de notes du DS n°4, de moins en moins de gens répondent à ces critères.

Avoir le bloc EQ1 plein, ne pas avoir le bloc Q vide ou avoir plus de 2 blocs vides sont des critères qui augmentent la probabilité de ne pas être dans la tranche N<5, mais qui, par contre, ne différencient pas les deux autres tranches. De même avoir le bloc AS plein augmente les chances d'être dans la tranche N>8 sans faire de distinction entre les deux autres.

Par ailleurs, avoir le bloc EQ3 vide ou avoir le bloc AN plein ou avoir au plus deux blocs vides sont des critères mal corrélés au DS n°4, qui donnent même des résultats parfois contradictoires.

Finalement, on peut dire que la corrélation existe sans être systématique. Il semble que l'avancée (par rapport au temps et par rapport aux concepts) dans le domaine de l'algèbre linéaire proprement dit, rende les prérequis de logique moins déterminants que dans les problèmes du tout début de l'algèbre linéaire. Au stade où se situe ce devoir, des compétences propres en algèbre linéaire se sont mises en place qui prennent le devant sur celles de logique, même si elles leur sont corrélées.

Il sera donc intéressant de regarder la corrélation qui existe entre ce devoir et les précédents, et les évolutions qui se sont produites selon les individus et leurs compétences de départ. C'est un des buts de notre travail, que nous examinerons plus loin.

Cet examen final a été passé par les trois groupes pendant les mêmes 4 heures. Il contient, dans cet ordre, un problème d'algèbre linéaire, un problème d'analyse autour d'une équation différentielle et deux exercices au choix sur des questions d'intégration. On trouvera en annexe H-1, le texte complet de ce sujet.

Nous avons analysé 73 copies, 26 du groupe 3, 26 du groupe 4 et 21 du groupe 6. Notre échantillon est donc, comme pour le partiel, très proche de la population initiale du prétest.

### I - Analyse a priori - Résultats quantitatifs.

Nous avons attribué à chaque question une note et éventuellement un code, correspondant à un type d'erreur ou de bonne réponse. Nos choix sont explicités dans ce qui suit et les résultats quantitatifs sont regroupés dans un tableau en annexe H-2.

Le problème est classique. Une famille d'endomorphismes est représentée par une matrice  $3 \times 3$  dépendant d'un paramètre  $m$ . On demande d'abord de déterminer valeurs et vecteurs propres pour chaque valeur de  $m$  et de dire quand c'est diagonalisable. Ensuite pour trois valeurs du paramètre, on demande de calculer la matrice à la puissance 1989. Pour chacune des trois valeurs, il y a une méthode différente, explicitée par le découpage des questions. Ces trois méthodes assez classiques avaient été utilisées par les trois groupes, en travaux dirigés, sur des exemples, sans faire l'objet d'un enseignement spécifique.

#### Question 1

Cette question est simple (c'est une application directe du cours) et calculatoire. Il s'agit de calculer le déterminant de  $(A(m) - \lambda \text{Id})$  et de le factoriser.

On trouve que 4 est valeur propre simple et  $2m$  valeur propre double, sauf bien sûr, quand  $2m=4$ , c'est-à-dire  $m=2$ . Dans ce cas, 4 est valeur propre triple. Or ce dernier point est rarement bien explicité. Comme il est surtout une gêne pour la suite, nous n'avons pas tenu compte de cet oubli dans cette question, pensant que s'il est persistant, il sera pénalisé dans la suite.

Tous les étudiants ont abordé la question et il n'y a que 5 échecs, 4 sont des erreurs de calcul dans le déterminant, et un étudiant (6s) essaie vainement de résoudre directement le système  $A(m)V = \lambda V$ .

Nous avons mis une note binaire (0/1) à la question.

#### Question 2

Cette question est également une application directe du cours.

Pour  $m=2$ , on trouve qu'il y a un plan de vecteurs propres. Pour les autres valeurs, 4 correspond à une droite de vecteurs propres (nécessairement) et  $2m$  correspond à un plan si  $m=1$  et à une droite sinon. Donc l'ensemble  $M$  des valeurs de  $m$  telles que  $A(m)$  est diagonalisable est réduit à  $\{1\}$ .

La plupart des étudiants ne distinguent pas le cas  $m=2$  a priori, dans la recherche des vecteurs propres. Ce cas apparaît alors comme particulier dans la résolution des deux systèmes, ainsi que le cas  $m=1$ , pour  $\lambda=2m$ .

#### Question 2-a

Cette partie de la question est le centre du problème. Il y a deux difficultés principales. La première est purement calculatoire et ne concerne que la résolution numérique des deux systèmes. La deuxième est plus conceptuelle, il s'agit de savoir mener la discussion des cas particuliers apparaissant dans la résolution des systèmes en ayant en tête les résultats sur les valeurs propres qui permettent un contrôle sur la résolution. Ainsi on ne peut trouver de solution unique (surtout pas nulle), ou pas de solution, aux systèmes correspondants aux valeurs propres, et l'infinité de solutions que l'on trouve ne peut avoir une dimension supérieure à l'ordre de la valeur propre. C'est pourquoi, sauf pour  $m=2$ , le système correspondant à  $\lambda=4$  a nécessairement pour ensemble de solution une droite et celui pour  $\lambda=2m$  une droite ou un plan. Dans le cas  $m=2$  les deux systèmes sont identiques et l'ensemble des solutions peut être une droite, un plan ou même tout l'espace (ce qui se voit sans résoudre de système).

En pratique on s'aperçoit que ces deux difficultés ne sont pas surmontées par un nombre assez grand d'étudiants, puisque la question n'est entièrement bien résolue que dans 23 copies, soit 32% des cas. Ces étudiants bénéficient d'une note N2a de 1.

Nous avons distingué les types d'erreurs suivants :

- Pour  $\lambda=4$ , les étudiants disent que le cas  $m=2$  est impossible, car ils trouvent alors que l'espace propre associé a une dimension supérieure à l'ordre de la valeur propre correspondante (code IMP : 5 cas). Si le cas  $m=2$  est par ailleurs correctement géré pour  $\lambda=2m$ , malgré l'ambiguïté, nous n'avons pas tenu compte de cette erreur dans la note (4 cas). Par contre dans le cas où  $m=2$  est entièrement écarté par la suite, nous avons mis une note de 0,5.

- Il y a une erreur de calcul dans la résolution, mais les cas particuliers et la discussion sont exacts par ailleurs (code CAL : 10 cas). Nous avons alors mis une note divisée de moitié : N2a=0,5. Nous n'avons pas relevé les cas où les erreurs de calculs étaient associées à des erreurs plus graves des types qui vont suivre.

- Il y a une erreur dans le traitement des cas particuliers (code CP : 23 cas). Ce type d'erreur possède des nuances. Dans certaines copies les cas particuliers n'apparaissent pas du tout, dans d'autres on énonce un résultat pour  $m \neq 2$  ou 1 et les cas  $m=2$  ou 1 ne sont plus envisagés par la suite ou le sont de façon erronée. Dans d'autres copies encore, les variables et les paramètres se mélangent dans les discussions ou bien on trouve des cas particuliers qui n'en sont pas. Suivant l'importance de l'erreur commise, nous avons alors mis une note de 0,5 (13 cas) ou de 0 (10 cas).

Enfin trois étudiants n'ont pas abordé cette question.

Dans l'ensemble, cette question qui est une question de mise en pratique du cours et qui repose sur des résolutions de systèmes d'équations linéaires avec paramètre (pas très compliqués) est assez mal réussie. Il y a grosso modo un tiers de réussite, un tiers d'échec et un tiers de semi réussite ou semi échec, alors que de cette question dépend plus ou moins tout le reste du problème. On voit que les problèmes calculatoires ne sont pas surmontés pour 14% des étudiants, que la discussion de cas particuliers est un problème pour 32% et que très peu d'étudiants montrent assez de recul par rapport aux concepts en jeu pour contrôler le sens de leurs calculs dans ce type de question.

#### Question 2-b

Cette question dépend étroitement de la précédente. Dans la mesure du possible, nous avons donc analysé les réponses en correspondance avec les erreurs éventuellement commises précédemment.

Il y a 10 non réponses, soit 7 de plus qu'à la question précédente.

Il y a 25 bonnes réponses soit un taux de réussite de 34%. Nous avons alors mis une note  $N_{2b}=1$ . Parmi ces bonnes réponses, nous avons distingué deux types.

-L'argument utilisé est qu'un endomorphisme est diagonalisable ssi toutes les valeurs propres sont réelles et si chaque espace propre a pour dimension l'ordre de la valeur propre correspondante (code D=M : 16 cas).

-L'argument utilisé est soit que les espaces propres doivent être en somme directe et recouvrir tout E, soit, ce qui revient au même, que la somme des dimensions des espaces propres doit être égale à la dimension de E (code SOM : 10 cas).

Le premier argument est souvent plus facile à utiliser, mais dans le cas présent où la dimension et le nombre de valeurs propres sont faibles les deux méthodes sont assez équivalentes. Dans le deuxième cas il est bien sûr inutile de redémontrer que les espaces propres sont en somme directe. C'est pourtant ce qui est fait dans deux copies.

Nous avons distingué par ailleurs les erreurs suivantes.

- Le fait que  $A(1)$  est diagonalisable est bien explicite, mais les autres cas ne sont pas envisagés explicitement, il manque donc la condition nécessaire (code CN : 10 cas). Ce genre "d'oubli" est assez classique.

- Au contraire les cas autres que  $m=1$  sont envisagés et  $m=1$  est oublié, il manque donc la condition suffisante (code CS : 2 cas).

- Au cas  $m=1$  vient se rajouter le cas  $m=2$ , parce que ces étudiants parlent du fait que la dimension de l'espace propre doit être égale à l'ordre de la valeur propre, mais ils n'ont pas vu que si  $m=2$ , il n'y a en fait qu'un seul espace propre (code m=2 : 5 cas).

A ces trois types d'erreurs, ainsi que dans trois autres cas spécifiques, nous avons mis une note  $N_{2b}$  de 0,5 (soit 20 cas au total).

Il reste 18 réponses fausses (pour des raisons variées) auxquelles nous avons mis une note nulle.

Cette question, qui pourrait sembler conceptuellement plus difficile que la précédente est cependant légèrement mieux réussie par les étudiants (et ce malgré sa dépendance justement par rapport à la 2-a). On peut avancer, semble-t-il, l'hypothèse que ceci vient de ce que la tâche est mieux ciblée, que la réponse est plus simple à formuler et aussi qu'il n'y a pas de calculs.

#### Question 2-c

Cette question est une réécriture de résultats trouvés précédemment. Elle est par ailleurs plus largement reprise dans la suite. Elle est en fait redondante.

Nous avons donc décidé de ne pas tenir compte de cette question dans notre analyse.

#### Question 3.

Cette question dépend de la précédente, mais on peut aussi reprendre les calculs avec  $m=1$ , et elle devient alors une question indépendante. En pratique une vingtaine d'étudiants, visiblement peu sûrs (à tort ou à raison) de leur réponse en 2, ont effectivement fait ou refait ces calculs.

#### Question 3-a

Il s'agit ici de montrer qu'il existe une base de vecteurs propres orthogonaux.

La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une telle base, quand on sait (grâce à 2) que  $A(1)$  est diagonalisable et qu'il y a deux espaces propres, est que ces deux espaces soient orthogonaux. Montrer cela suffit donc pour répondre à la question, et c'est très simple, puisqu'en 2 on a donné des équations de cette droite et de ce plan. Pourtant aucun étudiant n'a utilisé ce raisonnement et tous ceux ayant

abordé la question, ont essayé plutôt d'exhiber une base orthogonale de vecteurs propres. C'est trop pour cette question, mais c'est aussi en fait anticiper sur la question suivante, où l'on demande de donner une base orthonommée de vecteurs propres.

De plus les étudiants se répètent souvent inutilement et n'utilisent que très rarement les données du contexte. Par exemple, il est frappant de voir que 25 d'entre eux trouvent nécessaire de montrer, avec la définition, que les trois vecteurs qu'ils exhibent, forment une famille libre (code L1B). En fait ce sont trois vecteurs propres, donc il suffit de voir que les deux vecteurs du même espace propre ne sont pas colinéaires (c'est-à-dire proportionnels). De plus, deux lignes plus loin ils démontrent que ces vecteurs sont orthogonaux deux à deux, or en dimension trois, c'est un résultat de géométrie très classique que trois vecteurs deux à deux orthogonaux ne peuvent être linéairement dépendants.

Pour trouver les trois vecteurs orthogonaux soit les étudiants ne donnent pas d'explication, soit au contraire ils posent d'interminables équations qui ne prennent pas en compte la nature des espaces propres.

En dépit de ces maladrotes, il y a 57 bonnes réponses soit un taux de réussite de 78%. Nous avons alors mis une note de 1.

Il y a par ailleurs 8 réponses erronées et donc 8 non réponses.

On peut considérer que c'est une question réussie, mais sur le plan pratique seulement. Car on mesure par ailleurs le manque de contrôle du sens et d'unité dans les tâches accomplies. Ceci aboutit à des réponses très ambiguës. Ici par exemple, que penser de ceux qui disent qu'il est bien "clair" que les vecteurs sont indépendants ou de ceux qui n'en parlent même pas. Savent-ils mieux d'où vient l'indépendance des vecteurs que ceux qui croient nécessaire de la vérifier directement ? Les indices qui nous permettent de penser que ce point est compris sont faibles en l'absence de justification explicite. Il semble bien toutefois que très peu d'étudiants aient atteint un niveau de compréhension suffisant pour envisager tous les aspects de la question et les relier entre eux.

#### Question 3-b

Cette question paraît a priori assez simple et les calculs ne sont pas trop complexes. Le fait qu'une matrice orthogonale a pour inverse sa transposée n'est pas pour les étudiants en question un résultat de cours, ce qui explique la forme de la question.

14 étudiants ne répondent pas à cette question.

29 répondent de façon entièrement correcte, ce qui donne un taux de réussite de 40%.

17 étudiants donnent une base orthogonale non nommée (code NORM). Dans certains cas ceci peut sembler être une étourderie, mais dans quelques cas, ils donnent une base dont tous les vecteurs ont même

norme en disant explicitement que c'est une base orthonommée. Si le calcul de  $P^T P$  et celui de  $P^{-1}$  sont faits et exacts nous avons mis une note de 0,5, sinon nous avons mis 0.

Dans trois cas, malgré une bonne matrice de passage et même dans 2 cas, après avoir trouvé que  $P^T P = \text{id}$ , les étudiants font néanmoins directement le calcul de  $P^{-1}$  (code DIR). Si les calculs sont exacts, nous avons mis une note de 1 (1 cas), sinon nous avons mis 0 (2 cas).

#### Question 3-c

On a que  $A(1)^{1989} = P D^{1989} P^{-1}$ . Il reste à faire les calculs.

Nous avons mis la note de 1 quand la formule est juste et les calculs entièrement faits de façon exacte : 17 cas.

Nous avons mis 0,5 quand la formule est bonne et quand les calculs ne sont pas faits (22 cas) ou sont faits avec des erreurs (code CAL : 5 cas). On retrouve ici une certaine répugnance de la part des étudiants à faire des calculs (surtout en temps limité), comme on l'avait déjà observé dans le premier exercice du DS n°4.

Nous avons mis un 0 dans tous les autres cas qui se divisent en 19 abstentions et 10 erreurs.

Dans l'ensemble cette question est très moyennement réussie, si on omet le calcul explicite de la fin, 30 étudiants (soit 41%) ont répondu au problème avec une formule exacte et une matrice de passage ainsi que son inverse calculées explicitement.

#### Question 4

Cette question est indépendante du reste du problème et très simple. Une fois qu'on a remarqué que  $A(2) = 4I_d + N$  avec  $N^2 = 0$ , ce qui est une banale vérification, il est immédiat avec la formule du binôme (que les étudiants avaient utilisée auparavant dans des exercices sur des matrices) que  $A(2)^{1989} = 4^{1988} (4I_d + 1989N)$ .

Il y a 36 bonnes réponses donc quasiment un taux de réussite de 50% ce qui n'est pas si mal, compte tenu que c'est une question qui est proche de la fin du problème.

Nous avons mis 16 fois la note 0,5 quand la formule du binôme est approximative et que le résultat final est donc faux mais que la technique est comprise.

Enfin il y a 5 non réponses et donc 16 réponses erronées (pour des raisons très diverses).

Cette question ne fait pas réellement intervenir de concept d'algèbre linéaire, c'est plutôt purement un problème de calcul matriciel.

#### Question 5

Dans cette question il s'agit de trigonaliser une matrice, comme dans le deuxième exercice du DS n°4. On peut alors assez facilement, par

exemple par une méthode analogue à la question 4 ou par récurrence avec un peu de flair, trouver la puissance de la matrice triangulaire, et en déduire la puissance de  $A(3)$ .

Pour la recherche d'une base dans laquelle la matrice est triangulaire, il y a 20 réponses entièrement exactes, soit un taux de réussite de 27%.

Il y a aussi 27 non réponses soit un taux d'abstention de 40%, ce qui est très élevé, mais pas outre mesure, étant donné que c'est la dernière question du problème.

Nous avons mis 0,5, à ceux qui ont la bonne technique, c'est-à-dire qui reconnaissent que les deux premiers vecteurs sont des vecteurs propres et qui, pour le calcul du troisième, écrivent les bonnes équations par rapport aux bonnes bases mais font une erreur de calcul (code CAL : 8 cas).

Il reste donc 18 autres erreurs.

La plupart sont dues à un mélange dans les rôles des deux bases. C'est-à-dire que ces étudiants ont compris que les deux premiers vecteurs à trouver sont des vecteurs propres mais ils perdent pied lors du calcul du troisième, il est apparemment difficile pour eux de faire la part des rôles entre les deux bases, celle de départ et celle sur laquelle la matrice sera diagonale. Ils écrivent alors des équations erronées, qui mélangent les deux bases, soit au niveau des coordonnées soit au niveau de la matrice.

On trouve par exemple ce raisonnement :

$$" f(v_1)=4 v_1 ; f(v_2)=6 v_2 \text{ et } f(v_3)=v_2 + 6v_3$$

$$f(e_1)=5 e_1 - e_2 ; f(e_2)=-e_1 + 5e_2 \text{ et } f(e_3)=2e_1 - 2e_2 + 6e_3$$

$$\text{donc comme } f(e_1) = f(v_1) ; f(e_2) = f(v_2) ; f(e_3) = f(v_3), \text{ on a :}$$

$$4 v_1 = 5 e_1 - e_2 ; 6 v_2 = -e_1 + 5e_2 \text{ et } v_2 + 6v_3 = 2e_1 - 2e_2 + 6e_3 \text{ etc...} "$$

ou alors :

$$" \text{ On a } f(v_3)=v_2 + 6v_3 \text{ donc } 5x-y+2z=0, -x+5y-2z=y \text{ et } 6z=6z \text{ etc...} "$$

c'est-à-dire que dans la deuxième partie de l'inégalité  $v_2$  et  $v_3$  sont "devenus"  $e_2$  et  $e_3$ .

Ou bien encore, des démonstrations, où on utilise la matrice déjà triangulée pour écrire  $f(v_3)$ , alors que les coordonnées sont celles sur la base de référence.

Toutes ces difficultés rencontrées lors du calcul de  $v_3$  ont été codées MEL. Il y a 13 cas de ce type.

Il n'est pas toujours facile de déterminer si ces erreurs correspondent à des difficultés conceptuelles précises ou si ce ne sont que des étourderies. Souvent il semble que la difficulté commence par l'appéhension des données, on ne sait pas trop par quel bout commencer, si bien qu'à force de tourner en rond, on finit par confondre les données et les inconnues. Ceci pourrait expliquer cette confusion entre les deux bases, celle existante et celle à trouver.

Pour le calcul de  $A^{1989}$ , il y a 7 bonnes réponses notées 1. Dans 7 copies, on trouve correctement  $A^{1989}$  ( $A^1$  est la matrice triangulaire) mais les calculs pour  $A^{1989}$  sont inexacts, nous avons alors mis une note de 0,5.

Il y a par ailleurs, 2 réponses inexactes et donc 57 abstentions...mais c'est la toute dernière question du problème.

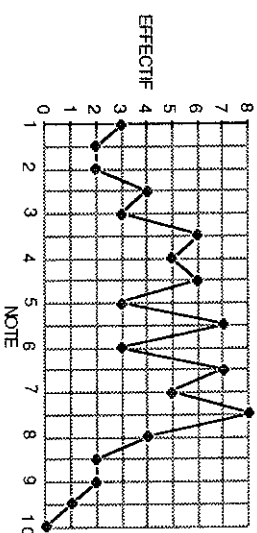
## II - Attribution d'une note.

La question qui nous paraît la plus importante par rapport à l'algèbre linéaire est la question 2-a, qui par ailleurs présente une tâche un peu plus lourde que les autres questions. En donnant à cette question le poids 2 et aux autres un poids de 1 on obtient une note  $N$  sur 10.

$$N=NI + 2N2a + N2b + N3a + N3b + N3c + N4 + N5a + N5b$$

Le graphique ci-dessous donne la répartition des notes ainsi obtenues.

REPARTITION DES NOTES A L'EXAMEN



La moyenne est de 5,2 avec un écart-type de 2,2.

C'est donc une bonne moyenne avec un écart-type assez élevé donc une répartition assez étendue des notes.

Ce bilan (si un examen peut jouer ce rôle) semble donc plutôt positif, au moins extérieurement. On a vu pourtant dans l'analyse des questions, combien certaines réponses étaient ambiguës ou fragiles. Une bonne note à ce devoir consacre une certaine réussite à résoudre des problèmes de diagonalisation et de calcul matriciel, mais elle n'assure que peu la solidité des concepts d'algèbre linéaire sur lesquels toute cette théorie repose. Il peut y avoir un certain danger à croire à la réussite de ces étudiants quand on voit qu'aucun étudiant n'utilise par exemple le fait que deux espaces propres sont toujours en somme directe et que même beaucoup le démontrent sur un exemple sans utiliser la nature d'espace propre, ou d'autres comportements de ce genre qui ne sont pas pénalisés dans la note mais qui reflètent pourtant une incompréhension que ce type de problème écarte.

Nous avons distingué les trois tranches de notes suivantes :

- $N \geq 7$  : 22 étudiants. Les problèmes calculatoires sont sûrement surmontés et les concepts d'algèbre linéaire assez bien acquis pour bien réussir ce devoir.
- $4 < N < 7$  : 26 étudiants. Il y a encore des difficultés calculatoires et les concepts ne sont pas tous bien intégrés, mais ces étudiants arrivent à un résultat déjà satisfaisant dans le calcul matriciel.
- $N \leq 4$  : 25 étudiants. Les problèmes calculatoires et/ou avec les concepts sont encore trop forts pour arriver à un résultat satisfaisant.

### III - Comparaison par groupes

Nous donnons, dans le tableau ci-dessous, pour les trois groupes de l'échantillon des 73 étudiants, la moyenne et l'écart-type au prétest et à l'examen ainsi que pour l'examen la répartition par tranche de notes.

N°GR	PRETEST			EXAMEN				
	EFF	MOY	ECART	MOY	ECART	N $\geq$ 4	4<N<7	N $\geq$ 7
3	26	13,12	2,30	5,13	1,86	9	11	6
4	26	12,92	3,25	4,48	2,29	12	8	6
6	21	13,81	3,14	6,45	2,01	4	7	10

Les données au prétest ne sont effectivement que très peu modifiées avec l'échantillon légèrement réduit dont nous disposons.

Pour les moyennes à l'examen l'ordre est le même entre les trois groupes que pour le prétest, mais les écarts entre chaque paire de groupes sont nettement accentués puisqu'il sont passés de environ 1/40<sup>ème</sup> de la note à environ 1/10<sup>ème</sup>.

Au niveau des écart-types, on conserve également le même classement avec des ordres d'amplitude similaires, si ce n'est peut-être que l'homogénéité du groupe 3 est un peu moins marquée et que d'une façon générale les écart-types de l'examen sont plus élevés que ceux du prétest (ne pas oublier que la note du prétest est sur 20 et celle de l'examen sur 10).

Si on regarde les répartitions par tranche de notes, on voit que la tranche la plus remplie est pour le groupe 6, celle des notes élevées, pour le groupe 3, la médiane et pour le groupe 4, celle des notes les plus basses. Ce résultat est en accord avec l'ordre des moyennes et confirme la hiérarchie des groupes.

Par contre les groupes 3 et 4 ont tous deux pour tranche la moins pleine, celle des notes les plus élevées, avec des effectifs identiques. C'est donc parmi les étudiants les plus faibles que s'est creusé l'écart entre ces deux groupes, la distinction se fait dans l'inversion des effectifs relatifs entre la tranche des notes les plus basses et celle des notes intermédiaire. Cet écart n'était pas aussi marqué lors du prétest, on l'a

vu se dessiner au fur et à mesure des devoirs, de façon imprécise surtout à cause du fait que nos échantillons ne sont jamais complets et difficilement comparables. On peut dire, néanmoins, que cette évolution se confirme dans les résultats de l'examen qui sont une forme de bilan de l'année.

L'avance du groupe 6, toujours confirmée tout au long des devoirs, est ici fort claire et on voit, par la répartition en tranches, qu'elle repose sur une structuration solide de forme pyramidale avec une base de très bons étudiants. Le fait qu'il y ait une forte proportion de redoublants dans ce groupe n'est sûrement pas étranger à cette remarque.

### IV - Corrélation avec le prétest

Nous donnons, ci-dessous, deux tableaux croisés des résultats prétest/examen sur le modèle de ce qui a été fait depuis le premier devoir surveillé.

La répartition totale par blocs au prétest avec le nouvel échantillon est très voisine de ce qui a été trouvé avec la population de départ, ce qui était prévisible étant donné le peu de différence d'effectif entre les deux.

Tableau croisé n°1 : prétest/examen

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B $\leq$ 1	B $\leq$ 2	B $\geq$ 2
TOTAL	73	13,2	60%	15%	16%	33%	36%	79%	59%	38%	63%	85%	15%
MOY	5,21		5,39	6,68	4,75	6,23	4,5	5,53	5,59	6,23	5,67	5,57	3,64
N $\leq$ 4	25	12,4	68%	8%	16%	20%	44%	72%	48%	24%	60%	72%	28%
4<N<7	26	12,5	42%	8%	31%	23%	42%	77%	62%	31%	50%	88%	12%
N $\geq$ 7	22	15,1	73%	32%	0%	159%	18%	91%	68%	64%	82%	95%	5%

(les pourcentages sont calculés sur la ligne)

Tableau croisé n°2 : prétest/examen

	EFF	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	B $\leq$ 1	B $\leq$ 2	B $\geq$ 2
TOTAL	73	13,2	44	11	12	24	26	58	43	28	46	62	11
MOY	5,21		5,39	6,68	4,75	6,23	4,5	5,53	5,59	6,23	5,67	5,57	3,64
N $\leq$ 4	34%	12,4	39%	18%	33%	21%	42%	31%	28%	21%	33%	29%	64%
4<N<7	36%	12,5	25%	18%	67%	25%	42%	34%	37%	29%	28%	37%	27%
N $\geq$ 7	30%	15,1	36%	64%	0%	54%	15%	34%	35%	50%	39%	34%	9%

(les pourcentages sont calculés sur la colonne)

Si on regarde la ligne des moyennes à l'examen en fonction des blocs du prétest, on voit que globalement la corrélation est assez nette dans le sens positif, surtout avec les blocs EQ3 et Q, aussi bien vide que plein et avec le nombre de blocs vides, surtout pour la distinction entre 0 et plus. Les blocs EQ1, AN et AS sont beaucoup moins bien corrélés, de même il n'y a pas beaucoup de différences entre au plus un et au plus deux blocs vides.

La corrélation du prétest avec la réussite à l'examen est aussi bien marquée dans le sens positif. En effet si on regarde la dernière ligne du premier tableau, on voit d'abord que la moyenne au prétest des étudiants dans cette tranche est très nettement supérieure à la moyenne globale et que les pourcentages sont toujours assez nettement supérieurs dans le cas d'un bloc plein et inférieurs dans le cas d'un bloc vide, à ceux de la première ligne. De même la répartition par blocs vides, regardée dans les deux tableaux, montre que la probabilité d'être dans la première tranche de notes à l'examen augmente beaucoup quand le nombre de blocs vides diminue, surtout quand on arrive à aucun bloc vide. Ainsi 50% des étudiants n'ayant eu aucun bloc vide au prétest ont 7 ou plus à l'examen (contre 30% pour l'échantillon total) alors qu'il n'y a que 5% des étudiants ayant eu plus de 2 blocs vides (i.e. un sur 11) qui ont 7 ou plus à l'examen.

Ainsi il semblerait que les prérequis de logique aient ce qu'il conviendrait d'appeler en restant très vague, une influence assez marquée pour bien réussir à l'examen.

Par contre, les corrélation avec les deux tranches de notes du bas sont beaucoup moins évidentes. Ces deux tranches réunies sont le complémentaire de la précédente, prises ensemble, elles sont donc, comme la première, corrélées de façon positive. Mais si on les examine séparément en les comparant, on voit déjà que pour ces deux tranches les moyennes au prétest sont identiques. Il y a bien sûr des corrélations positives avec les blocs AN et AS et le nombre de blocs vides (sauf pour au plus un bloc vide), mais il y a aussi des corrélations négatives comme pour les blocs EQ1 plein ou EQ3 vide ou encore avec les étudiants ayant au plus un bloc vide. Il y a aussi certaines absences de corrélation comme avec les blocs EQ3 plein ou Q vide et plein. Finalement il semble bien que ces deux tranches ne soit pas vraiment différenciables en fonction des résultats au prétest, comme si les prérequis de logique n'agissaient sur la réussite ou l'échec à l'examen qu'à partir d'un certain seuil de compétences, indépendantes de la logique et donc plus intrinsèques à l'algèbre linéaire.

Il est délicat de tirer des conclusions ayant valeur de généralités quand on travaille, comme nous, sur de faibles échantillons et des tests ponctuels. Il semblerait toutefois qu'au moins pour le type de problème, comme celui de cet examen, qui est un type classique de fin de premier cours d'algèbre linéaire, les prérequis de logique n'aient un rôle qu'après un certain seuil de compétences, qu'il est nécessaire d'atteindre indépendamment, et qu'alors le degré d'acquisition de ces prérequis ait une influence assez importante dans la poursuite de la réussite.

De façon synthétique, on pourrait dire que les prérequis de logique sont un atout en plus qui favorise l'obtention de très bons résultats si on a les connaissances d'algèbre linéaire suffisantes par ailleurs, mais que posséder ces prérequis n'est pas suffisant pour réussir, pas plus que ne pas les posséder n'empêche d'obtenir des résultats moyens.



## I - Analyse globale

Après avoir analysé séparément les résultats à ces huit épreuves et avoir regardé les corrélations des sept dernières avec le prétest, nous allons essayer de faire une analyse plus globale de nos résultats.

Rappelons tout d'abord que les huit devoirs sont dans l'ordre :

- le prétest de logique
- le devoir surveillé n°1 (DS1)
- le test "Vrai/Faux"
- le devoir surveillé n°2 (DS2)
- le partiel
- le devoir surveillé n°3 (DS3)
- le devoir surveillé n°4 (DS4)
- l'examen.

Nous disposons de l'ensemble des huit copies pour dix-neuf étudiants. C'est un nombre peu élevé. Cela est en fait dû à des problèmes d'ordre matériel. En effet les devoirs surveillés, bien qu'intervenant dans une note de contrôle continu, n'étaient nullement obligatoires, si bien que tous les étudiants ne sont pas toujours venus. Par ailleurs, les copies devaient être rendues aux étudiants ce qui a obligé à faire des photocopies, entre le moment de l'épreuve et la redistribution des copies. Ce système lourd explique certains "trous" dans les échantillons relatifs aux devoirs.

Cependant si on ne garde que le prétest, le partiel et l'examen, nous disposons alors de soixante-huit trios de copies, ce qui est déjà statistiquement plus intéressant, mais les données par individus sont alors moins importantes.

Dix-neuf peut sembler très faible, et il ne faut pas nous le cacher. Dans ces conditions, nous ne pouvons faire une analyse statistique très poussée, ni obtenir des résultats très significatifs. Un réel travail statistique aurait demandé de tester un nombre nettement plus important d'étudiants (quelques centaines), mais il aurait également nécessité l'élaboration de tests mieux ciblés, permettant d'obtenir des données gérables avec un nombre important d'individus. Notre étude se situe, modestement en amont de cette étape, comme un travail préalable de défrichage.

Comme nous l'avons déjà signalé en introduction, les conditions de notre étude sont très proches des conditions standard. Toutefois les spécificités de la section de DEUG étudiée sont les suivantes :

- une organisation globale induisant une meilleure coordination cours/TD avec un même enseignant au sein d'une équipe soudée.
- une volonté explicite de donner plus de temps pour l'enseignement de l'algèbre linéaire.
- une introduction du cours d'algèbre linéaire, en collaboration avec des didacticiens et comportant des séances à caractère expérimental.

Néanmoins les contenus et les méthodes employées sont traditionnels, en particulier pour les devoirs et l'évaluation.

Notre étude prend donc en compte une réalité existante dans toute sa complexité, nous nous proposons de mieux déterminer selon les contenus analysés précédemment, les méthodes et les procédures mises en œuvre par les étudiants, et leurs interactions, à un niveau individuel et dans un processus à long terme, en particulier en fonction des connaissances antérieures en logique et en algèbre élémentaires.

Ainsi, sur cet échantillon très mince de dix-neuf étudiants, nous avons pu quantifier des données variées (dont le nombre aurait été d'autant plus limité que le nombre d'étudiants à observer aurait été élevé). Nous espérons pouvoir ainsi dégager des diagnostics et élaborer des hypothèses d'enseignement, mais qu'il faudra ensuite vérifier avec des tests adaptés (que notre étude devrait aider à constituer), sur des populations plus importantes. Cette étude peut également permettre d'enamener une typologie d'erreurs (non exhaustive) et peut-être même une typologie d'individus à travers l'histoire des résultats en algèbre linéaire de dix-neuf étudiants représentatifs d'une réalité, tout au long d'une année universitaire.

### **I - Les corrélations avec le prétest et entre les devoirs**

#### 1 - Caractéristiques du nouvel échantillon

On trouvera en annexe J-1, un tableau donnant pour chacun des dix-neuf étudiants, les notes au prétest et à chaque bloc. Le nombre de blocs vides, ainsi que les notes et la tranche dans laquelle il se trouve, pour les devoirs surveillés, le prétest, l'examen et le "vrai/faux" (que nous désignerons par la suite globalement sous le nom de "devoirs").

A la fin de cette annexe on donne également un tableau de comparaison des données devoirs par devoirs entre le nouvel échantillon de dix-neuf étudiants (ech2) et l'échantillon global testé à chaque devoir (ech1).

On voit que les écarts entre les deux échantillons ne sont jamais très importants.

C'est pour le prétest, peut-être, que les écarts sont les plus élevés, mais c'est là aussi que la différence entre les effectifs est la plus nette puisqu'on a un rapport de 4. Pour les différents blocs, les écarts ne dépassent pas les 20%, en valeur relative, et en fait rarement les 10%, de plus les différences ne sont pas toujours dans le même sens, et se compensent même relativement. Pour la répartition en nombre de blocs vides, on voit qu'il y a surtout plus d'étudiants n'ayant aucun bloc vide, au détriment de ceux en ayant un seul vide. En fait il n'y a que deux étudiants ayant un seul bloc vide, qui ont respectivement des notes de 11 et 12 au prétest. Pour éviter d'avoir des classes sous-représentées,

nous avons regroupé les étudiants ayant un ou deux blocs vides (sous le code B=1/2). Il semblerait alors que le nouvel échantillon des dix-neuf étudiants ait des résultats légèrement meilleurs au prétest. Il est surtout un peu différent, ce qui montre que l'hypothèse de conservation des caractéristiques, si elle semble supporter une réduction de moitié, n'est plus valable quand on ne prend qu'un quart des individus.

De toutes façons ce nouvel échantillon n'a pas été "choisi" au hasard. En effet, puisqu'on dispose de toutes les copies, c'est que les étudiants concernés ont suivi tout le contrôle continu (en algèbre linéaire), on peut donc dire que les dix-neuf étudiants du nouvel échantillon sont parmi les plus assidus, ce qui n'est pas une caractéristique neutre quant à la réussite!...

Les moyennes aux devoirs sont quasiment identiques dans les deux échantillons pour DS2, V/F, DS3 et DS4 ; le nouvel échantillon est un peu moins bon pour le DS1 et déjà un peu meilleur pour le partiel, mais l'écart n'est que de l'ordre de 10%. Pour l'examen l'écart est plus élevé (20%) au profit des dix-neuf étudiants, ce qui peut s'expliquer assez bien par la raison évoquée plus haut, en effet, il est assez logique que l'assiduité soit payante pour l'examen.

Les écart-types sont tous très semblables, tout au plus, il semble y avoir un peu plus d'hétérogénéité dans le nouvel échantillon pour le DS3 et l'examen.

Pour les répartitions par tranches on retrouve les effets des écarts de moyennes et légèrement la différence des écarts-types pour DS3 ; à part ces points, les différences sont minimes.

Les analyses faites précédemment pour chaque devoir et les conclusions, qu'on en a tirées, ne sont donc pas remises en question. L'étude qui suit va bien sûr s'appuyer sur elles.

Nous rappelons ici la significations des notations utilisées pour désigner les blocs de connaissances définis au prétest (cf chapitre A, p 6).

EQ1 : savoir déterminer si une phrase exprimée en langage symbolique et comprenant une équivalence ou une implication est vraie ou fausse.

QA1 idem pour des phrases contenant des quantificateurs.

QA2 : savoir nier en langage formel une phrase formelle contenant des quantificateurs.

EQ3 : savoir traduire graphiquement ou en langage usuel une phrase formelle contenant une équivalence ou une implication, ou inversement.

QA3 : idem pour des phrases contenant des quantificateurs.

Q : Formé à partir des QAi.

AN : connaissances d'algèbre élémentaire numérique.

AS : connaissances élémentaires sur les structures algébriques.

Pour chaque bloc nous avons défini trois états (sauf deux pour AN) : plein, semi plein et vide désigné par respectivement 2, 1 et 0. Par exemple EQ3(1) désigne le bloc EQ3 plein.

Enfin B désigne le nombre de blocs vides parmi les précédents sauf Q.

## 2- Présentation des outils statistiques utilisés

En codant comme on l'a vu lors de l'analyse du prétest : 0,1 ou 2 (vide, semi-plein et plein) pour chaque bloc EQ1, EQ3, QA1, QA2, QA3, Q, AN et AS, ainsi que 0, 1, 2, 3 et 4 pour le nombre de blocs vides (B), avec les notes au prétest et aux 7 devoirs, on obtient un tableau comportant 17 caractères lus sur dix-neuf individus.

Une technique classique de statistique consiste à faire une analyse en composantes principales (ACP) de ces tableaux ([9] et [10]).

Schématiquement cela consiste à regarder les individus comme des points d'un espace euclidien dont la dimension est égale au nombre de caractères observés, la norme en général étant celle de la variance. En vue d'une ACP normée, on commence par centrer les variables et les diviser par leur écart-type (c'est-à-dire leur norme).

Afin d'obtenir une visualisation et des représentations planes de ces dix-neuf points, sans trop perdre d'information, on cherche alors des plans sur lesquels les projections des individus conservent en moyenne le "mieux" leurs distances. On démontre que cela revient à déterminer les axes principaux du système, par des techniques de diagonalisation. Les deux premiers axes donnent le meilleur plan, le premier et le troisième le deuxième meilleur etc... Pour chaque axe, on peut connaître la contribution de chaque caractère et le pourcentage d'information représentée.

Pour chaque individu, outre bien sûr ses coordonnées sur chaque axe principal, on dispose, par la données des carrés des cosinus que le vecteur représentant l'individu fait avec les axes principaux, d'une idée de la qualité de la représentation (plus le cosinus carré est élevé, meilleure est la représentation). On connaît également la contribution de chaque individu à chaque axe.

Outre ces résultats et les représentations graphiques, qui les accompagnent, on obtient de façon préliminaire, la matrice des corrélations, qui mesure deux à deux le degré de la dépendance linéaire des caractères.

## 3- Les résultats

Pour des questions de vraisemblance une ACP avec dix-sept caractères lus sur dix-neuf individus, n'est guère envisageable.

Cependant il est possible de ne faire intervenir que certains caractères dans l'ACP, on donne ensuite les coordonnées des autres caractères sur les axes principaux. On dit que les premiers caractères sont actifs et que les autres sont illustratifs. On crée ainsi une dualité entre deux groupes de variables, qui peut permettre de traiter le problème de façon plus adéquate.

Dans notre cas nous distinguerons d'un côté les dix caractères liés au prétest et de l'autre, les sept notes aux devoirs.

### a- La matrice des corrélations

Nous avons divisé cette matrice (symétrique) en trois blocs : prétest/prétest, prétest/devoirs et devoirs/devoirs.

Le premier bloc n'est plus dans le champ de l'analyse présente.

Le bloc prétest/devoirs sera une information complémentaire, plus compacte, moins détaillée, des sept paragraphes, que nous avons déjà

consacrés à la corrélation de chaque devoir avec le prétest (cf chapitres précédents).

Le dernier bloc devoirs/devoirs est une information nouvelle, qui sera utilement complétée par une ACP ne portant que sur ces sept variables.

#### b- Les corrélations prétest/devoirs

Nous donnons ci-dessous, le bloc de la matrice des corrélations prétest/devoirs, en distinguant en gras les corrélations de valeur absolue supérieure à 0,25.

Note	EQ1	EQ2	QA1	QA2	QA3	Q	AN	AS	B
DS1	0,23	0,44	0,09	-0,21	0,10	0,28	0,17	-0,34	0,20
Part	0,81	0,41	0,55	0,24	0,48	0,54	0,56	0,08	0,49
DS2	0,25	0,35	-0,09	0,14	0,24	0,23	0,33	0,16	0,28
V/F	0,45	0,26	0,16	0,34	0,48	-0,03	0,46	0,09	0,19
DS3	0,36	0,43	0,01	0,01	0,44	-0,12	0,30	-0,17	0,32
DS4	0,46	0,27	0,27	0,05	0,02	0,46	0,23	-0,21	0,45
Exam	0,44	0,31	0,38	0,54	0,24	0,42	0,63	0,05	0,10

On voit ainsi que la note du prétest est assez fortement corrélée positivement avec toutes les autres notes. On peut cependant distinguer trois groupes, le partiel, qui y est très fortement corrélé ; le vrai/faux, les DS 3 et 4 et l'examen, qui ont des coefficients de corrélation encore assez élevés et enfin les DS 1 et 2, qui ont des coefficients plus faibles.

Les blocs QA1, QA2 et QA3, pris indépendamment, sont moyennement bien corrélés mais Q, qui est une combinaison des trois, est beaucoup mieux corrélé. Il semble donc plus intéressant de garder le seul bloc Q, pour rendre compte des lacunes et des prérequis dans les questions de quantification. Les blocs QA1 interviennent de toutes façons dans le nombre de blocs vides.

Les blocs EQ1 et Q, ainsi que le nombre de blocs vides (B) sont globalement les mieux corrélés à tous les devoirs. On retrouve ici la tendance générale que l'on a pu observer en faisant les tableaux croisés à chaque devoir.

Rappelons que Q est vide si et seulement si QA1 est vide ou si un des trois QA1 est vide, aucun des autres n'étant plein, alors que Q n'est plein que si QA1 est plein et aucun des deux autres n'est vide. Q teste donc plus "l'épaisseur" des lacunes sur la quantification, que leur nature.

Il semble donc que ce soit bien la quantité de lacunes en logique, au moins au sens de ce qui est évalué par le prétest (cf chapitre A), plus qu'un type précis de connaissance, qui soit le facteur le plus discriminant par rapport à l'algèbre linéaire. On peut donc avancer l'hypothèse qu'il existe un certain seuil minimal de connaissances antérieures en logique qu'il faut avoir dépassé pour réussir en algèbre linéaire. Ce phénomène pourrait correspondre à une transformation d'un apport de type quantitatif en un nouvel acquis de

type qualitatif, c'est-à-dire qu'un minimum de compétences dans tous les aspects d'un domaine assez vaste, permettrait d'accéder plus facilement à une connaissance précise d'un niveau plus élevé dans la hiérarchie, de façon très schématique une certaine quantité minimale de connaissances d'ordre (n-1) permet d'accéder au rang n. C'est une remarque fondamentale, d'autant qu'elle va à l'encontre d'une idée assez largement répandue qui consiste à penser que la connaissance se construit par petits pas graduels et pas du tout selon ce schéma de transformation moins douce de la "quantité" vers la "qualité".

Ce résultat est analogue pour l'algèbre linéaire, à une des conclusions mises en évidence par A. Robert et F. Boschet lors de leur étude sur les notions de convergence de suites et de fonctions ([1] et [2]).

Ceci est bien sûr à nuancer en fonction de la nature du matériel de notre étude, en particulier les domaines de la logique et de l'algèbre linéaire sont plus vastes que ce que couvrent les seuls problèmes en jeu dans notre analyse.

Pour les blocs liés aux prérequis d'algèbre, les résultats sont beaucoup moins tranchés.

Le bloc AS, qui mesure des prérequis sur la connaissance des structures algébriques élémentaires, donne une corrélation globalement moyenne. Il est surtout corrélé au partiel, où on utilise l'ensemble des polyômes en tant qu'ensemble structuré. Il l'est un peu aussi avec le DS4, mais là, la liaison est moins évidente, étant donné, qu'il s'agit surtout, dans ce devoir de calcul de valeurs et de vecteurs propres et de résolutions de systèmes linéaires.

Le bloc AN, qui mesure un prérequis en calcul algébrique élémentaire, n'est jamais bien corrélé positivement, on trouve même des coefficients fortement négatifs. En particulier le coefficient de corrélation DS1/AN (-0,34), nous engage à la prudence. En effet le DS1 consiste essentiellement à résoudre des systèmes d'équations linéaires, il n'y a donc aucune raison, pour qu'il soit corrélé négativement avec le bloc AN.

En fait dans notre nouvel échantillon, tous les étudiants, sauf un, ont le bloc AN plein, ce bloc n'a donc plus de signification, si bien que nous l'avons supprimé de la suite de notre analyse.

Pour mieux voir comment le prétest est en relation avec les résultats aux devoirs nous avons également fait une ACP en utilisant les tranches de notes.

Rappelons que, pour chaque devoir, la tranche 1 correspond aux notes les plus élevées, et la tranche 3, aux notes les plus basses, la tranche 2 étant bien sûr la tranche médiane. Nous avons essayé d'obtenir chaque fois, une répartition en trois tranches, qui distinguent bien trois niveaux tout en donnant des effectifs numériques assez équilibrés pour éviter les effets de taille.

Ces nouvelles variables sont qualitatives et donc pour pouvoir en faire une ACP il faut les mettre sous forme disjonctive, c'est-à-dire que l'on définit une variable par tranche et par devoir : par exemple, la variable D1(1) vaut 1 ou 0, suivant que l'individu est dans la tranche 1 du DS1 ou non etc...

Dans ce tableau on a aussi repris, outre la note, les neuf variables les plus significatives du prétest, mises sous forme disjonctive : EQ1, EQ3, EQ3v (bloc vide), Q, Qvid (bloc vide), AS, B=0, B=1/2, B>2.

De plus on a mis sous forme disjonctive la variable R, qui désigne les redoublants, et la variable PASS qui vaut 1 si et seulement si l'étudiant a réussi l'examen de juin ou de septembre.

On obtient ainsi un tableau complet de 33 variables.

Faisons maintenant une ACP avec les dix variables du prétest actives, celles liées aux devoirs étant illustratives. On trouvera en annexe J-2, les résultats numériques et graphiques détaillés de cette étude.

Le premier plan principal (axes 1 et 2) sépare très distinctement les individus en 3 groupes qui correspondent exactement au nombre de blocs vides : B=0, B=1/2 et B>2.

L'axe 1 distingue la réussite de l'échec au prétest, toutes les variables lui sont fortement corrélées positivement pour un bloc plein et négativement sinon.

L'axe 2 différencie deux niveaux dans l'échec, entre B=1/2 et B>2. La variable Qv qui correspond au bloc Q vide, se situe plutôt du côté de B=1/2 que de celui de B>2, c'est en fait parce que deux des trois individus ayant B>2 n'ont pas Q vide. Ce paradoxe est donc spécifique de notre échantillon.

Dans ce plan, tous les étudiants ont une bonne représentation (la somme des deux premiers cosinus carrés est toujours assez élevée), d'ailleurs on distingue bien sur le graphique trois groupes compacts d'individus (B=0, B=1 ou 2 et B>2) dont les centres d'inerties sont assez éloignés de l'origine.

De plus ce plan donne à lui seul environ 66% de l'information contenue dans les 11 variables du prétest.

On peut donc dire que la variable B (divisée entre ces trois groupes de valeurs) est à elle seule, un bon indicateur pour le prétest ([1] et [2]).

Regardons maintenant la position des variables illustratives dans le premier plan principal.

La variable R est juste dans le demi-plan "réussite" et nettement du côté de B>2 par rapport à l'axe 2. Ceci tendrait à montrer que les redoublants ont globalement, légèrement mieux réussi le prétest de logique mais que s'ils l'ont raté, ils l'ont plutôt "plus raté".

La variable PASS est elle, plus nettement dans le demi-plan "réussite" et quasiment sur l'axe 2. Donc il y a eu, en proportion, un plus grand succès aux examens, parmi ceux ayant réussi le prétest, mais pour les autres, le degré d'échec au prétest ne semble pas avoir eu beaucoup d'incidence sur le passage.

Les variables correspondant aux tranches 3 des sept devoirs sont assez bien regroupées. Leur centre d'inertie est nettement dans le demi-plan de l'échec. Par contre, il n'est que très légèrement plus du côté de B>2 par rapport à l'axe 2. En fait ce centre est pratiquement au milieu de B>2 et de B=1/2.

P(3), qui correspond à la tranche 3 du partiel est un peu plus à l'écart, elle est beaucoup plus nettement du côté de l'échec et de B>2.

Il semble donc que n'avoir aucune lacune en logique soit un bon critère pour ne pas être dans la dernière tranche de notes pour les devoirs. Par contre, sauf pour le partiel, avoir une ou deux lacunes plutôt que plus de deux ne semble pas mieux préserver d'un échec aux devoirs.

Pour les tranches 1 et 2, la situation est moins claire. On va déjà distinguer l'examen des autres devoirs.

A part pour l'examen donc, les variables correspondant aux tranches 1 sont assez bien regroupées. Le centre d'inertie du paquet est dans le demi-plan "réussite", mais pas de façon très nette, ici encore c'est pour le partiel que c'est le plus franc.

Il semble donc que n'avoir aucun bloc vide soit un facteur favorable mais pas définitif pour très bien réussir aux devoirs.

L'axe 2 divise, très légèrement ces six devoirs en deux groupes : DS1, DS3 et DS4 d'une part, DS2, vrai/faux et partiel d'autre part.

Ceci semble être dû à l'étudiant 6t, qui, bien qu'ayant eu quatre blocs vides au prétest, se trouve dans la tranche 1 du DS1, du DS3 et du DS4, ce qui explique que les trois variables correspondantes sont légèrement plus vers B>2 par rapport à l'axe 2 et légèrement moins vers B=0 par rapport à l'axe 1.

Les variables correspondant aux tranches 2 (à part toujours l'examen) sont également assez bien regroupées. Leur centre d'inertie se trouve très proche de l'origine, donc dans une position assez neutre par rapport aux résultats du prétest.

On peut également distinguer deux groupes : DS1, DS3 DS4 et partiel d'une part et DS2 et vrai/faux par ailleurs. Or l'étudiant 6t est dans les tranches 2 du DS 2, du vrai/faux et du partiel. Donc sauf pour le partiel, ceci explique que le deuxième groupe soit un peu plus vers B>2 par rapport à l'axe 2 et un peu moins vers B=0 par rapport à l'axe 1.

P(2) est, elle, très nettement plus vers la réussite et vers B=1/2, en dépit de 6t, ce qui montre que le partiel est le devoir où les trois tranches se découpent le mieux en rapport avec le prétest. Ceci confirme

la forte corrélation observée plus tôt entre les deux notes du partiel et du prétest.

Toujours en excluant l'examen, les deux groupes de variables correspondant aux tranches 1 et aux tranches 2, se chevauchent selon l'axe horizontal, même si le premier est globalement plus vers  $B=0$  que l'autre. Pourtant dans les deux groupes, les abscisses sont toutes plus élevées que celles des variables des tranches 3. Il semble donc que le niveau des prérequis de logique, séparé assez bien l'échec de la semi-réussite ou de la réussite, mais qu'il a une influence moins tranchée entre la réussite et la semi-réussite aux devoirs.

Regardons maintenant ce qui se passe pour l'examen.

E(1), qui correspond à la tranche 1 de l'examen, est très nettement dans le demi-plan de réussite, ce qui signifie que ne pas avoir de lacune de logique est un facteur déterminant pour la réussite à l'examen. E(1) est aussi assez nettement vers  $B>2$  par rapport à l'axe 2, ce qui s'explique par le fait que l'étudiant 4ab, ayant trois blocs vides, se trouve dans la tranche 1 à l'examen.

E(2) et E(3) ont des abscisses quasiment identiques, alors que E(2) est situé plus vers  $B=1/2$  par rapport à l'axe 2. Il semble donc qu'une très bonne réussite au prétest soit un facteur très fort pour une bonne réussite à l'examen, mais que la séparation dans les deux tranches inférieures, en fonction du degré d'échec au prétest soit moins nette.

En fait la position de ces variables trouve aussi une raison dans la composition du nouvel échantillon. En effet cet échantillon sous représente la tranche 3 de l'examen par rapport à la population testée au départ (16% contre 34%) et ce, au profit essentiellement de la tranche 2. En fait tout se passe comme ci certains étudiants de la tranche 2 avaient été surestimés, ce qui explique, au moins en partie, que E(2) se situe plus dans le demi-plan de l'échec, que les variables correspondant aux tranches 2 des autres devoirs.

Ce phénomène explique-t-il tout ou y a-t-il aussi des raisons dues à la nature d'une épreuve d'examen où l'on a tendance à bannir des questions trop difficiles, que l'on aurait conservées dans un devoir ordinaire ?

En conclusion, les grandes lignes qui ressortent de cette première analyse sont les suivantes :

- Le nombre de lacunes en logique élémentaire semble être le facteur qui mesure le mieux le niveau d'acquisition des prérequis, par rapport à la réussite ultérieure.

- Il semblerait qu'il existe un seuil minimal d'acquisition de connaissances de logique, au delà duquel un changement de type quantitatif/qualitatif peut avoir lieu en faveur de l'apprentissage de notions d'algèbre linéaire. Ainsi l'absence de lacune de logique paraît

être un facteur déterminant pour atteindre un certain niveau de réussite en algèbre linéaire (au moins la tranche 2 aux devoirs). Alors que la présence de lacunes en logique semble augmenter sensiblement le risque d'échec.

On peut voir dans ces résultats la confirmation aussi bien que la conséquence de la nature formelle des raisonnements demandés en algèbre linéaire sur lesquels les étudiants ont peu de possibilités de contrôle tant au niveau interne qu'externe.

e- Les corrélations entre devoirs

Nous donnons ci-dessous la matrice des corrélations entre les notes aux devoirs dans un ordre qui fait apparaître divers groupes, que nous avons encadrés, où les coefficients de corrélations sont les plus élevés.

	DS1	Part	DS4	DS2	V/F	DS3	Exam
DS1	1						
Part	0,48	1					
DS4	0,52	0,60	1				
DS2	0,22	0,18	-0,03	1			
V/F	0,19	0,58	0,17	0,39	1		
DS3	0,29	0,37	0,06	0,34	0,74	1	
Exam	0,25	0,44	0,26	0,45	0,49	0,37	1

L'examen est assez bien corrélé positivement avec tous les autres devoirs, mais aucune corrélation n'est supérieure à 0,5.

Les six autres devoirs peuvent se diviser en deux groupes de trois : DS1, Partiel et DS4 d'une part et DS2, Vrai/faux et DS3 d'autre part. A l'intérieur de ces deux groupes, les corrélations sont toutes assez importantes (au moins de l'ordre de 0,5 sauf celles avec DS2) alors qu'à l'extérieur, seules les deux corrélations du partiel avec le vrai/faux et le DS3 sont importantes.

Pour ces deux groupes de trois variables regardons les matrices des corrélations partielles on obtient :

DS1	1			
Part	0,25	1		
DS4	0,32	0,47	1	
DS1				
DS2		1		
V/F	0,23	0,25	1	
DS3	0,08	0,70	0,70	1
DS1				
DS2				
V/F				



Les dessins ci-dessus rendent compte des types de liaisons qui existent dans les trios.

Dans le premier cas, il y a bien des corrélations fortes dans les trois paires du trio, indépendamment du troisième devoir, par contre dans le deuxième cas, la liaison entre DS2 et DS3 n'a lieu que parce que chacun est corrélé au vrai/faux. Le coefficient de 0,08 signifie en effet que les résultats à ces deux devoirs sont quasiment indépendants conditionnellement à ceux du vrai/faux.

Examinons maintenant les types de tâches impliquées dans chaque devoir. On voit que dans le DS1, le DS4 et le partiel, une grosse partie des questions concerne la résolution de systèmes d'équations linéaires, qu'elle soit demandée explicitement ou que ce soit l'outil adapté pour répondre à la question (recherche de polynômes vérifiant certaines conditions, recherche d'un noyau ou de vecteurs propres etc...). De plus de tous les devoirs ce sont les seuls où ce type de questions a une importance prépondérante.

Dans le DS1 et le partiel, il y a en plus des questions qui ont trait au calcul polynomial. Dans ces deux devoirs, on opère dans un espace de polynômes et toutes les questions nécessitent de faire des manipulations sur les écritures polynomiales ou sur des systèmes d'équations linéaires formées à partir d'égalisation de coefficients de polynômes. Or on a vu que, dans ces questions, les difficultés étaient essentiellement liées à des techniques de calcul algébrique plutôt qu'à l'utilisation de concepts d'algèbre linéaire.

Le DS4 nécessite l'utilisation du calcul matriciel à travers des questions techniques ne faisant intervenir les concepts d'algèbre linéaire que dans un cadre calculatoire simple de type algorithmique : détermination de noyaux, calcul de valeurs propres et recherche de vecteurs propres.

Ces trois devoirs mettent donc surtout en œuvre des tâches dans des cadres que nous qualifierons au sens large de "calculatoires".

Les résultats du DS2, nous l'avons dit, sont biaisés par des abandons massifs, les questions qu'il soulève sont aussi essentiellement techniques, mais elles font appel également à des connaissances assez conceptuelles, comme la distinction de deux variables dans un polynôme.

Le test vrai/faux est, nous l'avons remarqué, très axé sur le côté conceptuel de l'algèbre linéaire, les questions y sont posées dans un cadre très général et testent un niveau assez élevé d'acquisition des concepts.

Le DS3 se situe entièrement dans un cadre numérique explicite, les questions sont plutôt classiques, mais elles dépassent (surtout dans la question 2) la simple utilisation des concepts dans un calcul direct de type algorithmique. Une bonne réussite demande de savoir changer de point de vue à l'intérieur d'une question et de pouvoir contrôler le sens des calculs à faire.

On peut donc dire que ce deuxième groupe de devoirs correspond à des tâches d'un niveau plus conceptuel et plus formel, jouant éventuellement sur des changements de cadres.

Le sujet de l'examen repose sur la donnée explicite d'un endomorphisme qui dépend d'un paramètre. Les questions où le paramètre est fixé à une valeur numérique, sont donc essentiellement des questions calculatoires, alors que celles où ce paramètre est considéré comme quelconque font plus appel à des connaissances de type conceptuel. Ceci explique que l'examen se trouve à la charnière entre les deux groupes.

La bonne corrélation du partiel avec le vrai/faux, et dans une moindre mesure avec le DS3, s'explique peut-être par le fait que des trois problèmes du groupe "calcul" le partiel est celui où le contrôle du sens des calculs est le plus essentiel.

Pour le reste, il semblerait que les réussites dans les domaines calculatoire et conceptuel puissent être indépendantes. En particulier le coefficient de corrélation de 0,17 entre le DS4 et le vrai/faux ou de 0,06 entre ce même DS4 et le DS3, semble montrer que l'on peut très bien réussir un problème classique de trigonalisation correspondant à des questions très ciblées de type algorithmique (DS4), sans avoir bien compris les notions conceptuelles d'algèbre linéaire (comme somme, supplémentaire etc...).

Ce point est à souligner, et ce n'est pas un moindre paradoxe quand on pense que les techniques de réduction de matrices ainsi que les prolongements intéressants de ces calculs, reposent en grande partie sur des résultats théoriques concernant justement les sommes de sous-espaces vectoriels et les sous-espaces supplémentaires.

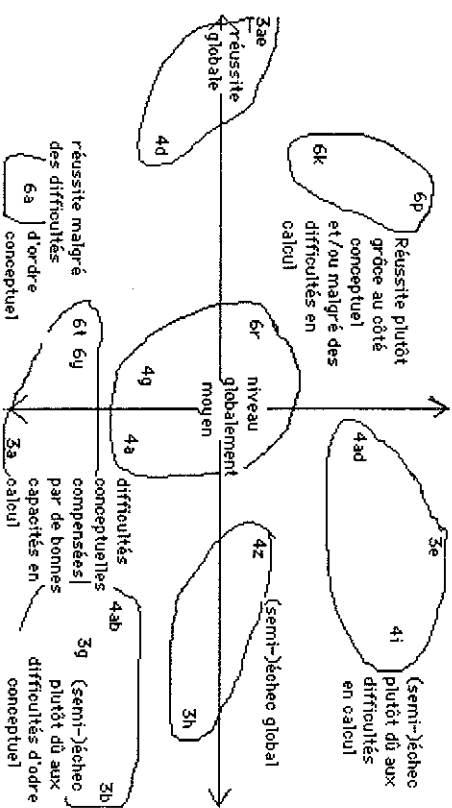
Nous donnons en annexe J-3, les résultats de l'ACP prenant les 7 notes des devoirs en variables actives et les paramètres du prétest en illustratif.

Le premier axe divise, comme précédemment, globalement l'échec de la réussite.

Le deuxième oppose les deux groupes de devoirs que nous venons d'expliquer, alors que l'examen lui est quasiment orthogonal (coefficient de corrélation de 0,06). On a donc une très bonne confirmation de notre première analyse et une preuve tangible de la dualité calcul/concept à l'intérieur de l'algèbre linéaire.

On obtient ainsi un premier plan principal dominant environ 66% de l'information contenue dans les 7 notes.

Nous donnons ci-dessous la représentation graphique des étudiants dans ce plan et une tentative d'interprétation.



On voit que même avec un échantillon de dix-neuf étudiants, on obtient une assez bonne représentation des divers cas de figures. Les difficultés en calcul aussi bien que celles d'ordre conceptuel sont des causes d'échec ou de réussite, alors que l'un quelconque des deux types d'erreurs peut arriver à compenser l'autre. Les différents groupes sont assez bien répartis. On ne peut bien sûr pas déterminer, avec notre échantillon, si un type de difficultés se rencontre plus souvent que l'autre.

On trouvera dans l'annexe J-3, le même graphique, où nous avons essayé d'encercler les individus en fonction de leur nombre de blocs vides au prétest.

On voit que l'axe 1 précède et sépare assez bien les étudiants n'ayant aucun bloc vide des autres, à quatre exceptions près proches de l'axe 1 (6r et 6t d'une part, 4ad et 3a de l'autre). Par contre les trois étudiants ayant plus de deux blocs vides ne peuvent être isolés de ceux en ayant un ou deux.

L'axe 2, ne définit pas de séparation très nette entre les trois groupes définis par leur nombre de blocs vides. Mais les deux étudiants ayant réussi globalement (3ae et 4d) et ceux ayant réussi plutôt grâce au côté conceptuel (6k et 6p) ont tous aucun bloc vide. Les deux étudiants ayant échoué de façon globale (4z et 3h) ont un ou deux blocs vides. Sur les trois ayant échoué plutôt à cause du côté conceptuel, deux ont un ou deux blocs vides (3b et 3g) et un en a plus de deux (4ab).

Ces résultats tendraient à montrer que l'aspect conceptuel est le plus corrélé aux prérequis de logique.

Mais sur les trois étudiants ayant des difficultés conceptuelles qu'ils compensent par de bonnes capacités en calcul, deux n'ont pas de bloc vide (6y et 3a) et un en a plus de deux (6t).

Nos résultats sur ce point sont donc mal assurés, et l'hypothèse selon laquelle le côté conceptuel de l'algèbre linéaire est plus corrélé à la logique demanderait des vérifications plus poussées.

## II- Analyse des données regroupées par thèmes

Le découpage par devoirs nous a déjà fourni des résultats intéressants, nous ne saurions toutefois en exploiter beaucoup plus les données. Aussi nous proposons-nous de redéfinir des variables en regroupant, par thèmes, les questions prises globalement sur tous les devoirs. Ces thèmes et les variables leur correspondant une fois définies, nous pourrions dégager les corrélations.

En complément de ce qui suit, et pour mieux comprendre la teneur de chaque thème, nous renvoyons le lecteur aux analyses détaillées des questions (cf l'analyse du devoir où chaque question intervient).

Chaque note ou code à une question est répétée par l'identificateur défini auparavant (N ou C et le numéro de la question) précédé d'un code repérant le devoir où il intervient (1, 2, 3 et 4 pour les DS, P pour le partiel, V pour le vrai/faux et E pour l'examen).

On trouvera en début de l'annexe J-4 un tableau donnant les valeurs de chaque variable définie ci-dessous pour les dix-neuf étudiants.

Pour délimiter nos nouvelles variables, nous avons été guidé par principalement trois critères :

- La création d'un thème se justifie par le fait qu'il correspond dans le champ de l'algèbre linéaire à un domaine (voire un sous-domaine) bien identifiable, c'est-à-dire délimité et relativement important.

- A l'intérieur des thèmes, il nous a semblé utile de distinguer suivant les cas des niveaux de compétence (découpage horizontal) ou des sous-thèmes (découpage vertical) mais aussi des procédures spécifiques à chaque thème.

- Enfin une condition nécessaire à la création d'une variable est qu'elle puisse regrouper assez de données, le découpage qui suit a donc bien sûr été guidé par la nature des devoirs analysés.

### 1- Définition des thèmes et de leurs variables

#### a- La résolution de systèmes d'équations linéaires

Nous avons défini six variables correspondant à ce thème :

- **S1** caractérise la réussite à la résolution par la méthode du pivot de Gauss, de systèmes numériques sans paramètre. C'est le niveau le plus élémentaire. Nous n'avons pas distingué les questions où la demande de

résolution est explicite de celles pour lesquelles le système n'est pas donné a priori mais apparaît comme outil adapté de résolution (recherche de polynômes vérifiant certaines conditions, détermination de vecteurs propres...).

En additionnant les notes de toutes les questions concernées on obtient une note S1 sur 5,5 :  $S1 = 1 \cdot N2d + 1 \cdot N2e + P \cdot N1 + 4 \cdot N1-3 + 4 \cdot N3d$ .

Nous n'avons pas pris en compte la recherche du noyau dans le DS4 (question II-1) puisqu'elle a été réussie par les dix neuf étudiants.

La moyenne est de 2,74, donc juste à la moitié, ce qui n'est pas beaucoup pour une tâche en apparence aussi simple.

- S2 caractérise la réussite à la résolution, par la méthode du pivot de Gauss, de systèmes dépendant d'un paramètre.

On définit une note S2 sur 2 par :  $S2 = 1 \cdot N1 + E \cdot N2a$ .

La moyenne est de 0,68.

- DET caractérise la réussite aux calculs de déterminants avec ou sans paramètre.

On définit une note sur 4 par :  $DET = 4 \cdot N11 + 4 \cdot N1-2 + 4 \cdot N3a$ .

La moyenne est de 2,84.

(Nous n'avons pas pris en compte la question E-N1 car tous les étudiants ont eu la note maximale).

Nous avons ensuite défini des variables correspondant à des procédures mises en œuvre pour résoudre des tâches plutôt que, comme jusqu'à présent, des variables évaluant la réussite à une tâche indépendamment de la procédure adoptée. Nous avons, pour ce genre de variables, en général, utilisé les codes de bonnes réponses ou de erreurs définis lors de l'analyse des devoirs. Pour harmoniser les données, les variables de procédures liées à une erreur sont définies par un entier négatif.

- CAL caractérise les erreurs de calcul dans la résolution d'un système linéaire ou le calcul de déterminant.

On définit une note CAL sur (-5) en décomptant (-1) pour chaque code CAL, rencontré en I-CI, P-CI, 4-C3b ou E-C2a, et également (-1) pour le code m=1 rencontré en P-CI3.

On obtient une moyenne de (-1). Les erreurs de calcul ne sont donc globalement, pas très fréquentes.

- EXT correspond à la donnée d'un ensemble de solution en extension dans la résolution d'un système, notre hypothèse est que ce genre de réponse, plutôt qu'un système dont les équations sont indépendantes, peut ultérieurement être un facteur positif pour la mise en fonctionnement des concepts de générateurs et de dimension.

On définit une variable EXT sur 2 en comptant un à chaque code EXT, rencontré en I-CI ou 4-CI3.

La moyenne est de 0,47.

- INT caractérise les erreurs d'interprétation dans la résolution de système, c'est-à-dire des confusions entre paramètre et variables dans les discussions de cas, ou une mauvaise gestion des cas particuliers (oubli ou abandon).

Nous avons défini la variable INT sur (-2), en décomptant (-1) pour un code PARA ou INT rencontré en I-CI et (-1) pour le code CP rencontré en E-C2a. La moyenne est de (-0,79).

Nous avons ensuite fait une ACP sur ces 6 caractères, dont nous donnons les résultats numériques et graphiques en annexe J-4a.

L'axe 1 (47% de l'information) oppose globalement l'échec à la réussite.

L'axe 2 (25% de l'information) oppose la capacité à faire un calcul numérique (S1, DET, CAL) à la possibilité de contrôler le sens dans les activités de calcul algébrique (S2, INT), la variable EXT est pratiquement orthogonale à cet axe.

On obtient ainsi un plan principal contenant environ 72% de l'information et permettant de distinguer les étudiants selon leur niveau global en résolution de systèmes linéaires, leur dextérité dans les calculs et leur capacité à contrôler le sens de ces calculs (cf graphique commenté dans l'annexe J-4a).

On voit que les étudiants qui ont le mieux réussi, n'ont pas de difficulté avec le contrôle du sens, alors qu'il n'y a pas d'étudiant, même très bon calculateur qui ne réussisse vraiment, s'il ne maîtrise pas le sens (le quart de plan inférieur gauche est quasiment vide). Par contre les deux étudiants les plus globalement en échec (4f et 3e) sont ceux ayant les notes les plus basses à CAL (-3) et par ailleurs des notes très mauvaises à S1 et à DET. Enfin seul 6p, malgré des notes moyennes à S1 et DET et une erreur de calcul, réussit plutôt bien, tout en étant assez mauvais calculateur.

Il semble donc qu'un minimum de dextérité en calcul soit nécessaire pour ne pas échouer dans la résolution des systèmes linéaires alors qu'un bonne maîtrise du sens est la condition sine qua non d'une réussite franche dans ce domaine. Globalement, les difficultés au niveau du contrôle du sens (cf analyse des questions II-1 du DS1 et 2-a de l'examen) semblent être plus fréquentes que les difficultés d'ordre calculatoire (il y a plus d'individus dans le demi-plan inférieur).

Nous définissons, à partir de cette ACP, la variable sys1, en prenant, pour chaque étudiant, l'opposé de sa coordonnée sur l'axe 1. Cette variable qui est une combinaison linéaire des six de départ mesure globalement la réussite dans la résolution de système d'équation linéaire.

La variable sys2 est définie en prenant la coordonnée sur l'axe 2, c'est aussi une combinaison linéaire des six autres. Si sys2 est positive, l'étudiant a plutôt un meilleur contrôle du sens qu'il n'est bon calculateur et vice versa si elle est négative, la valeur absolue mesure l'étendue de l'écart.



Ces deux variables représentent donc à elles seules, 72% de l'information contenue dans les six autres, c'est ce que l'on peut faire de mieux avec deux variables seulement.

#### b- Les questions élémentaires d'algèbre linéaire

Dans ce thème, nous avons regroupé les premières questions faisant intervenir des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, dans un cadre simple où la tâche, souvent de type algorithmique ou "question de cours", est entièrement explicite.

- EL1 caractérise la réussite aux questions qui consistent à dire si un ensemble est un espace vectoriel ou un sous-espace vectoriel, ou si une application est linéaire. Ce sont les plus élémentaires que l'on puisse poser en algèbre linéaire (quoiqu'on sache qu'avec des espaces de suites ou de fonctions, elles peuvent révéler de grosses difficultés conceptuelles).

On définit une note sur 4 par :  $EL1 = 1-N2a + 1-N2c + P-N4a + 2N2$ .  
La moyenne est de 2,74.

- EL2 caractérise la réussite aux questions consistant à écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, ou à écrire la matrice dans une nouvelle base en donnant la matrice de passage et la formule de changement de base.

On définit une note sur 5 par :  $EL2 = V-NC2 + 3-N1 + 4-N2 + 3-N3b + E-N3b$ .  
La moyenne est de 3,66.

- EL3 caractérise la réussite aux questions où il faut voir si une famille, donnée explicitement, est libre ou génératrice ainsi qu'aux questions où l'on doit déterminer l'image d'une application linéaire. On n'a pas considéré ici les questions relatives à la détermination d'un noyau qui reviennent à une résolution de système linéaire.

On définit une note sur 5 par :  $EL3 = P-N3 + V-NA6 + V-NA7 + V-NC1 + 4(N1-0,5)$ .  
La moyenne est 1,76. Cette moyenne faible est dû à la difficulté de certaines questions du vrai/faux, cela montre aussi que des questions élémentaires d'algèbre linéaire dans un cadre un peu moins classique, mettent à rude épreuve la mise en fonctionnement des concepts.

Pour les procédures, on a défini les variables suivantes :

- GEN vaut (-1) si l'étudiant a le code GEN ou RGN à la question C2 du vrai/faux, c'est-à-dire si, pour montrer que trois polynômes forment une base d'un espace de dimension 3, après avoir vu qu'ils sont indépendants, il essaie de montrer que les polynômes sont générateurs, plutôt que d'utiliser un argument simple de dimension. Cette procédure est une maladresse de débutant.

On obtient une note sur (-1) dont la moyenne est (-0,37).

- RGN vaut (-1) si l'étudiant a le code RGN à la même question que précédemment, c'est-à-dire si, en essayant de montrer que les trois polynômes sont générateurs, il se contente de dire, perdu au milieu d'un discours sans consistance, que toute combinaison linéaire des trois est un polynôme de degré au plus deux et conclut. Cette erreur est, semble-t-il, assez récurrente dans ce genre de question.

On obtient une note sur (-1) dont la moyenne est (-0,23).

- MAL repère les maladresses commises dans les débuts d'algèbre linéaire. On décompose (-1) :

- Quand l'étudiant revient à la définition axiomatique des espaces vectoriel, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, au lieu de vérifier que l'ensemble est un sous-espace vectoriel (code 1-C2c).

- Quand l'étudiant emploie une méthode utilisant l'égalisation des coefficients ou une division illicite pour voir si une famille de polynômes est libre plutôt qu'une substitution de valeurs (code SYS ou DIV en V-CC1).

- Quand l'étudiant calcule la matrice du carré d'un endomorphisme en revenant à l'expression analytique, au lieu de faire le carré de la matrice (code RET en 3-C1).

On obtient une note sur (-2), dont la moyenne est (-0,21).

Comme précédemment, nous avons fait une ACP, sur ces 6 variables, dont les résultats numériques et graphiques sont donnés en annexe J-4b.

Comme toujours, l'axe1 (38% de l'information) oppose globalement la réussite à l'échec.

L'axe 2 (24% de l'information) est plus délicat à interpréter. Il oppose fortement RGN et GEN (côté positif) à EL2 (côté négatif). MAL et EL3 sont assez nettement respectivement du côté de RGN et GEN et du côté de EL2 ; alors que EL1 est quasiment orthogonal à l'axe.

De façon un peu schématique, cet axe semble donc opposer la réussite aux niveaux élémentaires 2 et 3 à des erreurs de maladresses (en comptant GEN et RGN comme des maladresses).

On obtient ainsi un plan principal regroupant environ 62% de l'information contenue dans les six variables de départ, et présentant la répartition des étudiants selon les deux axes précédents. Une tentative d'interprétation de la répartition des projections des individus dans ce plan est donnée en annexe J-4b.

On voit que la réussite à des causes moins tranchées que l'échec (dans la demi-plan gauche les individus sont en moyenne plus proche de l'axe 1). Les causes d'échec se partagent assez équitablement entre les maladresses et les difficultés plus réellement conceptuelles. Pourtant le poids des maladresses semble un peu moins fort, en effet les individus situés dans le demi-plan d'échec sont globalement situés plus vers le côté des échecs à EL2 et EL3 que vers les maladresses, alors les deux étudiants ayant fait le plus d'erreurs de maladresse (6k et 6r), s'en sortent globalement plutôt bien.

Ce résultat, qui demanderait à être confirmé, nous engagerait à l'indulgence envers les maladresses de débutants qui devraient disparaître d'autant qu'elles ne semblent pas perturber la mise en fonctionnement des concepts qui est une difficulté d'une autre nature.

Comme précédemment nous définissons deux variables  $\text{élé1}$  et  $\text{élé2}$ , en prenant les opposés des coordonnées sur les deux premiers axes principaux.

Ainsi  $\text{élé1}$  évalue globalement la réussite aux questions élémentaires en début d'algèbre linéaire, alors que  $\text{élé2}$  évalue la part des maladresses et de la compréhension des niveaux 2 et 3 (plus  $\text{élé2}$  est positive plus il y a de maladresses et meilleur est la compréhension des niveaux 2 et 3). Ces deux variables concentrent à elles seules 65% de l'information contenue dans les six variables de départ.

c- Les questions de techniques algébriques, autres que linéaires

Sous ce nom un peu vague, nous avons regroupé toutes les questions de transition qui interviennent dans un problème d'algèbre linéaire. Elles n'utilisent pas de concepts d'algèbre linéaire à proprement parlé, mais permettent d'obtenir des résultats intermédiaires utiles pour aborder les questions d'algèbre linéaire. Ces questions de synthèse dépendent fortement du cadre dans lequel est posé le problème, essentiellement de la nature de l'espace vectoriel en jeu (polynômes, suites, fonctions ...). Elles font en général appel à des techniques algébriques, par exemple relatives au calcul polynomial (DS1 et Partiel) ou au calcul intégral (DS2).

On définit une note ALG sur 8 par :

$$\text{ALG} = 1 \cdot \text{N2b} + \text{P-N1} + \text{P-N2a} + \text{P-N2b} + \text{P-N2c} + 2 \cdot \text{N1} + 2 \cdot \text{N3} + 2 \cdot \text{N3bis}$$

La moyenne est de 2,37.

Cette moyenne est très faible. Pourtant ce genre de question peut avoir une grande importance dans un problème. Par exemple pour le partiel ou le DS2, elles sont un passage obligé pour l'accès aux questions d'algèbre linéaire.

Il semble donc que les étudiants manqueraient de prérequis assez larges dans des domaines variés, que nous qualifierons au sens large de techniques de calcul algébrique, pour pouvoir bien faire de l'algèbre linéaire. En fait on voit, en regardant l'évolution des types de problèmes posés en algèbre linéaire au cours d'un enseignement (par exemple en regardant les devoirs de notre étude, mais cette tendance est très générale), que cette question est déournée. En effet au fur et à mesure que les concepts d'algèbre linéaire deviennent plus nombreux, les problèmes posés sont de plus en plus décontextualisés. Les espaces vectoriels de référence deviennent plus simples, il n'y a, en fait, plus réellement de cadre extérieur de référence. Cette attitude permet bien sûr de ne pas superposer les difficultés et de se concentrer sur les connaissances enseignées sur le moment, mais elle fait perdre aussi de

vue le côté unificateur de l'algèbre linéaire en restreignant le champ de ses applications.

On voit donc qu'il existe un hiatus entre les tout débuts de l'algèbre linéaire, où l'interférence avec des cadres algébriques extérieurs est inévitable, mais problématique, et le moment où les concepts linéaires sont assez consistants pour intervenir seuls dans des problèmes où les interactions avec un cadre extérieur sont écartées, mais dont on peut se demander l'utilité qu'ils ont.

d- Les questions de synthèse

Ce sont ces questions qui achèvent généralement un devoir, qui servent à faire le bilan de tout ce qui a été démontré avant, pour tirer la conclusion qui est le but (parfois implicite) de tout le problème. C'est souvent l'illustration du pouvoir unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire, quoique nous ayons vu lors de l'analyse des devoirs (cf DS1 question 2-f ou partiel question 5) que cette fonction des questions de synthèse est conditionnée à beaucoup de prérequis difficiles à obtenir.

On définit ainsi une note sur 4 par :

$$\text{SYNT} = 1 \cdot \text{N2f} + \text{P-N5} + \text{P-N4b} + 3 \cdot \text{N3a}$$

La moyenne est de 0,42.

Cette moyenne est très faible. L'accès à une question de synthèse est conditionnée à la réussite de pratiquement toutes les questions antérieures, ainsi qu'à une bonne vision d'ensemble du problème. Ceci explique qu'il est particulièrement difficile d'y parvenir.

On a vu, par exemple, qu'un seul étudiant (qui d'ailleurs n'est plus dans notre nouvel échantillon) a réussi la question 4-b du partiel. Donc en fait la note SYNT est calculée sur 3. Le spectre des notes est de fait très réduit, un étudiant a deux (c'est la meilleure note), six autres ont un et les douze autres ont zéro.

e- Les questions d'algèbre linéaire

Nous regroupons ici les questions d'algèbre linéaire, autres que les questions élémentaires, que nous avons déjà traitées en b). Les cinq premières variables ci-dessous définissent des compétences dans cinq domaines de connaissances distinctes, chacun représenté par au moins trois questions dans le corpus de devoirs dont nous disposons. Les trois dernières variables repèrent des procédures ou des fausses conceptions. Toutes ces variables sont déterminées en fonction des analyses faites pour chaque devoir, auxquelles nous renvoyons le lecteur pour plus de détails sur leur signification.

- L1B caractérise la réussite aux questions utilisant la notion de famille libre autrement que dans le cadre élémentaire de la question, où l'on demande de déterminer si une famille donnée explicitement est libre ou pas (cf EL3).

On définit une note sur 3 par :  $\text{L1B} = \text{V-NA1} + \text{V-NA2} + \text{V-NB1}$ .  
La moyenne est 1,53.

- **SOM** caractérise la réussite aux questions utilisant les notions de somme et de supplémentaire.

On définit une note sur 6 par :  $SOM = V-NA5 + V-NB3 + 3-N2c + 3-N2d$ .

La moyenne est de 2,68.

La question B3 du vrai/faux est réussie par un étudiant seulement, qui n'a pas réussi la question A5. On peut donc considérer que cette question est en fait notée sur 5. Nous rappelons que les questions 2-c et d sont liées et notées chacune sur 2, en prenant en compte la possibilité de déduction de l'une par l'autre.

- **RG** caractérise la réussite aux questions utilisant les notions de rang et de noyau d'une application linéaire, dans une tâche autre que celle élémentaire de recherche du noyau d'une application connue explicitement, qui correspond à une résolution de système.

On définit une note sur 3 par :  $RG = 3-N2a + 3-N2b + V-NB4$ .

La moyenne est de 2,21.

Il y a dans cette note deux types de questions très distinctes. Les questions 2-a et b, du DS3 sont en fait essentiellement calculatoires, il faut déterminer les bases de deux noyaux d'applications connues explicitement et donner leur rangs alors que la question B-4 du vrai/faux est une question très conceptuelle, posée dans un cadre très formel et qui a été massivement ratée. En fait seuls quatre étudiants ont obtenu 0,5 à N-B5, les autres ont eu zéro : on peut donc presque considérer que RG n'est formé que des questions assez calculatoires 2-a et b du DS3.

- **TRI** caractérise la réussite aux questions où il est demandé de montrer qu'un endomorphisme, donné par sa matrice est dont on a auparavant calculé les valeurs propres, est associé à une matrice triangulaire relativement à une certaine base que l'on demande d'explicitier.

On définit une note sur 2 par :  $TRI = 4-N4 + E-NAa$ .

La moyenne est de 0,55.

- **VP** caractérise la réussite aux questions relatives aux valeurs et aux vecteurs propres, autres que le cas élémentaire de leur recherche pour un endomorphisme donné explicitement. (nous avons quand même, inclus la question 2-a) de l'examen, qui à cause du paramètre offre une tâche plus délicate).

On définit une note VP sur 4 en ajoutant E-N2b et E-N3a et en comptant (+1) s'il n'y a pas le code LIB dans E-C3a (ce qui semble prouver que les étudiants ont compris que deux espaces propres distincts ont une somme directe), en comptant également (+1) s'il n'y a pas le code 2VP en 4-C3b (ce code repère les étudiants qui croient que l'ordre d'une valeur propre est toujours égal à la dimension du sous-espace propre associé).

La moyenne est de 2,95.

- **CTR** caractérise la capacité d'un étudiant à contrôler le sens de son travail, à prendre du recul par rapport au problème. Cette variable prend en compte les comportements montrant, par exemple par l'utilisation d'une simplification en rapport avec un résultat antérieur, que l'étudiant maîtrise le sens de sa démarche à travers les concepts d'algèbre linéaire.

On définit une note sur 4 en comptant 1 :

- Quand l'étudiant a le code EQ/DM en 3-C2b, avec (+1) supplémentaire s'il a le

code DIM. Dans ces cas, l'étudiant a utilisé le théorème du rang pour valider ou même pour déduire (code DIM) le rang connaissant le noyau ou vice versa.

- Quand l'étudiant a le code DED (ou GEOM) en 3-C2c ou 3-C2d. Ces deux cas sont exclusifs, ils signifient que l'étudiant a déduit que l'union des deux bases de sous-espaces est une base de l'espace du fait que ces deux espaces sont supplémentaires ou vice versa (ou bien a utilisé un raisonnement géométrique très adéquat).

- Quand l'étudiant a une note 4-N1 égale à 1,5, ce qui signifie qu'il a utilisé le théorème du rang pour déduire l'image d'un endomorphisme de la connaissance du noyau.

On obtient ainsi une moyenne de 1,47.

- **REC** évalue des erreurs qui consistent dans une démonstration à confondre l'hypothèse et la conclusion.

On définit une note sur (-3) en décomptant (-1) :

- Quand l'étudiant a le code REC en V-CA1.

- Quand l'étudiant a le code REC en V-CB1.

Ces deux cas correspondent à une difficulté à utiliser l'implication de la définition formelle d'une famille libre dans le courant d'une démonstration.

- Quand l'étudiant a le code MEL en E-C3a. Il n'arrive alors pas à écrire la relation vérifiée par le troisième vecteur de la base sur laquelle un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  à une matrice triangulaire, mélangeant les deux bases.

On obtient ainsi une moyenne de (-0,84). Ces erreurs ne sont donc, somme toute, pas très nombreuses.

- **AFI** repère les étudiants ayant des représentations affines qui interfèrent avec leur perception des concepts linéaires.

On définit la note AFI en comptant (-1) à un étudiant possédant le code AFI en V-CA.

On a une moyenne de (-0,26).

Nous avons ensuite fait une ACP sur les sept premières de ces nouvelles variables (nous avons laissé la variable AFI en illustratif, car elle nous a semblé d'une nature différente des autres, plus liée au contexte géométrique). Les résultats numériques et graphiques de cette analyse sont rassemblés en annexe J-3c.

Nous avons entouré dans la matrice des corrélations, les coefficients supérieurs, en valeur absolue, à 0,40. Il y en a cinq et ils sont tous positifs. Il semblerait donc que les différentes compétences ou procédures d'algèbre linéaire ne soit pas très corrélés les unes aux autres.

On trouve que LIB et CTR sont les deux variables globalement les plus corrélées aux autres. Les compétences sur les familles libres, semblent donc être un prérequis assez général, pour avoir de bonnes compétences globales en algèbre linéaire. Alors que de bonnes compétences dans tous les domaines d'algèbre linéaire sont sûrement une condition nécessaire pour pouvoir avoir un bon recul sur les problèmes et contrôler le sens de son travail.

Il est assez normal que les compétences en trigonométrie dépendent de celles relatives aux valeurs et aux vecteurs propres (0,53 de coefficient de corrélation entre VP et TRI).

L'axe 1 (35% de l'information) oppose, comme d'habitude, globalement la réussite à l'échec.

L'axe 2 (20% de l'information) oppose RG et REC (du côté positif) à TRI et, dans une moindre mesure, à SOM (du côté négatif) ; LIB, VP et CTR lui sont pratiquement orthogonales.

REC est liée à des difficultés de type conceptuel et de logique, et intervient à propos des notions de familles libre ou écriture matricielle d'endomorphisme, alors que, nous l'avons remarqué, RG teste surtout des compétences de type calculatoire (résoudre un système, trouver une base de l'espace des solutions, en déduire le rang d'une application), il n'y a donc pas a priori de proximité entre ces deux variables, si ce n'est que les concepts d'algèbre linéaire en jeu, sont d'un niveau médian pas trop élémentaires, mais pas non plus trop évolués.

TRI et SOM ont elles plus de familiarités, les compétences qu'elles testent utilisent des concepts parmi les plus évolués de ceux d'algèbre linéaire connus par les étudiants testés. De plus les questions où elles interviennent, bien qu'elles n'aient pas un caractère algorithmique, ne sont pas non plus posées dans un cadre formel (sauf un peu pour SOM la question V-A5 qui n'a pas un poids très lourd), elles interviennent dans un cadre numérique.

Ces deux tendances peuvent permettre de donner une signification un peu plus synthétique à l'axe 2, mais il faut rester prudent et ne pas trop se laisser tenter par l'amalgame.

L'axe 3 (19% de l'information) oppose SOM, CTR et dans une moindre mesure RG (pour le côté positif) à TRI et REC et à, dans une moindre mesure, LIB et VP (pour le côté négatif).

Il y a eu une inversion entre SOM et REC par rapport à l'axe 2.

Trois ou quatre variables aussi distinctes de chaque côté, cela semble trop pour obtenir une synthèse, par proximité, de la signification de cet axe. Nous nous contenterons d'interprétations prudentes en gardant toutes les variables telles quelles.

Les axes 2 et 3 représentent en fait pratiquement le même pourcentage d'information, ainsi les deux plans axel-axe2 et axel-axe3 sont aussi riches en information. Nous avons donc essayé de faire une interprétation de la répartition des individus dans chacun de ses deux plans (cf annexe J-4c).

Le premier plan semble montrer que l'échec n'est globalement pas plus lié aux variables RG et SOM qu'aux variables REC et TRI (les individus situés dans le demi-plan échec sont assez regroupés sur l'axe 2), avec toutefois une certaine prédominance des difficultés de confusion d'hypothèse ou relatives au rang d'un endomorphisme. La réussite est, par contre, assez nettement partagée entre les deux groupes RG et REC d'une part et SOM et TRI d'autre part. Il n'y a aucun étudiant ayant réussi dans les deux groupes et la réussite dans un domaine se fait toujours au détriment de l'autre.

De plus les étudiants ayant assez bien ou bien réussi se divisent équitablenent entre ceux qui n'ont pas commis de confusion entre hypothèse et conclusion et bien réussi les questions sur le rang et ceux ayant bien traité les questions relatives aux notions de somme et de supplémentaire et de trigonalisation de matrice, ces deux groupes étant disjoints.

Le deuxième plan présente une situation plus contrastée, tous les cas de figures sont en fait représentés. Numériquement, il semble cependant que les variables TRI, REC, LIB et VP sont plus souvent une source de réussite alors que que de mauvaises compétences dans ces domaines peuvent être la cause d'échec très net (cf étudiant 3h). A contrario, ceci peut vouloir dire aussi qu'il est assez fréquent de réussir assez bien en algèbre linéaire, même en n'ayant pas un bon recul sur les tâches à accomplir et en n'étant pas très compétents sur les questions de rang de somme et de supplémentaire.

Nous définissons, à partir de cette analyse, trois nouvelles variables AL1, AL2 et AL3 en prenant respectivement l'opposée de la coordonnée sur l'axe 1 et les coordonnées sur les axes 2 et 3. Nous obtenons ainsi avec trois variables qui regroupent environ 72% de l'information contenue dans les sept variables de départ. Les significations de AL2 et AL3 risquent par contre de ne pas être très maniables.

#### f- Le calcul matriciel

Nous avons regroupé ici les questions de calcul sur des matrices en ne prenant en compte éventuellement que l'étape finale d'une question, où la matrice est traitée comme un objet algébrique de façon quasiment indépendante de la représentation d'un endomorphisme. Ce sont essentiellement des questions de calcul de puissance même ou de décomposition en somme de deux matrices dont les puissances mêmes sont simples.

On définit une note CMAT sur 4 par :  $CMAT = 3N3c + E-N3c + E-n4 + E-N5b$ .

La moyenne est de 1,71.

Il ne faut pas oublier que dans notre analyse, ces questions sont des questions de synthèse donc dépendent de questions antérieures relatives à des calculs vecteurs et valeurs propres et de trigonalisation.

#### 2- les corrélations globales

Nous venons de définir vingt-trois nouvelles variables regroupées par thèmes, dont nous avons analysé les corrélations à l'intérieur des thèmes.

Nous donnons en annexe J-4d, la matrice des corrélations entre les vingt-trois variables, avec, pour faciliter la lecture, une matrice où n'apparaissent que les corrélations de valeur absolue supérieure à 0,5 (elles sont toutes positives) et une autre où n'apparaissent que les corrélations de valeur absolue supérieure à 0,3 (les coefficients négatifs sont entourés).

Les variables AFG et RG donnent des résultats un peu surprenants, puisqu'elles sont souvent assez fortement corrélées négativement avec les autres. Ceci n'a guère de signification et nous préférons écarter ces deux variables de la suite de notre analyse. Il ne reste ainsi qu'un seul coefficient négatif de valeur absolue supérieure à 0,3, c'est celui entre RGN et SI qui vaut (-0,31). Ces deux variables n'ont pas a priori de familiarité, et ce coefficient n'a pas non plus beaucoup de signification.

Globalement EL1 est la variable la plus fortement corrélée à toutes les autres. Il semblerait donc que les premières questions élémentaires d'algèbre linéaire (démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ou qu'une application est linéaire) d'une part dépendent de beaucoup de prérequis (corrélation avec les variables de résolution de systèmes linéaires ou avec ALG) mais aussi qu'elles conditionnent assez fortement la suite des performances en algèbre linéaire, les plus fortes corrélations sont pour les prérequis, avec les techniques algébriques, et pour les autres, avec les questions relatives aux valeurs et aux vecteurs propres et à la trigonalisation.

Les variables EL2 et EL3 sont surtout assez fortement corrélées entre elles et à EL1, ainsi qu'aux variables relatives aux questions plus évoluées d'algèbre linéaire. Ainsi les questions que nous avons qualifiées d'élémentaires jouent le rôle de prérequis en algèbre linéaire. Par contre elles semblent elles-mêmes peu conditionnées par les questions de résolution de systèmes linéaires. Les erreurs de maladresse dans ces questions élémentaires semble par ailleurs n'avoir d'influence qu'à court terme, puisque MAL n'est significativement corrélée qu'à LIB et SOM et encore avec des coefficients de 0,35, donc assez faibles. De même, GEN est corrélée, avec des coefficients du même ordre à LIB, VP et TRI.

RGN par contre, à part un coefficient de 0,42 avec VP, ne semble pas avoir d'impact sur les compétences en algèbre linéaire. Avec un coefficient de (-0,06), elle n'est même pas liée à REC, dont on aurait pu croire qu'elle testait une procédure assez semblable, en effet croire démontrer qu'une famille est génératrice en montrant que toute combinaison linéaire déléments de la famille est dans l'espace (RGN) est aussi une confusion entre hypothèse et conclusion (REC). En fait il semble que ce genre de réponses, plus qu'une procédure correspondant à un dysfonctionnement précis, soit un effet du contrat pédagogique, qui fait que certains étudiants dans certaines circonstances se sentent obligés de donner une réponse à la question ou de démontrer que ce qu'on leur demande est vrai, à tout prix. Face à une telle contrainte, s'il n'ont pas les moyens de donner une réponse exacte, ils écrivent "n'importe quoi", c'est-à-dire qu'ils donnent une explication pseudo-savante dénuée de rapport avec la question, c'est ce qu'on peut appeler un comportement de type "la fin justifie les moyens". Ainsi par exemple, pour montrer qu'une famille est génératrice, si l'étudiant ne voit pas comment aborder

la question mais sent un besoin impératif de donner une réponse, il se raccroche à une combinaison linéaire, et cela produit l'erreur vue plus haut. On comprend mieux dans ces conditions la mauvaise corrélation de la variable RGN et même celle de REC avec les autres, puisque ce comportement n'a rien de spécifique ni à la logique ni à l'algèbre linéaire.

Faire des erreurs de calcul (CAL) dans la résolution de systèmes d'équations linéaires semble corrélé avec de mauvaises compétences dans les toutes premières questions d'algèbre linéaire (EL1), surtout avec le fait de faire des maladresses (MAL), et également avec des problèmes dans les questions de trigonalisation (TRI) (aboutissant de plusieurs tâches calculatoires, où les erreurs peuvent être fréquentes). Mais cela ne semble pas très corrélé au reste des questions d'algèbre linéaire. On pourrait donc distinguer, avec la variable CAL, un type d'étudiants faisant des erreurs de calcul ou des maladresses, ceci n'ayant pas d'influence trop néfaste sur le reste des compétences.

Par contre les performances dans la résolution de systèmes d'équations linéaires (S1 et S2) sont corrélées en plus avec le calcul matriciel et, seulement pour les systèmes dépendant d'un paramètre, avec les questions sur les familles libres et sur la somme et les supplémentaires. De plus les erreurs d'interprétation semblent avoir une influence dans les domaines relatifs aux valeurs et vecteurs propres.

Il apparaîtrait donc que bien savoir résoudre des systèmes d'équations linéaires soit un prérequis pour de nombreux domaines d'algèbre linéaire. On peut voir ici aussi un effet de seuil. En effet les résolutions numériques ont un effet direct sur la réussite puisque ce sont des outils dans de nombreuses questions d'algèbre linéaire. Par contre même si cette remarque est aussi valable pour les systèmes dépendant d'un paramètre, il semble que les procédures en jeu aient un effet plus complexe sur l'acquisition d'autres notions d'algèbre linéaire. Ainsi plus que l'acquisition de certains points, c'est bien un niveau global minimum qui paraît être requis dans la résolution des systèmes linéaires, pour mieux réussir en algèbre linéaire.

Les compétences en techniques algébriques sont fortement corrélées (coefficients supérieurs à 0,4) à pratiquement toutes les questions d'algèbre linéaires qui n'ont pas trait aux applications linéaires ou au calcul matriciel. Ceci s'explique sûrement pour la raison que nous avons explicitée plus haut : les problèmes assez "évolués" d'algèbre linéaire (donc surtout ceux où interviennent des applications linéaires et le calcul matriciel) sont décontextualisés, il n'y a plus d'utilisations des espaces vectoriels de polynômes, de fonctions ou de suites, qui nécessitent des compétences techniques dans ces domaines. Par contre dans les questions relatives aux notions de familles libres, de somme et de supplémentaire, ou dans les questions de synthèses, des compétences

techniques en calcul algébrique sont requises comme préliminaires.

On retrouve à peu près les mêmes gros coefficients de corrélation pour les questions de synthèses. Ces questions interviennent en effet également dans les problèmes où l'algèbre linéaire est un outil opérant dans un cadre extérieur, la réussite à ces questions est alors conditionnée par celle aux questions antérieures, qui touchent aux domaines énumérés précédemment.

La variable du calcul matriciel est assez fortement corrélée d'une part aux compétences en résolution de systèmes linéaires, et d'autre part aux questions élémentaires d'algèbre linéaire, elle est peu corrélée avec les questions de techniques algébriques et avec assez peu des variables de l'algèbre linéaire plus évoluée (surtout SOM et TRI). Il semblerait donc que le calcul matriciel soit une branche un peu à part dans l'algèbre linéaire qui possède des prérequis communs, mais développe des compétences indépendantes.

Voilà les grandes lignes d'hypothèses que l'on peut tirer d'une telle matrice.

### 3- ACP sur les nouvelles variables

Comme nous l'avons remarqué précédemment il est fort délicat de faire une ACP sur un nombre trop élevé de variables. Pour réduire ce nombre nous avons défini plus haut de nouvelles variables à partir des axes principaux de certaines ACP, qui condensent au mieux l'information contenues dans plusieurs autres.

Nous nous proposons de faire maintenant une ACP sur les dix variables : sys1, sys2, ele1, ele2, ALG, SYNT, AL1, AL2, AL3 et CMAT.

Les résultats de cette analyse sont donnés avec quelques commentaires en annexe J-5.

L'interprétation est en fait très délicate. Sauf peut-être pour permettre de mieux visualiser les grandes lignes de ce que nous venons de voir, il ne nous a pas semblé possible de tirer beaucoup d'informations nouvelles vraiment fiables. Nous nous contenterons donc essentiellement pour ce chapitre, de ce qui est donné en annexe.

### 4- Corrélations avec le prétest

Nous allons maintenant regarder comment les variables liées aux thèmes, ainsi que les sept nouvelles (que nous avons définies avec les axes principaux des trois ACP réalisées ci-dessus), sont corrélées avec les prérequis de logique.

Nous donnons en annexe J-6, la matrice des corrélations entre les trente nouvelles variables et celles du prétest, ainsi que la position de ces trente variables dans le plan principal de l'ACP sur les variables du prétest tel qu'il a été défini en annexe J-2.

Les variables de résolution de systèmes linéaires ne sont pas très bien corrélées au prétest. La corrélation est un peu plus forte avec S2 qu'avec S1, mais celle avec INT est au contraire très faible. De même sys1 est moyennement corrélée et sys2 l'est assez peu. Il semble peu probable que les prérequis de logique aient une influence directe sur les capacités des étudiants à résoudre un système linéaire numérique et la corrélation que l'on trouve n'est sûrement liée qu'à un état de réussite ou d'échec global. Par contre, on aurait pu penser que les capacités d'interprétation et de discussion de cas soient plus influencées par les compétences en logique, ce que nos résultats ne semblent nullement confirmer (mauvaise corrélation de INT et sys2).

On remarquera que le fait d'écrire les ensembles de solutions de systèmes linéaires en extension (EXT) semble être assez lié à des compétences en logique, mais on n'a pas vu précédemment de corrélation entre ce type de procédure et des compétences en algèbre linéaire.

Les compétences dans les questions élémentaires d'algèbre linéaire ont dans l'ensemble des corrélations assez fortes avec la logique, sauf pour les maladroites. Le poids de la logique semble être donc assez fort dans les premières questions d'algèbre linéaire et semble agir de façon indépendante des erreurs de maladresse.

Les corrélations avec RGN sont toutes très faibles (sauf celles avec EQ1 qui est négative!) alors qu'on aurait pu pensé que justement ce genre d'erreur soit fortement lié à des capacités en logique... Mais il faut se rappeler que RGN correspond en fait à deux erreurs superposées, si bien que la mauvaise démonstration du caractère générateur n'est répétée que sur les étudiants ayant déjà commis l'erreur GEN. Nous resterons donc très réservé sur ce point.

Les compétences en techniques algébriques ont des corrélations globalement fortes avec les variables du prétest de logique. Y a-t-il entre les deux types de compétences une relation de cause à effet ? Cela ne semble pas évident a priori et si c'est le cas elle ne pourrait sûrement pas, à elle-seule, expliquer de si forts coefficients. Une autre raison partielle, peut venir de la nature des problèmes qui nous ont servi à évaluer ALG. On n'a pas en effet évalué les compétences en techniques algébriques de façon neutre mais à l'intérieur de problèmes d'algèbre linéaire assez formels où le poids de la logique a pu intervenir de façon détournée.

Cette forte corrélation est un point intéressant qui pourrait peut-être nous permettre de mieux cerner la nature des prérequis nécessaires à l'algèbre linéaire. Ceux-ci ne consisteraient-ils pas, plutôt qu'en un peu de logique et un peu de techniques algébriques, en des compétences dans les questions où les deux (logique et techniques algébriques) sont indissociables ? Ceci expliquerait mieux, semble-t-il les corrélations que l'on trouve entre les techniques algébriques et la logique ou entre ces deux domaines et les compétences en algèbre linéaire.

Les questions de synthèses sont également assez fortement corrélées au prétest. Ces questions étant elles-mêmes très corrélées à beaucoup d'autres, ce résultat n'est pas un fait très marquant.

Le calcul matriciel n'est qu'assez peu corrélé à la logique. Ce résultat ne nous surprend pas, les compétences requises ici sont plutôt de type calculatoires (cf la corrélation avec les questions sur la résolution de systèmes linéaires).

Globalement la corrélation entre les questions "évoluées" d'algèbre linéaire et la logique est assez forte, cela se voit en regardant les corrélations avec AL1, qui sont souvent supérieures à 0,45 en valeur absolue. Les types de questions les plus corrélés sont celles sur les familles libres, sur les sommes et les supplémentaires et sur la trigonalisation. Les questions sur les valeurs et les vecteurs propres ou sur le rang le sont moins.

Le contrôle du sens ne semble que moyennement dépendre de la logique.

Les erreurs de confusion entre hypothèse et conclusion ont des corrélations plutôt faibles avec la logique, ce qui, comme nous l'avons déjà remarqué à propos de RGN, peut provenir d'un comportement de type "à fin justifie les moyens". Il se peut aussi que l'algèbre linéaire soit le terrain de difficultés proches de celles rencontrées en logique mais qui ont un caractère spécifique non directement lié à des compétences en logique hors le cadre de l'algèbre linéaire.

Ce dernier résultat sur la nature des prérequis de logique pourrait, dans un sens s'ajouter à notre remarque à propos de ALG. En effet certaines compétences en logique semblent revêtir un caractère très spécifique dans le cadre de l'algèbre linéaire et ne pouvoir de fait être seulement évaluées dans un contexte "neutre". Ainsi l'utilisation de la définition formelle d'une famille libre, par exemple, semblerait être liée à la mise en fonctionnement de compétences de logique, mais celles-ci pourraient bien être trop particulières pour pouvoir être défrichées de façon préalable, dans un autre cadre.

Sur ce point précis, il est important de remarquer que la définition d'une famille libre peut être expliquée par une succession d'étapes qui

semblent permettre de mieux en comprendre la nécessité. En effet, la dépendance linéaire est sûrement une notion conceptuellement plus accessible, puisqu'elle découle directement de la définition d'une combinaison linéaire. Il est facile alors de définir une famille liée comme une famille dans laquelle un élément est combinaison linéaire des autres. Il ne reste plus alors qu'à définir une famille libre comme une famille qui n'est pas liée. Ce point de vue va en quelque sorte à rebrousse poil de la présentation "classique" qui est faite de cette notion aux étudiants. Son inconvénient majeur est que l'on n'aboutit pas à une définition exploitable, en terme de résolution de problèmes, d'une famille libre, mais elle a l'avantage non négligeable de privilégier le sens, en évitant ainsi aux étudiants l'introduction un peu abrupte d'une définition très formelle qu'ils ont du mal à faire fonctionner. Le travail nécessaire pour reconstruire ensuite cette définition formelle est en fait un pur problème de logique, qui associe des quantifications, une implication et une négation avec l'interaction du cadre formel et de celui d'un langage plus usuel. Cela utilise donc a priori des compétences évaluées lors du prétest, mais plus ou moins séparément. Surtout cette démarche comprend en plus un enjeu, il est facile en effet de voir que vérifier qu'aucun vecteur d'une famille n'est combinaison linéaire des autres, n'est guère possible tel quel, au delà de trois vecteurs. Ainsi le formalisme apparaît comme le prix à payer pour pouvoir résoudre en pratique des problèmes concrets, car c'est bien là en effet l'intérêt de cette définition.

Voilà donc une activité mettant en œuvre essentiellement des compétences de logique, mais dans un cadre lié à l'algèbre linéaire, qui la rend très spécifique. On peut ainsi mieux comprendre comment l'acquisition de prérequis en logique peuvent ne pas suffire à surmonter toutes les difficultés liées au formalisme de l'algèbre linéaire. Nous pensons également avoir montré sur cet exemple comment on peut aller, avec profit, dans une même activité, de la logique et de l'algèbre linéaire.



### III. Quelques réflexions en guise de conclusion

#### 1) Résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire

##### a. Les tâches

Nous avons montré en introduction comment la nature des concepts d'algèbre linéaire nous semble conduire à un enseignement dichotomique où coexistent des problèmes développant des "techniques-objets" dans un cadre purement formel et d'autre part des problèmes concrets qui requièrent des aptitudes dans l'utilisation de techniques algébriques parfois pointues et où les concepts d'algèbre linéaire ne sont pas absolument nécessaires, mais utilisés par un effet de contrat, faute de voir la généralisation ou la simplification qu'ils apportent.

Les analyses précédentes ont permis de mettre à jour cette dichotomie à travers la nature des sujets abordés. On voit clairement que c'est d'abord la deuxième catégorie de devoirs qui est rencontrée. C'est le cas du deuxième exercice du DS1, du Partiel et du DS2. (Dans le deuxième exercice du DS4, l'espace de référence est un espace de polynômes, mais toutes les questions sont transposables telles quelles dans  $\mathbb{R}^3$ , elles restent très formelles et il n'y a jamais réellement de changement de cadre à gérer, enfin le problème n'aboutit pas à une application aux polynômes).

Dans chacun de ces trois problèmes on a pu constater une ou plusieurs difficultés de nature technique non directement liées à l'algèbre linéaire, et qui ont empêché un grand nombre d'étudiants d'accéder à une résolution satisfaisante, voire à une résolution tout court, du problème de départ. Pour le DS1, d'une part beaucoup d'étudiants ont eu du mal à montrer correctement que si  $\mathcal{P} = (P/P(0) = P(1) = P'(0) = P'(1) = 1)$  et si  $P_0$  est un polynôme quelconque de  $\mathcal{P}$ ,  $q = \{P - P_0 / P \in \mathcal{P}\}$  est l'ensemble des polynômes dont les valeurs (ainsi que celles de leur dérivée) en 0 et 1 sont nulles. Cette difficulté est liée à une inaptitude à utiliser correctement le langage ensembliste et la logique. D'autre part une maladresse quasi générale a consisté à résoudre un système linéaire  $4 \times 4$  pour déterminer  $q$ , alors qu'un minimum de connaissances sur les polynômes suffit pour déduire sans calculs que c'est l'ensemble des multiples de  $X^2(X-1)^2$ . Pour le partiel, la difficulté est venue d'une part du calcul de  $\Delta U_k$ , qui était un banal calcul algébrique sur des expressions polynomiales -mais compliqué par une discussion portant sur deux indices-, et d'autre part de la nécessité d'une récurrence pour montrer qu'une famille de polynômes est génératrice. Enfin dans le DS2, l'utilisation de polynômes à deux variables et de résultats sur l'intégration a handicapé beaucoup d'étudiants.

Par ailleurs le DS1 et le Partiel présentent des résolutions de problèmes d'interpolation, qui peuvent être vues comme des simplifications, à condition de comprendre qu'elles offrent une méthode générale utilisable telle quelle, avec d'autres données numériques, et généralisable à des problèmes voisins. Pourtant les problèmes ne sont pas présentés dans cette optique, aucun commentaire métamathématique ne les accompagne. Aussi dans les deux cas les étudiants sont en grosse majorité passé à côté de l'intérêt. Dans le premier cas, ils ont résolu un système  $4 \times 4$  quasiment aussi "difficile" que celui que le cheminement induit par les questions leur faisait éviter et dans le deuxième cas, ils n'ont pas vu du tout l'utilisation possible de la formule de Gregory et ont répondu à la dernière question de façon entièrement indépendante du reste du problème. Dans le DS2, la problématique est plus interne à l'algèbre linéaire, pourtant on peut dire que les étudiants ont également majoritairement répondu à côté. Ils n'ont pas compris le sens de l'activité qu'on leur proposait, si bien qu'arrivés à la question finale, ils ont entièrement oublié le contexte dans lequel ils travaillaient et ont donné une réponse fautive, faute de maîtriser la situation et d'avoir le recul nécessaire par rapport aux activités précédentes qui ont pu être traitées comme des îlots indépendants.

Dans ces cas, l'utilisation de l'algèbre linéaire n'est qu'un effet du contrat général qui veut qu'on utilise dans les problèmes les notions en cours d'apprentissage, ou tout simplement, est explicitement demandée dans une question. Mais le côté simplificateur et unificateur des concepts échappe complètement. L'activité devient entièrement artificielle et l'approche épistémologique est impossible.

En revanche, dès le DS3, et déjà dans le test "vrai/faux" qui est d'une nature un peu spécifique, les problèmes se situent entièrement dans des espaces très généraux. Singulièrement cette tendance est irréversible et après les quelques tentatives d'applications de l'algèbre linéaire à d'autres domaines des premiers devoirs, les questions des devoirs suivants ne visent plus que l'utilisation purement interne des concepts dans un contexte très général.

Or particulièrement dans le test "vrai/faux", ou dans les tentatives de trigonalisation, on a pu voir comment les questions ne faisant intervenir que le cadre purement formel sont sources de réponses apparemment incohérentes dont on a l'impression que seule la pression de l'obligation à donner une réponse peut les justifier, ce que nous avons appelé un comportement du type "la fin justifie les moyens". D'autant que dans ces conditions l'enseignement lui-même se trouve paraître plus valorisant, pour l'enseignant comme pour ses étudiants.



Mais parallèlement à ces résultats, nos dernières analyses ont mis à jour une dualité dans les types de tâches, qui se superpose à la précédente. Schématiquement le premier type concerne des tâches calculatoire ou algorithmique, la trame de la question est connue de l'étudiant, seules les données sont nouvelles, le deuxième type concerne les questions plus conceptuelles où la tâche ne correspond pas à un raisonnement stéréotypé, mais nécessite une bonne connaissance intrinsèque des concepts souvent dans plusieurs cadres. Dans ces questions la part créative de l'étudiant est plus grande, outre les problèmes de dévotion, il y a de forts risques de dérapage et de perte de sens. Cette distinction, contrairement à la précédente ne semble pas être spécifique à l'algèbre linéaire. Elle est plus un effet pervers du contrat pédagogique global, en particulier des options d'évaluation. La nécessité d'évaluer par un spectre de notes classant les étudiants selon des critères tranchés pousse toujours en effet à privilégier les calculs et les techniques algorithmiques au détriment de points plus conceptuels dont la mise en fonctionnement est difficilement évaluable.

Les diverses difficultés issues de ces deux dualités conduisent l'enseignement de l'algèbre linéaire à se réduire rapidement à des problèmes d'une part où il n'est plus fait référence à un cadre extérieur, donc à une vraie problématique, mais aussi où l'utilisation du formalisme est réduite, puisqu'enfin il ne s'agit plus ou moins que d'appliquer des algorithmes bien ciblés, à quelques variantes près. Ce constat est un peu sévère mais à peine exagéré. On a vu que les problèmes posés dans des cadres concrets engendrent des difficultés liées à des prérequis de techniques algébriques et que les problèmes trop formels conduisent à une perte de contrôle du sens par les étudiants qui sont prêts à écrire "n'importe quoi" pour donner une réponse. On comprend dans ces conditions l'évolution inéluctable que subissent les sujets des problèmes et le soulagement que peuvent ressentir les enseignants quand ils peuvent enfin aborder des questions de diagonalisation et de trigonalisation.

#### b - Les évolutions individuelles

Ceci dit, l'enseignement et les problèmes étant ce qu'ils sont, avec ces difficultés, quelles sont les grandes hypothèses que l'on peut avancer sur le comportement des étudiants en fonction des tâches proposées et des connaissances antérieures ?

Avant de donner, en réponse à cette question, une synthèse des résultats précédents, signalons qu'un travail intéressant serait de retracer pour chacun des dix-neuf étudiants une histoire abrégée et commentée de leur parcours en algèbre linéaire, à partir des données recueillies. Néanmoins cette tâche qui demande beaucoup de temps, n'a pas forcément sa place dans l'étude présente déjà bien longue, nous espérons toutefois que ce pourra en être un prolongement dans un avenir très proche.

La nature des compétences antérieures dans le domaine de la logique élémentaire semble avoir un effet sur la réussite globale en algèbre linéaire. Les deux domaines ne sont pas cependant dans une situation de transfert direct, il apparaît que dans le niveau d'acquisition des connaissances antérieures en logique, il existe un seul global au delà duquel les chances de réussite en algèbre linéaire deviennent plus élevées. On peut penser qu'alors s'opère une transformation du quantitatif vers le qualitatif. L'important est de ne pas avoir de "trou" dans les connaissances antérieures, au delà d'un certain minimum de compétences dans le domaine de la logique élémentaire (le quantitatif), un réinvestissement peut s'opérer qui permet d'accéder à une connaissance nouvelle en algèbre linéaire donc plus fine, hiérarchiquement plus élevée (le qualitatif). Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve peut-être ici une interprétation proche de l'idée piagétienne sur l'acquisition des différentes facettes d'un schème comme prérequis à l'acquisition du schème lui-même. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, ce résultat va à l'encontre d'une idée couramment répandue, qui veut que les connaissances s'acquière par petits pas successifs, de proche en proche. Nous pensons plutôt et nos résultats semblent le confirmer que l'apprentissage est fait de ruptures et de sauts, qu'alternent des périodes de déséquilibre et de rééquilibration permettant aux connaissances de s'organiser selon des processus plus complexes que la simple progression linéaire (cf [1]).

Par ailleurs, certaines difficultés en algèbre linéaire, a priori très liées à des compétences de logique, ne semblent pas être mieux résolues par les étudiants ayant les résultats les plus élevés au prétest de logique. On peut donc penser qu'indépendamment du constat précédent, un enseignement préalable de la logique ne résoud pas tous les problèmes liés au formalisme de l'algèbre linéaire et que certaines questions de logique ne seront abordées avec profit que dans le cadre de l'algèbre linéaire (cf p.141 à propos de la définition d'une famille libre).

La nature des problèmes d'algèbre linéaire favorise les erreurs du type "la fin justifie les moyens". La perte de contrôle du sens et le manque de recul sont des difficultés générales à toute activité mathématique, mais elles deviennent particulièrement fortes ici. D'une part dans les problèmes formels où les appuis ne sont pas solides et les dérapages fréquents. Mais aussi dans les problèmes faisant référence à un cadre concret où la démarche est induite par les questions mais jamais explicitée par un discours métamathématique, et où il s'agit plus, finalement, de faire de l'algèbre linéaire (contrat) que de résoudre des problèmes.

Sur le plan individuel, on remarque qu'il existe des comportements très variés. Il faut distinguer la réussite aux problèmes algorithmisés, où l'aspect calculatoire est fort, et la réussite moins facilement évaluable à des questions mettant en jeu des connaissances plus conceptuelles. Les

deux aspects ont des influences sur la réussite apparemment assez équilibrées mais aussi quasi indépendantes (cf pp. 123-125). Un minimum de connaissances antérieures en logique mais aussi dans des domaines de techniques algébriques sont des facteurs favorables à la réussite au niveau conceptuel. Les compétences dans la résolution des systèmes d'équations linéaires semblent avoir une influence directe sur le côté calculatoire mais aussi, pour les systèmes avec paramètre, une influence plus profonde et qui agit sûrement à des niveaux très divers sur de nombreuses compétences en algèbre linéaire. Le contrôle du sens nécessaire pour mener à bien une discussion de cas dans une telle résolution pourrait donc apparaître comme un bon début pour aborder le côté formel des concepts plus évolués d'algèbre linéaire. La nature des tâches et le spectre assez large des prérequis exigibles selon différents types de questions, rendent les possibilités de réussites et d'échec en algèbre linéaire fort complexes.

Les remarques qui précèdent sont dans une certaine mesure le constat de l'échec d'un enseignement qui, ne pouvant assurer une bonne mise en fonctionnement des premiers concepts, dans leur aspect le plus fort, se réveille dans des tâches algorithmisées et calculatoires. Pour surmonter cette difficulté, il pourrait être utile de jouer sur les prérequis. Mais nous avons vu que cela ne suffira sûrement pas. Enseigner de la logique hors contexte est un point délicat et c'est un sujet que l'on épuise vite. Par ailleurs les techniques algébriques nécessaires dans les divers problèmes d'algèbre linéaire sont tellement diversifiées et en même temps si ponctuelles, que l'on voit mal comment organiser, de façon rationnelle, un enseignement préalable profitable de ces notions. La résolution des systèmes d'équations linéaires, principalement quand ils dépendent d'un paramètre, pourrait par contre se prêter tout à fait à un enseignement préalable qui peut être une bonne introduction à un cours d'algèbre linéaire.

#### e- Critiques méthodologiques

##### Portée et limite de nos données et de nos résultats

Les quelques remarques qui précèdent, sont le fruit de notre étude, ce qui fait quelles sont la conséquence directe de la nature de notre analyse. Or il nous faut ici, en en faisant la critique, rappeler les limitations que nous imposent les données qui sont à la source de ce travail aussi bien que la méthodologie employée. Tout d'abord les prérequis que nous testons à travers le prétest ont été l'objet d'un choix arbitraire qui aurait pu être tout autre (autres questions de logique, plus de question d'algèbre etc...) pourtant ils conditionnent de nombreux résultats de nos analyses de façon très forte. On aurait également pu envisager d'évaluer des compétences en géométrie analytique en guise de prérequis. En effet après notre travail, la question des rapports entre

les compétences en géométrie analytique et en algèbre linéaire reste entière, faute d'avoir les moindres données de nos étudiants dans le premier domaine. C'est pourtant un point qui mériterait d'être éclairci.

De plus le choix des sujets des problèmes concernés par notre évaluation aurait pu être très différent tout en restant représentatif... Nous n'avons pas utilisé, volontairement, de moyen de contrôle sur le contenu des épreuves pas plus que sur leurs conditions de passage. En particulier la mixité des sujets (analyse/algèbre) est un facteur dont on ne peut mesurer les effets. Il est bien évident que ces restrictions limitent d'autant la portée de notre analyse et donc de nos résultats

Par ailleurs même si nous avons essayé de répertorier des procédures et si nous ne nous sommes pas contenté de seulement noter les réponses, et même si nous avons employé pour le prétest la technique d'évaluation par bloc (qui est d'ailleurs un choix), nous ne pouvons toujours pas réellement distinguer dans nos analyses apprentissage et réussite. Or s'il y a certainement de grands rapports entre les deux notions, il est assez clair que la réussite n'est qu'une apparence d'un apprentissage ; nous touchons là une question méthodologique de fond, qu'il nous semble illusoire de pouvoir résoudre dans l'état actuel. Tout au plus devons-nous nous contenter de réduire le décalage en allant chercher au delà des simples réponses, les comportements, les procédures qui les ont motivées. La nature figée des réponses écrites est néanmoins une barrière incontournable qui en limite les possibilités d'analyse.

Il est bien clair également que la réduction aussi bien que l'instabilité dans les différents échantillons testés à chaque devoir, par rapport à la population initiale, dont on a recueilli les données au prétest, est un point faible de notre étude. Nous pensons à posteriori, qu'on pourrait un peu réduire cette difficulté, mais les problèmes logistiques (photocopies, présence des étudiants etc...) restent incontournables et il ne paraît guère possible en gardant l'optique d'une analyse brute comme la nôtre, d'améliorer beaucoup ce double effet de perte et de rétrécissement dans les données.

Le choix des méthodes statistiques utilisées, quant à lui, a bien sûr conditionné nos résultats. A contrario, c'est en fonction de ce que nous voudrions regarder que nous avons mis en place ces outils.

Les tableaux croisés, réalisés après chaque devoir, sont une façon assez simple de se donner une idée et une appréciation visuelle des corrélations entre le prétest et les devoirs, cependant ils ne portent que sur la note globale à chaque devoir et ne donnent donc que des renseignements généraux. Les méthodes statistiques plus sophistiquées telles que les ACP, que nous avons utilisées à la fin, permettent de donner des renseignements plus fins. On se heurte pourtant à deux types de problèmes et de limitations dans ce genre d'étude :

- Tout d'abord, le choix des variables actives d'une part et représentatives d'autre part est primordial, il induit plus ou moins les réponses et limite les interprétations possibles. Il doit donc être motivé par un résultat préliminaire que l'on cherche à confirmer ou même une impression que l'on cherche à préciser. La quantité des possibles est immense dès que l'on a assez de données et s'il faut savoir tirer le maximum d'information, il faut aussi savoir se limiter pour ne pas être submergé sous les résultats.

- Le deuxième problème vient justement de la difficulté que l'on a à interpréter ces résultats. La richesse des informations que l'on peut tirer d'une ACP en rend la lecture fort difficile et parfois ambiguë. On sait bien comment les réductions successives peuvent conduire à un appauvrissement, puis à une sur-interprétation des résultats finaux. Encore une fois il faut savoir ici tirer les informations intéressantes, sans dépasser les limites de la fiabilité.

Il nous serait délicat de juger si nous avons pu surmonter ces deux difficultés. Le lecteur aura peut-être eu l'impression que nous avons rempli beaucoup de tableaux, dessiné beaucoup de graphes, pour ne donner que des conclusions qui demanderaient encore des compléments. Nous répondrons que d'une part nous nous méfions des interprétations trop peu justifiées et que d'autre part, rien ne prouve qu'avec moins de données, nos conclusions n'auraient pas encore été plus incertaines. Une idée synthétique qui puisse se justifier par des résultats précis est en effet le fruit d'une longue réflexion qui se nourrit de beaucoup de matériaux ; son aspect réducteur, qui en fait la force, a tendance à faire oublier ce point fondamental. De plus nous espérons que des lecteurs avertis pourront dans les résultats détaillés, que nous avons mis à jour, trouver des renseignements plus spécifiques qui n'apparaissent donc pas dans nos conclusions, voire qui feront des interprétations qui nous ont échappées et qui leur semblent intéressantes.

Ces remarques, indispensables pour mieux relativiser nos conclusions, étant faites, regardons maintenant ce que notre travail nous a inspiré comme possibilités de modifications dans l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG scientifique.

#### d) Quelques propositions

Le premier point c'est que la notion de prérequis de logique semble devoir être redéfinie, de même que la notion de prérequis en techniques algébriques. Dans ces deux domaines en effet si des connaissances antérieures semblent être un atout pour l'algèbre linéaire, cela ne suffit pas et des connaissances spécifiques semblent devoir être acquises en début d'apprentissage.

Pourquoi alors ne pas traiter ces deux problèmes conjointement et ce, d'emblée dans le contexte de l'algèbre linéaire, mais en se limitant à des questions d'un niveau élémentaire ?

Notre proposition consiste à réduire en volume la première phase de l'enseignement de l'algèbre linéaire. Par exemple en traitant les notions d'espace vectoriel, de sous-espace, de familles génératrice, libre, liée et de base, de somme, de supplémentaire d'application linéaire, mais en excluant toutes les notions ayant trait au calcul matriciel ; les notions de noyau et d'image pourraient ou non faire partie de cette première phase. On pourrait ainsi faire un travail assez large, en traitant des exemples dans des espaces variés, mais en n'utilisant que des concepts élémentaires d'algèbre linéaire, auxquels on donnerait ainsi leur sens simplificateur et unificateur, tout en renforçant les compétences en logique et en techniques algébriques. En effet si techniques algébriques, logique et concepts élémentaires d'algèbre linéaire sont indissociables, pourquoi ne pas faire travailler les étudiants explicitement sur les trois en même temps, plutôt que de se borner à ne travailler que sur le dernier domaine en gérant forcément mal les lacunes dans les deux autres ?

L'algèbre linéaire est un domaine vaste, dont les contours sont mal définis, même pour les concepts élémentaires. On a vu qu'en tout début d'apprentissage, des problèmes énoncés "d'algèbre linéaire", font appel à des compétences qui ne sont pas toujours du domaine de l'algèbre linéaire au sens strict du terme, mais qui permettent ensuite de faire un réel travail sur les concepts d'algèbre linéaire. A l'opposé, rapidement les problèmes deviennent très ciblés sur des techniques de calcul matriciel, dans un cadre neutre où les matrices et les endomorphismes ne sont pas rattachés à un contexte extérieur de façon significative.

Doit-on alors laisser l'algèbre linéaire se réduire au calcul matriciel et à quelques techniques plus ou moins algorithmiques ? Ou peut-on au contraire élargir le champ des cadres d'intervention dès l'apprentissage des premiers concepts ? Le gain de temps obtenu par la suppression du calcul matriciel pourrait être réinvesti dans une approche plus en profondeur, et on pourrait alors aussi, élargir explicitement l'objet d'enseignement aux compétences spécifiques à certains cadres intervenant dans les problèmes ainsi qu'à des compétences en logique pour l'algèbre linéaire.

Cette démarche implique également un recentrage de l'objet d'enseignement à un niveau plus métamathématique, les étudiants doivent en effet pouvoir saisir la nature simplificatrice et unificatrice des concepts qu'ils utilisent.

Nous pensons que notre étude est déjà une justification de telles propositions, nous sommes toutefois conscient qu'il est à présent nécessaire de donner une forme plus concrète à ces suggestions de même qu'il faudra à partir de cette première étude remonter une analyse plus ciblée et portant sur une population plus vaste.

## 2) Réflexions didactiques sur ce type de recherches

On peut se poser la question de l'utilité d'une analyse, telle que nous l'avons faite. Savoir comment les connaissances antérieures de logique élémentaire conditionnent la réussite en algèbre linéaire constitue la question initiale qui a motivé notre travail. Les éléments de réponses que nous avons été à même de donner restent limités. Une lecture rapide de nos résultats pourrait se résumer à la seule conclusion que les étudiants ayant de bons prérequis réussissent mieux, autrement dit que les bons étudiants restent toujours les meilleurs. On nous dira -avec raison- qu'une analyse aussi longue était inutile pour justifier une telle évidence.

On pourrait alors souligner qu'un premier résultat intéressant de notre travail est de mettre en lumière le fait que la formation des connaissances nouvelles et les rapports qu'elles entretiennent avec les connaissances antérieures semblent être des phénomènes complexes sur lesquels il faut se garder d'avoir des opinions trop hâtivement fondées et/ou trop tranchées. Le savoir ne se constitue pas petit à petit dans un processus quasi linéaire où la maîtrise de certains prérequis serait à elle seule le garant de l'accession à un nouvelle connaissance. Les processus en jeu sont beaucoup plus complexes et il est difficile d'en cerner tous les aspects. En fait, nous avons quelques éléments de réponses qui sont donnés par les études en psychologie cognitive et en didactique des mathématiques mais, au niveau de études de terrain, les limites méthodologiques de l'investigation ne permettent pas de bien préciser les résultats.

D'autre part, dans notre cas, le choix d'une complète indépendance par rapport à l'enseignement représenterait une idée séduisante et en quelque sorte un pari, mais cela nous a conduit à beaucoup d'incertitude sur la nature des données recueillies. Nous pensons a posteriori que même pour ce type de pré-analyse, il aurait fallu contrôler, même très peu, la nature des épreuves, voire leur coordination, et les conditions de passage etc... Nous aurions pu ainsi avoir plus de confiance dans ce que nous aurions recueilli et faire un travail plus riche sans beaucoup plus de coût. Nous pensons qu'apparaît ici un deuxième résultat didactique qui remet en cause la portée des évaluations a priori, dont il semblerait, contrairement à une opinion répandue, qu'elles restent très limitatives.

Par exemple afin de mieux répandre les deux dualités que nous avons mis en évidence dans la nature des tâches proposées, et ce pour mieux comprendre les types d'apprentissage qu'elles peuvent générer et quelles permettent d'évaluer, nous aurions pu proposer une épreuve qui parte d'un problème classique, par exemple de trigonalisation mais que l'on place dans le contexte d'un espace concret et auquel on rajoute une ou deux questions moins stéréotypées. On peut trouver de bons exemples avec des problèmes d'économies, mais cela demande souvent beaucoup de préambules, ou bien on peut construire quelque chose d'un

peu plus artificiel avec des polynômes ou des fonctions. De la même façon, pour améliorer l'idée du DS1, du partiel ou du DS2, il pourrait être intéressant de trouver des sujets où la problématisation soit plus apparente et qui proposent une meilleure dévolution aux étudiants tout en faisant en sorte que les questions techniques soient moins contraignantes. On trouvera en annexe J-7, une proposition dans ce sens, qui utilise les carrés magiques. Avec de tels sujets, il serait, semble-t-il plus facile d'évaluer la capacité des étudiants à utiliser de l'algèbre linéaire dans des contextes neufs et à mettre en fonctionnement leurs connaissances dans des tâches moins algorithmisées, et ce, sans que les problèmes techniques soient si difficiles qu'ils brouillent entièrement les données (cf DS2 et partiel).

Un certain type de contrôle de l'enseignement lui-même aurait sans doute été préférable, bien que difficilement gérable. On a vu, par exemple pour le test "vrai/faux", que des écarts dans les réponses des trois groupes ne semblaient pouvoir s'expliquer que par des différences dans l'enseignement pratiqué dans chaque groupe. Ce genre de parasitage, qui peut dans des cas moins caractérisés nous échapper entièrement, est un phénomène ennuyeux. On pourrait semble-t-il y remédier, au moins partiellement, en donnant des directives aux enseignants, mais pour être efficace ce devrait être fastidieux et finalement rendre le contexte moins standard. Une autre solution consisterait à faire des observations en cours et/ou en TD, afin de faire entrer dans l'analyse une variable prenant en compte les différences entre les enseignants, mais cela demanderait de passer énormément de temps mettre en place une méthodologie des observations, de plus c'est un problème délicat.

### 3) Conclusions

Finalement en dépit des améliorations qu'il resterait à faire, qu'avons nous obtenu ?

Tout d'abord nous avons pu recueillir une analyse des tâches qui nous semble intéressante sur le plan didactique (cf § précédent). Cependant ce n'est qu'une analyse en l'état et, hors-mis des hypothèses plus ou moins fondées, nous n'avons encore aucun élément de réponse sur les effets que des modifications éventuelles pourraient apporter.

Notre position sur la nature des prérequis en logique élémentaire et sur les techniques algébriques, ainsi que sur la façon dont ils s'articulent avec l'acquisition des concepts d'algèbre linéaire est, à la suite de notre travail, beaucoup plus argumentée et surtout elle s'appuie sur des résultats précis. Cependant nous devons, faute de données, rester plus vague en ce qui concerne certains prérequis en algèbre et surtout en ce qui concerne la géométrie analytique.

Pour ce qui touche aux évolutions individuelles des étudiants, notre appréciation du problème a pu s'éclaircir. Nous cermons mieux en

particulier certains types de comportements, mais aussi il nous est plus facile de "prévoir", avec assez de certitude, sur des tâches précises, les procédures qui ont le plus de chance d'être mise en œuvre par les étudiants, en fonction de leurs connaissances antérieures. Ce point reste bien sûr encore flou, tant il est vrai que les comportements ne sont pas prédéterminés. Il est simplement possible à partir d'un diagnostic de la tâche proposée et des connaissances antérieures d'un individu donné, de savoir ce qu'il saura sûrement faire et ce qu'il ne saura sûrement pas faire. Cependant cette analyse, doublée d'une réflexion épistémologique et didactique, peut permettre à petite échelle de espérer améliorer un enseignement.

Enfin à la lumière d'une interprétation didactique mais aussi d'une réflexion assez profonde de nature épistémologique - nous avons réalisé parallèlement à ce travail une étude historique et épistémologique de l'émergence des premiers concepts d'algèbre linéaire - nous pouvons proposer une alternative dont on peut penser qu'elle sera plus satisfaisante sur les plans cognitif, didactique et épistémologique. Nous touchons toutefois là à l'extension maximale que l'on peut proposer de notre travail, sans y réinvestir des apports consistants - mise en place d'une ingénierie détaillée, expérimentation et confrontation des observations avec les effets attendus-.

Il est important pour comprendre la portée que peut avoir notre travail, de bien mesurer la part de didactique qu'il comprend. Extérieurement, cette étude peut en effet sembler se situer à un niveau seulement pédagogique. Nous pensons pourtant qu'il a, à pratiquement tous les niveaux, des spécificités didactiques. Dès le départ le choix de la méthode d'analyse par blocs est une option didactique, qui repose sur l'idée que l'on peut caractériser les connaissances selon leur fonctionnement et suivant les cadres où elles agissent. Cette technique associée à la caractérisation des réponses en termes de procédures, nous a permis de relier prérequis et connaissances nouvelles selon un mode qui correspond mieux à ce que nous semblent être les processus d'acquisition des connaissances. Autrement dit nous nous sommes appuyés sur les théories didactiques (cf en particulier [1], [2] et [7]) et les hypothèses sur la construction du savoir, pour analyser les données recueillies. En particulier l'idée que l'on n'apprend pas petit à petit mais qu'il existe des phases de déstabilisation suivie par des périodes de réorganisation, ou bien le concept de contrat, sont des éléments qui nous ont permis de regarder nos données sous un autre angle et surtout d'en donner des interprétations différentes.

Le travail didactique est bien sûr visible également au niveau de l'analyse des tâches. En particulier, l'introduction de la dimension épistémologique est fondamentale, pour pouvoir en arriver à nos conclusions. C'est parce que nous nous sommes d'abord interrogé sur la

nature des concepts de l'algèbre linéaire et sur leur origine, que nous avons par exemple dégagé une dichotomie au niveau des tâches et cette réflexion préalable nous a guidé dans beaucoup de nos interprétations. La façon même dont nos conclusions ont pu être reprises, pour donner les propositions que nous avons énoncées plus haut, relève d'une démarche où l'apport didactique est fondamental.

Nous avons montré en détail les limitations que la nature même de notre étude imposait aux résultats que l'on pouvait en tirer. Pour certains points assez locaux, nous avons déjà pu proposer des améliorations. Nous restons cependant convaincu que les difficultés méthodologiques sont grandes et pour certaines nous envisageons mal de pouvoir les contourner. Dans ce dernier paragraphe, nous avons essayé de montrer comment les outils didactiques pourraient permettre de rendre ce genre d'études plus intéressant du point de vue de la recherche, malgré les difficultés qui y sont liées. Nous espérons que ces quelques réflexions tout en enrichissant la lecture de notre propre travail seront utiles à ceux qui voudraient faire des études de même nature même à propos d'autres domaines mathématiques que l'algèbre linéaire.

## Bibliographie

- [1] F. BOSCHET - A. ROBERT, *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur  $\mathbb{R}$  dans une section ordinaire de première année de DEUG*, Cahier de didactique des mathématiques n°7, IREM de Paris VII.
- [2] A. ROBERT, *Rapport enseignement/apprentissage (début de l'analyse sur  $\mathbb{R}$ )*, Fascicule 1, *Analyse d'une section de DEUG A première année (les connaissances antérieures et l'apprentissage)*, Cahier de didactique des mathématiques n°18<sub>1</sub>, IREM de Paris VII.
- [3] H. AUTHER, *Etude comparative de diverses productions d'étudiants de première année de DEUG scientifique selon les séries du baccalauréat d'origine. Annexe sur la méthode graphique par M. Cantuzene*, Cahier de didactique des mathématiques n°31, IREM de Paris VII, Septembre 1986.
- [4] R. DOUADY, *Jeu de cadres et dialectique outil-objet*, Thèse d'état, Université de Paris VII-1984. Même titre in *Recherche en Didactique de Mathématiques* (RDM) vol 7 n°2 1986 pp 5-31.
- [5] J.-L. OVAERT et J.-L. VERLEY, *Algèbre volume 1*, Collection Léonard Epistémon, CEDIC/ Fernad Nathan 1981.
- [6] A. ROBERT, J. ROBINET et I. TENAUD, *De la géométrie à l'algèbre linéaire*, Brochure de l'IREM de Paris VII n°72, Décembre 87.
- A. ROBERT et J. ROBINET, *Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Cahier de didactique des mathématiques n°53, IREM de Paris VII, 1989.
- [7] J. ROBINET, *Esquisse d'une genèse des notions d'algèbre linéaire enseignées en DEUG*, Cahier de didactique des mathématiques n°29, éd. IREM de Paris VII, Mai 1986.
- [8] G. HAREL, *Variation in linear algebra content presentations*, in *For the learning of mathematics* 7,3, Montreal, Novembre 1987.
- G. HAREL, *Learning and teaching linear algebra : difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes*, in *Focus on learning problems in mathematics*.
- [9] C. ROBERT, *Analyse descriptive multivariée*, Collection Statistique en biologie et en médecine, Flammarion 1989.
- [10] J.-M. BOUROCHE et G. SAPORTA, *L'analyse de données*, Collection "Que sais-je ?". Presses Universitaires de France (quatrième édition 1980).

Analyse dans le suivi  
de productions d'étudiants de DEUG A (\*)  
en algèbre linéaire.

ANNEXES

par Jean-Luc DORIER  
Institut Fourier  
Equipe de Didactique des mathématiques  
B.P. 74 - 38 402 St Martin d'Hères Cedex

et avec la collaboration de  
Christian LAVERGNE  
IMAG-TM3  
Equipe de statistique  
B.P. 53X 38 041 Grenoble Cedex

(\*) Premier cycle scientifique des universités françaises.

## SOMMAIRE DES ANNEXES

A-1	Texte du prétest	p 1
A-2	Tableau des données brutes au prétest	p 5
A-3	Tableau des notes aux blocs du prétest	p 12
A-4	Tableau de la répartition par blocs au prétest	p 16
B-1	Texte du premier devoir surveillé	p 20
B-2	Tableau des données brutes au DS n°1	p 22
C-1	Texte des trois premiers exercices du partiel	p 24
C-2	Tableau des données brutes au partiel	p 26
D-1	Texte et corrigé du deuxième devoir surveillé	p 30
D-2	Tableau des données brutes au DS n°2	p 35
E-1	Textes des deux versions du test "vrai/faux"	p 37
E-2	Tableau des données brutes au "vrai/faux"	p 40
E-3	Tableaux croisés prétest/"vrai/faux"	p 45
F-1	Texte du troisième devoir surveillé	p 48
F-2	Tableau des données brutes au DS n°3	p 51
G-1	Texte et corrigé du quatrième devoir surveillé	p 53
G-2	Tableau des données brutes au DS n°4	p 58
H-1	Texte de l'examen	p 61
H-2	Tableau des données brutes à l'examen	p 64
J-1	Tableau global et comparatif pour les 19 étudiants	p 67
J-2	Résultats de l'ACP sur les variables du prétest (tranches de notes en représentatif)	p 71
J-3	ACP sur les notes aux devoirs	p 79
J-4	Tableau des données par thèmes	p 87
J-4a	ACP sur les variables de résolution de systèmes	p 90
J-4b	ACP sur les variables des questions élémentaires	p 95
J-4c	ACP sur les variables des questions plus évoluées	p 100
J-4d	Matrices de corrélations entre les 23 variables	p 107
J-5	ACP sur sys1, sys2, ele1, ele2, ALG, SYNT, AL1, AL2, AL3 et cmat	p 110
J-6	Matrice des corrélations des 30 variables avec le prétest et représentation de ces variables dans le plan principale l'acp sur les variables du prétest.	p 117
J-7	Une proposition de problème.	p122









ANNEXE A-2

Tableau des données brutes  
au prétest.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PRETEST (annexe A.2)

n° etud	1-j	1-i	1-ii	1-iv	tot1	1-v	1-v	1-vi	1-vii	2-a	2-b	tot2	3 rép	3 dém	tot3	4-a)	4-b)	4-c)	4-d)	tot4	5	tot5	6	tot6
3a	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	1	1	1	1	4	B	0	1*	1
3b	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	I	0,5	C	1	1	1	3	0	0	1	1
3c	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	M	B	1	C	1	1	1	3	C/D	0	1*	1
3d	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A/R	0,5	1	1	1	1	4	1	1	1*	1
3e	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	M		0	C	0	1	1	2		0	1	1
3f	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	I/R	0,5	1	1	1	1	4	A	0	1*	1
3g	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	I/R	0,5	1	1	1	1	4		0	C	0
3h	1	1	0	1	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	0	0	0	1	1	B	0	C	0
3i	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5					0	1*	1	1	1
3j	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	0	1	1	1	3	0	0	1*	1
3k	1	1	1	1	4	0	1	0	1	1	1	4			0					0		0		0
3m	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	I	2	1	1	1	1	4	0	0	1	1
3n	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	1	1	1	1	4	1	1	1*	1
3o	1	1	1	0	3	1	1	1	1	0	0	4	1	A	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3p	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	C	1	1	2	B	0		0
3q	1	1	1	0	3	0	1	0	0	1	1	3	1	A/I	0,5	C	1	1	1	3	1	1	C	0
3r	1	1	1	1	4	0	0	1	0	1	1	3	1	B	1,5	1	1		1	3	0/D	0	1	1
3s	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	1	C	0	1	2	I/C	0	1	1
3t	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	C	1	1	2	B	0	1*	1
3u	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	C	1	1	2	I/C	0	1*	1
3v	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	1	0	1	1	3	1	1	C	0
3w	1	1	1	0	3	0	0	1	0	1	1	3	1		0,5	C	1	1	1	3	C	0	1	1
3x	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B/R	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1
3y	1	1	0	1	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	C	1	1	2	1*	1	1*	1
3z	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	C	C	1	1	2	C	0	1*	1
3aa	1	1	1	1	4	0	1	0	1	1	1	3	1	A/I	0,5	C	1	C	1	2	B	0	1	1
3ab	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	M	I	0	C	1	1	1	3		0	C	0
3ac	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	C	1	1	1	4	1*	1	C	0
3ad	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	C	0	1	1
3ae	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
moy3	1	1	0,9	0,63	3,57	0,8	0,9	0,9	0,9	1	0,9	5,47			0,67					2,7		0,33		0,73

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PRETEST (annexe A.2)

n° etud	1-i	1-ii	1-iii	1-iv	tot1	1-v	1-vi	1-vii	1-viii	2-a	2-b	tot2	3 rép	3 dém	tot3	4-a)	4-b)	4-c)	4-d)	tot4	5	tot5	6	tot6
4a	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	1	1	0	1	3	1	1	1	1
4b	1	1	1	0	3	0	1	1	1			3			0	C	C	1	1	2	D	0	1	1
4c	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	0	5			0	C	1	1	1	3	1	1	1	1
4d	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
4e	1	1	0	1	3	1	1	1	1	0		4	1		0,5	C	1	1	1	3	D	0	C+A	0
4f	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	I	0,5	C	1	1	1	3	1	1	0	0
4g	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	1	0,5	C	1	1	1	3	D	0	1*	1
4h	1	1	1	1	4	0	0	1	1	0		2	X={0}	A	0	0	0			0	0	0	C+A	0
4i	1	1	0	0	2	0	1	1	1	1	1	5	1		0,5	C	C			0	0	0	C+A	0
4j	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
4l	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	0	1	1	2	1	1	1	1
4m	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	0	0,5	1	1	1	1	4	1	1	1	0
4n	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	0	0	1	1
4o	1	1	1	1	4	0	0	1	0	0	0	1	X={0,1,2,3,4}		0	0	0	0	0	0	0/B	0	0	0
4p	1	1	0	0	2	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	C	0	1	1
4q	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	0	0,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
4r	1	1	0	1	3	0	1	0	1	1	1	4	1		0,5	C	1	1	1	3		0	1	1
4s	1	1	1	1	4	0	0	1	1	1	1	4	1	A	0,5	C	1	1	1	3		0	1	1
4t	1	1	0	1	3	0	0	1	1	1	1	4	1		0,5	1	1	1	1	4	1*	1		0
4u	1	1	0	0	2	0	1	0	1	1	1	4	1	A	0,5	1	1	1	1	4	1	1	1	1
4v	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	1*	1	1*	1
4w	1	1	0	1	3	0	0	1	0	1	0	2	1	1	2	1	1	1	1	4	1*	1	1	1
4x	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	C	1	1	1	3	D	0	1*	1
4y	1	1	1	1	4	0	0	1	1	1	1	4	1		0,5	C	C	1	1	2		0	1	1
4z	1	1	0	0	2	0	1	1	1	1	1	5	1		0,5	1	1	1	1	4	0	0	1	1
4aa	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	1	0,5	1	1	1	1	4	1	1	1*	1
4ab	1	0	1	0	2	1	1	1	1	1	1	6	X={0}	0	0,5	C	1	1	1	3	0	0		0
4ac	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	1	0,5	1	1	1	1	4	B	0	1	1
4ad	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	1	0,5	C	1	1	1	3	D	0	1*	1
moy4	1	1	0,7	0,66	3,34	0,6	0,8	0,9	0,9	0,9	0,8	4,93			0,55					2,93		0,45		0,72

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PRETEST (annexe A.2)

n° etud	1-i	1-ii	1-iii	1-iv	tot1	1-v	1-vi	1-vii	1-viii	2-a	2-b	tot2	3 rép	3 dém	tot3	4-a)	4-b)	4-c)	4-d)	tot4	5	tot5	6	tot6
6a	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B/R	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1
6c	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	M		0	C	C	1	1	2	0	0	1	1
6d	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	I	0,5	1	1	C	1	3	1	1	1	1
6e	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B/R	2	1	1	1	1	4	1	1	1	1
6f	1	1	1	1	4	0	0	1	0	0		1	X=2X	A	0	C	C	1	1	2		0	1*	1
6g	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	X={0}	0	0	C	C	0	0	0	0	0		0
6h	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	X={0}		0	C	C	1	1	2	0	0	1*	1
6i	1	1	1	1	4	1	0	1	1	1	1	5	1	A/I	0,5	C	1	1	1	3	1	1	1*	1
6j	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	1	1	1	1
6k	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	C	1	1	1	3		0	1	1
6m	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	1	1		1	3	I	0	1	1
6n	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	R	0,5	1	0	1	1	3	1*	1		0
6o	1	1	1	1	4	0	1	0	1	1	1	4	1		0,5	C	1	1	1	3	1*	1		0
6p	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	0	0,5	C	1	1	1	3	D	0	1	1
6q	1	1	1	1	4	0	0	1	0	1		2	1	I/B	1,5	1	1	1	1	4	1	1	1	1
6r	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	X={0,1}	0	0	C	C	1	1	2	0	0	1	1
6s	1	1	1	0	3	1	1	1	1	1	1	6	X={0}	0	0	C	1	1	1	3		0	1*	1
6t	1	1	0	1	3	0	0	1	1	0	1	3	M		0	C	C	1	1	2		0	0	0
6u	1	1	1	1	4	0	0	1	0	1	1	3	1	0	0,5	C	1	0	1	2	C	0	1	1
6v	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	B	1,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
6w	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	1	1	1	1	4	1	1	1*	1
6x	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	R	0,5	1	1	1	1	4	B	0	1*	1
6y	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1		0,5	C	1	1	1	3	1	1	1	1
6z	1	1	1	1	4	0	1	1	1	1	1	5	X={0}	0	0,5	C	1	1	1	3	0	0	1	1
6aa	1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	6	1	A	0,5	1	1	1	1	4	D	0	1*	1
moy6	1	1	1	0,88	3,84	0,8	0,8	1	0,9	0,9	0,9	5,24			0,6					2,92		0,4		0,88
moy	1	1	0,9	0,71	3,57	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9	0,9	5,21			0,61					2,85		0,39		0,77

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PRETEST (annexe A.2)

n° etud	7	tot7	8-a	8-b	8-c	tot8	9	9'	9bis	9ter	10	10'	10bis	10ter	coh1	coh2	tot9	tot10
3a	(Z,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	1*	1	1	1	1	1	5	3
3b	ADDITION	0	1	1	1	3	I/N	0	0	0	N	0	0	0	0,5	1	0,5	1
3c	(Z,+)	1	1	1	1	3	1*	1	0	0	B	0	0	0	0,5	1	0,5	2
3d	(Z,+)	1	0	1	1	2	S	0	1	1	A/S	0	1	1	1	1	5	1
3e	(Z,+)	1	0	0	1	1	N	0	1	1	N	0	1	1	1	1	5	1
3f	(R,x)	0	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3
3g	(R,+)	1	1	1	1	3	I	0	0	1	I	0	1	0	0,5	0	2,5	0
3h	(R,+)	1	1	1	1	3	N	0	1	0	N	0	1	1	0,5	0	3,5	0
3i	(Z,+)	1	1	1	1	3	N	0	1	1	I/N	0	0	0	1	1	3	1
3j	(N,x)	0	1	1	1	3		0	1	1		0	1	1	0	1	4	1
3k		0	1	1	1	3	I/B	0	1	1	B	0	1	1	0,5	1	4,5	1
3m	(N,+)	0	1	1	1	3	1*	1	1	1	I	0	1		0,5	0	3,5	1
3n	(Z,+)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3
3o	(Un,x) (**)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0	3,5	0
3p	(R,+)	1	1	1	1	3	N	0	1	0	N	0	1	1	0,5	0	3,5	0
3q	(Z,+)	1	1	1	1	3	N/I	0	1	1	A/N	0	1	1	0,5	1	4,5	1
3r	(Z,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	N	0	1	1	1	1	5	2
3s	(Z,+)	1	1	1	0	2	S	0	1	1	S	0	1	1	1	1	5	1
3t	(R,x)	0	1	1	1	3	N	0	1	1	N	0	1	1	1	1	5	1
3u	(Q,+)	1	1	1	1	3	S	0	1	1	S	0	1	1	1	1	5	1
3v	(Z,+)	1	1	1	1	3	N	0	0	0		0	1		0	0	1	0
3w		0	0	0	0	0	N	0	0	1	N	1	1		1	0	3	1
3x	(R*,x)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	1*	1	1	1	0,5	0	2,5	0
3y	R(+;x)	0,5	1	1	1	3	B	0	0	1	B	0	1	0	0,5	0	2,5	0
3z		0	1	1	1	3	N	0	1	1	N	0	1	1	1	1	5	1
3aa	(Z,+)	1	1	1	1	3	N/B	0	1	0	N/B	0	1	0	0	0	2	0
3ab	(R,x)	0	1	1	1	3	B	0	0	1	B	0	1	0	0,5	0	2,5	0
3ac	LE PRODUIT	0	1	1	1	3	N	0	1	1	N	0	0	0	0,5	1	2,5	1
3ad	(Z,+)	1	0	1	1	2	S	0	0	1	S	0	1	1	1	0	4	0
3ae	(R,+)	1	1	1	1	3	I	0	0	0	I	0	1	1	0,5	1	2,5	1
moy3		0,65	0,867	0,933	0,9	2,7		0,3	0,7	0,767		0,2	0,867	0,6	0,68	0,63	3,62	1,1

(\*\*) Un désigne l'ensemble des racines nèmes de l'unité.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PRETEST (annexe A.2)

n° etud	7	tot7	8-a	8-b	8-c	tot8	9	9'	9bis	9ter	10	10'	10bis	10ter	coh1	coh2	tot9	tot10	
4a	(R,+)	1	1	1	1	3		0				0			0	0	0	0	
4b	(R*,x)	1	1	1	1	3	1	1	0	1	1	1	1	0	0,5	0	2,5	2	
4c	(R*,x)	1	1	1	1	3	S	0	1	1	S	0	1	0	0,5	0	3,5	0	
4d	(R*,x)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3	
4e	(R,+)	1	1	1	1	1	A	0	1	1	A	0	0	0	1	1	3	1	
4f	(Q,x)	0	1	1	1	3	S	0	0	1	A	0	1	1	0,5	0	3,5	0	
4g	(R*,x)	1	1	1	1	3	1	1	0	1	1*	1	1	1	0,5	0	2,5	2	
4h	{1;2} sans loi	0	0	1	1	2	B	0	0	1	B	0	0	1	0,5	0	2,5	0	
4i	cite mal ptés	0	1	1	1	3	1*	1	0	0	1*	1	1	1	0,5	1	2,5	3	
4j	(R,+)	1	1	1	1	3	1*	1	0	1	1*	1	1	0	0,5	0	2,5	2	
4l	(R,+)	1	1	1	1	3	S	0	0	0	S	0	1	1	0,5	1	2,5	1	
4m	(R,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	1*	1	1	1	1	1	5	3	
4n	(R;x)	0	1	1	1	3	N	0	0	0	N	0	0	1	0,5	0	1,5	0	
4o	G={0,1,2,3...}	0	0	1	1	2	S	0	1	1	S	0	1	1	1	1	5	1	
4p	(R*,x)	1	1	1	1	3	B	0	1	1	B	0	1	1	0,5	1	4,5	1	
4q	(R,+)	1	1	1	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0	
4r	(R,+)	1	1	1	1	3	B	0	0			0			0	0	0	0	
4s	(R,+)	1	1	1	1	3	N	0	0	0		0	1	1	0	1	2	1	
4t	(R,+)	1	0	0	0	0	B	0	0	0	A	0	1	0	0,5	0	1,5	0	
4u		0	1	1	1	3	I	0	0	1	0	0	0	1	0,5	0	2,5	0	
4v	(R*,x)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3	
4w	(R;+)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0,5	0	2,5	2
4x	(U;x) (**)	1	1	1	1	3	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	5	1	
4y	(R*,+)	0	1	1	1	3	S	0	1	1	S	0	1	1	1	1	5	1	
4z	(R,+)	1	1	1	1	3	B	0	0	1	B	0	1	0	0,5	0	2,5	0	
4aa	(R;+)	1	1	1	1	3	0	0	1	1	1	1	1	1	0,5	1	4,5	2	
4ab	(R*,+)	0	1	1	1	3	A	0	0	1	A	0	1	0	1	0	3	0	
4ac	(R*,x)	1	1	1	1	3	B	0	1	1	B	0	1	1	0,5	1	4,5	1	
4ad	(R,+)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3	
moy4		0,72	0,897	0,966	0,931	2,724		0,3	0,414	0,759		0,4	0,793	0,586	0,59	0,48	3,14	1,207	

(\*\*) U désigne l'ensemble des complexes de module 1.

n° etud	7	tot7	8-a	8-b	8-c	tot8	9	9'	9bis	9ter	10	10'	10bis	10ter	coh1	coh2	tot9	tot10
6a	(R,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	1*	1	1	1	1	1	5	3
6c	R sans loi	0	1	1	1	3	N	0	0	0		0	1	1	0	1	2	1
6d	(R,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	I/S	0	1	1	1	1	5	2
6e	(R,+)	1	1	1	1	3	1*	1	1	1	1	0	1	1	0,5	1	4,5	2
6f	(Z/5Z*,x)	1	1	1	1	3	B	0	1	1	B	0	1	1	0,5	1	4,5	1
6g	(R;+)	1	1	1	1	3	1*	1	0	0	1*	1	1	1	0,5	1	2,5	3
6h	(R,x)	1	1	1	1	3	N	0	0	0	N	0	1	1	0,5	1	2,5	1
6i	(R,+)	1	1	1	1	3	B	0	0	0	B	0	1	0	0,5	0	1,5	0
6j	(R,+)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	S	0	1	1	1	1	5	2
6k	(N,+)	0	1	1	1	3	I/N	0	0	0	N	0	1	1	1	1	3	1
6m		0	1	1	1	3	S	0	0	0	S	1	1	0,5	1		2,5	1
6n	(Z;+)	1	1	1	1	3	S	0	1	1	S	0	1	1	1	1	5	1
6o		0	1	1	1	3		0	1			0			0	0	1	0
6p		0	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3
6q	(N,+)(R,+)(C*,x)	0,5	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3
6r	(C;+)	1	1	1	1	3	N	0	0	0	N	0	1	1	0,5	1	2,5	1
6s	(Z;+)	1	1	1	1	3		0	1			0	1		0	0	2	0
6t	((Z/2Z)*,x)	1	0	0	1	1	S	0	0	0	1*	1	1	0	0	0	1	1
6u	(N,+)	0	1	1	1	3		0	1	1		0			0	0,5	2	0,5
6v	(R;+)	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5	3
6w	(R;+)	1	1	1	1	3	S	0	1	1	S	0	1	1	0,5	1	4,5	1
6x	(R,+)	1	1	1	1	3	1/B	0	1	1	I/S	0	1	1	0,5	1	4,5	1
6y	(R;+)	1	1	1	1	3	N/I	0	0	0	N	0	1	1	0,5	1	2,5	1
6z	(App biject,o)	1	1	1	1	3	I/S	0	0	0	S	0	1	1	0,5	1	4,5	1
6aa	(N*;x)	0	1	1	1	3	1	0	1	1	1	1	1	1	0,5	1	4,5	2
moy6		0,7	0,96	0,96	1	2,92		0,3	0,6	0,52		0,3	0,92	0,78	0,58	0,78	3,4	1,42
moy		0,69	0,905	0,952	0,94	2,774		0,3	0,571	0,69		0,3	0,857	0,649	0,62	0,63	3,39	1,232

Tableau des notes aux blocs  
du prétest.

ANNEXE A-3

yy

49

TABLEAU DES NOTES AUX BLOCS (annexe A.3)

n° etud	EQ 1	EQ3	QA1	QA2	QA3	EQ	QA	N1	N2	N3	AN	AS	note
3a	0,75	0,25	1	1	0,667	0,417	0,9	0,95	1	0,5	1	1	16
3b	1	0,25	0,55	0,333	0,5	0,5	0,47	0,64	0,333	0,4	1	0,5	12
3c	1	0,5	0,55	0,667	0,5	0,667	0,57	0,64	0,667	0,5	1	1	15
3d	1	0,25	0,833	0,333	1	0,5	0,733	0,867	0,333	0,7	1	1	15
3e	0,75	0	0,667	0,333	0,333	0,25	0,467	0,683	0,333	0,2	1	1	12
3f	0,75	0,25	1	1	0,667	0,417	0,9	0,95	1	0,5	1	0,5	15
3g	0,75	0,25	0,75	0	0,667	0,417	0,5	0,75	0	0,5	1	0,5	11
3h	0,75	0,25	0,85	0	0,167	0,417	0,39	0,83	0	0,2	1	0,5	10
3i	1	0,25	0,8	0,333	0,333	0,5	0,52	0,84	0,333	0,3	1	1	13
3j	0,75	0,25	0,9	0,333	0,5	0,417	0,61	0,87	0,333	0,4	1	0,5	12
3k	1	0	0,95	0,333	0	0,333	0,48	0,96	0,333	0	0,667	0	8
3m	0,75	1	0,85	0,333	0,667	0,917	0,64	0,83	0,333	0,8	1	0,5	15
3n	1	0,75	1	1	1	0,833	1	1	1	0,9	1	1	19
3o	0,75	0,25	1	1	0,5	0,417	0,85	0,95	1	0,4	0,667	1	15
3p	1	0,25	0,85	0	0,333	0,5	0,44	0,88	0	0,3	1	0,5	11
3q	0,75	0,25	0,95	0,333	0,833	0,417	0,73	0,91	0,333	0,6	0,5	0,5	12
3r	1	0,75	1	0,667	0,5	0,833	0,75	1	0,667	0,6	0,5	1	15
3s	1	0,25	0,833	0,333	0,333	0,5	0,533	0,867	0,333	0,3	1	1	14
3t	1	0,25	1	0,333	0,333	0,5	0,6	1	0,333	0,3	1	0,5	13
3u	1	0,25	0,833	0,333	0,333	0,5	0,533	0,867	0,333	0,3	1	1	14
3v	1	0,75	0,6	0	0,833	0,833	0,49	0,68	0	0,8	1	0,5	13
3w	0,75	0,25	0,3	0,333	0,5	0,417	0,37	0,39	0,333	0,4	0,5	0,5	9
3x	1	1	0,85	0,667	1	1	0,84	0,88	0,667	1	1	1	19
3y	0,75	0,25	0,75	0	0,667	0,417	0,5	0,75	0	0,5	1	0,75	12
3z	1	0,25	1	0,333	0,333	0,5	0,6	1	0,333	0,3	1	0,5	13
3aa	1	0,25	0,7	0	0,333	0,5	0,38	0,76	0	0,3	0,5	1	11
3ab	0,75	0	0,75	0	0,5	0,25	0,45	0,75	0	0,3	1	0	9
3ac	1	0,25	0,75	0,333	1	0,5	0,7	0,8	0,333	0,7	1	0	12
3ad	0,75	0,25	0,733	0	0,667	0,417	0,493	0,737	0	0,5	1	1	13
3ae	1	0,25	0,75	0,333	0,833	0,5	0,65	0,8	0,333	0,6	1	1	15
moy3	0,892	0,333	0,812	0,367	0,561	0,519	0,603	0,828	0,367	0,47	0,911	0,692	13,05

TABLEAU DES NOTES AUX BLOCS (annexe A.3)

n° etud	EQ 1	EQ3	QA1	QA2	QA3	EQ	QA	N1	N2	N3	AN	AS	note
4a	0,75	0,75	0,5	0	0,833	0,75	0,45	0,55	0	0,8	1	1	14
4b	0,75	0	0,75	0,667	0,333	0,333	0,25	0,6	0,75	0,667	0,2	0,5	11
4c	0,75	0	0,85	0	0,833	0,25	0,59	0,83	0	0,5	0,833	1	12
4d	1	0,75	1	1	0,833	0,833	0,95	1	1	0,8	1	1	19
4e	0,75	0,25	0,467	0,333	0,5	0,417	0,437	0,523	0,333	0,4	0,667	0,5	10
4f	1	0,25	0,85	0	0,833	0,5	0,59	0,88	0	0,6	1	0	11
4g	1	0,25	0,75	0,667	0,5	0,5	0,65	0,8	0,667	0,4	1	1	15
4h	1	0	0,583	0	0	0,333	0,233	0,667	0	0	0,333	0	5
4i	0,5	0,25	0,75	1	0	0,333	0,6	0,7	1	0,1	0,833	0	10
4j	1	0,25	0,75	0,667	0,833	0,5	0,75	0,8	0,667	0,6	1	1	16
4l	0,75	0,25	0,75	0,333	0,667	0,417	0,6	0,75	0,333	0,5	1	1	14
4m	1	0,25	1	1	1	0,5	1	1	1	0,7	1	0,5	16
4n	1	0,25	0,65	0	0,667	0,5	0,46	0,72	0	0,5	1	0,5	12
4o	1	0	0,833	0,333	0	0,333	0,433	0,867	0,333	0	0,167	0	7
4p	0,5	0,25	0,95	0,333	0,667	0,333	0,68	0,86	0,333	0,5	1	1	13
4q	0,75	0,25	0,533	0	0,833	0,417	0,463	0,577	0	0,6	1	1	12
4r	0,75	0,25	0,5	0	0,5	0,417	0,35	0,55	0	0,4	0,667	1	10
4s	1	0,25	0,7	0,333	0,5	0,5	0,53	0,76	0,333	0,4	0,667	1	13
4t	0,75	0,25	0,15	0	1	0,417	0,36	0,27	0	0,7	0,667	0,5	9
4u	0,5	0,25	0,75	0	1	0,333	0,6	0,7	0	0,7	0,667	0,5	10
4v	1	0,25	1	1	1	0,5	1	1	1	0,7	1	1	18
4w	0,75	1	1	1	1	0,917	1	0,95	1	1	0,333	1	17
4x	1	0,25	0,75	0,667	0,5	0,5	0,65	0,8	0,667	0,4	1	1	15
4y	1	0,25	1	0,333	0,333	0,5	0,6	1	0,333	0,3	0,667	0,5	12
4z	0,5	0,25	0,75	0	0,667	0,333	0,5	0,7	0	0,5	0,833	1	11
4aa	1	0,25	0,95	0,667	1	0,5	0,88	0,96	0,667	0,7	1	1	17
4ab	0,5	0,25	0,8	0	0,5	0,333	0,47	0,74	0	0,4	1	0	9
4ac	1	0,25	0,95	0,333	0,667	0,5	0,68	0,96	0,333	0,5	1	1	15
4ad	1	0,25	1	1	0,5	0,5	0,85	1	1	0,4	1	1	16
moy4	0,836	0,276	0,768	0,402	0,638	0,463	0,619	0,781	0,402	0,493	0,822	0,724	12,76



TABLEAU DES NOTES AUX BLOCS (annexe A.3)

n°etud	EQ 1	EQ3	QA1	QA2	QA3	EQ	QA	N1	N2	N3	AN	AS	note
6a	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	20
6c	1	0	0,7	0,333	0,333	0,333	0,48	0,76	0,333	0,2	1	0,5	11
6d	1	0,25	1	0,667	0,833	0,5	0,85	1	0,667	0,6	1	1	16
6e	1	1	0,95	0,667	1	1	0,88	0,96	0,667	1	1	1	19
6f	1	0	0,95	0,333	0,333	0,333	0,58	0,96	0,333	0,2	0,167	1	11
6g	0,75	0	0,75	1	0	0,25	0,6	0,75	1	0	1	0,5	11
6h	1	0	0,75	0,333	0,333	0,333	0,5	0,8	0,333	0,2	1	1	13
6i	1	0,25	0,65	0	0,833	0,5	0,51	0,72	0	0,6	0,833	1	13
6j	1	0,25	1	0,667	1	0,5	0,9	1	0,667	0,7	1	1	17
6k	1	0,75	0,8	0,333	0,5	0,833	0,57	0,84	0,333	0,6	1	0,5	14
6m	0,75	0,25	0,75	0,333	0,5	0,417	0,55	0,75	0,333	0,4	1	0,5	12
6n	1	0,25	1	0,333	0,5	0,5	0,65	1	0,333	0,4	1	1	15
6o	1	0,25	0,6	0	0,833	0,5	0,49	0,68	0	0,6	0,667	0	10
6p	1	0,25	1	1	0,5	0,5	0,85	1	1	0,4	1	0,5	15
6q	1	0,75	1	1	1	0,833	1	1	1	0,9	0,333	0,75	17
6r	1	0	0,75	0,333	0,333	0,333	0,5	0,8	0,333	0,2	1	1	13
6s	0,75	0	0,7	0	0,5	0,25	0,43	0,71	0	0,3	1	1	11
6t	0,75	0	0,267	0,333	0,333	0,25	0,307	0,363	0,333	0,2	0,5	0,5	8
6u	1	0,25	0,7	0,167	0,333	0,5	0,43	0,76	0,167	0,3	0,5	0,5	10
6v	1	0,75	1	1	0,833	0,833	0,95	1	1	0,8	1	1	19
6w	1	0,25	0,95	0,333	1	0,5	0,78	0,96	0,333	0,7	1	1	16
6x	1	0,25	0,95	0,333	0,667	0,5	0,68	0,96	0,333	0,5	1	1	15
6y	1	0,25	0,75	0,333	0,833	0,5	0,65	0,8	0,333	0,6	1	1	15
6z	1	0,25	0,75	0,333	0,5	0,5	0,55	0,8	0,333	0,4	0,833	1	13
6aa	1	0,25	0,95	0,667	0,667	0,5	0,78	0,96	0,667	0,5	1	0,5	14
moy6	0,96	0,3	0,827	0,473	0,62	0,52	0,659	0,853	0,473	0,492	0,873	0,79	13,84
			0										
moy	0,893	0,304	0,801	0,411	0,605	0,5	0,625	0,819	0,411	0,485	0,869	0,732	13,18

TABLE

Tableau de la répartition par blocs au prétest.

ANNEXE A-4

45

46



n° etud	note	EQ1	EQ3	QA1	QA2	QA3	Q	AN	AS	BLOCS 0
6a	20	2	2	2	2	2	2	1	2	0
6c	11	2	0	1	1	0	0	1	1	2
6d	16	2	1	2	1	1	2	1	2	0
6e	19	2	2	2	1	2	2	1	2	0
6f	11	2	0	2	1	0	1	0	2	3
6g	11	1	0	1	2	0	1	1	1	2
6h	13	2	0	1	1	0	0	1	2	2
6i	13	2	1	1	0	1	0	1	2	1
6j	17	2	1	2	1	2	2	1	2	0
6k	14	2	2	2	1	1	2	1	1	0
6m	12	1	1	1	1	1	1	1	1	0
6n	15	2	1	2	1	1	2	1	2	0
6o	10	2	1	1	0	1	0	0	0	3
6p	15	2	1	2	2	1	2	1	1	0
6q	17	2	2	2	2	2	2	0	1	1
6r	13	2	0	1	1	0	0	1	2	2
6s	11	1	0	1	0	1	0	1	2	2
6t	8	1	0	0	1	0	0	0	1	4
6u	10	2	1	1	0	0	0	0	1	3
6v	19	2	2	2	2	1	2	1	2	0
6w	16	2	1	2	1	2	2	1	2	0
6x	15	2	1	2	1	1	2	1	2	0
6y	15	2	1	1	1	1	1	1	2	0
6z	13	2	1	1	1	1	1	1	2	0
6aa	14	2	1	2	1	1	2	1	1	0

15

20

ANNEXE B-1

Texte du premier devoir  
surveillé  
(Algèbre seulement)

1) Discuter selon les valeurs de  $\lambda$ , le système :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + \lambda t = 9 \end{cases}$$

2) Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polynômes  $P$ , à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 4 et tels que :  $P(1) = P(2) = P'(1) = P'(2) = 1$ .

- (a)  $\mathcal{P}$  est-il un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?
- (b) Soit  $P_0 \in \mathcal{P}$  fixé. Montrer que l'ensemble  $\mathcal{Q}$  des polynômes  $Q$  tels qu'il existe  $P \in \mathcal{P}$  vérifiant  $Q = P - P_0$  est égal à l'ensemble des polynômes  $R$  de degré inférieur ou égal à 4 tels que  $R(1) = R(2) = R'(1) = R'(2) = 0$ .
- (c) En déduire que  $\mathcal{Q}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- (d) Trouver un polynôme  $P_0 \in \mathcal{P}$  de degré 3.
- (e) Trouver tous les polynômes appartenant à  $\mathcal{Q}$ .
- (f) en déduire tous les polynômes appartenant à  $\mathcal{P}$ .

## ANNEXE B-2

Tableau des données brutes  
au premier devoir surveillé.

n°	N1	Cl	N2a	C2a	N2b	C2b	N2c	C2c	N2d	N2e	N2f	N
3a	1	EXT	1		0	INC	1		0			6
3b	1	CAL	0	DEF	0	INC	0	DED	1			4
3d	0	INT	0	DEF	0		0	DEF	1			1
3e	0	PARA	0	CTR								0
3f	1	EQUA	1									5
3g	0	INT	0	CTR	1		1		0			3
3h	0	PARA	0	CTR	0	INC	0	DED	1	0		1
3i	0	INT	0	CTR	0	INC	0	DED	1	0		1
3ae	1	EXT	1		0	INC	1		1	1	1	8
4a	0	INT	1		1		1		1			6
4c			1		0	INC	1			0		3
4d	0	INT	1	P=0	0	INC	1					3
4g	0	INT	1		1		1		1	0		6
4i	1	EQUA	0	DEF	0	INC	0	DED	0	0		3
4j	0	INT	1	P=0	1		1		0	0		5
4q	1	EQUA	1	P=0	0	INC	1		1	0		7
4u	0	INT	1		0	INC	1		1	1	1	5
4w	1	EQUA	1		1		1		1	1	1	10
4z	0	PARA	1	P=0	0	INC	0		1	1	1	4
4ab	1	CAL	0	CTR	0	INC	0	DED	1			4
4ad	0	PARA	0	CTR	0	INC						2
6a	1	EQUA	1		0	INC	1	AX	1	1	1	8
6c	1	EQUA	1		1		1		1	1	1	10
6d	0	PARA	1		0	INC	1	AX	1	1	1	5
6e	0	INT	1		0	INC	1	AX	1	1	1	5
6f	0	INT	1		0	INC	1		1			4
6g	1	EQUA	0		0	INC	1		1	0		5
6h	1	EQUA	1		0	INC	1		1	1	1	8
6i	1	EXT	1	P=0	0	INC	1		1	1	1	8
6i	1	EQUA	1		0	INC	1	AX	1	1	1	8
6k	1	EXT	1		0	INC	1		1	1	1	8
6m	1	EQUA	1		1		1		1	1	1	10
6n	1	EXT	1									5
6r	1	EQUA	1		0	INC	1		1	1	1	8
6t	1	EQUA	1		1		1		1	1	1	9
6x	1	EQUA	1	P=0	1		1		1	1	1	10
6y	1	EXT	1		1		1		1	1	1	9
6z	0	PARA	1		0	INC	1		1	1	1	5
6aa	1	EQUA	1		1		1		1	0	0	9
6ax	0,55	1SEQ	0,73	6 P=0	0,28	25 INC	0,70	1DEF	0,75	0,43	0,43	5,67
		6EXT		6 CTR		4 BLC		4 AX		ECARTYPE	2,822	
		6PAR		3 DEF				5 DED				
		10INT		3 BLC				4 BLC				
		2CAL										

## ANNEXE C-1

Texte des trois premiers  
exercices du partiel.

Rédiger l'algèbre et l'analyse sur des copies séparées

ANNEXE C-2

ALGÈBRE

I

Déterminer tous les polynômes R à coefficients réels de degré au plus égal à 3 tels que:  $R(1)=0, R(2)=2, R(3)=10$  et  $R(4)=30$ .

II

Soit  $\Delta$  l'application de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  définie par:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$$

On définit de même  $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta, \dots, \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ .

- 1) Si P est un polynôme de degré n quel est le degré de  $\Delta^n P$ ?
- 2) On note  $U_0, U_1, U_2, \dots, U_k$  les polynômes  $1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\dots(X-k+1)$ . Calculer  $\Delta^k U_k$  pour tout entier k positif ou nul, puis  $\Delta^n U_k$  pour tout couple d'entiers positifs (n,k). On distinguera plusieurs cas suivant les positions relatives de n et k. Préciser la valeur  $\Delta^n U_k(0)$  de  $\Delta^n U_k$  en 0.

- 3) Montrer par récurrence sur n que tout élément P de  $\mathbb{R}[X]$  de degré au plus n est combinaison linéaire de  $U_0, U_1, \dots, U_n$  (autrement dit: il existe des réels  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $P = \lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_n U_n$ ).

- 4) Montrer que les applications  $\Delta$  et  $P \mapsto \Delta^k P(0)$  (k entier positif ou nul) sont linéaires. En déduire la formule (dite de Gregory):

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = P(0) + \frac{U_1}{1!} \Delta P(0) + \dots + \frac{U_n}{n!} \Delta^n P(0) \quad (G)$$

- 5) Trouver le polynôme P de degré 3 qui prend les valeurs 0 en  $x=0, 2$  en  $x=1, 10$  en  $x=2$  et 30 en  $x=3$ . Comparer avec le résultat du 1.

III

Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré 5, unitaires (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) tels que

$$P(0) = 4$$

$$\text{pgcd}(P, P') = X^2 - 3X + 2$$

ATTENTION: il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Tableau des données brutes  
au partiel.



TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU PARTIEL

n °	N1	C1	N1	C1	N2a	C2a	N2b	C2b	N2c	N3	C3	N4a	N4b	C4b	N5	C5	N	TR
6s	0,5	MULT	0,5	INF	1		0	K<N	0	0	BLOC	0,5			0	SYS	3	2
6t	1		0,5	FORM	0		0	PRD	0	0	VIDE	0,5			0	SYS	3	2
6u	1	DEG	0		0												2	3
6v	1		0,5	INF	1		0	K>N/I	1	1	LIB	0,5			0	SYS	6	1
6x	1,5	DIV	1		1		0,5	K<N	0						0	SYS	4	2
6y	1,5	DIV	0,5	FORM	1					0		0					4	2
6z	1	DEG	0		1					0		0,5					4	2
6aa	0,5	CAL	0		0				0	0							1	3
MOY*	0,89		0,31		0,69		0,32		0,29	0,21		0,50	0,13		0,15			
MOY	0,89		0,30		0,61		0,16		0,09	0,12		0,20	0,01		0,07		3,20	
	* Moyenne sur les seules réponses effectives																	

29

ANNEXE D-1

Texte et corrigé  
du deuxième devoir surveillé

30



Devoir sur le thème

Analyse

I Calculer l'intégrale  $I = \int_0^3 \frac{t^6 + t^5 - t^3 + 1}{(t^2 + 1)(t + 1)} dt$ .

II 1. Soit  $p, 1$  un entier ; montrer que la fonction  $x \mapsto x^p \log x$ , définie pour tout  $x > 0$ , peut être prolongée en une fonction qui sera continue sur  $[0, +\infty[$ .

Soit  $\phi_p$  la fonction définie par  $\phi_p(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \log x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} \quad \forall x > 0, \quad \phi_p(0) = 0$  ;

montrer que  $\phi_p$  est une primitive de  $\phi_p$  sur  $[0, +\infty[$ , en déduire la valeur de  $\int_0^1 \phi_p(t) dt$ .

2. Soit  $m, 1$  un entier ; montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{x^m \log x}{1-x}$  définie sur  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  peut être prolongée en une fonction qui sera continue sur  $[0, +\infty[$ .

3. Montrer que la suite  $(I_n)$  définie par  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

a une limite nulle quand  $n \rightarrow +\infty$ .

4. Montrer que, pour  $\alpha \neq 1$ , on a 
$$\frac{1}{1-\alpha} = \sum_{p=1}^{n-2} \alpha^{p+1} + \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}$$
 ;

en déduire l'égalité

$$\int_0^1 f_1(t) dt = \sum_{p=1}^{n-1} \int_0^1 \phi_p(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt.$$

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sum_{p=2}^n \frac{1}{p}$  ; montrer que la suite  $(u_n)$  converge et de trouver sa limite  $-\int_0^1 f_1(t) dt$ .

III Soit  $n > 0$  un entier et  $E$  l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

A tout  $P \in E$ , on associe la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui est définie par 
$$x \mapsto \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt$$

Soit  $Q$  cette fonction.

1) Montrer que  $Q$  est une fonction polynôme et que (en identifiant polynôme et fonction polynôme)  $Q \in E$ .

2) On pose  $Q = u(P)$ . Montrer que  $u$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

3) Soit  $P \in E$  de degré inférieur ou égal à  $n$ . Prouver que si  $u(P) = 0$  alors pour tout entier  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ , on a 
$$\int_0^1 t^k P(t) dt = 0$$

En déduire que pour un tel polynôme  $P$ , on a 
$$\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$$

Conclure que  $P = 0$ .

Indication : Si  $0 \leq x \leq 1$  
$$0 \leq \int_0^x P(t)^2 dt \leq \int_0^1 P(t)^2 dt.$$

4) A l'aide des résultats précédents, déterminer le rang de l'application  $u$  et la dimension de son image.

Couregi de DS n°2

1/ La division suivant les puissances décroissantes du numérateur par le dénominateur permet d'écrire

$$\frac{x^6+x^5-x^3+1}{x^4+x^2-x-1} = x^2 + \frac{x^3+1}{x^4+x^2-x-1}$$

La décomposition de  $\frac{x^3+1}{x^4+x^2-x-1}$  est de la forme

$$\frac{x^3+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

On obtient a (resp b) en multipliant la deux membre de l'égalité par x-1 (resp x+1) et en prenant la valeur des fonctions correspondantes pour x=1 (resp x=-1); on a a = 1/3 b = -1/3

En prenant la valeur des deux membre pour x=0 on obtient 1 = a+b+d; en multipliant la deux membre par x et en prenant la limite de fonctions correspondantes quand x → ∞ on obtient 0 = a+b+c d'où l'égalité

$$\frac{x^6+x^5-x^3+1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + x^2$$

D'où en intégrant entre 2 et 3

$$\int_2^3 \frac{x^6+x^5-x^3+1}{x^4+x^2-x-1} dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_2^3 + \frac{1}{3} [\log(t-1)]_2^3 - \frac{1}{3} [\log(t+1)]_2^3 + \left[ \log(t^2+t+1) \right]_2^3$$

$$3I = 19 + \log 2 - 3 \log 4 + 3 \log 3 + \log 13 - \log 7 = 19 + \log \frac{13 \times 13}{7 \times 28}$$

soit une valeur approché de I = 6,48

2/ Pour tout p > 1 on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^p \log x = 0$ ; la fonction  $\phi_p$  définie par  $\phi_p(x) = x^p \log x$  si x > 0 et  $\phi_p(0) = 0$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . La fonction  $\phi_p$  est continue en 0 car  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi_p(x) = 0$ ; elle

est dérivable pour tout x > 0 et l'on a

$$\phi_p'(x) = x^p \log x + \frac{x^p}{x} = x^{p-1} (\log x + 1)$$

L'égalité  $\lim_{x \rightarrow 0} \phi_p'(x) = 0$  implique que  $\phi_p$  est de classe C¹ sur  $[0, +\infty[$  et que l'on a  $\phi_p'(x) = \phi_p'(x) \quad \forall x > 0$ .

$\phi_p$  est donc une primitive de  $\phi_p'$  sur  $[0, +\infty[$  et l'on a

$$\int_0^1 \phi_p'(t) dt = [\phi_p(t)]_0^1 = -\frac{1}{(p+1)}$$

3. On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^p \log x}{1-x} = 0 \quad \forall p, 1$ . Quand x > 1 on pose x-1 = h,

d'où  $\frac{(1+h)^p \log(1+h)}{-h} = -1 \text{ echl}$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \text{echl} = 0$ . Soit  $f_n$  définie par

$$f_n(x) = \frac{x^n \log x}{1-x} \quad x > 0, x \neq 1, f_n(0) = 0, f_n(1) = -1;$$

$f_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

La fonction  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$  et bornée sur cet intervalle; d'où

$$|I_n| = \left| \int_0^1 f_n(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 t^n |f_n(t)| dt \leq M \int_0^1 t^n dt$$

en notant M = sup<sub>t ∈ [0,1]</sub> |f\_n(t)| on a donc |I\_n| ≤ M/n et  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .

3. De l'égalité, réalisée pour x ≠ 1,

$$1+x + x^{2n} = \frac{x^{2n+1}-1}{x-1}$$

on déduit, après multiplication des deux membre par x log x,

$$\frac{x \log x}{1-x} = \sum_{p=1}^{2n} x^p \log x + \frac{x^{2n+1} \log x}{1-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

soit  $f(x) = \sum_{p=1}^{2n} \phi_p(x) + f_n(x)$ .

Cette dernière égalité est encore vérifiée pour x=0 et x=1 car

$$f(0) = \phi_p(0) = f_n(0), \quad \phi_p(1) = 1, \quad f(1) = -1 = f_n(1)$$

La fonction considérée étant continue sur  $[0, 1]$  on a

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{p=1}^{2n} \int_0^1 \phi_p(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt;$$

$$\text{soit } \int_0^1 f(t) dt = -\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{(p+1)^2} + \int_0^1 f_n(t) dt.$$

$$\text{L'égalité } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = 0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{(p+1)^2} = -\int_0^1 f(t) dt$$

Devoir sur table du 4/10/21

Couregi:

ALGÈBRE

1°/ Pour tout x ∈ ℝ, en utilisant la formule du binôme:

$$Q(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt = \int_0^1 \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k t^{n-k} P(t) \right] dt$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \left( \binom{n}{k} \int_0^1 t^{n-k} P(t) dt \right) x^k \quad (*)$$

Donc Q est un polynôme et deg(Q) ≤ n. Ainsi Q ∈ E.

2°/ Soit P ∈ E, P₁ ∈ E et λ ∈ ℝ.

$$\text{Posons } Q = u(P), \quad Q_1 = u(P_1) \text{ et } Q_2 = u(\lambda P + P_1)$$

Pour tout x ∈ ℝ, on a en utilisant la linéarité de l'intégrale:

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= \int_0^1 (x+t)^n [\lambda P(t) + P_1(t)] dt = \\ &= \lambda \int_0^1 (x+t)^n P(t) dt + \int_0^1 (x+t)^n P_1(t) dt \\ &= \lambda Q(x) + Q_1(x) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$u(\lambda P + P_1) = \lambda u(P) + u(P_1)$$

L'application u est donc linéaire de E dans E.

3°/ Soit P ∈ E de degré inférieur ou égal à n tel que u(P) = Q = 0. Le polynôme Q est nul donc tous ses coefficients sont nuls. L'égalité (\*) nous donne alors pour tout k=0,1,...,n:

$$\binom{n}{k} \int_0^1 t^k P(t) dt = 0$$

C'est à dire en changeant k en n-k:

$$\int_0^1 t^k P(t) dt = 0 \quad k=0, 1, \dots, n$$

On en déduit immédiatement que si a₀, a₁, ..., a\_n sont

des réels quelconques:

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 t^k P(t) dt = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n a_k t^k \right) P(t) dt = 0$$

Ainsi pour tout polynôme S de degré au plus n

$$\int_0^1 S(t) P(t) dt = 0$$

En particulier si S = P, nous obtenons

$$\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$$

$$\text{Posons } F(x) = \int_0^x P(t)^2 dt \text{ où } 0 \leq x \leq 1.$$

Pour tout x ∈ [0, 1]

$$0 \leq \int_0^x P(t)^2 dt = F(x) \leq \int_0^1 P(t)^2 dt = 0$$

Donc F est nulle (dans [0, 1]). F est dérivable

et F'(x) = P(x)² = 0. Donc pour tout x ∈ [0, 1]

P(x) = 0 et puisque P est un polynôme, P = 0.

4) Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à n. On sait que

u(E) ⊂ F et que u restreinte à F est injective.

L'image par u d'une base de F est un système libre de

n+1 vecteurs de F; c'est donc une base de F. Donc  $\text{rang}(u) = n+1$ .

Le théorème du rang nous donne alors:

$$\dim \ker(u) = \dim E - \text{rang}(u) = 2n+1 - (n+1) = n.$$

ANNEXE D-2

Tableau des données brutes  
au deuxième devoir surveillé

N°		N1	C1	N2	N3	N4	N4	C4	N	TR
3a	DEB	0	VARI	1	1	0			5	2
3b	DEB	0	VARI	1	1	0			4	2
3c	DEB	1	EV	1	0		0	BIJ	8	1
3d	DEB	0	VAR2	1	1	0	0	BIJ	5	2
3e	FIN	0	VARI	1	0				4	2
3g	DEB	0		0	0				0	3
3h	DEB	0		0	0				0	3
3i	FIN	0	VAR2	1	1	0			4	2
3n	DEB	1	DEV	1	1	1	0		10	1
3o	DEB	0	VAR2	1	1	0			4	2
3ac	DEB	0	VAR2	1	1	1	0	BIJ	10	1
3ae	FIN	1		1	1				4	2
4a	FIN	0	VAR2	1					4	2
4b	FIN	0	VAR2	1					4	2
4d	FIN	0	VARI	1	0	0			0	3
4e	FIN	0		0	0	1			1	3
4f	FIN	0	VAR2	0	0	1			8	1
4g	FIN	1		1					8	1
4h	FIN	1	DEV	1	0	0			4	2
4i	FIN	0		1	0	0			5	2
4j	FIN			1	1	0			0	3
4l	FIN	0	EV	1	1	0	0	BIJ	9	1
4u	FIN	1		1	1		0	BIJ	4	2
4w	FIN	0		1			0	BIJ	9	1
4z	FIN	1		1	1				5	2
4ab	FIN	0		1	1	1	0	BIJ	10	1
4ad	FIN	1		1	1	1	0	BIJ	4	2
6a	FIN	0	PRIM	1			0	BIJ	8	1
6c	FIN	1		1					4	2
6d	FIN	1		1	0		0	BIJ	8	1
6e	FIN	0	PRIM	1	0		0	BIJ	4	2
6f	FIN	1		1					4	2
6g	FIN	0		1	0		0	BIJ	4	2
6h	FIN	0	PRIM	1			0	BIJ	8	1
6i	FIN	1	DEV	1			0	BIJ	8	1
6k	FIN	1		1					5	2
6m	DEB	0		1	1				9	1
6o	DEB	1	DEV	1	1				10	1
6p	FIN	1	DEV	1	1	1	0	BIJ	8	1
6r	FIN	1		1			0	BIJ	4	2
6t	FIN	0	PRIM	1			0	BIJ	9	1
6v	FIN	1	DEV	1	1				4	2
6x	FIN	0	VARI	1					0	3
6y	FIN	0	PRIM	1					9	1
6aa	FIN	1		1					0	3
MOY(*)			SPRIM		0,54	0,38				
MOY	12DE	0,41	5VARI	0,91	0,33	0,11	0,00	18BIJ	5,74	
	34FIN	2BLC	5VAR2	1BLC				ECART-TY	2,8	
		6DEV			18BLC	33BLC	24BLC			
			2EV							

(\*) Moyenne calculée sur les seules réponses effectives.

**Algèbre linéaire : Vrai ou faux ?**

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont vraies, donner une démonstration, lorsqu'elles sont fausses, exhiber un contre-exemple. Plan veu! dire sous-espace vectoriel de dimension 2 et droite sous-espace vectoriel de dimension 1.

**R**

**Textes des deux versions  
du test "vrai/faux".**

1) Soient  $x, y, z$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Si aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des deux autres, la famille  $(x, y, z)$  est libre.

2) Si les vecteurs  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}^3$  sont deux à deux non colinéaires, la famille  $(x, y, z)$  est libre.

3) Soit  $P$  un plan de  $\mathbb{R}^3$  et  $D$  une droite de  $\mathbb{R}^3$  non contenue dans  $P$ . Alors  $\mathbb{R}^3 = P \cup D$ .

4) Soient  $D_1, D_2, D_3$ , trois droites de  $\mathbb{R}^3$  distinctes deux à deux. Alors  $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ .

5) Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une base de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $D$  la droite engendrée par  $e_1$ . Alors tout sous-espace vectoriel supplémentaire de  $D$  contient  $e_2$  et  $e_3$ .

6) Les fonctions  $f, x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin^2 x$  et  $x \mapsto \sin^2 x$  sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des fonctions réelles.

7) On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par  $u_n = \sin(n \frac{\pi}{2})$  et  $v_n = \cos(n \frac{\pi}{2})$ . Le sous-espace vectoriel engendré par  $(u_n)$  et  $(v_n)$  dans l'espace vectoriel des suites réelles est de dimension 2.

**B**

Soit  $u$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

1) Si  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $(u(e_1), u(e_2), u(e_3))$  aussi.

2) Si  $(u(e_1), u(e_2))$  est une famille libre, alors  $(e_1, e_2)$  aussi.

3) Si  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , et si  $(u(e_1), u(e_2))$  est une base de  $\text{Im } u$ , alors  $e_3$  appartient à  $\text{Ker } u$ .

4) Soit  $v$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .  
On a  $v \circ u = 0$  si et seulement si  $\text{Im } u = \text{Ker } v$ .

**C**

Soient  $a, b, c$  trois réels distincts deux à deux.

Montrer que les polynômes  $(X-b)(X-c), (X-c)(X-a), (X-a)(X-b)$  forment une base  $B$  de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Ecrire la matrice de l'application dérivée  $D : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$

$$P \longmapsto P' \quad \text{relative aux bases } B \text{ de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et } (1, X) \text{ de } \mathbb{R}_1[X]$$

Rédigez votre test sur les feuilles blanches fournies en utilisant une seule face et en indiquant en haut à gauche : Nom, groupe et numéro de la page.

Algèbre linéaire: Vrai ou faux?

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Lorsqu'elles sont vraies, donner une démonstration, lorsqu'elles sont fausses, exhiber un contre-exemple. Plan veut dire sous-espace vectoriel de dimension 2 et droite sous-espace vectoriel de dimension 1.

A

- 1) Si les vecteurs  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  de  $\mathbb{R}^3$  sont deux à deux non colinéaires, alors la famille  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est libre.
- 2) Soit  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Si aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des autres la famille  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est libre.
- 3) Soient  $D_1, D_2$  et  $D_3$  trois droites de  $\mathbb{R}^3$  distinctes deux à deux. Alors  $\mathbb{R}^3$  est somme directe de  $D_1, D_2$  et  $D_3$ .
- 4) Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\mathbb{R}^3 = P_1 \cup P_2$ .
- 5) Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans distincts de  $\mathbb{R}^3$  alors  $P_1 \oplus P_2 = \mathbb{R}^3$ .
- 6) Soient  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $P$  le plan engendré par  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_2$  alors tout sous-espace vectoriel supplémentaire de  $P$  contient  $\vec{e}_3$ .
- 7) Les fonctions  $1, x \rightarrow \sin x, x \rightarrow \cos x, x \rightarrow \cos^2 x$  et  $x \rightarrow \sin^2 x$  sont linéairement indépendantes.
- 8) On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par  $u_n = \sin(n\pi/2)$  et  $v_n = (-1)^n$ . Le sous-espace vectoriel engendré par ces deux suites est de dimension 2.

B

Soit  $u$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

- 1) Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$  alors  $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$  aussi.
- 2) Si  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), u(\vec{e}_3), u(\vec{e}_4))$  aussi.
- 3) Si  $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$  est une famille libre alors  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  aussi.
- 4) Si  $(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2))$  est une base de  $\text{Im } u$  alors  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base d'un sous-espace vectoriel supplémentaire de  $\text{Ker } u$ .
- 5) Soit  $v$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $v \circ u = 0$  si et seulement si  $\text{Im } u = \text{Ker } v$ .

C.

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts deux à deux, montrer que les polynômes  $(X-a)^2, (X-a)(X-b)$  et  $(X-b)^2$  forment une base  $(\mathcal{B})$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  et écrire la matrice de l'application dérivée  $\mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]: P \mapsto P'$  relative à la base  $(\mathcal{B})$  et à la base canonique  $(1, X)$ .

Etudiants des groupes 3, 4 et 6: rédigez votre test sur les feuilles blanches fournies en utilisant une seule face et en indiquant en haut à gauche: nom, groupe, et numéro de la page. Cela facilitera les photocopies.  
 D'avance merci.

ANNEXE E-2

Tableau des données brutes  
 au test "vrai/faux".

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU "VRAI/FAUX"

n°etud	R/Bac	NA1	CA1	NA2	CA2	NA3	NA4	CA3	CA4	CA	NA5	NA6	NA7	CA7	NB1	NB2	CB1	CB2
3a	RC	0	EV	1	CEG	0	0	SOM	ABU		0	0	0	EV	1	0	REC	BIJ
3b	NE	0		0		0	0		DIM		0	0			0	0	REC	BIJ
3c	RD	1		1	CEX	1	0		LIB		0	1	1		1	0		
3d	NE	0		1	CEG	0	0		DIM	AFF	0	0	1		1	0		
3e	RC	0	EV	0		0	0		LIB		0	1	0	IND	1	0	REC	
3g	RD	0	EV	1	CEX	0	0	SOM	ABU		0	0	1		0	0		
3h	ND	0	REC	0	EV	0	0	SOM	DIM		0	1			0	0	REC	BIJ
3i	RC	0	EV	0	EV	0	0	SOM	ABU		0	1		DER	0	0		
3j	NC	1	CA	1	CEG	1	0		ABU	AFF	0	1		DER	1	0	REC	
3m	RC	1	CA	1	CEX	0	0		DIM	AFF	0	0	0	EV	1	0	REC	
3n	RC	0	EV	1	CEG	0	0	SOM	ABU	AFF	1		0	EV	1	1		
3o	RC	0	REC	0	REC	1	0		LIB		0	1	0	DER	1	0	REC	BIJ
3p	NC	0	EV	0	EV	0		SOM				1	0	DER	0			
3r	RC	0	REC	0	REC	0	0	SOM	ABU	AFF	0	1	0	EV	1	0	REC	
3v	NC	0	REC	1	CEX	0	0			AFF		0	0	DER	0	0		
3w	NC	0	REC	1	CEG	0	0	SOM	ABU		1	1			1	0	REC	BIJ
3x	RC	0	REC	0	REC	0	0	SOM	LIB	AFF	0	1	0		0	0	REC	BIJ
3y	RE	0	EV	1	CEX	0	0		DIM	AFF	0	1	0		1	0		
3z	NC	1		1	CEX	0	1	SOM				1	0	DER	1	0		BIJ
3aa	RC	0	REC	0	REC	0	0	SOM	ABU		0	0	1		0	0	REC	BIJ
3ab	NC	0		1	CEX	0	1	SOM				1			1	0		
3ac	ND	0		0		0	0		ABU	AFF	0	1	0	EV	1	0		
3ad	RC	0		1	CEX	0	1	SOM			1	1	0	DER	1	0	REC	
3ae	RC	0	EV	1	CEX	0	0			AFF	0	1	0	EV	1	1		
4a	NC	0,5	EV	1	CEX	1	0		LIB		1	1						
4c	NC	0,5	EV	1	CEX	1	1					1	0	INT	1			
4d	NC	0,5	EV	1	CEX	0	1	SOM			1	1			1	0	REC	
4e	NC	1	CA	1	CEX	1	1			AFF	0	0	0	EV	1			
4f	NC	0	EV	1	CEG	1	1					1	0	GEN	1			
4g	RC	0	EV	1	CEX	1	1			AFF	0	0	0		1			
4h	NEQ	0	REC	0		0	0	SOM	ABU		0	1	0	GEN	0	0	REC	BIJ
4i	NC	0		1	CEX	0	0		LIB	AFF	0	0	0		1	0	REC	BIJ
4l	NC	0	EV	1	CEX	0	1				0	1	0	DER	1	0	REC	
4n	NC	0,5	EV	1	CEX	0	0					1			0		REC	
4p	NC	0	REC	1	CEX	0	1					0			0	0	REC	
4q	RD	1	CA	1	CEX	1	1				0	1	0	EV	1			

Les blancs ont valeur de 0 dans les colonnes de notes.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU "VRAI/FAUX"

n°etud	R/Bac	NA1	CA1	NA2	CA2	NA3	NA4	CA3	CA4	CA	NA5	NA6	NA7	CA7	NB1	NB2	CB1	CB2
4s	NC	0,5	EV	1	CEX	1	1				0	1	0	EV	0	0	REC	BIJ
4u	NC	1	CA	1	CEG	1	1				1	1			0	0	REC	
4z	NC	0	EV	1	CEG	1	1				0	1			0	0	REC	
4ab	RC	0,5	EV	1	CEG	1	1				0	1	0	DER	0	0	REC	BIJ
4ac		0	REC	1	CEX	0	0	SOM	LIB		0	1	0	GEN	0	0	REC	BIJ
4ad		1	CA	1	CEX	1	1				0	1			0	0	REC	
6a	NC	1		1	CEG	0	0		ABU		0	0	0		0	0	REC	
6c	NFI	0		1	CEX	0	0		ABU	AFF	0	1			0	0	REC	
6d	ND	0	EV	1	CEG	0	1				0	1	1		1	0	REC	
6e	NC	0		1	CEG	0	1	SOM			1	1	0	GEN	0	0		
6f		0	EV	1	CEG	1	0		DIM		0	1			0	0	REC	
6h	NC	1		1	CEX	0	0		ABU	AFF		0	0		0	0	REC	
6j	NC	0,5	EV	1	CEX	0	0				0	0	0		0	0	REC	
6k	NC	0,5	EV	1	CEG	1	1				1	1	0	DER	0	0		
6p		1	CA	1	CEX	1	1					1	1		1			
6r	NC	1	CA	1	CEX	1	1				1	1	0		0	0		BIJ
6t	NC	0	EV	1	CEX		0		ABU	AFF	0				0		REC	
6v	NC	1		1	CEX	1	1			AFF		1	1		0	0	REC	BIJ
6x		0		0	EV	0	0		ABU	AFF	0	1	0		0	0	REC	BIJ
6y	ND	0		1	CEX		0		ABU	AFF		0						
6z	NC	0		1	CEX	0	1			AFF	0	0			1	1		
6aa	NC	0	REC	0	REC	1	0		ABU	AFF	1	1	0	DER	0	0	REC	
moy		0,29	23 EV 8 CA	0,78	31CEX 14CEG	0,34	0,40	17SOM	6DIM 7LIB	21AFF	0,17	0,69	0,12	11DER 4GEN	0,47	0,05	34REC	16BIJ
moy3		0,17	11REC	0,58	5REC	0,13	0,13	13SOM	7LIB	10AFF	0,13	0,67	0,17	11IND	0,67	0,08		
moy4		0,39		0,94	4EV	0,61	0,72	3SOM		3AFF	0,17	0,78	0,00	11INT	0,44	0,00		
moy6		0,38		0,88		0,38	0,44	1SOM		8AFF	0,25	0,63	0,19	9 EV	0,19	0,06		

Les blancs ont valeur de 0 dans les colonnes de notes.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU "VRAI/FAUX"

n° etud	NB3	NB4	CB4	NC1	CC1	CC2	NC2	CC3	N	note (au prétest)
3a	0	0	ABU	0	SYS		1		3	16
3b	0	0		0	SYS	RGN	1		1	12
3c	0	0	ABU	1	VAL	DIM	1		7	15
3d	0	0,5	RES	0,5		DIM	1		5	15
3e	0	0,5	INC	0,5		DIM	1		4	12
3g	0			0	SYS	GEN	0	FOR	2	11
3h	0			0,5	VAL	GEN	1		2,5	10
3i	0	0		0	SYS	DIM	1		2	13
3j	0	0,5	DOUT	0	SYS	GEN	1		5,5	12
3m	1	0,5	RES	1	VAL	DIM	1		5,5	15
3n	1	0,5	INC						4,5	19
3o	0	0,5	DOUT	1	VAL	DIM	1		4,5	15
3p		0		1	VAL	DIM	1		3	11
3r	0	0,5	RES	0		GEN	1		3,5	15
3v	0								1	13
3w		1				RGN			5	9
3x	0	0,5	DOUT	0			1		2,5	19
3y	1	0,5	RES	1	VAL	DIM	1		5,5	12
3z	0	1		1	VAL	DIM	1		7	13
3aa	0	0		0		GEN			1	11
3ab	0								3	9
3ac	0	0		0,5	SYS	DIM	1		3,5	12
3ad	0			0,5	VAL	GEN	0	CAN3	4,5	13
3ae	1	0,5	RES	1	VAL	DIM	1		6,5	15
4a									3,5	14
4c		0,5	RES						4	12
4d		0,5	RES	0,5		DIM	1		6,5	19
4e		0		0		GEN			3	10
4f		0,5	RES	0,5	S*	GEN	1		5	11
4g		0	ABU						2	15
4h				0,5	DIV	DIM			1,5	5
4i	0	0,5	INC	0,5	VAL		1		4	10
4l		0,5	INC	0,5	SYS	DIM	1		5	16
4n		0	ABU						2,5	12
4p		0	ABU	0	SYS				1	13
4q		0,5	RES	0,5	SYS	DIM	0	CAN3	5	12

Les blancs ont valeur de 0 dans les colonnes de notes.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU "VRAI/FAUX"

n° etud	NB3	NB4	CB4	NC1	CC1	CC2	NC2	CC3	N	note (au prétest)	
4s		0	ABU	0	SYS		0	FOR	2,5	13	
4u		0	ABU	0,5	DIV	DIM			4,5	10	
4z				0	SYS	GEN			2	11	
4ab		0	ABU						2,5	9	
4ac				0	DIV	GEN			2	15	
4ad		0	ABU	0,5	DIV	DIM			3,5	16	
6a				1	VAL	DIM	1		4	20	
6c				0,5	SYS	DIM	1		3,5	11	
6d	0	0,5	INC	0					4,5	16	
6e				0					3	19	
6f									2	11	
6h				1	VAL	DIM	1		4	13	
6j		0		1	VAL	DIM	1		3,5	17	
6k	0	0	RES	0,5	VAL	RGN	1		5	14	
6p				0		GEN	1		6	15	
6r	0	0	RES	0,5	VAL	RGN	1		5,5	13	
6t				1	VAL	DIM	1		3	8	
6v				1	S*	DIM	1		6	19	
6x		0	ABU	1	VAL	DIM	1	CAL	3	15	
6y		0		0,5	SYS	DIM	1		2,5	15	
6z		0,5	RES						3,5	13	
6aa		0							2	14	
moy	0,07	0,19	12RES	0,37	17VAL	25DIM	0,55	2FOR	3,68	13,33	
			10ABU		13SYS	11GEN		2CAN3			
moy3	0,17	0,29	5INC	0,40	2 S*	4RGN	0,71	1CAL	3,85	13,21	
moy4	0,00	0,17		0,22	4DIV		0,22		3,33	12,39	
moy6	0,00	0,06		0,50			0,69		3,81	14,56	
									ECARTYPE	1,57	3,05
									ECARTYPE 3	1,82	2,65
									ECARTYPE 4	1,48	3,20
									ECARTYPE 6	1,29	3,20

Les blancs ont valeur de 0 dans les colonnes de notes.

ANNEXE E-3

Tableaux croisés  
prétest / "vrai/faux"  
(première version et tableau simplifié)

TABLEAU CROISE "VRAI/FAUX" ET PRETEST

		EFF	%	MOY	ECAR	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	1	2	3	4	6
Global		58		13,3	3,05	64%	19%	16%	36%	36%	83%	59%	40%	24%	22%	10%	1	1
NA1	1	13	22%	14,1	3,04	8 62%	3 23%	2 15%	6 46%	5 38%	1 85%	7 54%	6 46%	2 15%	4 31%	1 8%	0	0
CA1	REC	11	19%	12,64	3,75	7 64%	3 27%	1 9%	6 55%	5 45%	6 55%	6 55%	3 27%	4 36%	2 18%	1 9%	0	1
	CA	8	14%	12,88	2,3	3 38%	1 13%	1 13%	4 50%	3 38%	6 75%	3 38%	4 50%	0	3 38%	1 13%	0	0
NA2	0	13	22%	12,6	3,31	0 77%	2 15%	2 15%	5 38%	6 46%	9 69%	7 54%	3 23%	5 38%	3 23%	1 8%	0	1
CA2	REC	5	9%	14,8	2,86	4 80%	2 40%	0	4 80%	1 20%	2 40%	4 80%	2 40%	2 40%	0	1 20%	0	0
	CEGOUCEX	45	78%	13,53	2,98	27 60%	9 20%	7 16%	16 36%	15 33%	39 87%	27 60%	20 44%	9 20%	10 22%	5 11%	1	0
	CEX	31	53%	13,45	2,58	19 61%	5 16%	6 19%	8 26%	13 42%	28 90%	19 61%	12 39%	9 29%	7 23%	2 6%	1	0
NA3	1	20	34%	13,1	2,44	1 55%	3 15%	3 15%	7 35%	6 30%	5 75%	2 60%	7 35%	3 15%	7 35%	3 15%	0	0
NA4	1	23	40%	13,5	3	4 61%	4 17%	3 13%	8 35%	5 22%	10 87%	5 65%	0 43%	4 17%	6 26%	3 13%	0	0
CA4	DIM	6	10%	12,5	2,07	3 50%	1 17%	1 17%	2 33%	3 50%	5 83%	2 33%	2 33%	1 17%	1 17%	0	0	0
	ABU	17	29%	12,88	3,76	12 71%	3 18%	4 24%	7 41%	7 41%	12 71%	9 53%	7 41%	4 24%	3 18%	1 6%	1	1
	LIB	7	12%	14,29	2,81	3 43%	2 29%	1 14%	3 43%	3 43%	6 86%	6 86%	2 29%	2 29%	2 29%	1 14%	0	0
CA	AFF	21	36%	13,81	2,94	15 71%	6 29%	3 14%	9 43%	6 29%	18 86%	11 52%	12 57%	4 19%	3 14%	1 5%	1	0
NA5	1	10	17%	14,4	3,6	6 60%	5 50%	1 10%	5 50%	4 40%	8 80%	6 60%	5 50%	1 10%	3 30%	1 10%	0	0
NA6	1	40	69%	13,2	3,03	6 65%	7 18%	7 18%	4 35%	4 35%	8 33%	8 33%	4 35%	0 25%	1 28%	4 10%	0	1
NA7	1	7	12%	14,6	2,82	6 86%	1 14%	0	4 57%	3 43%	6 86%	5 71%	4 57%	2 29%	0	1 14%	0	0
CA7	DER	11	19%	13	1,9	8 73%	2 18%	0	4 36%	3 27%	10 91%	4 36%	4 36%	5 45%	1 9%	1 9%	0	0
	GEN	4	7%	12,5	5,97	4 100%	1 25%	1 25%	2 50%	1 25%	3 75%	2 50%	2 50%	0	1 25%	0	0	1
NB1	1	27	47%	13,6	2,65	4 52%	4 15%	3 11%	0 37%	7 26%	13 85%	6 59%	2 44%	7 26%	6 22%	2 7%	0	0
NB2	1	3	5%	15,7	3,06	1 100%	1 33%	0	1 33%	0	1 100%	1 100%	0	0	0	0	0	0
CB1	REC	34	59%	13,29	3,46	20 59%	6 18%	6 18%	16 47%	12 35%	25 74%	21 62%	14 41%	7 21%	6 18%	5 15%	1	1
CB2	BIJ	16	28%	12,75	3,75	10 63%	2 13%	2 13%	6 38%	6 38%	11 69%	9 56%	5 31%	4 25%	3 19%	3 19%	0	1
NB3	1	3	5%	14	1,73	1 33%	1 33%	0	1 33%	1 33%	100%	1 33%	2 67%	1 33%	0	0	0	0
NB4	>=0,5	19	33%	14,1	2,97	9 47%	5 26%	2 11%	9 47%	4 21%	16 84%	3 68%	0 53%	3 16%	5 26%	1 5%	0	0
CB4	RES	12	21%	13,83	2,17	7 58%	4 33%	2 17%	5 42%	3 25%	11 92%	8 67%	6 50%	2 17%	4 33%	0	0	0
	ABU	10	17%	13,4	2,46	6 60%	0	0	4 40%	2 20%	8 80%	7 70%	4 40%	4 40%	0	2 20%	0	0
NC1	1	13	22%	14,5	3,2	9 69%	3 23%	2 15%	6 46%	5 38%	1 85%	8 62%	6 46%	4 31%	2 15%	0	1	0
	0,5	17	29%	12,6	3,18	1 65%	2 12%	4 24%	4 24%	7 41%	5 88%	9 53%	6 35%	2 12%	6 35%	2 12%	0	1
CC1	SYS	13	22%	12,85	1,77	7 54%	0	1 8%	3 23%	5 38%	12 21%	8 14%	4 31%	6 46%	3 23%	0	0	0
CC1	VAL	17	29%	13,47	2,85	11 54%	3 18%	3 18%	6 35%	8 47%	15 88%	9 53%	6 35%	5 29%	4 24%	1 6%	1	0
NC2	1	32	55%	14	2,87	2 69%	7 22%	5 16%	4 44%	0 31%	9 91%	8 56%	5 47%	3 25%	7 22%	1 3%	1	0
CC2	DIM	25	43%	13,76	3,41	17 68%	4 16%	5 20%	9 36%	9 36%	21 84%	16 64%	11 44%	6 24%	5 20%	1 4%	1	1
	GEN	11	19%	12,18	1,99	6 55%	1 9%	0	4 36%	6 55%	8 73%	5 45%	3 27%	3 27%	4 36%	1 9%	0	0
	RGN	4	7%	12	2,16	3 75%	1 25%	1 25%	1 25%	3 75%	3 75%	1 25%	1 25%	1 25%	2 50%	0	0	0
	moy (moyenne globale: 3,68)					3,62	4,09	3,39	4	3,33	3,81	3,72	4,11	3,39	3,85	2,83	3	2

Les pourcentages sont sur la ligne



TABLEAU CROISE SIMPLIFIE "VRAI/FAUX" ET PRETEST

		EFF	%	MOY	EQ1(2)	EQ3(2)	EQ3(0)	Q(2)	Q(0)	AN	AS(2)	B=0	<=1	<=2	3	4	6
Global		58		13,3	64%	19%	16%	36%	36%	83%	59%	40%	64%	86%	10%	1	1
	moy	(moyenne globale: 3,62			4,09	3,39	4	3,33	3,81	3,72	4,11	3,84	3,84	2,83	3	1,5	
NA1	1	13	22%	14,08	62%	23%	15%	46%	38%	85%	54%	46%	61%	92%	8%	0	0
CA1=	CA	8	14%	12,9	38%	13%	13%	50%	38%	75%	38%	50%	50%	88%	13%	0	0
CA2=CEG/X		45	78%	13,53	60%	20%	16%	36%	33%	87%	60%	44%	64%	86%	11%	1	0
	CEX	31	53%	13,45	61%	16%	19%	26%	42%	90%	61%	39%	68%	91%	6%	1	0
NA3	1	20	34%	13,1	55%	15%	15%	35%	30%	75%	60%	35%	50%	85%	15%	0	0
NA4	1	23	40%	13,42	61%	17%	13%	35%	22%	87%	65%	43%	60%	86%	13%	0	0
NA5	1	10	17%	14,4	60%	50%	10%	50%	40%	80%	60%	50%	60%	90%	10%	0	0
NA6	1	40	69%	13,2	65%	18%	18%	35%	35%	83%	58%	35%	60%	88%	10%	0	1
NA7	1	7	12%	14,57	86%	14%	0	57%	43%	86%	71%	57%	86%	86%	14%	0	0
NB1	1	27	47%	13,56	52%	15%	11%	37%	26%	85%	59%	44%	70%	92%	7%	0	0
NB2	1	3	5%	15,67	100%	33%	0	33%	0	100%	100%	100%	100%	100%	0	0	0
NB3	1	3	5%	14	33%	33%	0	33%	33%	100%	33%	67%	100%	100%	0	0	0
NB4	>=0,5	19	33%	14,05	47%	26%	11%	47%	21%	84%	68%	53%	69%	95%	5%	0	0
NC1	1	13	22%	14,46	69%	23%	15%	46%	38%	85%	62%	46%	77%	92%	0	1	0
CC1	VAL	17	29%	13,5	54%	18%	18%	35%	47%	88%	53%	35%	64%	88%	6%	1	0
NC2	1	32	55%	14	69%	22%	16%	44%	31%	91%	56%	47%	72%	94%	3%	1	0
CC2	DIM	25	43%	13,76	68%	16%	20%	36%	16%	84%	64%	44%	68%	88%	4%	1	1
CA4	LIB	7	12%	14,29	43%	29%	14%	43%	43%	86%	86%	29%	58%	87%	14%	0	0
NC1	0,5	17	29%	12,59	65%	12%	24%	24%	41%	88%	53%	35%	47%	82%	12%	0	1
CA1	REC	11	19%	12,64	64%	27%	9%	55%	45%	55%	55%	27%	63%	81%	9%	0	1
NA2	0	13	22%	12,62	77%	15%	15%	38%	46%	69%	54%	23%	61%	84%	8%	0	1
CA2	REC	5	9%	14,8	80%	40%	0	80%	20%	40%	80%	40%	80%	80%	20%	0	0
CA4	DIM	6	10%	12,5	50%	17%	17%	33%	50%	83%	33%	33%	66%	83%	17%	0	0
	ABU	17	29%	12,88	71%	18%	24%	41%	41%	71%	53%	41%	65%	83%	6%	1	1
CA	AFF	21	36%	13,8	71%	29%	14%	43%	29%	86%	52%	57%	76%	90%	5%	1	0
CA7	DER	11	19%	13	73%	18%	0	36%	27%	91%	36%	36%	81%	90%	9%	0	0
	GEN	4	7%	12,5	100	25%	25%	50%	25%	75%	50%	50%	50%	75%	0	0	1
CB1	REC	34	59%	13,3	59%	18%	18%	47%	35%	74%	62%	41%	62%	80%	15%	1	1
CB2	BIJ	16	28%	12,75	63%	13%	13%	38%	38%	69%	56%	31%	56%	75%	19%	0	1
CB4	RES	12	21%	13,8	58%	33%	17%	42%	25%	92%	67%	50%	67%	100%	0	0	0
	ABU	10	17%	13,4	60%	0	0	40%	20%	80%	70%	40%	80%	80%	20%	0	0
CC1	SYS	13	22%	12,85	54%	0	8%	23%	38%	21%	14%	31%	77%	100%	0	0	0
CC2	GEN	11	19%	12,18	55%	9%	0	36%	55%	73%	45%	27%	54%	90%	9%	0	0
	RGN	4	7%	12	75%	25%	25%	25%	75%	75%	25%	25%	50%	100%	0	0	0

Les pourcentages sont sur la ligne

ANNEXE F-1

Texte du troisième  
devoir surveillé

47

48

(Analyse)

1<sup>er</sup> Avril  
Devoir de Mathématiques  
n°3

I Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On définit  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$F(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad \text{si } x \neq y$$

$$F(x, x) = f'(x)$$

1° Montrer que  $F$  est continue.

2° Montrer que les dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial x}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}$  existent et sont continues.

3° Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0$$

Montrer que  $f$  est dérivable et que  $f'$  n'est pas continue en 0. En déduire que  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$  n'a pas de limite quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .

II Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On dit qu'une fonction  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique si les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  existent et vérifient  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  en tout point de  $U$ .

1° Montrer que  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2° On dit qu'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  est connexe si pour tout couple de points  $(P_0, P_1) \in U \times U$ , il existe une fonction dérivable  $c: [a, 1] \rightarrow U$  telle que  $c(0) = P_0$  et  $c(1) = P_1$ . Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  admettant des dérivées partielles nulles :  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . Montrer que  $f$  est constante (indication : considérer la fonction  $f \circ c$ ).

3° Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  avec  $g''(t) > 0$  pour tout  $t$ ,  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique. Montrer que  $\text{gof}$  est harmonique si et seulement si  $f$  est constante.

(Algèbre)

Devoir n°3  
1<sup>er</sup> Avril

III

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 sur  $\mathbb{R}$  et soit  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$  une base de  $E$ .

On considère l'endomorphisme  $\varphi$  de  $E$  défini par :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = 2e_2 + 3e_3 \\ \varphi(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 \\ \varphi(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3 \end{cases}$$

on note  $\text{Id}$  l'application identité de  $E$  dans  $E$ .

1° Écrire la matrice  $A$  de l'application  $\varphi$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ , et calculer la matrice  $M$  de l'application  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .

2° Calculer les rangs des applications  $\varphi^2 + \text{Id}$  et  $\varphi^2 - \text{Id}$ , et donner des bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de chacun des sous-espaces vectoriels  $W_1 = \text{Ker}(\varphi^2 + \text{Id})$  et  $W_2 = \text{Ker}(\varphi^2 - \text{Id})$

Montrer que  $E = W_1 \oplus W_2$  et que  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  est une base de  $E$ .

3° Calculer la matrice  $N$  de l'application linéaire  $\varphi^2$  par rapport à la base  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ , et écrire la relation entre les matrices  $M$  et  $N$ .

Calculer  $P^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

4° Soient  $(u_n), (v_n)$  et  $(w_n)$  les suites réelles définies par la donnée de  $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$  et par

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n = 2u_{n-1} - 5v_{n-1} + 4w_{n-1} \\ w_n = 3u_{n-1} - 8v_{n-1} + 6w_{n-1} \end{cases}$$

calculer  $u_n, v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $u_0, v_0, w_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

ANNEXE F-2

Tableau des données brutes  
au troisième devoir surveillé.

N°	N1	CI	N2a	C2a	N2b	C2b	N2c	C2c	N2d	C2d	N3a	C3a	N3b	N3c	C3c	N
3a	1		1	REC	0	EQ/DM	2				0	DEP			3	
3b	1	RET	1	EV	1	EQ/DM	0	INT	1		0	PASS	1	1	DIR	2
3d	1		1	REC	1	DIM			1		0	PASS	1	0	DIR	4
3e	1		2		1	EQ/DM	2		2	DED	0	PASS	1	0	DIR	7
3f	1		1	REC	1	EQ/DM	1	DIM	2	DED	0	PASS	1	0	DIR	5
3g	1		1	REC	1	EQ/DM	0	INT	1		0	PASS	0,5	0,5	CAL	3
3h	1	RET	1	REC	1	EQ/DM	1	INT	1		0	DEP	0	0	CAL	3
3i	1		1	REC	1	DIM	1	INT	1		0	PASS	1	0,5	CAL	4
3n	1		2		1	EQ/DM	1	SOM	2	DED	0	PASS	1	1	DIR	7
3o	1		2		1	DIM	1	SOM	2	DED	0	PASS	1	0,5	CAL	7
3p	1	RET	2		1	EQ/DM	1	INT	1		0	DEP			DIR	4
3r	1		2		1	EQ/DM	1	DIM	1		0	PASS	1	1	DIR	6
3u	1		1	REC	1	EQ/DM	1	INT	2	DED	0	PASS	0		DIR	4
3x	1		2		1	EQ/DM	2		1		0	PASS	1	1	DIR	7
3y	1		1	EV	1	EQ/DM	2		1		0	PASS	1	1	DIR	4
3z	1		2		1	DIM	0	INT	1		0	PASS	1	1	DIR	5
3aa	1		1	EV	1		2	DED	2		0	PASS	1		DIR	6
3ab	1				1						0	PASS	1		DIR	1
3ac	1		2	GAUSS	1	EQ/DM	2	DED	0		0	ARR	1		DIR	5
3ae	1		1	REC	1	EQ/DM	2	DED	2		0	PASS	1	1	DIR	7
4a	1		2		1	EQ/DM	1	SOM	1		0	PASS	1		DIR	5
4b	1														DIR	0
4c	1		0												DIR	0
4d	1		1	REC	1	DIM	2		1		0	PASS	0,5	1	DIR	6
4e	1		2		1	EQ/DM	1	DIM	1						DIR	4
4f	1		2		1	EQ/DM	1	DIM	1						DIR	4
4g	1		2		1	EQ/DM	1	INT	2	DED					DIR	5
4i	1		2		1	EQ/DM	1	INT	2	DED					DIR	5
4j	1		2		0	DIM					0				DIR	2
4n	1		1	REC	1	EQ/DM	2	DED	1		0	PASS	0	1	DIR	5
4p	1		2		1	EQ/DM	1	DIM	1		1	LONG	0	1	DIR	6
4s	1		1	EV	1	EQ/DM	1	DIM	1		0	PASS	1	1	DIR	5
4w	1		2		1	EQ/DM	1	SOM	2		2	PASS	1	1	DIR	7
4z	1		1	REC	1	DIM	1	INT	1		0	PASS	0		DIR	3
4ab	1		1	EV	1										DIR	1
4ac	1		1		1	EQ/DM	2		0		0	PASS	1		DIR	4
4ad	1	RET	1	REC	1	EQ/DM	2	GEOM	1		0	PASS	1		DIR	4
6a	1	RET	1	REC	1	EQ/DM	2		1		0	DEP	1	1	DIR	5
6c	1		1	REC	1	EQ/DM	1	SOM	1		1	LONG		1	DIR	5
6e	1		2		2										DIR	2
6f	1		2	GAUSS	1	EQ/DM	1	DIM							DIR	3
6i	1		2		1	EQ/DM	1	DIM	2	DED	0	PASS	1	0	DIR	6
6k	1		1	REC	0		2	DED	2	DED	0	PASS	1	1	DIR	7
6m	1		2		1	EQ/DM	2	DED	2		2				DIR	9
6p	1		2	GAUSS	1	EQ/DM	2	DED	2		2				DIR	7
6r	1		2		1	EQ/DM	2	DED	2		1	LONG	1	1	DIR	7
6s	1		2		1	DIM	1	INT	0		0	PASS	1	1	DIR	5
6t	1		2		1	EQ/DM	2		1		0	LONG	1	1	DIR	7
6v	1		1	REC	1	EQ/DM	2		1		0		1	1	DIR	6
6y	1		2		1	EQ/DM	2	DED	2	DED	0	PASS	1	1	DIR	9
6z	1		2	GAUSS	1	EQ/DM	1	SOM	1		0	PASS	1	1	DIR	6
MOY(*)			1,49		0,93		1,33		1,25		0,25		0,84	0,82		4,76
MOY	1		1,43		0,86		1,14		1,02		0,2		0,53	0,418		2,09

(\*) moyenne sur les réponses effectives seules.

## ANNEXE G-1

Devoir n° 4

Samedi 20 Mai

Durée 3 heures

Etudiants des groupes 3, 4 et 6: ayez la gentillesse de rédiger vos devoirs sur les feuilles blanches fournies en utilisant une seule face et en numérotant les feuilles.

## Texte du devoir surveillé n° 4

et corrigé.

## ANALYSE

(extrait de l'examen de Juin 1988)

I - 1°) Calculer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2}$$

2°) Soit  $F(x)$  la primitive de  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$  telle que  $F(0) = 0$ .

Donner le développement limité d'ordre 2 de  $F(x)$  au voisinage de 0.

3°) Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  la fraction

$$\frac{2X+4}{1-X^3}$$

4°) Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + y = 0$$

sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ .

5°) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad x(1-x^3)y' + (1-x^3)y = 2x + 4$$

sur chacun des intervalles  $]-\infty, 0[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, +\infty[$ .

6°) Quelles sont les solutions  $y_1$  définie sur  $] -\infty, 0[$  et  $y_2$  définie sur  $]0, 1[$  l'équation (E) telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} y_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} y_2(x)$  existent dans  $\mathbb{R}$  et soient

$$x < 0 \quad x > 0$$

7°) Montrer que l'équation (E) admet une solution et une seule  $y$  définie sur

8°) Montrer, au moyen d'un argument simple que l'équation (E) n'admet pas de solution  $y$  définie sur  $]0, +\infty[$ .

ALGÈBRE

(extrait de l'examen de Juin 1987)

I - Résoudre suivant les valeurs du paramètre réel  $m$  le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} (m+4)x + (m-2)y + mz = 4m \\ -x - 3y + (5-2m)z = 8m \\ -2x - 2my + 2z = m^2 + 4m \end{cases}$$

II - On note  $E$  l'espace vectoriel des polynômes réels d'une variable réelle de degré inférieur ou égal à 2. On désigne par  $u$  l'endomorphisme de  $E$  par un polynôme  $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$  associé

$$u(P) = (8a_0 - a_1 - 5a_2) + (-2a_0 + 3a_1 + a_2)X + (4a_0 - a_1 - a_2)X^2.$$

- 1°) Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .
- 2°) Déterminer la matrice  $A$  de  $u$  par rapport à la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$ .
- 3°) Calculer les valeurs propres de  $A$  et déterminer les vecteurs propres associés.
- 4°) Trouver une base de  $E$  telle que la matrice  $B$  de  $u$  par rapport à cette base soit triangulaire de la forme

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

2

55

$I_1 = ]-\infty, 0[$ ,  $I_2 = ]0, 1[$  et  $I_3 = ]1, +\infty[$ , on a donc

$$y_i = \frac{1}{x} \left( \ln \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} + F(x) + C_i \right) \text{ avec } x \in I_i.$$

6°) Pour étudier  $y_i$  ( $i=1,2$ ) au voisinage de 0, on fait un D.L. de l'expression dans la parenthèse à l'ordre 2. En fait, on peut faire aussi un D.L. de  $\frac{2x+4}{1-x^2}$  et l'intégrer - On obtient :

$$y_i = \frac{1}{x} (C_i + 4x + x^2 + o(x^2))$$

On voit donc que les limites en 0 existent si et seulement si  $C_i = 0$  et qu'alors  $y_1(0^-) = y_2(0^+) = 4$

7°) Si il existe une solution  $y$  définie sur  $] -\infty, 1[$ , elle coïncide avec  $y_i$  ( $i=1,2$ ) de la question 6 sur l'intervalle  $I_i$ , car c'est continue.

Comme  $y_i = 4 + x + o(x)$ ,  $y_1(0^-) = y_2(0^+) = 4$ . La fonction obtenue en recollant  $y_1$  et  $y_2$  est donc non seulement continue, mais dérivable et vérifie l'équation (E) en  $x=0$  :

$$0(1-0)y'(0) + (1-0)y(0) = 4$$

On a donc montré l'existence et l'unicité d'une solution définie sur  $] -\infty, 1[$  :

$$y = \frac{1}{x} \left( \ln \frac{1+x+x^2}{(1-x)^2} + F(x) \right) \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

8°) Supposons que  $y$  soit une solution de (E) définie dans un intervalle ouvert contenant 1. En évaluant en  $x=1$ , on doit avoir

$$0 \cdot y'(1) + 0 \cdot y(1) = 6$$

ce qui est impossible.

corrigé du devoir

Analyse

1°) Le polynôme  $x^2x+1$  étant irréductible sur  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{x^2x+1}$  est élément simple et s'intègre directement

$$\int \frac{dx}{x^2x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$2°) F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{Arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{Arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right)$$

On intègre le D.L. de  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1-x+o(x)$  au voisinage de 0 :

$$F(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$3°) \frac{2x+4}{1-x^2} = \frac{2x+4}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{bx+c}{1+x+x^2}$$

Les astuces habituelles (multiplier par  $1-x$  et faire  $x=1$ , etc...) donnent

$$a = b = c = 2$$

4°) On remarque que  $xy' + y$  est la dérivée du produit  $xy$ , d'où

$$\begin{aligned} (xy)' &= 0 \\ xy &= C \\ y &= \frac{C}{x} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

sur  $] -\infty, 0[$ , on a les solutions  $y_1 = \frac{C_1}{x}$  et sur  $] 0, +\infty[$  les solutions  $y_2 = \frac{C_2}{x}$ .

5°) On résout sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$ ,  $] 0, 1[$  et  $] 1, +\infty[$  :

$$(xy)' = \frac{2x+4}{1-x^2}$$

$$xy = \int \frac{2x+4}{1-x^2} dx = \int \left( \frac{2}{1-x} + \frac{2x+1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+x+x^2} \right) dx$$

$$xy = -2 \ln |1-x| + \ln(1+x+x^2) + F(x) + C$$

où  $F$  est la primitive calculée en 2°).

2-1. Ker u est l'ensemble des polynômes vérifiant  $u(x) = 0$ , on obtient donc :

$$\begin{cases} 9a_0 - a_1 - 5a_2 = 0 \\ -2a_0 + 3a_1 + a_2 = 0 \\ 4a_0 - a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{le déterminant s'écrit } D = \begin{vmatrix} 9 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Soit  $D = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32$ . le système est donc de Cramer, linéaire, donc

$(0,0,0)$  est la seule solution, donc  $\text{Ker } u = \{0\}$ , et donc  $\text{Im } u = E$ .  $u$  est un isomorphisme.

2. la matrice de  $u$  dans la base  $(1, X, X^2)$  de  $E$  s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{c'est la matrice du système précédent}).$$

3. le polynôme caractéristique de  $A$  (et de  $u$ ), s'écrit :

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -1 & -5 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 4 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Soit  $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-2)^2$ ,  $\lambda_1 = 2$  est valeur propre simple,  $\lambda_2 = 4$  valeur propre double.

$\lambda_1 = 2$ . 
$$\begin{cases} 6x - y - 5z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - y - 3z = 0 \end{cases} \quad \text{Ker}(u-2I) \text{ est la droite engendrée par } \underline{P_1 = 1 + X + X^2}$$

$\lambda_2 = 4$ . 
$$\begin{cases} 4x - y - 5z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \\ 4x - y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z, y = -z, \text{ Ker}(u-4I) \text{ est la droite engendrée par } \underline{P_2 = 1 - X + X^2}$$
  
 $A$  n'est donc pas diagonalisable.

4. on cherche  $P_3 \in E$  tel que  $\{P_1, P_2, P_3\}$  soit l.h.b., et tel que  $u(P_3) = P_2 + 4P_3$ , soit

$$4x - y - 5z = 1 \quad \text{on fait diviser } \vdash = 0, \text{ alors } x = 1/2, y = 1/2, \text{ soit } P_3 = 1 + 1/2 X.$$

Algèbre.

1. on calcule d'abord le déterminant du système, qui s'écrit :

$$D(m) = \begin{vmatrix} m+4 & m-2 & m \\ -1 & -3 & 5-2m \\ -2 & -2m & 2 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5-2m \\ -2 & -2m & 2 \end{vmatrix} = (m+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 6-2m \\ 2 & -2m-2 & 4 \end{vmatrix}$$

Soit  $D(m) = -4(m+2)(m-1)^2$ . le système est donc de Cramer pour  $m \notin \{-2, 1\}$ .

On calcule dans ce cas les solutions en utilisant les formules de Cramer :

$$D(m)x = m \begin{vmatrix} 6 & m-2 & m \\ 9 & -3 & 5-2m \\ m+4 & -2m & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-1) \begin{vmatrix} 4 & m-2 & 1 \\ 8 & -3 & -1 \\ m+4 & -2m & -1 \end{vmatrix} = 2m(m-1) \begin{vmatrix} 4 & m-2 & 1 \\ 12 & m-5 & 0 \\ m+8 & -m-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D(m)x = 2m(m-1)(-12m-24-m^2-8m+40) = 2m(m-1)^2(m-16) \quad \left[ x = \frac{m(m-16)}{2(m+2)} \right]$$

De même,  $y = \frac{-(m^2+6m+24)m}{2(m+2)(m-1)}, z = \frac{-m(7m+24)}{2(m+2)(m-1)}$

Cas  $m = -2$ . le système s'écrit :

$$\begin{cases} 2x - 4y - 2z = -8 \\ -x - 3y + 9z = -16 \\ -2x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$$

les équations (1) et (3) sont incompatibles, donc le système n'a pas de solution.

Cas  $m = 1$ . le système s'écrit :

$$\begin{cases} 5x - y + z = 4 \\ -x - 3y + 3z = 8 \\ -2x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

on vérifie que la solution générale du système linéaire et la droite verticale engendrée par le vecteur  $(0 \ 1 \ 1)$ . on trouve une solution du système complet

ANNEXE G-2

Tableau des données brutes  
au devoir surveillé n°4.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU DS N°4

n °	NI1	CI1	NI2	CI2	NI3	CI3	NI	N1	CI	N2	N3a	C3a	N3b	C3b	N4	C4	N
3a	1		0,5	INC	1		2,5	1,5		1	1		1		0,5	PASS	9
3b	0,5	SGN	0,5	INC	1	EXT	2	0,5		1	1		0,5	2VP			5
3c	1		0,5	CAL	1		2,5	0,5	COMP	1	1		1				7
3e							0	1,5		1	0	CAL	0,5			DIAG	4
3g	0,5	COEF	0,5	INC	1	EXT	2	1,5		1	1		1		0	PASS	8
3h	0,5	SGN	0,5	INC	0,5	m=1	1,5	0,5		1	1		0,5	2VP			5
3i	0,5	COEF	0	CAL			0,5	0,5	DET	1	1		0	2VP/C	0	DIAG	3
3o	1						1	1,5		1	1		1				7
3r	1		0	FORM	1	DRT	2	1,5		1	1	SGN	1		0,5	CAL	9
3u							0	1,5		1	1	SGN					4
3w	1		0	FORM	0,5	D/m=	1,5	0,5	COMP	1	1		0,5	CAL			5
3x	1		0	FORM	1	DRT	2	1,5		1	1	SGN	1		1		9
3y	0,5	SGN	0	FORM	1		1,5	1,5		1	1		0,5				7
3z	1		0,5	INC	0,5	m=1	2	0,5		0							3
3aa	1		0,5	INC			1,5	1,5		1	1	SGN					6
3ab	0	CAL	0	FORM	0		0	0,5		1	1		0,5	CAL			3
3ac	1		0	CAL			1	1,5		1	1		0,5	CAL			6
3ad	1		0	FORM	0,5	D/m=	1,5	0,5	COMP	1	1		1		0		6
3ae	1		1	CAL	1	EXT	3	1,5		1	1		1				9
4a	1						1	1,5	DET	1	1		1				7
4c	0,5	SGN	0	FORM	1	EXT	1,5	1,5	DET	1	1	SGN	0,5	CAL	0		7
4d	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	1,5		1	1		1		1		9
4e	1		0,5	INC	1	DRT	2,5	1	RANG	1	1						6
4f	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	1,5		1	1		1		0		8
4g	1		0,5	INC	1	DRT	2,5	1,5		1	1						7
4i	0	CAL	0	FORM	0,5	m=1	0,5	0,5		1	0,5	FACT					2
4j	1		0	FORM			1	1,5		1	1		1				7
4l	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	0,5		1	1		1		0		6
4n							0			1	1		1				3
4p	1		0	CAL	1		2	0,5	COMP	1	1		1				6
4s	0,5	SGN			1		1,5	1,5		1	1	SGN	1		1		9
4t	0,5	COEF			1		1,5	1,5		1	1		1		1		9
4u	1		0	FORM	0		1	0,5		1	1						3

TABLEAU DES DONNEES BRUTES AU DS N°4

n °	NI1	CI1	NI2	CI2	NI3	CI3	NI	N1	CI	N2	N3a	C3a	N3b	C3b	N4	C4	N
4w	1		0,5	CAL	1	D	2,5	1	RANG	1	1		0,5				7
4x	1		0	FORM	1		2	1,5		1	1		0,5	CAL			7
4y	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	1	RANG	1	1		1				7
4z	1		0	FORM	1		2			1	1		1				5
4ab	1		0	*	1		2	0,5	COMP	1	1		1		0		6
4ad	1		0	FORM	0		1	0,5		1	1		1				5
6a	1		0	FORM	1		2	1,5		1	1		1				8
6g	1		0	FORM	1	D	2	0,5		1	1		1		0		6
6h	1						1	1,5		1	1		1		1		8
6k	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	0,5		1	1		1				6
6m	1		0	FORM			1	1,5		1	1						5
6o	1				0,5	m=1	1,5	0,5		1	1		1				6
6p	0	GAUSS					0	1,5		1	1		0,5	CAL			5
6r	1		0	FORM	0,5	m=1	1,5	0,5		1	1		1				6
6t	0,5	SGN	0	FORM			0,5	1,5		1	1		1		1		8
6y	1		0	FORM			1	1,5		1	1	TR/D	1				7
6z							0	1,5		1	1		1		0,5	CAL	7
MOY*	0,84		0,15		0,74			1,09		0,98	0,97		0,85		0,44		
MOY	0,77		0,12		0,52		1,41	1,05		0,98	0,95		0,71		0,15		6,26
(*) Moyenne calculée sur les seules réponses effectives.															ECART_TYPE	1,85	

## ANNEXE H-1

N.B. Chaque candidat doit traiter les exercices I, II et, au choix, l'un des deux exercices III-A ou III-B (tous les exercices sont indépendants).

## Texte de l'examen.

### ALGÈBRE.

I - Soit  $m$  un nombre réel, et soit  $\varphi_m$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté sur la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  par la matrice

$$A(m) = \begin{pmatrix} m+2 & -m+2 & m-1 \\ -m+2 & m+2 & -m+1 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

1°) Calculer les valeurs propres de  $A(m)$ .

2°) a) Pour tout réel  $m$ , donner une base du sous-espace propre associé à chaque valeur propre de  $A(m)$ .

b) Quel est l'ensemble  $M$  des valeurs de  $m$  pour lesquelles la matrice  $A(m)$  est diagonalisable ?

c) Pour tout réel  $m$  appartenant à  $M$ , donner une base sur laquelle la matrice de l'endomorphisme  $\varphi_m$  est diagonale. Ecrire cette matrice et la matrice de passage.

3°) On considère le cas  $m = 1$ .

a) Montrer qu'il existe 3 vecteurs propres de  $A(1)$ , linéairement indépendants et orthogonaux deux à deux (pour le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ ).

b) Construire une base orthonormée de vecteurs propres. Quelle est la matrice de passage  $P$  de la base canonique à cette base orthonormée ? Calculer le produit  $P^{-1}$ .

c) Calculer  $A(1)^{1989}$ .

4°) On considère le cas  $m = 2$ .

Montrer qu'on peut écrire  $A(2) = 4I + N$ , où  $I$  est la matrice unité d'ordre 3, et  $N$  une matrice vérifiant  $N^2 = 0$ .

En déduire le calcul de  $A(2)^{1989}$ .

.../...



5°) On considère le cas  $m = 3$ .

Donner une base de  $\mathbb{R}^3$  sur laquelle la matrice de l'endomorphisme  $\varphi_3$  est

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de passage  $Q$  de la base canonique à cette nouvelle base ?

Calculer  $A^{1989}$ . Calculer  $A(3)^{1989}$ .

## ANNEXE H-2

### ANALYSE

II - On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(1-x)y' + y = x.$$

1°) Déterminer toutes les solutions de (E) sur chacun des intervalles  $] -\infty, 0[$ ,  $] 0, 1[$ ,  $] 1, +\infty [$ .

2°) En quels points du plan (privé des droites  $x = 0$  et  $x = 1$ ) les courbes intégrales de (E) ont-elles une tangente horizontale ?

3°) Soient  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les solutions de (E) définies sur  $] -\infty, 0[$  et déterminées respectivement par

$$\varphi_1(1-e) = \frac{e+1}{1-e} \quad \text{et} \quad \varphi_2(1-e) = \frac{1}{1-e}.$$

Étudier les branches infinies des graphes de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

4°) Montrer qu'il existe une solution unique de (E) définie sur  $] -\infty, 1[$ .

5°) Montrer qu'il n'existe pas de solution de (E) définie sur  $\mathbb{R}$ , mais qu'il existe une infinité de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  vérifiant (E) sur  $] -\infty, 1[$  et  $] 1, +\infty [$ .

III-A. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction

$$x \mapsto \frac{3 + 2x^2}{(1+x^2)^3}.$$

III-B. On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_{\sin x}^x \sqrt{4-t^2} dt.$$

1°) Montrer que la fonction  $F$  est impaire.

2°) Calculer  $F'(x)$  en déduire le sens de variation de  $F$ .

Tableau des données brutes  
à l'examen.

TABLEAU DES DONNEES BRUTES A L'EXAMEN

n°	N1	C1	N2a	C2a	N2b	C2b	N3a	C3a	N3b	C3b	N3c	C3c	N4	N5a	C5a	N5b	N
3a	1		1		1	M=D	0		0		0,5		0	0	MEL	0,5	5
3b	1		0	CP	0	GN	1		0	NORM	0		0,5				2,5
3c	1		1		1	SOM	1		1		1		1	1			9
3d	1		0,5	CAL	1		1		1		0,5		1				5,5
3e	1		0,5	CP	1	M=D	1		1		0,5		1				6,5
3f	1		0,5	CP	0,5	m=2	1		1		1		1				6,5
3g	1		0	CP	1	M=D	1		1		0,5		1				5,5
3h	1		1		0,5	GN	1		0,5	NORM	0,5		1	0	MEL		5,5
3i	1		0	CP	0	CS	1		1		1		0	0	MEL		4,5
3j	1		0	CP	0		1		1		1		0	0	MEL		4,5
3k	1		1		1	SOM	1		1		1		0	0	MEL		4,5
3l	1		1		1	M=D	1		0	DIR	1		1	1			6,5
3m	1		1		1		1		1		1		1	0	MEL		7
3n	1		1		1		1		1		1		1	1			6,5
3o	1		0,5	CP	0	GN	1		1		0,5		0,5				3
3p	1		0	CP	0,5		1		1		1		1				5
3q	1		0	CP	0		1		1		1		1				2
3r	1		0	CP	0		1		1		0,5		1	1			4,5
3s	1		1		1	SOM	1		1		0		0	0	MEL	0,5	7,5
3t	1		0	CAL	0		1		0,5	NORM	0		1				3,5
3u	1		0	CAL	0,5		1		1		0,5		0,5				3,5
3v	1		0	CP	0		0		1		1		1				2
3w	1		0	CP	0		1		1		0,5		0,5	1			4,5
3x	1		1		1	SOM	1		1		1		1	0	MEL		4,5
3y	1		0	CAL	0		1		0,5	NORM	0		1				7,5
3z	0		CAL	0,5			1		1		0,5		0,5				3,5
3aa	1		0	CP	0		0		1		1		1				2
3ab	0						1		1		0,5		0,5	1			4,5
3ac	1		0	CP	0		1		1		0		0	0	MEL		4,5
3ad	1		0,5	CAL	0,5		1		1		1		1	0,5	CAL		7
3ae	1		1		0,5	GN	1		1		1		1	0,5	CAL		8
4a	1		0,5	CAL	1	M=D	1		0	NORM	0,5		0				4,5
4b	1		0,5	CP	1	SOM	1		0,5	NORM	0,5		0				3,5
4c	1		1		1	M=D	1		0	NORM	0,5		0				3,5
4d	1		1		1	M=D	1		0	NORM	0,5		0	1			5,5
4e	1		1		1	IMP	0,5		1		0,5		0,5	1			7,5
4f	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4g	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4h	1		0	CP	0		0		0		0		0	1			4
4i	1		0,5	CP	0		1		1		0		1	0	MEL		4
4j	1		1		0,5	m=2	1		0		0		0				3,5
4k	1		0,5	CAL	1	M=D	1		0		0,5		0,5	0	MEL	0,5	5
4l	1		0,5	CP	0	M=D	0		0,5	NORM	0,5		0				2,5
4m	1		0,5	CP	0		0		0,5	NORM	0,5		0				2,5
4n	1		1		1	M=D	1		1		0,5		0	0	MEL	0	7,5
4o	1		1		1		1		1		0,5		0,5	0			5,5
4p	1		1		0,5	GN	1		1		0,5		0	0			1,5
4q	1		0				0		1		0,5		0	0			1,5
4r	1																1
4s	1																1,5
4t	1																1
4u	1																1,5
4v	1																8
4w	1		1		1	SOM	1		0,5	NORM	1		0,5	1			8
4x	1		1		1	IMP	1		1		0		0,5				6,5
4y	1		0	CP	0,5	GN	1		0,5	NORM	0,5		0	0			3,5
4z	1		0,5				1		1		0,5		1	0			4,5
4aa	1		0				1		1		0,5		0	1			3
4ab	1		0,5	CP	0,5	CS	1		1		0		1	1			7
4ac	1		0				0		1		1		0				3
4ad	1		0,5	CP	0		1		1		1		0	0,5	CAL		6,5
4ae	1		0,5	CP	0		1		1		1		0	0,5	CAL		9
4af	1		1		1	SOM	1		1		1		1	1			6
4ag	1		1		1	IMP	0,5		1		0,5		0,5	1			8
4ah	1		1		1	M=D	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ai	1		1		1	M=D	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4aj	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ak	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4al	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4am	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4an	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ao	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ap	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4aq	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ar	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4as	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4at	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4au	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4av	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4aw	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ax	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ay	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4az	1		1		1	IMP	1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ba	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bb	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bc	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bd	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4be	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bf	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bg	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bh	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bi	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bj	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bk	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bl	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bm	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bn	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bo	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bp	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bq	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4br	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bs	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bt	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bu	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bv	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bw	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bx	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4by	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4bz	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ca	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4cb	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4cc	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4cd	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ce	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4cf	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4cg	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5
4ch	1		0,5				1		1		0,5		0,5	1			7,5





## ANNEXE J-2

Résultat de l'ACP(\*)  
 sur les variables du prétest  
 (tranches de notes en comparatif).

(\*) Fournis par le logiciel SPAD.N

=====

10 VARIABLES ACTIVES

=====

3 . EQ1	( CONTINUE )
4 . EQ3	( CONTINUE )
5 . EQ3v	( CONTINUE )
6 . Q	( CONTINUE )
7 . Qvid	( CONTINUE )
8 . AS	( CONTINUE )
9 . B=0	( CONTINUE )
10 . B1/2	( CONTINUE )
11 . B>2	( CONTINUE )
33 . note	( CONTINUE )

=====

23 VARIABLES ILLUSTRATIVES

=====

1 . R	( CONTINUE )
2 . PASS	( CONTINUE )
12 . D1(1)	( CONTINUE )
13 . D1(2)	( CONTINUE )
14 . D1(3)	( CONTINUE )
15 . P(1)	( CONTINUE )
16 . P(2)	( CONTINUE )
17 . P(3)	( CONTINUE )
18 . D2(1)	( CONTINUE )
19 . D2(2)	( CONTINUE )
20 . D2(3)	( CONTINUE )
21 . V(1)	( CONTINUE )
22 . V(2)	( CONTINUE )
23 . V(3)	( CONTINUE )
24 . D3(1)	( CONTINUE )
25 . D3(2)	( CONTINUE )
26 . D3(3)	( CONTINUE )
27 . D4(1)	( CONTINUE )
28 . D4(2)	( CONTINUE )
29 . D4(3)	( CONTINUE )
30 . E(1)	( CONTINUE )
31 . E(2)	( CONTINUE )
32 . E(3)	( CONTINUE )

=====

POIDS DES INDIVIDUS

=====

. Poids des individus, uniforme egal a 1.	( POIDS )
---	-----------

=====

EDITION DES VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION ..... 10.0000  
 SOMME DES VALEURS PROPRES ..... 10.0000

HISTOGRAMME DES 10 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT.	POURCENT. CUMULE
1	4.5874	45.87	45.87
2	1.9774	19.77	65.65
3	1.1302	11.30	76.95
4	.9265	9.26	86.21
5	.6955	6.96	93.17
6	.4469	4.47	97.64
7	.1252	1.25	98.89
8	.0591	.59	99.48
9	.0520	.52	100.00
10	0.0000	0.00	100.00

9.3

MATRICE DES CORRELATIONS

	EQ1	EQ3	EQ3v	Q	Qvid	AS	B=0	B1/2	B>2	note
EQ1	1.00									
EQ3	.03	1.00								
EQ3v	-.12	-.22	1.00							
Q	.26	.48	-.29	1.00						
Qvid	-.38	-.18	.51	-.58	1.00					
AS	.17	.18	-.08	.12	-.14	1.00				
B=0	.58	.29	-.41	.72	-.81	.38	1.00			
B1/2	-.29	-.13	.27	-.52	.90	-.01	-.72	1.00		
B>2	-.41	-.22	.21	-.29	-.08	-.51	-.41	-.33	1.00	
note	.48	.55	-.33	.70	-.56	.62	.81	-.38	-.61	1.00

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

VARIABLES IDEN - LIBELLE COURT	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
EQ1 - EQ1	.56	-.13	.57	-.26	-.42	.56	-.13	-.57	.26	-.42	-.26	-.09	-.54	.27	-.50
EQ3 - EQ3	.27	-.21	.72	-.19	-.22	-.47	-.21	.72	-.19	-.22	.22	-.15	.67	-.19	-.27
EQ3v - EQ3v	.49	-.20	.31	-.68	-.38	-.49	-.20	-.31	-.68	-.38	-.23	-.14	-.29	-.71	-.46
Q - Q	.19	.07	.29	-.09	-.28	.79	.07	.29	-.09	-.28	.37	.05	.27	-.10	-.34
Qvid - Qvid	.81	.57	.10	-.02	-.17	-.81	-.52	.10	-.02	-.17	-.38	-.37	.10	.02	-.20
AS - AS	.42	.60	.23	-.43	.46	.42	-.60	-.21	-.43	.46	.20	-.43	-.20	-.44	.55
B=0 - B=0	.36	.60	.23	-.00	.01	.96	.07	-.17	-.00	.01	.45	.05	-.16	-.00	.01
B1/2 - B1/2	.67	.69	.14	-.24	-.03	-.67	-.68	.14	-.24	-.03	-.31	-.48	.13	.25	-.04
B>2 - B>2	.43	.81	.06	-.31	.03	-.43	.81	.06	-.31	.03	-.20	.58	.06	-.32	.03
note - note	.91	-.34	.07	-.11	.03	.91	-.34	.07	-.11	.03	.42	-.24	.06	-.11	.04

VARIABLES ILLUSTRATIVES

R - R	.12	.24	-.36	-.18	.13	.12	.24	-.36	-.18	.13
PASS - PASS	.37	-.18	-.09	-.46	.05	.37	-.18	-.09	-.46	.05
D1(1) - D1(1)	.21	-.01	-.30	-.30	-.42	.21	-.01	-.30	-.30	-.42
D1(2) - D1(2)	-.27	-.07	.03	.07	.18	-.27	-.07	.03	.07	.18
D1(3) - D1(3)	-.41	.06	.26	.23	.24	-.41	.06	.26	.23	.24
P(1) - P(1)	.53	-.11	.17	-.22	.09	.53	-.11	.17	-.22	.09
P(2) - P(2)	.12	-.17	-.29	.06	-.23	.12	-.17	-.29	.06	-.23
P(3) - P(3)	-.57	.28	.18	.12	.18	-.57	.28	.18	.12	.18
D2(1) - D2(1)	.31	-.13	-.46	.15	-.17	.31	-.13	-.46	.15	-.17
D2(2) - D2(2)	-.19	.16	.38	-.30	.16	-.19	.16	.38	-.30	.16
D2(3) - D2(3)	-.26	-.07	.15	.33	.01	-.26	-.07	.15	.33	.01
V(1) - V(1)	.38	-.07	-.05	-.06	-.41	.38	-.07	-.05	-.06	-.41
V(2) - V(2)	-.01	.06	.18	-.55	.06	-.01	.06	.18	-.55	.06
V(3) - V(3)	-.34	.00	-.13	.61	.32	-.34	.00	-.13	.61	.32
D3(1) - D3(1)	-.23	-.11	-.12	-.30	-.29	-.23	-.11	-.12	-.30	-.29
D3(2) - D3(2)	.18	-.14	-.07	-.20	.03	.18	-.14	-.07	-.20	.03
D3(3) - D3(3)	-.42	.02	.20	.51	.27	-.42	.02	.20	.51	.27
D4(1) - D4(1)	.23	.05	.20	-.31	.07	.23	.05	.20	-.31	.07
D4(2) - D4(2)	.06	-.03	-.11	-.03	-.03	.06	-.03	-.11	-.03	-.03
D4(3) - D4(3)	-.27	-.03	-.09	.33	-.04	-.27	-.03	-.09	.33	-.04
E(1) - E(1)	.61	.28	.08	.02	-.14	.61	.28	.08	.02	-.14
E(2) - E(2)	-.35	-.28	.08	-.09	.31	-.35	-.28	.08	-.09	.31
E(3) - E(3)	-.32	.01	-.21	-.10	-.24	-.32	.01	-.21	-.10	-.24

9.7

forte contribution aux axes

Axe 1 Echec ↔ Réussite (B > 1) (B = 0)

Axe 2 B = 1 ou 2 ↔ B > 2 (V - AS)

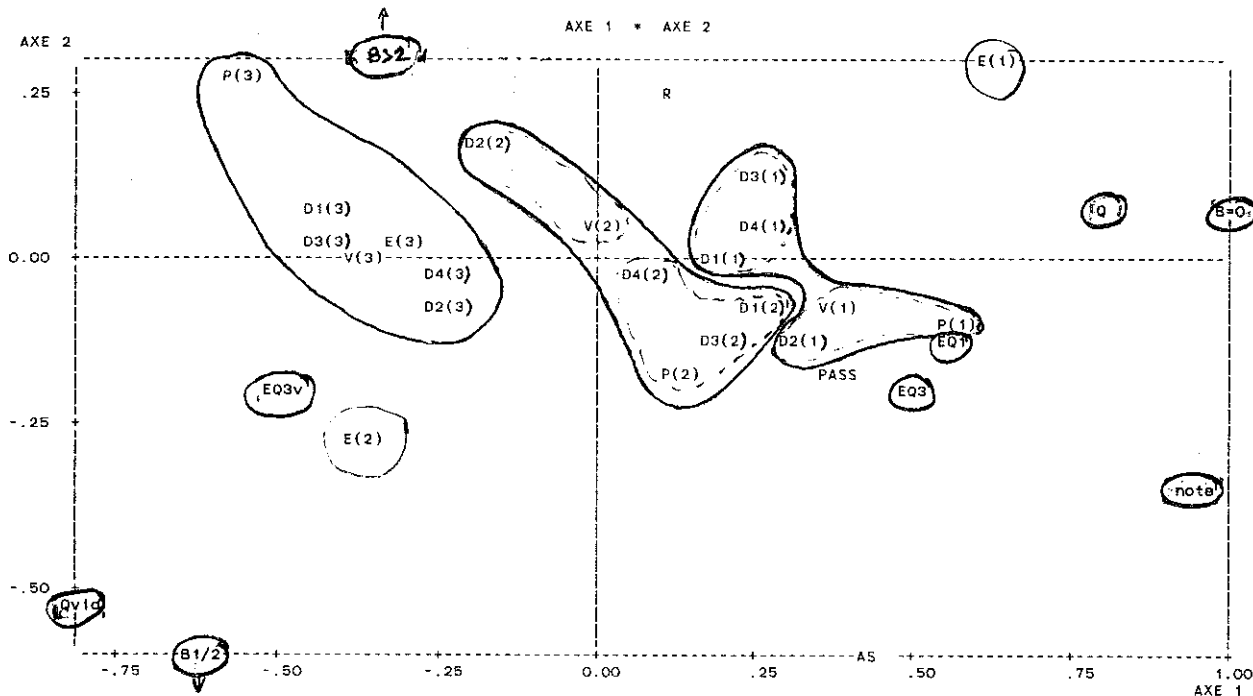
Axe 3 = EQ1 - AS ↔ EQ3 Q EQ3v

la note est peu corrélée - Distingue plutôt compétences différents mais indépendamment du niveau global -

INDIVIDUS			COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
IDENTIFICATEUR	P.REL	DISTO	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3a	5.26	7.53	1.91	.22	.19	-.53	1.01	4.2	.1	.2	1.6	7.8	.49	.01	.00	.04	.14
3b	5.26	7.78	-1.60	-.74	-.35	1.82	-.94	2.9	1.5	.6	18.9	6.6	.33	.07	.02	.43	.11
3e	5.26	12.07	-2.35	-1.80	-.48	-1.57	-.07	6.3	8.7	1.1	13.9	.0	.46	.27	.02	.20	.00
3g	5.26	7.96	-2.25	-.48	.70	1.31	.06	5.8	.6	2.3	9.7	.0	.64	.03	.06	.22	.00
3h	5.26	8.56	-2.39	-.40	.68	1.35	.05	6.6	.4	2.2	10.3	.0	.67	.02	.05	.21	.00
3ae	5.26	5.62	1.51	-.00	-1.48	.26	.73	2.6	.0	10.2	.4	4.0	.41	.00	.39	.01	.09
4a	5.26	10.24	-.92	-1.94	2.02	-.17	.55	1.0	10.0	18.9	.2	2.3	.08	.37	.40	.00	.03
4d	5.26	13.51	2.85	-.38	1.91	-1.12	.39	9.3	.4	16.9	7.1	1.2	.60	.01	.27	.09	.01
4g	5.26	5.62	1.51	-.00	-1.48	.26	.73	2.6	.0	10.2	.4	4.0	.41	.00	.39	.01	.09
4i	5.26	11.93	-1.53	2.93	.37	-.10	.62	2.7	22.9	.6	.1	2.9	.20	.72	.01	.00	.03
4z	5.26	7.32	-1.86	-1.34	.30	.41	1.17	4.0	4.8	.4	1.0	10.4	.47	.25	.01	.02	.19
4ab	5.26	12.72	-1.67	3.01	.35	-.06	.60	3.2	24.1	.6	.0	2.8	.22	.71	.01	.00	.03
4ad	5.26	7.75	2.44	.03	-.88	.01	.01	6.8	.0	3.6	.0	.0	.77	.00	1.0	.00	.00
6a	5.26	14.96	3.51	-.65	.85	-.61	-.60	14.1	1.1	3.4	2.1	2.7	.82	.03	.05	.02	.02
6k	5.26	11.23	2.30	.69	1.13	.51	-1.79	6.1	1.3	5.9	1.5	24.3	.47	.04	.11	.02	.29
6p	5.26	7.97	1.90	.97	-.50	.95	-1.12	4.2	2.5	1.2	5.1	9.5	.46	.12	.03	.11	.16
6r	5.26	12.09	-1.69	-2.07	-1.54	-1.05	-1.07	3.3	11.4	11.0	6.3	8.6	.24	.35	.20	.09	.09
6t	5.26	19.52	-3.19	1.96	-.28	-1.93	-1.07	11.7	10.2	.4	21.1	8.7	.52	.20	.00	.19	.06
6y	5.26	5.62	1.51	-.00	-1.48	.26	.73	2.6	.0	10.2	.4	4.0	.41	.00	.39	.01	.09

MATRICE DES CORRELATIONS PERMUTEE SUIVANT LE PREMIER AXE DE L'ANALYSE

	Qvid	B1/2	EQ3v	B>2	AS	EQ3	EQ1	Q	note	B=0
Qvid	1.00									
B1/2	.90	1.00								
EQ3v	.51	.27	1.00							
B>2	-.08	-.33	.21	1.00						
AS	-.14	-.01	.08	-.51	1.00					
EQ3	-.18	-.13	-.22	-.22	.18	1.00				
EQ1	-.38	-.29	-.12	-.41	.17	.03	1.00			
Q	-.58	-.52	-.29	-.29	.12	.48	.26	1.00		
note	-.56	-.38	-.33	-.61	.62	.55	.48	.70	1.00	
B=0	-.81	-.72	-.41	-.41	.38	.29	.58	.72	.81	1.00



TRAITEMENT DES POINTS A PLUS DE 2.30 ECARTS-TYPES DU CENTRE

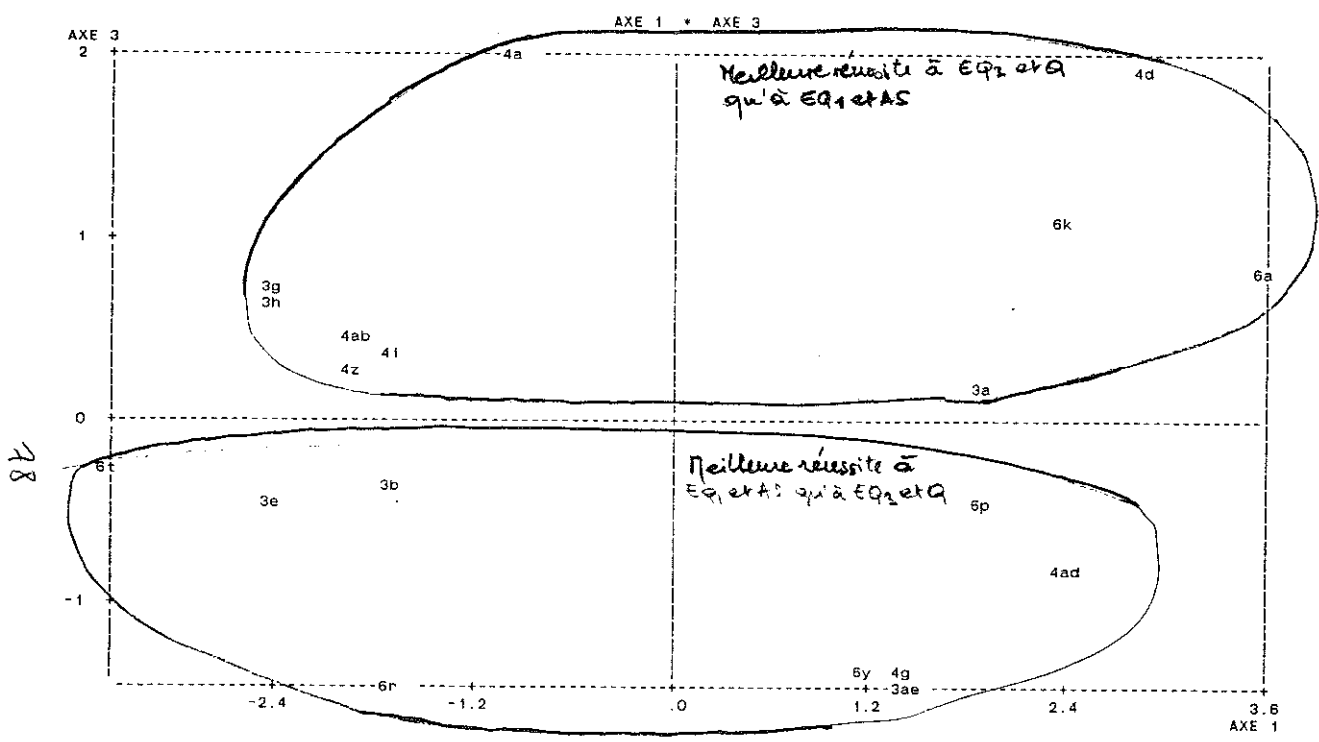
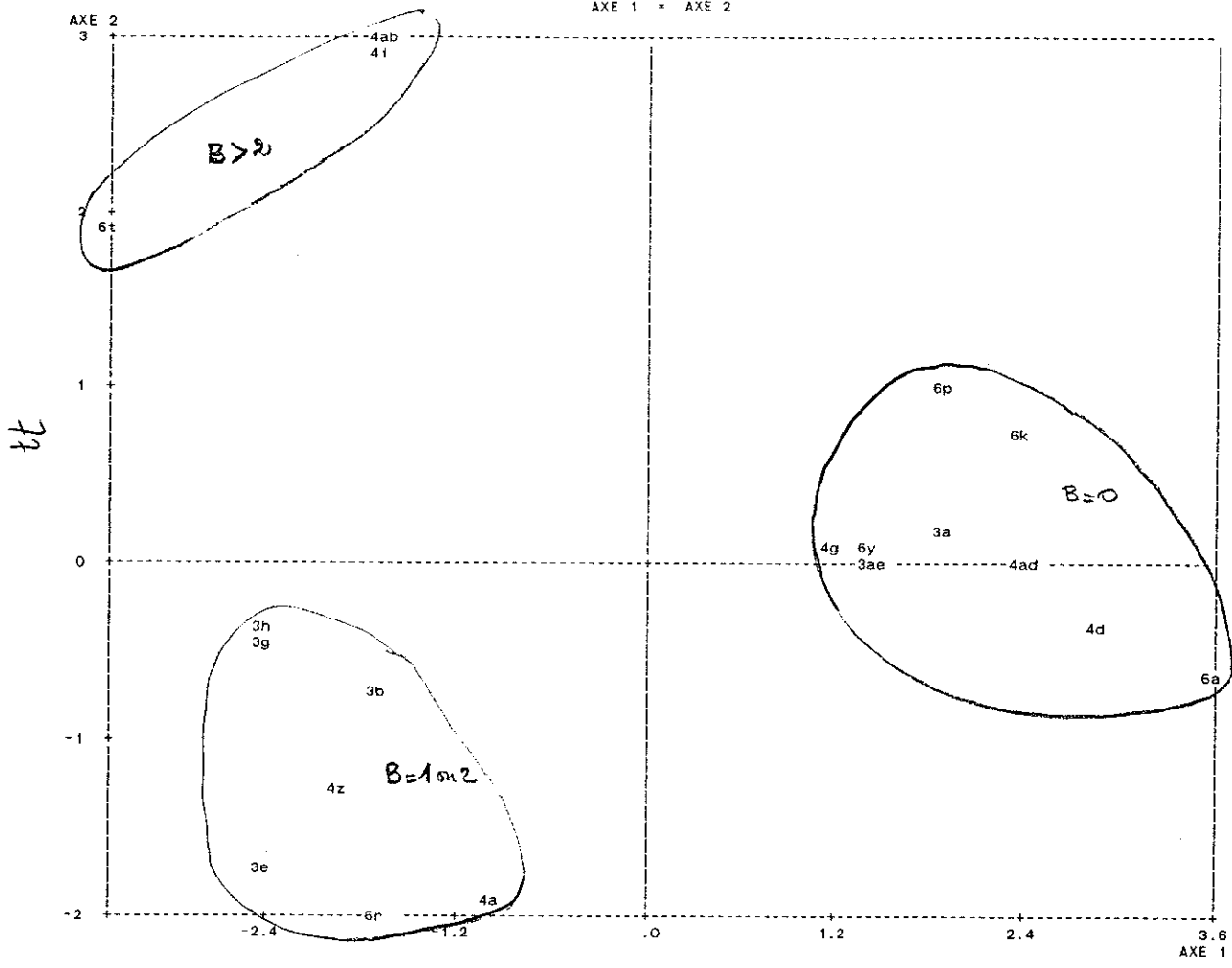
POINTS ELOIGNES :

IDENTIFICATEUR	ABSCISSE	ORDONNEE
B1/2	-.665	-.681
B>2	-.431	.811

2 POINTS ONT ETE RAMENES SUR LE BORD DU GRAPHIQUE.

NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 33

Graphique représentant les 33 variables projetées dans le premier plan principal.



La séparation selon l'axe 3 n'est pas très bonne.





COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

VARIABLES		COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES				
IDEN	LIBELLE COURT	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
VARIABLES ACTIVES																
1-N	1-N	.60	.44	.47	-.22	.38	-.60	-.44	-.47	-.22	.38	-.34	-.37	-.52	-.28	.52
P-N	P-N	-.80	-.31	.12	-.16	-.34	-.80	-.31	.12	-.16	-.34	-.45	-.26	.14	-.20	-.46
2-N	2-N	-.46	-.47	-.66	.24	-.25	-.46	-.47	-.66	.24	-.25	-.26	.40	-.73	.31	-.34
V-N	V-N	-.78	.40	.22	-.24	-.21	-.78	.40	.22	-.24	-.21	-.44	.34	.24	-.31	-.28
3-N	3-N	-.73	.47	.16	-.22	.39	-.73	.47	.16	-.22	.39	-.41	.39	.17	-.28	.45
4-N	4-N	-.56	.72	.04	-.13	-.13	-.56	.72	.04	-.13	-.13	-.31	-.61	.05	.16	-.18
E-N	E-N	-.70	.06	.26	.60	.22	-.70	.06	.26	.60	.22	-.40	.05	.29	.77	.29
VARIABLES ILLUSTRATIVES																
Note	Note	-.66	-.13	.15	.03	-.35	-.66	-.13	.15	.03	-.35					
EQ1	EQ1	-.52	-.02	-.22	-.02	.11	-.52	-.02	-.22	-.02	.11					
EQ3	EQ3	-.32	-.25	.28	.15	-.21	-.32	-.25	.28	.15	-.21					
QA1	QA1	-.26	.16	.32	.47	-.28	-.26	.16	.32	.47	-.28					
QA2	QA2	-.45	.22	.11	-.17	-.16	-.45	.22	.11	-.17	-.16					
QA3	QA3	-.36	-.39	-.14	.41	-.25	-.36	-.39	-.14	.41	-.25					
O	O	-.58	.08	.11	.30	-.19	-.58	.08	.11	.30	-.19					
AN	AN	.08	.22	.05	.09	-.47	.08	.22	.05	.09	-.47					
AS	AS	-.43	-.14	-.11	-.08	-.24	-.43	-.14	-.11	-.08	-.24					
B	B	.52	.06	.03	-.25	.27	.52	.06	.03	-.25	.27					

Axe 1 = Réussite ↔ Echec DS, Exam DS, VIF, (concept)  
 Axe 2 = DS1, part, DS4 (calcul)  
 Axe 3 = DS1, DS2 ↔ VIF Exam.

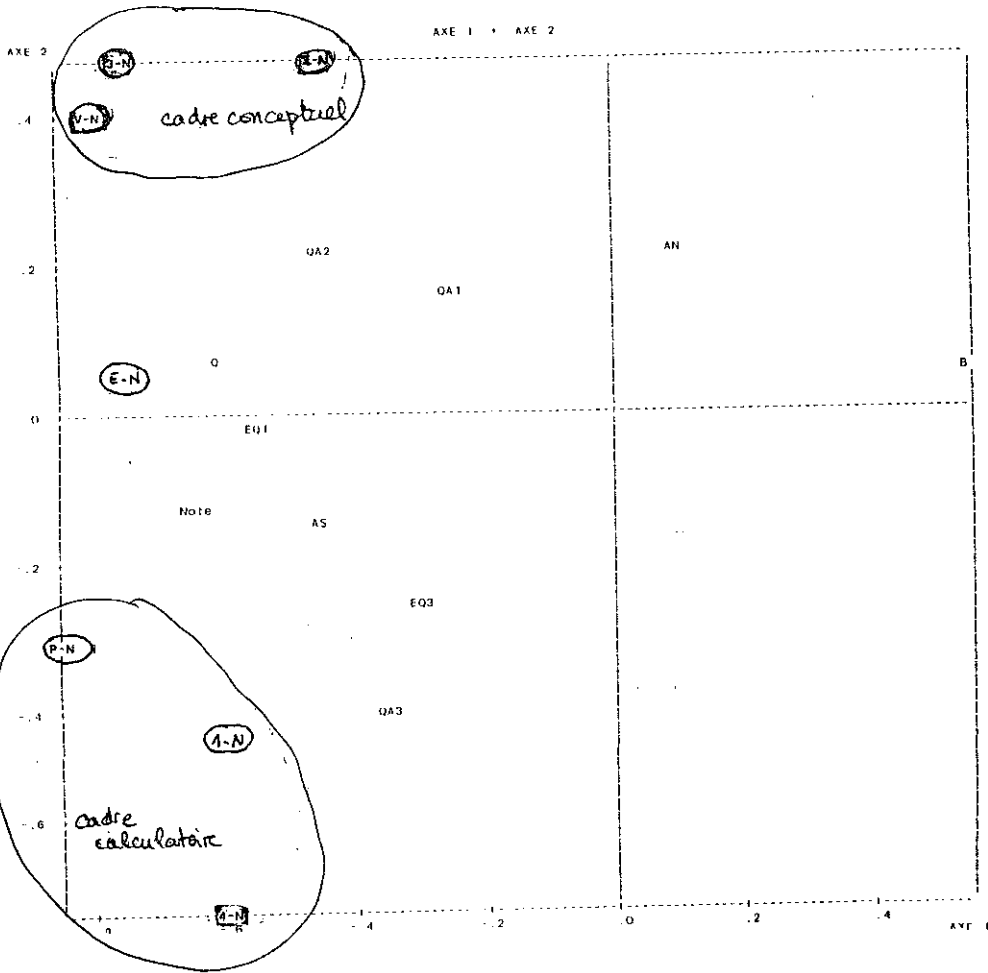
MATRICE DES CORRELATIONS PERMUTEE SUIVANT LE PREMIER AXE DE L'ANALYSE

	P-N	V-N	3-N	E-N	1-N	4-N	2-N
P-N	1.00						
V-N	.58	1.00					
3-N	.37	.74	1.00				
E-N	.44	.45	.49	1.00			
1-N	.48	.19	.29	.25	1.00		
4-N	.60	.17	.06	.37	.52	1.00	
2-N	.18	.39	.34	.26	.22	-.03	1.00

COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES INDIVIDUS SUR LES AXES 1 A 5

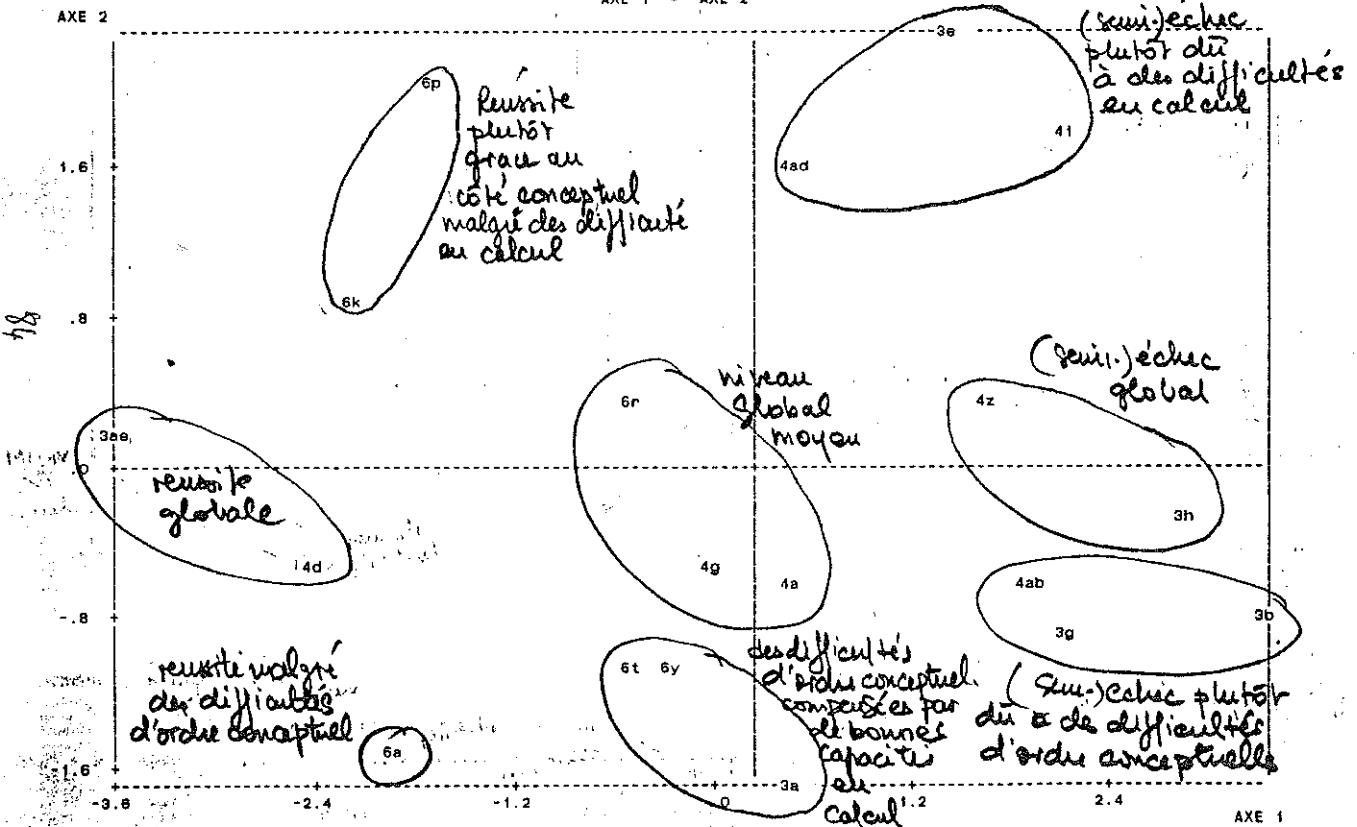
INDIVIDUS			COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
IDENTIFICATEUR	P.REL	DISTO	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3a	5.26	3.80	.24	-1.71	-.31	-.07	-.60	.1	10.8	.6	.0	3.5	.02	.77	.02	.00	.09
3b	5.26	10.49	2.86	-.84	-.63	-.73	-.51	13.6	2.6	2.6	4.5	2.6	.78	.07	.04	.05	.03
3e	5.26	9.29	1.09	2.34	1.28	.25	.60	2.0	20.3	10.6	.5	3.5	.13	.59	.18	.01	.04
3g	5.26	6.17	1.82	-.88	.22	.78	.09	5.5	2.9	.3	5.1	.1	.53	.13	.01	1.0	.00
3h	5.26	9.92	2.57	-.24	1.77	.06	.14	11.0	.2	20.2	.0	.2	.67	.01	.31	.00	.00
3ae	5.26	13.40	-3.55	.18	-.50	.02	-.47	20.8	.1	1.6	.0	2.1	.94	.00	.02	.00	.02
4a	5.26	1.56	.19	-.66	.10	-.99	.06	.1	1.6	.1	8.3	.0	.02	.28	.01	.63	.00
4d	5.26	13.48	-2.50	-.54	2.08	-.41	-1.55	10.4	1.1	27.9	1.4	23.3	.45	.02	.32	.01	.18
4g	5.26	2.75	-.20	-.54	-.83	1.19	.07	.1	1.1	4.4	12.0	.0	.01	.10	.25	.51	.00
4i	5.26	8.99	1.90	1.78	-.39	-1.21	-.32	6.0	11.7	1.0	12.4	1.0	.41	.03	.02	.16	.01
4z	5.26	5.10	1.44	.38	-1.41	-.33	-.73	3.4	.5	13.0	.9	5.3	.44	.07	.00	.29	.01
4ab	5.26	6.32	1.68	-.65	-.10	1.36	-.26	4.7	1.6	-.1	15.6	.7	.44	.07	.00	.29	.01
4ad	5.26	4.52	.28	1.63	-.56	.89	-.68	.1	9.8	2.0	6.7	4.5	.02	.59	.07	.18	.10
6a	5.26	8.56	-2.12	-1.47	.76	.37	.22	7.4	8.0	3.8	1.2	.5	.52	.25	.07	.02	.01
6k	5.26	7.78	-2.25	.88	-.18	.68	1.11	8.4	2.9	.2	3.9	12.0	.65	.10	.00	.06	.16
6p	5.26	7.47	-1.73	2.08	-.33	.09	-.13	5.0	15.9	.7	.1	.2	.40	.58	.01	.00	.00
6r	5.26	5.47	-.61	.38	-1.25	-1.65	-.47	.6	.5	10.2	23.0	2.2	.07	.03	.29	.50	.04
6t	5.26	4.18	-.64	-1.09	-.19	-.32	1.48	.7	4.4	.2	.8	21.3	.10	.29	.01	.02	.52
6y	5.26	3.75	-.47	-1.03	-.30	-.63	1.32	.4	3.9	.6	3.4	17.1	.06	.28	.02	.11	.47

4g et 6r ont deux cosinus carrés très faibles : ils sont quasiment représentés par le 2 axe.



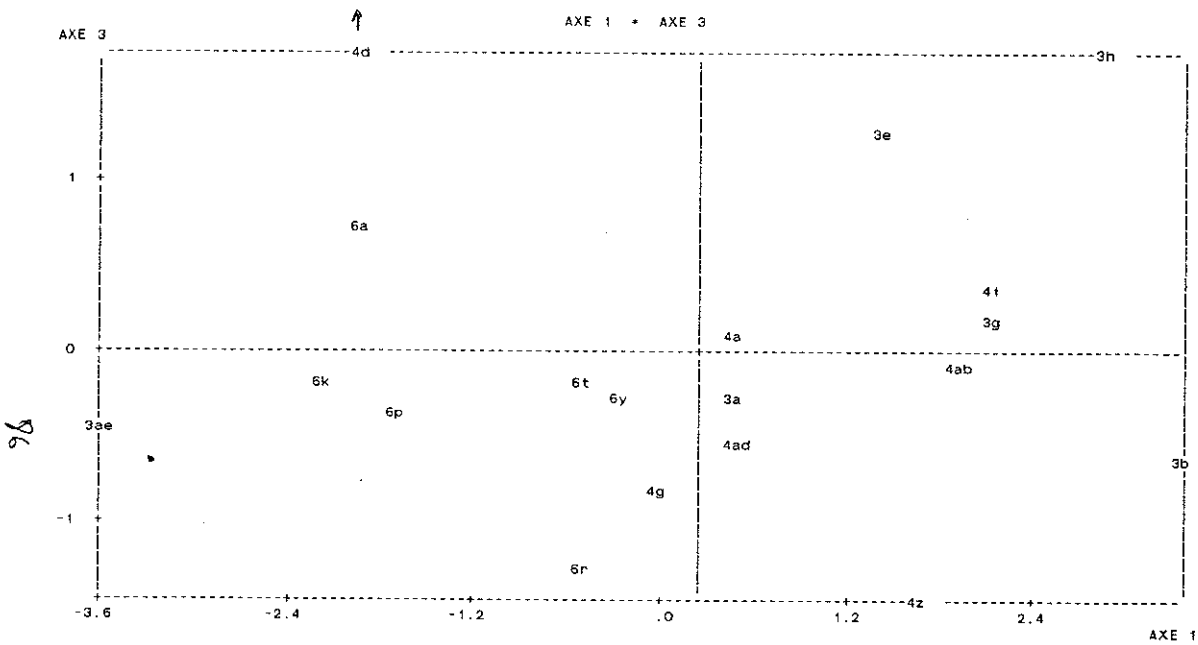
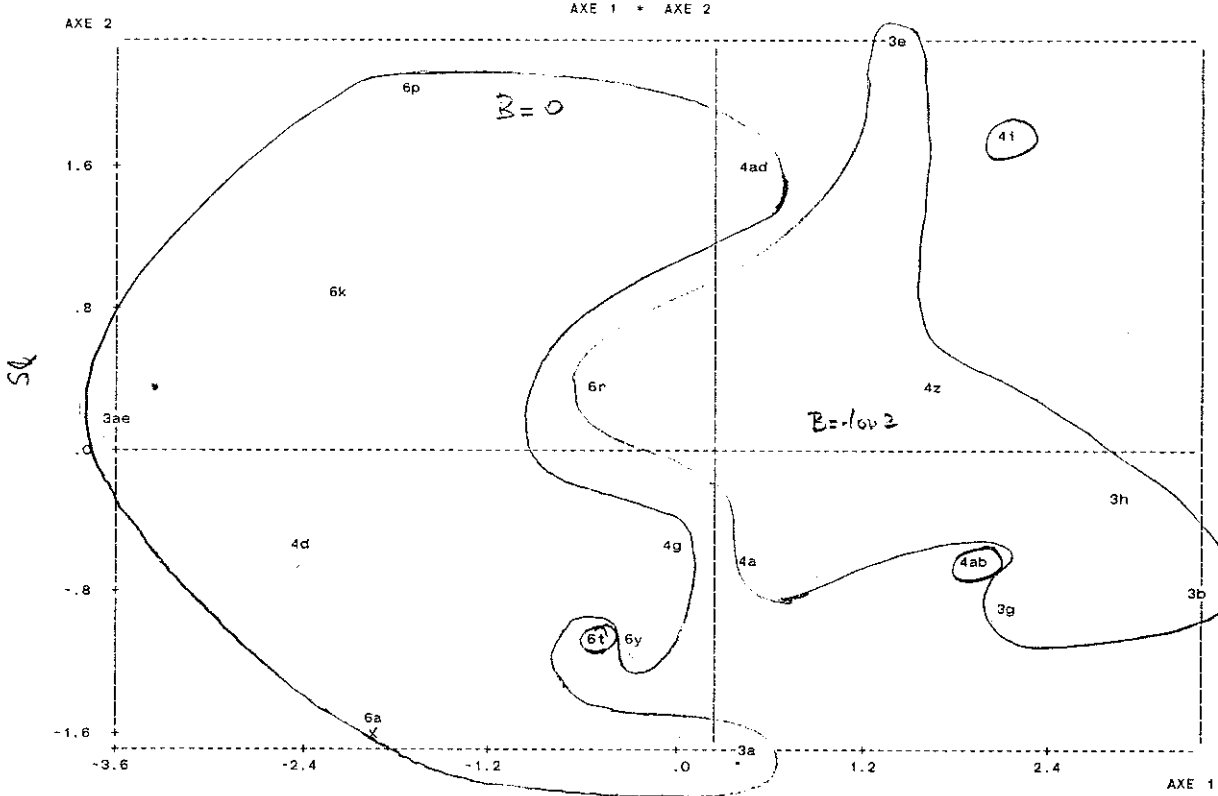
NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 19

AXE 1 \* AXE 2



Redécoupage des étudiants en fonction de leurs résultats au prétest.

NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 19



l'axe 3 n'est pas significatif

TRAITEMENT DES POINTS A PLUS DE 2.30 ECARTS-TYPES DU CENTRE

POINTS ELOIGNES :

IDENTIFICATEUR	ABSCISSE	ORDONNEE
4d	-2.502	2.078

1 POINTS ONT ETE RAMENES SUR LE BORD DU GRAPHIQUE.

NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 19

## ANNEXE J-4

tableau des données par thèmes.

Tableau des donnée par thèmes

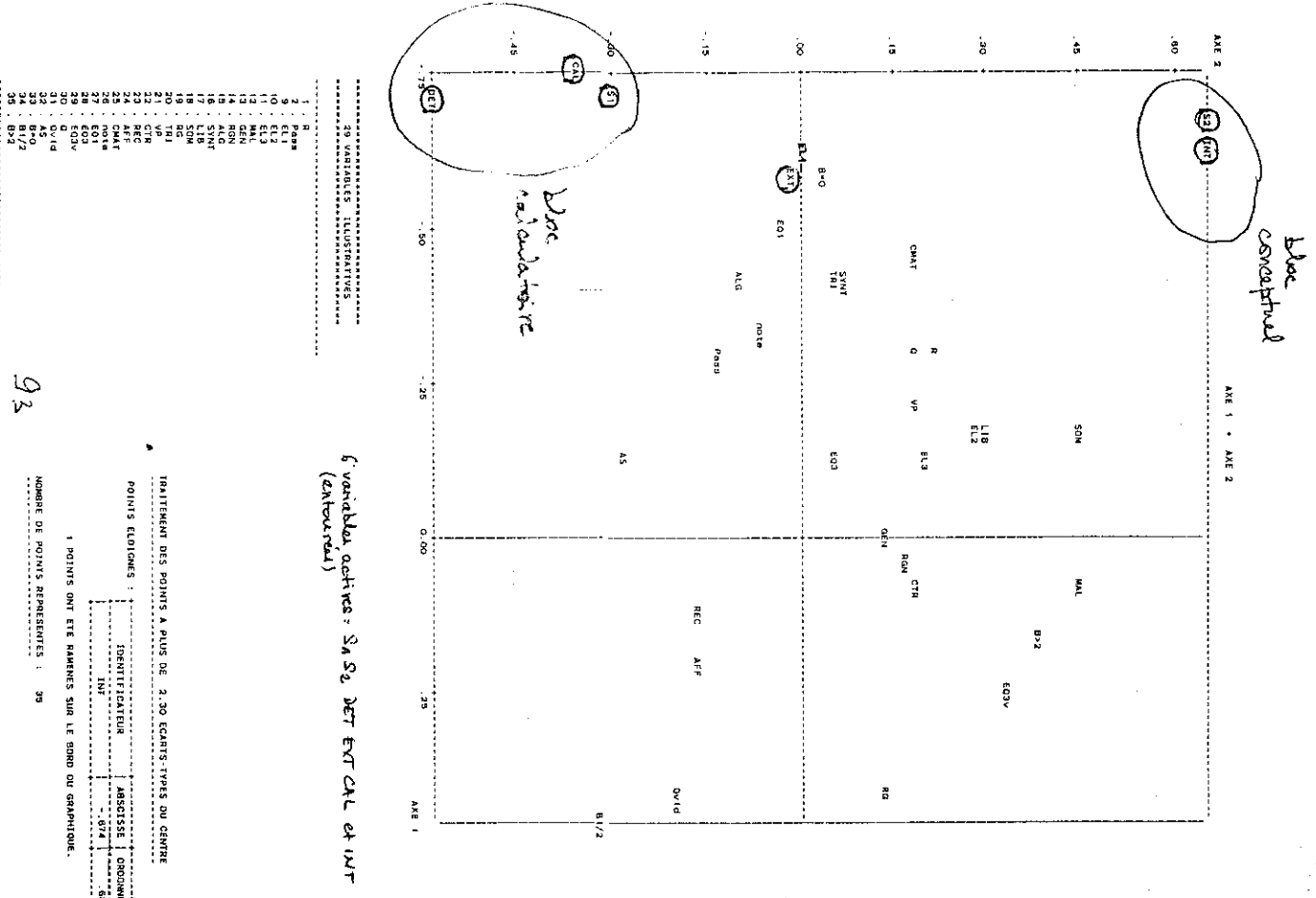
n°	S1	S2	DET	CAL	EXT	INT	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN
3a	2	2	3,5	0	1	0	3,5	3	1	1	0	0
3b	2,5	1	3	1	1	1	1,5	3	0	2	1	1
3e	1	0,5	1	3	0	1	1	5	2,5	0	0	0
3g	1,5	0	3	1	1	2	2	3,5	2	1	1	0
3h	2,5	1	3	1	0	1	0	3	1,5	1	1	0
3ae	4,5	2	4	1	2	0	4	5	3	0	0	0
4a	2,5	0,5	3	2	0	1	4	3	2	0	0	0
4d	2,5	1	3	1	0	1	4	4,5	3,5	0	0	0
4g	2	1	3,5	0	1	1	3,5	3	1	0	0	0
4i	0,5	1,5	1,5	3	0	1	1	3	0,5	0	0	0
4z	4	0,5	3	0	0	1	2	2,5	0,5	1	1	0
4ab	3	1,5	3	1	0	1	1	2	1	0	0	0
4ad	3,5	0,5	3	1	0	2	1,5	4	1,5	2	0	1
6a	4	2	3	0	0	0	3	4	3	2	0	0
6k	4	2	3	1	1	0	3,5	5	1,5	0	1	1
6p	2	2	2	1	1	0	2	4	3	0	1	0
6r	3,5	1,5	3	2	0	1	3	4	2,5	0	1	1
6t	3	2	2,5	0	0	0	3,5	4	2	0	0	0
6y	3,5	1,5	3	0	1	1	3	4	1,5	1	0	0
MOY	2,74	0,68	2,84	1	0,47	0,79	2,47	3,66	1,76	0,58	0,37	0,21
SUR	5,5	2	4	5	2	2	4	5	5	2	1	1

Tableau des donnée par thèmes

n°	ALG	SYNT	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC	AFF	CMAT
3a	2	0	2	2	1	0,5	3	2	2	0	1
3b	0	0	0	1	2	0	2	1	1	0	0,5
3e	1	0	1	4	3	0	3	3	1	0	1,5
3g	1,5	0	1	1	2	0	3	1	0	0	2
3h	0	0	0	2	2	0	2,5	1	3	0	1
3ae	5	1	2	5	2	0,5	2,5	2	1	1	3
4a	3,5	0	1,5	3	3	0	4	1	0	0	0,5
4d	2,5	0	2,5	4	2	2	4	3	1	0	1,5
4g	3,5	0	2	2	3	1	3	1	0	1	0,5
4i	1	0	2	3	3	0	2	1	1	1	1
4z	3,5	1	1	2	2	0	2	2	1	0	1
4ab	1,5	0	1,5	0	1	1	2,5	0	0	0	2,5
4ad	4	1	2	3	2	0,5	2	1	1	0	2
6a	3	2	2	3	2	1	4	1	1	0	3
6k	2	1	1,5	5	1	1	3	1	1	0	3,5
6p	5	1	3	4	3	0,5	3,5	2	0	0	1,5
6r	2	1	2	2	3	0,5	2,5	2	0	0	1,5
6t	1,5	0	1	3	2	1	3,5	1	2	1	3
6y	2,5	0	1	2	3	1	4	2	0	1	2
MOY	2,37	0,42	1,53	2,68	2,21	0,55	2,95	1,47	0,84	0,26	1,71
SUR	8	4	3	4	4	2	4	4	3	1	4

ANNEXE J-4a  
 ACP sur les variables  
 de résolution  
 de systèmes linéaires.





29 VARIABLES ILLUSTRATIVES

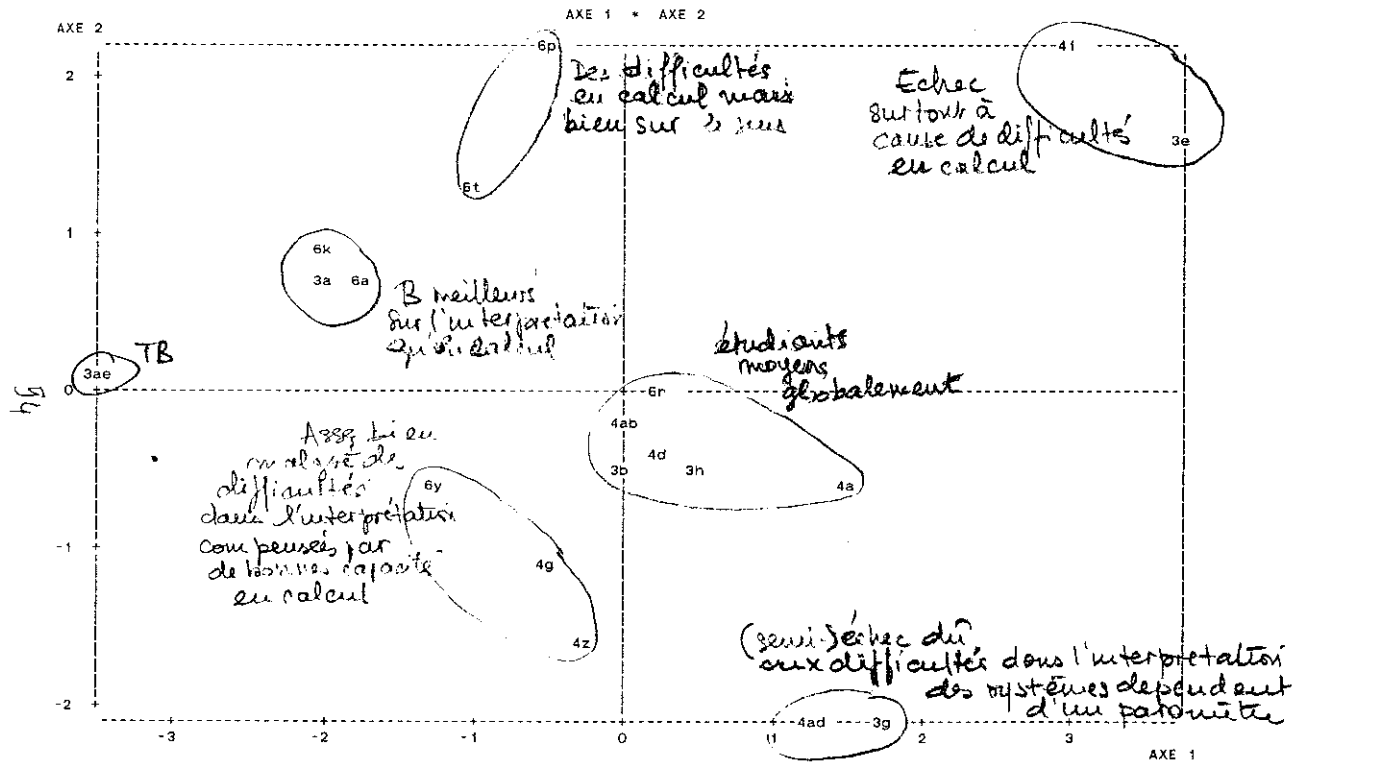
1	R
2	PER
3	EL1
4	EL2
5	EL3
6	EL4
7	EL5
8	EL6
9	EL7
10	EL8
11	EL9
12	EL10
13	EL11
14	EL12
15	EL13
16	EL14
17	EL15
18	EL16
19	EL17
20	EL18
21	EL19
22	EL20
23	EL21
24	EL22
25	EL23
26	EL24
27	EL25
28	EL26
29	EL27
30	EL28
31	EL29
32	EL30
33	EL31
34	EL32
35	EL33
36	EL34
37	EL35
38	EL36
39	EL37
40	EL38
41	EL39
42	EL40
43	EL41
44	EL42
45	EL43
46	EL44
47	EL45
48	EL46
49	EL47
50	EL48

Traitement des points à plus de 2.30 écarts-types du centre

1	IDENTIFICATEUR	ASSOISSE	ORDONNE
2	IN	IN	IN
3	IN	IN	IN
4	IN	IN	IN
5	IN	IN	IN
6	IN	IN	IN
7	IN	IN	IN
8	IN	IN	IN
9	IN	IN	IN
10	IN	IN	IN
11	IN	IN	IN
12	IN	IN	IN
13	IN	IN	IN
14	IN	IN	IN
15	IN	IN	IN
16	IN	IN	IN
17	IN	IN	IN
18	IN	IN	IN
19	IN	IN	IN
20	IN	IN	IN
21	IN	IN	IN
22	IN	IN	IN
23	IN	IN	IN
24	IN	IN	IN
25	IN	IN	IN
26	IN	IN	IN
27	IN	IN	IN
28	IN	IN	IN
29	IN	IN	IN
30	IN	IN	IN
31	IN	IN	IN
32	IN	IN	IN
33	IN	IN	IN
34	IN	IN	IN
35	IN	IN	IN
36	IN	IN	IN
37	IN	IN	IN
38	IN	IN	IN
39	IN	IN	IN
40	IN	IN	IN
41	IN	IN	IN
42	IN	IN	IN
43	IN	IN	IN
44	IN	IN	IN
45	IN	IN	IN
46	IN	IN	IN
47	IN	IN	IN
48	IN	IN	IN
49	IN	IN	IN
50	IN	IN	IN

1 POINTS ONT ETE RAMENES SUR LE BORD DU GRAPHIQUE.

NUMERO DE POINTS REPRESENTES : 50



93

94



# ANNEXE J-4b

## ACP sur les variables des questions élémentaires d'algèbre linéaire.

95

### 6 VARIABLES ACTIVES

7 . EL1  
8 . EL2  
9 . EL3  
10 . MAL  
11 . GEN  
12 . RGN

### MATRICE DES CORRELATIONS

	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN
EL1	1.00					
EL2	.37	1.00				
EL3	.40	.69	1.00			
MAL	.28	.19	.29	1.00		
GEN	.30	.08	.15	.14	1.00	
RGN	.04	-.21	.21	.29	.41	1.00

### MATRICE DES CORRELATIONS PERMUTEE SUIVANT LE PREMIER AXE DE L'ANALYSE

	EL3	EL2	EL1	MAL	GEN	RGN
EL3	1.00					
EL2	.69	1.00				
EL1	.40	.37	1.00			
MAL	.29	.19	.28	1.00		
GEN	.15	.08	.30	.14	1.00	
RGN	.21	-.21	.04	.29	.41	1.00

96

Seule grosse corrélation entre EL2 et EL3

La corrélation négative entre RGN et EL2 est un résultat surprenant --

### EDITION DES VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION .... 6.0000  
SOMME DES VALEURS PROPRES ..... 6.0000

### HISTOGRAMME DES 6 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT	POURCENT CUMULE
1	2.2841	38.07	38.07
2	1.4592	24.32	62.39
3	.8599	14.33	76.72
4	.7251	12.08	88.81
5	.4889	8.15	96.95
6	.1828	3.05	100.00

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

VARIABLES IDEN - LIBELLE COURT	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
VARIABLES ACTIVES															
EL1 - EL1	-.70	-.08	.29	.52	-.38	-.70	-.08	.29	.52	-.38	-.46	-.07	.32	.62	-.54
EL2 - EL2	-.70	-.59	.05	-.20	.22	-.70	-.59	.05	-.20	.22	-.46	-.49	.05	-.24	.32
EL3 - EL3	-.82	-.24	-.10	-.40	-.15	-.82	-.24	-.10	-.40	-.15	-.54	-.19	-.11	-.47	-.22
MAL - MAL	-.56	.25	-.65	.37	-.26	-.56	.25	-.65	.37	-.26	-.37	.21	-.70	.44	.37
GEN - GEN	-.47	.57	.56	.00	.37	-.47	.57	.56	.00	.37	-.31	.47	.61	.00	.53
RGN - RGN	-.32	.82	-.16	-.33	-.26	-.32	.82	-.16	-.33	-.26	-.21	.67	-.17	-.38	-.37

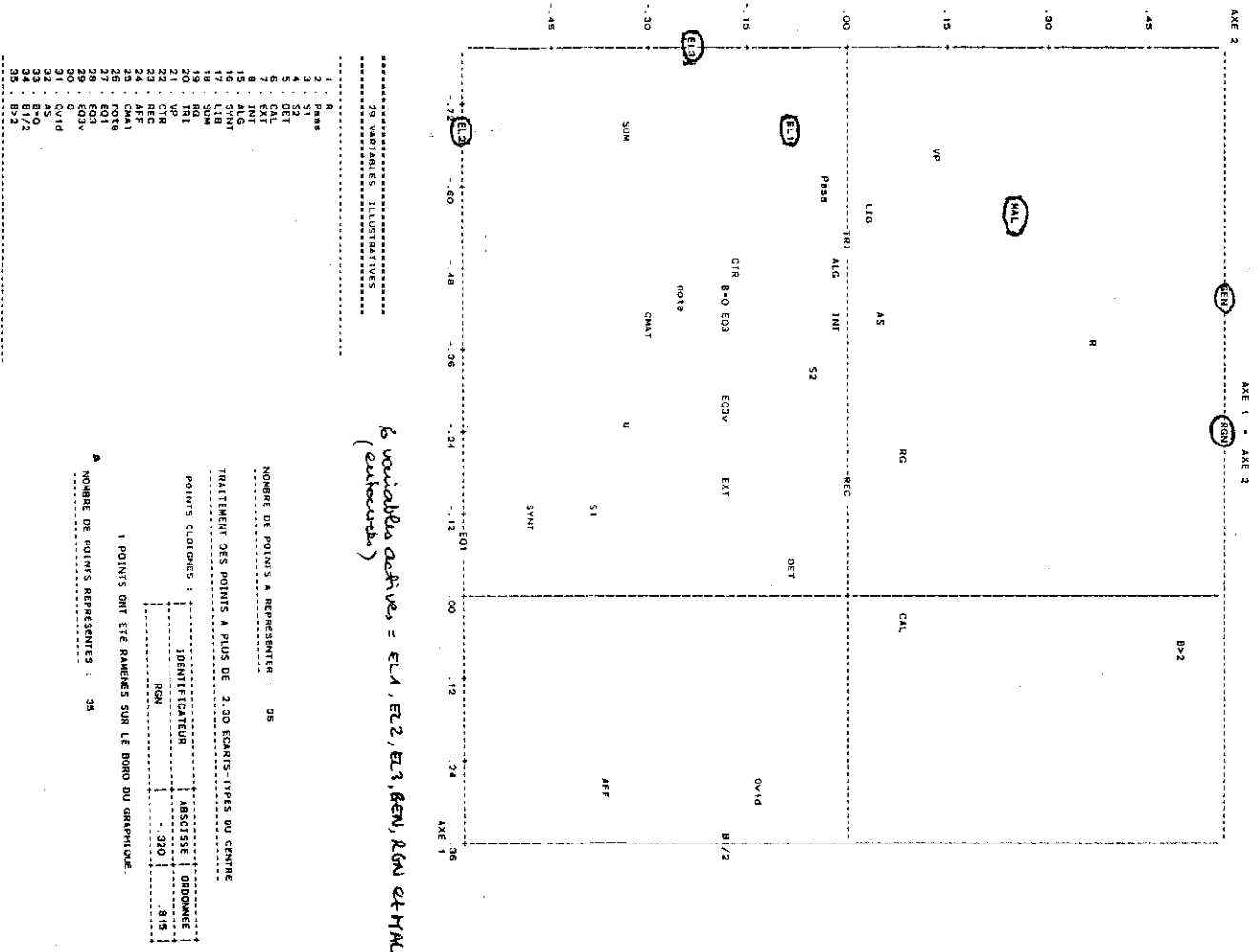
Axe 1 : Réussite (-) ↔ Echec (+) RGN n'est pas très corrélé à cet axe

Axe 2 = EL2, EL3 (-) ← EL1 → RGN, GEN, MAL (+)  
maladroites

Axe 3 = MAL (-) ← EL2, EL3, RGN → GEN, EL1 (+)

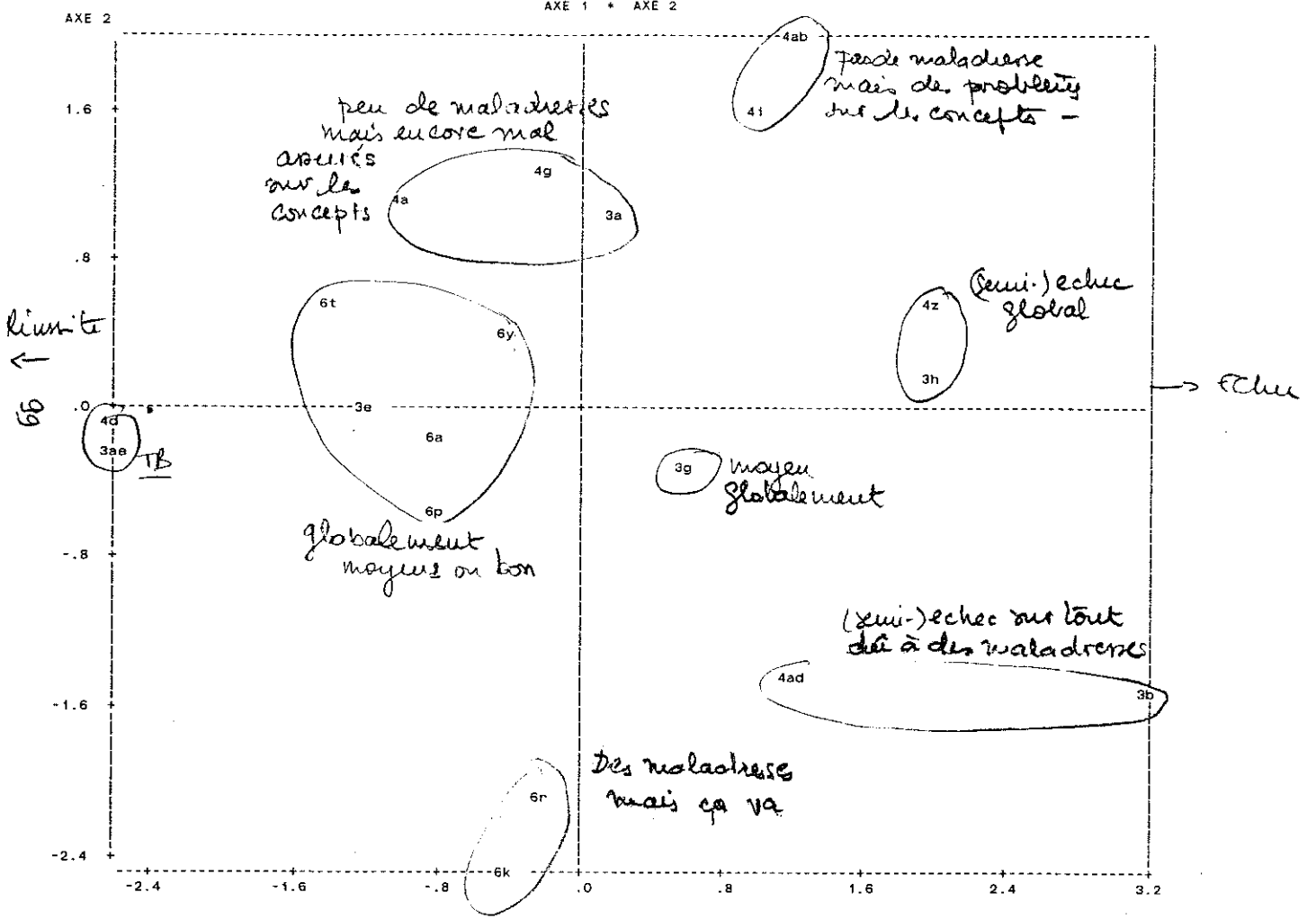
COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES INDIVIDUS SUR LES AXES 1 A 5

INDIVIDUS IDENTIFICATEUR	P.REL	DISTO	COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3a	5.26	3.15	.26	1.07	1.09	-.65	-.53	.2	4.1	7.3	3.1	3.0	.02	.36	.38	.13	.09
3b	5.26	13.78	3.26	-1.51	.78	-.46	-.08	24.5	8.3	3.7	1.6	.1	.77	.17	.04	.02	.00
3e	5.26	6.09	-1.22	.02	-.57	-1.36	1.50	3.4	.0	2.0	13.3	24.4	.24	.00	.05	.30	.37
3g	5.26	2.55	.64	-.31	-.65	-.77	-1.00	.9	.3	2.6	4.3	10.7	.16	.04	.17	.23	.39
3h	5.26	7.25	1.97	.20	-1.15	-1.41	-.16	8.9	.1	8.1	14.4	.3	.53	.01	.18	.27	.00
3ae	5.26	7.30	-2.66	-.25	.17	-.06	-.03	16.3	.2	.2	.0	.0	.97	.01	.00	.00	.00
4a	5.26	3.74	-1.00	1.11	.17	1.00	-.49	2.3	4.5	.2	7.2	2.6	.26	.33	.01	.27	.06
4d	5.26	7.41	-2.68	-.07	.08	-.17	-.27	16.5	.0	.0	.2	.8	.97	.00	.00	.00	.01
4g	5.26	3.44	-.23	1.35	-.16	1.24	-.04	.1	6.5	.2	11.1	.0	.02	.53	.01	.45	.00
4i	5.26	5.34	1.02	1.59	-.45	.20	1.21	2.4	9.1	1.2	.3	15.8	.19	.47	.04	.01	.28
4z	5.26	6.10	2.04	.58	-.53	.26	-1.03	9.6	1.2	1.7	.5	11.4	.68	.05	.05	.01	.17
4ab	5.26	7.47	1.28	2.07	-.56	.23	.72	3.8	15.4	1.9	.4	5.6	.22	.57	.04	.01	.07
4ad	5.26	8.84	1.21	-1.43	1.92	-.55	1.06	3.4	7.4	22.5	2.2	12.0	.17	.23	.42	.03	.13
6a	5.26	6.51	-.74	-.17	1.71	-1.47	-.87	1.3	.1	17.9	15.7	8.2	.08	.00	.45	.33	.12
6k	5.26	9.40	-.45	-2.54	-.62	1.36	-.40	.5	23.4	2.3	13.4	1.7	.02	.69	.04	.20	.02
6p	5.26	4.59	-.70	-.53	-1.68	-.82	-.55	1.1	1.0	17.2	4.9	3.2	.11	.06	.61	.15	.07
6r	5.26	7.02	-.28	-2.14	-.93	.89	.02	.2	16.5	5.2	5.7	.0	.01	.65	.12	.11	.00
6t	5.26	2.41	-1.35	.56	.10	.46	-.11	4.2	1.1	.1	1.5	.1	.76	.13	.00	.09	.01
6y	5.26	1.60	-.38	.42	.96	-.14	-.04	.9	.6	5.6	.1	.0	.09	.11	.57	.01	.00



10

31



ANNEXE J-4c

ACP sur les variables  
des questions plus évoluées  
d'algèbre linéaire.

7 VARIABLES ACTIVES

- 15 . LIB
- 16 . SOM
- 17 . RG
- 18 . TRI
- 19 . VP
- 20 . CTR
- 21 . REC

MATRICE DES CORRELATIONS

	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC
LIB	1.00						
SOM	.42	1.00					
RG	-.14	.13	1.00				
TRI	.45	.21	-.24	1.00			
VP	.28	.27	.18	.53	1.00		
CTR	.26	.48	.31	.13	.25	1.00	
REC	.38	.15	.31	.10	.20	-.04	1.00

MATRICE DES CORRELATIONS PERMUTEE SUIVANT LE PREMIER AXE DE L'ANALYSE

	RG	REC	CTR	TRI	SOM	VP	LIB
RG	1.00						
REC	.41	1.00					
CTR	.31	-.04	1.00				
TRI	-.24	.10	.13	1.00			
SOM	.13	-.15	.48	.21	1.00		
VP	.18	.20	.25	.53	.27	1.00	
LIB	.14	.38	.26	.45	.44	.28	1.00

101

EDITION DES VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION .... 7.0000  
 SOMME DES VALEURS PROPRES ..... 7.0000

HISTOGRAMME DES 7 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT	POURCENT CUMULE
1	2.4340	34.77	34.77
2	1.4430	20.61	55.39
3	1.3002	18.57	73.96
4	.7932	11.33	85.29
5	.5007	7.15	92.45
6	.2878	4.11	96.56
7	.2410	3.44	100.00

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

VARIABLES	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
LIB - LIB	.76	.01	-.20	-.54	.01	.76	.01	-.20	-.54	.01	.49	.01	-.17	-.61	.02
SOM - SOM	.64	-.25	.52	-.23	.37	.64	-.25	.52	-.23	.37	.41	-.21	.46	-.26	.52
RG - RG	.35	.81	.26	.19	.14	.35	.81	.26	.19	.14	.22	.67	.23	-.21	.20
TRI - TRI	.61	-.51	-.46	.10	-.17	.61	-.51	-.46	.10	-.17	.39	-.43	-.41	.11	-.24
VP - VP	.69	-.11	-.23	.60	.21	.69	-.11	-.23	.60	.21	.44	-.09	-.20	.68	.30
CTR - CTR	.59	.04	.60	.12	-.51	.59	.04	.60	.12	-.51	.38	.03	.53	.14	-.72
REC - REC	.36	.67	-.54	-.14	-.10	.36	.67	-.54	-.14	-.10	.23	.56	-.47	-.16	-.14

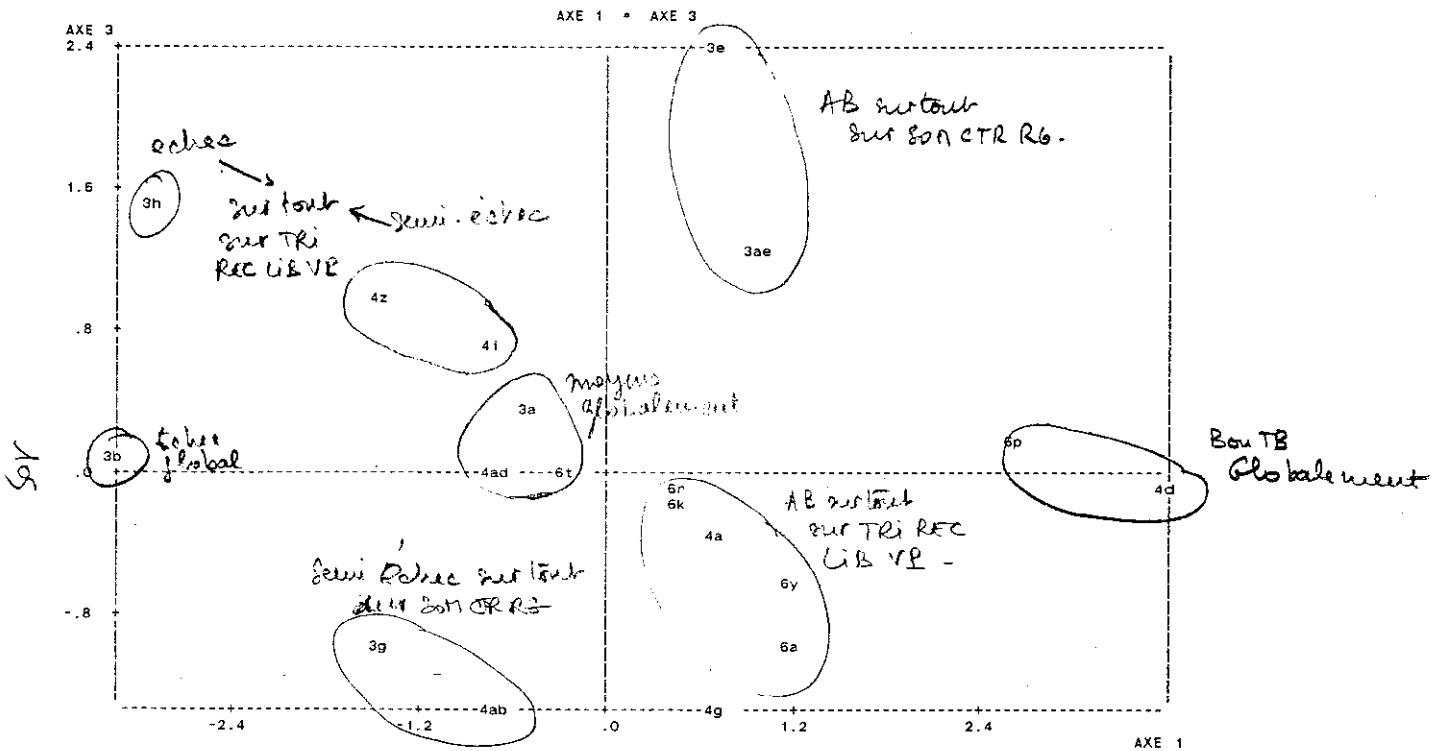
Axe 1 = Echec (-) ↔ Réussite (+)  
 Axe 2 = TRI - SOM (-) ↔ RG - REC (+)  
 Axe 3 = TRI REC LIB VP (-) ↔ SOM CTR RG (+)

102

COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES INDIVIDUS SUR LES AXES 1 A 5

INDIVIDUS	P.REL DISTO		COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
	1	2	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3a	5.26	6.25	-.37	-1.80	.32	-.25	-.87	.3	11.8	.4	.4	8.0	.02	.52	.02	.01	.12
3b	5.26	9.20	-2.87	.48	.14	.44	-.44	17.8	.9	.1	1.3	2.1	.89	.03	.00	.02	.02
3e	5.26	8.04	.69	.93	2.41	.65	-.43	1.0	3.2	23.5	2.8	2.0	.06	.11	.72	.05	.02
3g	5.26	4.80	-1.32	1.06	-.96	.39	-.16	3.7	4.1	3.8	1.0	.3	.36	.23	.19	.03	.01
3h	5.26	13.42	-2.80	-1.12	1.51	1.11	-.51	17.0	4.5	9.3	8.1	2.8	.58	.09	.17	.09	.02
3ae	5.26	4.60	.88	-.56	1.27	-1.23	.23	1.7	1.2	6.5	10.0	.5	.17	.07	.35	.33	.01
4a	5.26	6.12	.59	1.58	-.33	.85	1.36	.7	9.1	.4	4.8	19.5	.06	.41	.02	.12	.30
4d	5.26	16.49	3.42	-1.74	-.06	.49	-1.15	25.3	11.1	.0	1.6	13.8	.71	.18	.00	.01	.08
4g	5.26	4.14	.70	1.08	-1.27	-.12	.10	1.1	4.2	6.5	.1	.1	.12	.28	.39	.00	.00
4i	5.26	5.05	-.62	1.15	.72	-1.29	-.68	.8	4.8	2.1	11.0	4.9	.08	.26	.10	.33	.09
4z	5.26	4.26	-1.40	.37	.96	-.39	-.98	4.2	.5	3.8	1.0	10.2	.46	.03	.22	.04	.23
4ab	5.26	13.32	-1.72	-.52	-3.07	-.58	-.54	6.4	1.0	38.3	2.2	3.0	.22	.02	.71	.03	.02
4ad	5.26	2.80	-.58	-.22	.01	-1.49	-.18	.7	.2	.0	14.7	.3	.12	.02	.00	.79	.01
6a	5.26	3.91	1.04	-.87	-.95	.53	.81	2.3	2.7	3.7	1.9	6.9	.28	.19	.23	.07	.17
6k	5.26	7.35	.40	-2.04	-.17	-.72	.89	.4	15.2	.1	3.5	8.3	.02	.57	.00	.07	.11
6p	5.26	8.35	2.43	1.14	.15	-.77	.39	12.8	4.8	.1	3.9	1.6	.71	.16	.00	.07	.02
6r	5.26	3.95	.53	1.58	-.04	-.52	-.86	.6	9.1	.0	1.8	7.7	.07	.63	.00	.07	.19
6t	5.26	4.38	-.20	-1.50	.01	1.06	.75	.1	8.2	.0	7.5	5.9	.01	.52	.00	.26	.13
6y	5.26	6.55	1.19	.98	-.62	1.84	-.46	3.0	3.5	1.6	22.4	2.2	.21	.15	.06	.52	.03





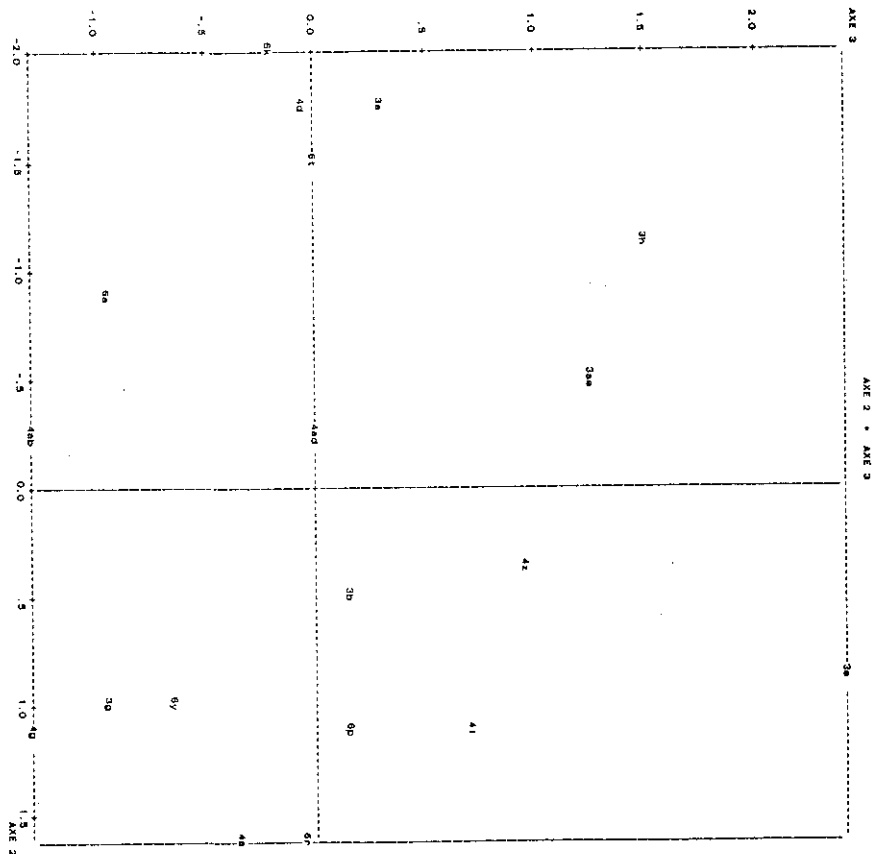
TRAITEMENT DES POINTS A PLUS DE 2.30 ECARTS-TYPES DU CENTRE

POINTS ELOIGNES :

IDENTIFICATEUR	ABSCISSE	ORDONNEE
4ab	-1.717	-3.074

1 POINTS ONT ETE RAMENES SUR LE BORD DU GRAPHIQUE.

NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 19



TRAITEMENT DES POINTS A PLUS DE 2.30 ECARTS-TYPES DU CENTRE

POINTS ELOIGNES :

IDENTIFICATEUR	ABSCISSE	ORDONNEE
4ab	-1.717	-3.074

1 POINTS ONT ETE RAMENES SUR LE BORD DU GRAPHIQUE.

NOMBRE DE POINTS REPRESENTES : 19

106

# ANNEXE J-4d

## Matrice des corrélations entre les 23 variables des thèmes.

107

MATRICE DES CORRELATIONS

	S1	S2	DET	CAL	EXT	INT	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN	ALG	SYNT	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC	AFF	
S1	1.00																						
S2	.32	1.00																					
DET	.63	.13	1.00																				
CAL	.92	.27	.84	1.00																			
EXT	.16	.30	.45	.29	1.00																		
INT	.29	.87	.08	.28	.30	1.00																	
EL1	.39	.34	.50	.38	.35	.44	1.00																
EL2	.22	.24	-.14	-.17	.27	.29	.37	1.00															
EL3	.17	.19	-.04	-.09	.01	.27	.40	.69	1.00														
MAL	-.29	.21	-.23	-.38	-.02	.27	.28	.19	.29	1.00													
GEN	-.09	.14	-.02	.00	-.13	.08	.30	.08	.15	.14	1.00												
RGN	-.31	.01	-.12	-.14	-.02	.18	.04	-.21	.21	.29	.41	1.00											
ALG	.42	.15	.31	.28	.32	.21	.50	.25	.42	.13	.20	.13	1.00										
SYNT	.64	.34	.17	.19	.03	.34	.16	.34	.36	-.28	-.19	-.29	.54	1.00									
LIB	.01	.37	.01	-.04	.09	.27	.44	.26	.51	.35	.32	.10	.69	.39	1.00								
SOM	.17	.32	-.18	-.22	.19	.48	.40	.81	.58	.05	.15	-.03	.45	.38	.44	1.00							
RG	-.26	-.24	-.44	-.41	-.11	-.23	-.02	.12	.20	.23	.07	.18	.19	-.09	.14	.13	1.00						
TRI	.33	.42	.28	.43	.00	.39	.54	.30	.41	.21	.38	.05	.22	.10	.45	.21	.24	1.00					
VP	.03	.21	.01	.24	-.00	.33	.58	.32	.61	.19	.33	.42	.23	-.01	.28	.18	.53	.53	1.00				
CTR	-.08	-.04	-.22	-.15	.09	.13	.25	.55	.48	.21	.05	.15	.21	.02	.26	.48	.31	.13	.28	1.00			
REC	-.01	-.18	-.00	-.14	.17	-.28	.22	-.04	.12	.24	.01	-.06	.41	.08	.38	-.18	.41	.10	.20	-.04	1.00		
AFF	.02	-.32	-.05	-.13	-.33	-.18	-.26	-.10	.10	-.30	-.46	-.31	-.14	.22	-.08	-.15	-.34	-.16	-.04	.08	-.03	1.00	
CMAT	.55	.50	.12	.22	.16	.39	.24	.54	.41	.06	.12	-.09	.16	.47	.15	.37	.45	.44	.20	-.15	-.05	-.12	1.00

108

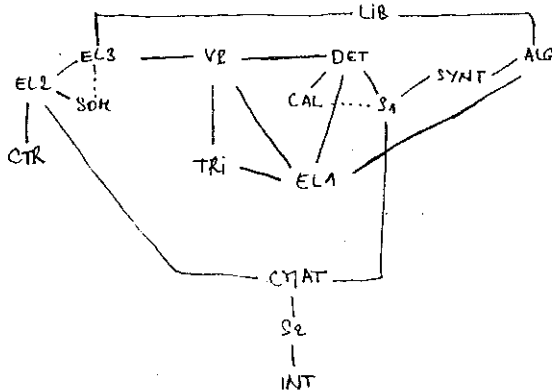


Schéma sommaire  
représentant les corrélations  $\geq 0.50$   
(Les pointillés ont des corrélations qui deviennent très faibles quand on conditionne par rapport à une troisième variable)

MATRICE DES CORRELATIONS : COEFFICIENTS  $\geq 0.50$

	S1	S2	DET	CAL	EXT	INT	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN	ALG	SYNT	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC	AFF	CMAT		
S1	1.00																								
S2		1.00																							
DET	.63		1.00																						
CAL	.52		.64	1.00																					
EXT			.87		1.00																				
INT			.50		.30	1.00																			
EL1							1.00																		
EL2								1.00																	
EL3									1.00																
MAL										1.00															
GEN											1.00														
RGN												1.00													
ALG													1.00												
SYNT	.64												.54	1.00											
LIB													.69		1.00										
SOM													.51			1.00									
RG													.58				1.00								
TRI																		1.00							
VP																			1.00						
CTR																				1.00					
REC																					1.00				
AFF																						1.00			
CMAT	.35	.50																							1.00

109

MATRICE DES CORRELATIONS : COEFFICIENTS DE VALEUR ABSOLUE  $\geq 0.30$  (négatifs entourés)

	S1	S2	DET	CAL	EXT	INT	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN	ALG	SYNT	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC	AFF	CMAT			
S1	1.00																									
S2	.62	1.00																								
DET	.63		1.00																							
CAL	.52		.64	1.00																						
EXT			.80	.45	1.00																					
INT			.87	.30	.30	1.00																				
EL1			.39	.34	.50	.36	.35	.44	1.00																	
EL2							.37	1.00																		
EL3							.40	.69	1.00																	
MAL										1.00																
GEN											1.00															
RGN												1.00														
ALG													1.00													
SYNT	.64		.34		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.54	1.00												
LIB			.37		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.69	.39	1.00											
SOM			.32		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	1.00										
RG			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	1.00									
TRI			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	.44	1.00								
VP			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	.44	.44	1.00							
CTR			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	.44	.44	.44	1.00						
REC			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	.44	.44	.44	.44	1.00					
AFF			.35		.32	.34	.34	.36	.36	.35	.32	.38	.45	.38	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	1.00				
CMAT	.35	.50				.39	.39	.54	.41	.30	.46	.31	.41	.47	.37	.37	.35	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	.44	1.00

ANNEXE J-5

ACP sur les dix variables :  
 sys1, sys2, ele1, ele2, ALG,  
 SYNT, AL1, AL2, AL3 et cmat.

110



=====

10 VARIABLES ACTIVES

=====

3 . sys1 ( CONTINUE )

4 . sys2 ( CONTINUE )

5 . ALG ( CONTINUE )

6 . SYNT ( CONTINUE )

7 . ele1 ( CONTINUE )

8 . ele2 ( CONTINUE )

9 . AL1 ( CONTINUE )

10 . AL2 ( CONTINUE )

11 . AL3 ( CONTINUE )

12 . CMAT ( CONTINUE )

-----

=====

13 VARIABLES ILLUSTRATIVES

=====

1 . R ( CONTINUE )

2 . PASS ( CONTINUE )

13 . Note ( CONTINUE )

14 . EQ1 ( CONTINUE )

15 . EQ3 ( CONTINUE )

16 . EQv ( CONTINUE )

17 . Q ( CONTINUE )

18 . Qvid ( CONTINUE )

19 . AN ( CONTINUE )

20 . AS ( CONTINUE )

21 . B=0 ( CONTINUE )

22 . B1/2 ( CONTINUE )

23 . B>2 ( CONTINUE )

-----

=====

POIDS DES INDIVIDUS

=====

. Poids des individus, uniforme egal a 1. ( POIDS )

-----

=====

EDITION DES VALEURS PROPRES

-----

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGNALISATION .... 10.0000

SOMME DES VALEURS PROPRES ..... 10.0000

-----

HISTOGRAMME DES 10 PREMIERES VALEURS PROPRES

-----

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT.	POURCENT. CUMULE	
1	3.1760	31.76	31.76	*****
2	1.7703	17.70	49.46	*****
3	1.4536	14.54	64.00	*****
4	1.3613	13.61	77.61	*****
5	.7183	7.18	84.80	*****
6	.6722	6.72	91.52	*****
7	.3992	3.99	95.51	*****
8	.2786	2.79	98.30	*****
9	.1238	1.24	99.53	****
10	.0465	.47	100.00	**

-----

MATRICE DES CORRELATIONS

-----

	sys1	sys2	ALG	SYNT	ele1	ele2	AL1	AL2	AL3	CMAT
sys1	1.00									
sys2	.00	1.00								
ALG	.40	-.11	1.00							
SYNT	.42	.06	.54	1.00						
ele1	.24	-.32	.47	.14	1.00					
ele2	.15	-.07	.02	.49	.00	1.00				
AL1	.16	.31	.59	.25	.85	.08	1.00			
AL2	-.50	-.11	.13	-.11	-.17	-.09	.00	1.00		
AL3	-.22	.27	-.08	.02	.09	.23	.00	-.00	1.00	
CMAT	.47	.19	.16	.47	.41	.29	.20	-.51	-.20	1.00

-----

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

VARIABLES IDEN - LIBELLE COURT	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
<b>VARIABLES ACTIVES</b>															
sys1 - sys1	.68	.45	.12	-.23	-.31	-.66	-.45	-.12	-.23	-.31	.37	-.34	.10	-.19	-.36
sys2 - sys2	.26	.36	.68	-.07	-.29	.26	.36	-.68	-.07	-.29	.14	.27	-.57	-.06	-.35
ALG - ALG	.57	.28	.12	-.22	.22	.66	.28	-.57	-.12	.22	.37	.21	-.48	.10	-.26
SYNT - SYNT	.75	.49	-.13	-.21	-.04	.67	-.27	-.19	-.49	-.13	.38	-.20	-.16	-.42	-.16
ele1 - ele1	.33	.19	-.12	-.72	-.16	.73	.52	-.13	-.21	-.04	.41	-.39	-.11	-.18	.05
ele2 - ele2	.71	.06	-.06	-.05	-.05	.33	-.35	-.12	-.72	-.16	.18	-.26	-.10	.62	-.19
AL1 - AL1	.15	.36	.47	.36	-.33	.71	.61	.06	-.06	-.05	.40	.46	.05	-.05	-.06
AL2 - AL2	.39	.58	.48	-.05	-.29	-.39	.52	.47	.36	-.33	-.22	.39	.39	.31	-.38
AL3 - AL3	.55	.58	.48	-.05	-.29	-.05	.29	-.55	.58	.48	-.03	.22	-.46	.49	-.56
CMAT - CMAT	.77	.22	-.15	-.33	-.33	.70	-.40	-.22	-.15	-.33	.40	-.30	-.18	-.13	-.38
<b>VARIABLES ILLUSTRATIVES</b>															
R - R	.29	-.14	.05	-.46	-.12	.29	.14	.05	-.46	-.12	.29	.14	.05	-.46	-.12
PASS - PASS	.62	.16	.37	-.17	-.05	.62	.16	.37	-.17	-.05	.62	.16	.37	-.17	-.05
Note - Note	.60	.15	.25	.11	.18	.60	.15	.25	.11	.18	.60	.15	.25	.11	.18
EQ1 - EQ1	.48	-.20	.31	.41	-.16	.48	-.20	.31	.41	-.16	.48	-.20	.31	.41	-.16
EQ3 - EQ3	.43	.02	-.04	-.08	-.09	.43	.02	-.04	-.08	-.09	.43	.02	-.04	-.08	-.09
EQ3v - EQ3v	.02	.23	-.42	.18	-.26	.02	.23	-.42	.18	-.26	.02	.23	-.42	.18	-.26
Q - Q	.56	-.12	-.08	.07	.04	.56	-.12	-.08	.07	.04	.56	-.12	-.08	.07	.04
Qvid - Qvid	.51	-.03	-.14	.35	.04	.51	-.03	-.14	.35	.04	.51	-.03	-.14	.35	.04
AN - AN	.13	.08	.34	.31	.02	.13	.08	.34	.31	.02	.13	.08	.34	.31	.02
A5 - A5	.29	.33	.36	.14	.39	.29	.33	.36	.14	.39	.29	.33	.36	.14	.39
B=0 - B=0	.70	.01	.18	-.08	.24	.70	.01	.18	-.08	.24	.70	.01	.18	-.08	.24
B1/2 - B1/2	.58	.01	.02	.50	.05	.58	.01	.02	.50	.05	.58	.01	.02	.50	.05
B>2 - B>2	-.19	-.02	-.27	-.55	-.40	-.19	-.02	-.27	-.55	-.40	-.19	-.02	-.27	-.55	-.40

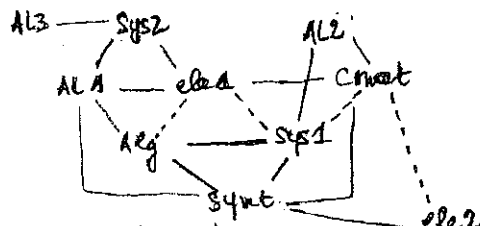
Axe 1 Remise = ebec

Axe 2 = Sys1 Synt ele2 CMAT (-)  
 ← sys2, ALG, ele1, AL1, AL2, AL3

Axe 3 = Sys2 AL3 (-) ↔ ALG AL2 (+)

MATRICE DES CORRELATIONS PERMUTEE SUIVANT LE PREMIER AXE DE L'ANALYSE

	AL2	AL3	sys2	ele2	sys1	ALG	SYNT	CMAT	AL1	ele1
AL2	1.00									
AL3	-.00	1.00								
sys2	-.11	.27	1.00							
ele2	-.09	.23	-.07	1.00						
sys1	-.50	-.22	.00	.15	1.00					
ALG	.13	-.08	-.11	.02	.40	1.00				
SYNT	-.11	.02	.06	.48	.43	.75	1.00			
CMAT	-.51	-.20	.19	.29	.16	.47	.16	1.00		
AL1	.00	.00	.31	.08	.16	.59	.25	.20	1.00	
ele1	-.17	.09	.33	.00	.12	.47	.14	.41	.88	1.00

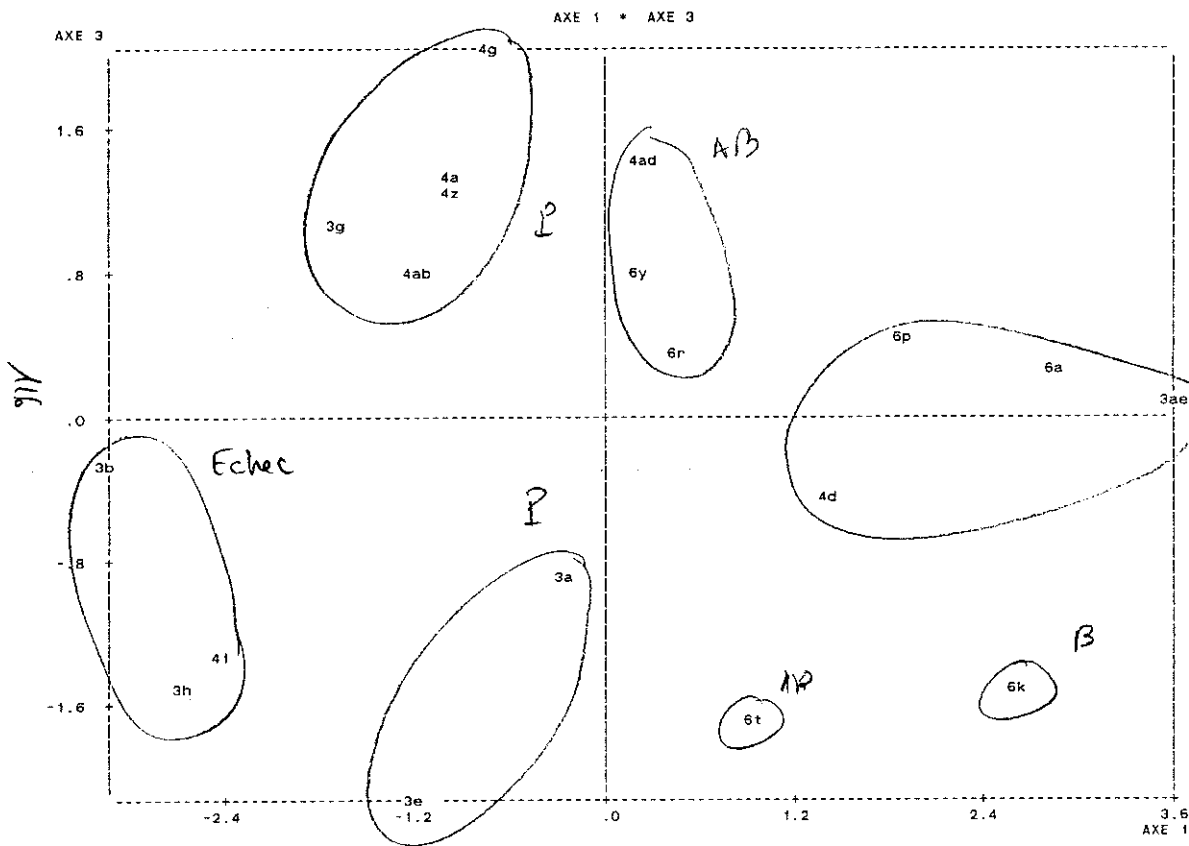
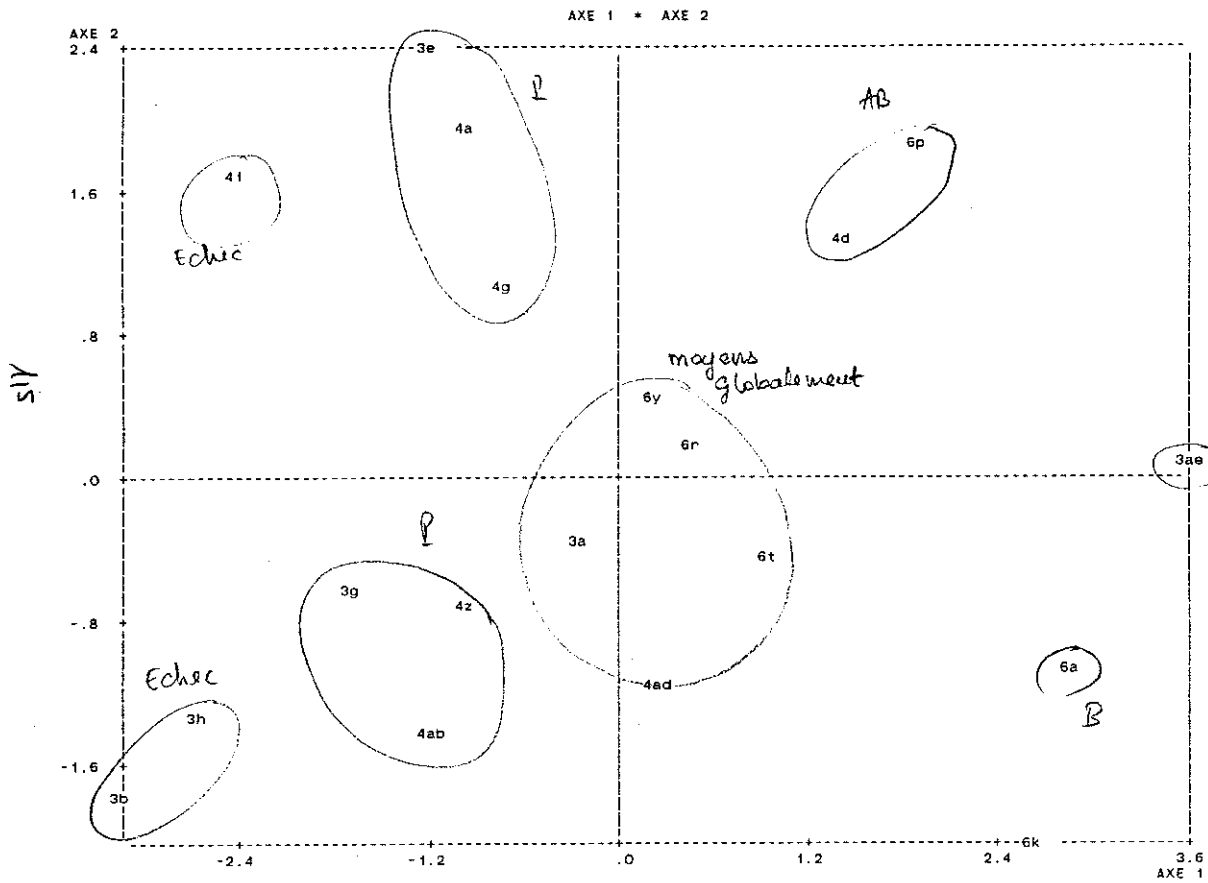


Graph des corrélations > 0.24  
 en pointillé : corrélations qui "disparaissent"  
 quand on conditionne par rapport à une autre variable.

COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES INDIVIDUS SUR LES AXES 1 A 5

INDIVIDUS IDENTIFICATEUR	P. REL	DISTO	COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
3a	5.26	5.98	-.18	-.36	-.94	-1.30	1.45	.1	.4	3.2	6.6	15.4	.01	.02	.15	.28	.35
3b	5.26	15.01	-2.95	-1.75	-.31	1.17	-.02	14.4	9.1	.3	5.3	.0	.58	.20	.01	.09	.00
3e	5.26	13.90	-1.08	2.38	-2.19	1.10	-.38	1.9	16.8	17.3	4.7	1.0	.08	.41	.34	.09	.01
3g	5.26	7.24	-1.61	-.66	1.10	.03	-.79	4.3	1.3	4.4	.0	4.6	.36	.06	.17	.00	.09
3h	5.26	11.72	-2.48	-1.34	-1.48	.31	1.16	10.2	5.3	7.9	.4	9.9	.53	.15	.19	.01	.12
3ae	5.26	15.16	3.40	.07	.06	-.22	1.30	19.1	.0	.0	.2	12.4	.76	.00	.00	.00	.11
4a	5.26	7.04	-.90	1.99	1.39	-.30	-.21	1.3	11.8	7.0	.3	.3	.11	.56	.27	.01	.01
4d	5.26	10.88	1.42	1.36	-.48	-1.02	.71	3.4	5.5	.8	4.1	3.7	.19	.17	.02	.10	.05
4g	5.26	7.32	-.63	1.04	2.01	-1.07	.47	.6	3.2	14.7	4.4	1.6	.05	.15	.55	.16	.03
4i	5.26	11.94	-2.23	1.66	-1.32	-.12	-.87	8.3	8.2	6.3	.1	5.6	.42	.23	.15	.00	.06
4z	5.26	7.51	-.88	-.69	1.30	1.14	1.26	1.3	1.4	6.1	5.0	11.7	.10	.06	.22	.17	.21
4ab	5.26	13.97	-1.10	-1.41	.79	-2.79	-1.37	2.0	5.9	2.3	30.0	13.7	.09	.14	.04	.56	.13
4ad	5.26	7.87	.21	-1.15	1.40	1.55	-.19	.1	3.9	7.1	9.3	.3	.01	.17	.25	.31	.00
5a	5.26	12.71	2.88	-1.10	.24	.06	-.88	13.7	3.6	.2	.0	5.7	.65	.09	.00	.00	.06
6k	5.26	14.25	2.56	-2.04	-1.48	.50	-.66	10.9	12.4	7.9	1.0	3.2	.46	.29	.15	.02	.03
6p	5.26	11.31	1.99	1.83	.40	.94	-.54	6.5	10.0	.6	3.4	2.1	.35	.30	.01	.08	.03
6r	5.26	6.14	.36	-.16	.38	1.89	-1.08	.2	.1	.5	13.8	8.5	.02	.00	.02	.58	.19
6t	5.26	6.93	.96	-.44	-1.72	-1.55	-.09	1.5	.6	10.7	9.3	.1	.13	.03	.43	.35	.00
6y	5.26	3.11	.26	-.44	.85	-.75	-.14	.1	.6	2.6	2.2	.1	.02	.06	.23	.18	.01

114



# ANNEXE J-6

## Matrice des corrélations des 30 variables avec le prétest et représentation de ces variables dans le plan de l'ACP sur les variables du prétest.

MATRICE DES CORRELATIONS ENTRE LES VARIABLES DU PRETEST  
ET CELLES RELATIVES AVEC LES THEMES.

note	.28	.18	.32	.26	.20	.20	.57	.47	.56	.26	.28	.05
EQ1	.49	.35	.30	.23	.49	.19	.24	.36	.40	.25	.15	.57
EQ3	.25	.09	.12	.00	.19	.24	.56	.59	.26	.05	.13	.05
EQ3v	-.10	.05	-.44	.31	.33	.09	.01	.34	.46	.34	.03	-.13
Q	.17	.32	.08	.25	.03	.32	.25	.45	.45	.23	.05	-.20
Qvid	-.14	.52	-.20	-.23	.37	-.29	-.25	.32	.12	-.05	.45	-.08
AS	.29	.15	.28	.12	.04	.05	.57	.29	.29	.09	.25	-.08
B=0	.34	.44	.39	.46	.48	.38	.45	.35	.35	.11	.45	-.03
B1/2	-.17	.66	.15	.36	.24	.44	.35	.21	.27	.14	.56	-.14
B>2	-.23	.27	-.35	-.16	.34	.09	.23	.34	.27	.34	.33	-.22
	S1	S2	DET	CAL	EXT	INT	EL1	EL2	EL3	MAL	GEN	RGN

note	.53	.47	.58	.41	.03	.49	.49	.38	.16	.16	.08
EQ1	.43	.57	.25	.41	.17	.20	.50	.33	.33	.15	.24
EQ3	.14	.29	.24	.42	.23	.20	.38	.03	.06	.15	.24
EQ3v	-.26	-.06	-.11	.37	.28	.24	.38	.17	-.08	.07	.14
Q	.34	.47	.67	.43	.37	.45	.45	.17	.13	.17	.24
Qvid	.45	.47	.67	.43	.37	.45	.45	.17	.13	.17	.24
AS	.48	.25	.41	.20	.26	.15	.54	.03	.17	.03	.24
B=0	.57	.39	.60	.47	.14	.50	.24	.15	.08	.15	.24
B1/2	.39	.39	.60	.47	.14	.50	.24	.15	.08	.15	.24
B>2	.39	.31	-.02	.23	.13	.09	.49	.17	.08	.15	.24
	ALG	SYNT	LIB	SOM	RG	TRI	VP	CTR	REC	AFF	CMAT

Note	.49	-.08	.46	.25	.57	-.18	-.07
EQ1	.49	-.04	.07	.59	.14	.14	-.14
EQ3	.14	.06	.42	.18	.43	.37	-.17
EQ3v	-.25	.33	.27	.19	.12	.30	.30
Q	.29	.18	.23	.39	.46	.52	.07
Qvid	.46	-.20	.29	.13	.46	.56	.34
AS	.12	-.29	.40	-.04	.26	.12	.16
B=0	.59	.03	.40	.19	.42	.37	.12
B1/2	.48	.32	.39	.19	.46	.44	.16
B>2	-.17	.35	-.09	.59	.23	.10	.34
	sys1	sys2	el1	el2	AL1	AL2	AL3

M7

M8

=====

10 VARIABLES ACTIVES

=====

26 . note	{ CONTINUE }
27 . EQ1	{ CONTINUE }
28 . EQ3	{ CONTINUE }
29 . EQ3v	{ CONTINUE }
30 . Q	{ CONTINUE }
31 . Qvid	{ CONTINUE }
32 . AS	{ CONTINUE }
33 . B=0	{ CONTINUE }
34 . B1/2	{ CONTINUE }
35 . B>2	{ CONTINUE }

=====

34 VARIABLES ILLUSTRATIVES

=====

1 . R	{ CONTINUE }
2 . Pass	{ CONTINUE }
3 . S1	{ CONTINUE }
4 . S2	{ CONTINUE }
5 . DET	{ CONTINUE }
6 . CAL	{ CONTINUE }
7 . EXT	{ CONTINUE }
8 . INI	{ CONTINUE }
9 . EL1	{ CONTINUE }
10 . EL2	{ CONTINUE }
11 . EL3	{ CONTINUE }
12 . MAL	{ CONTINUE }
13 . GEN	{ CONTINUE }
14 . RGN	{ CONTINUE }
15 . ALG	{ CONTINUE }
16 . SYNT	{ CONTINUE }
17 . LIB	{ CONTINUE }
18 . SOM	{ CONTINUE }
19 . RG	{ CONTINUE }
20 . TRI	{ CONTINUE }
21 . VP	{ CONTINUE }
22 . CTR	{ CONTINUE }
23 . REC	{ CONTINUE }
24 . AFF	{ CONTINUE }
25 . CMAI	{ CONTINUE }
36 . sys1	{ CONTINUE }
37 . sys2	{ CONTINUE }
38 . ele1	{ CONTINUE }
39 . ele2	{ CONTINUE }
40 . AL1	{ CONTINUE }
41 . AL2	{ CONTINUE }
42 . AL3	{ CONTINUE }

10

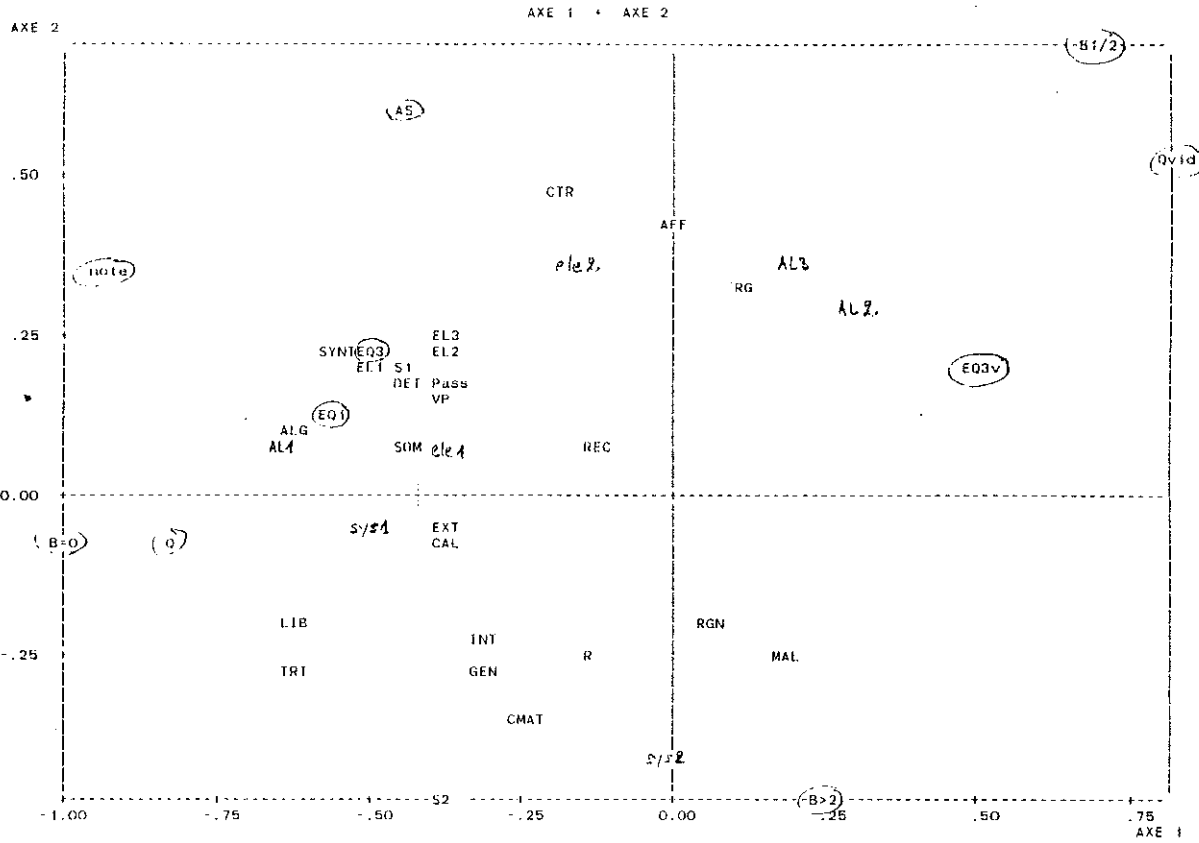
=====

COORDONNEES DES VARIABLES SUR LES AXES 1 A 5

=====

VARIABLES	COORDONNEES					CORRELATIONS VARIABLE-FACTEUR					ANCIENS AXES UNITAIRES						
	IDEN -	LIBELLE COURT	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
VARIABLES ACTIVES																	
note - note			-.91	.34	-.07	.11	.03	-.91	.34	-.07	.11	.03	-.42	.24	-.06	.11	.04
EQ1 - EQ1			-.56	.13	.57	-.26	-.42	-.56	.13	.57	-.26	-.42	-.26	.09	.54	-.27	-.50
EQ3 - EQ3			-.47	.21	-.72	.19	-.22	-.47	.21	-.72	.19	-.22	-.22	.15	-.67	.19	-.27
EQ3v - EQ3v			-.49	.20	.31	-.68	-.38	-.49	.20	.31	-.68	-.38	-.23	.14	.29	.71	-.46
Q - Q			-.79	-.07	-.29	-.09	-.28	-.79	-.07	-.29	-.09	-.28	-.37	-.05	-.27	.10	-.34
Qvid - Qvid			-.81	.52	-.10	-.02	.17	-.81	.52	-.10	-.02	.17	-.38	.37	-.10	-.02	-.20
AS - AS			-.42	.60	.21	.43	.46	-.42	.60	.21	.43	.46	-.20	.43	.20	.44	.55
B=0 - B=0			-.96	-.07	.17	.00	.01	-.96	-.07	.17	.00	.01	-.45	-.05	.16	.00	.01
B1/2 - B1/2			-.67	.68	-.14	-.24	-.03	-.67	.68	-.14	-.24	-.03	.31	.48	-.13	-.25	-.04
B>2 - B>2			.43	-.81	-.06	.31	.03	.43	-.81	-.06	.31	.03	.20	-.58	-.06	.32	.03
VARIABLES ILLUSTRATIVES																	
R - R			-.12	-.24	.36	.18	.13	-.12	-.24	.36	.18	.13					
Pass - Pass			-.37	.18	.09	.46	.05	-.37	.18	.09	.46	.05					
S1 - S1			-.35	.17	.15	-.01	-.15	-.35	.17	.15	-.01	-.15					
S2 - S2			-.38	.48	.19	.21	-.33	-.38	.48	.19	.21	-.33					
DET - DET			-.36	.15	.08	-.28	.23	-.36	.15	.08	-.28	.23					
CAL - CAL			-.37	-.08	.12	-.14	.10	-.37	-.08	.12	-.14	.10					
EXT - EXT			-.34	-.04	.40	-.47	.02	-.34	-.04	.40	-.47	.02					
INI - INI			-.31	-.22	-.01	.24	-.30	-.31	-.22	-.01	.24	-.30					
EL1 - EL1			-.49	.19	-.04	.36	-.00	-.49	.19	-.04	.36	-.00					
EL2 - EL2			-.38	.23	.16	.33	-.45	-.38	.23	.16	.33	-.45					
EL3 - EL3			-.36	.25	-.09	.42	-.24	-.36	.25	-.09	.42	-.24					
MAL - MAL			.18	-.24	-.02	.38	.00	.18	-.24	-.02	.38	.00					
GEN - GEN			-.28	-.26	.04	.60	.48	-.28	-.26	.04	.60	.48					
RGN - RGN			.09	.19	-.20	.17	.59	.09	.19	-.20	.17	.59					
ALG - ALG			-.59	.10	.22	.04	.17	-.59	.10	.22	.04	.17					
SYNT - SYNT			-.48	.19	.11	.01	-.35	-.48	.19	.11	.01	-.35					
LIB - LIB			-.64	-.19	.05	.33	.03	-.64	-.19	.05	.33	.03					
SOM - SOM			-.45	.08	-.07	.29	-.27	-.45	.08	-.07	.29	-.27					
RG - RG			.15	.31	.34	.11	.05	.15	.31	.34	.11	.05					
TRI - TRI			-.58	-.27	-.07	.41	-.10	-.58	-.27	-.07	.41	-.10					
VP - VP			-.38	.14	-.31	.35	-.09	-.38	.14	-.31	.35	-.09					
CTR - CTR			-.20	.48	.13	.37	.13	-.20	.48	.13	.37	.13					
REC - REC			-.13	.09	.20	-.08	.04	-.13	.09	.20	-.08	.04					
AFF - AFF			-.01	.42	-.49	-.15	-.25	-.01	.42	-.49	-.15	-.25					
CMAI - CMAI			-.26	-.33	.03	.25	-.40	-.26	-.33	.03	.25	-.40					
sys1 - sys1			-.51	-.12	.21	-.09	-.10	-.51	-.12	.21	-.09	-.10					
sys2 - sys2			-.01	-.39	-.02	.36	-.37	-.01	-.39	-.02	.36	-.37					
ele1 - ele1			-.40	.08	-.02	.60	-.04	-.40	.08	-.02	.60	-.04					
ele2 - ele2			-.21	.39	.15	-.17	-.73	-.21	.39	.15	-.17	-.73					
AL1 - AL1			-.62	.11	.00	.47	-.07	-.62	.11	.00	.47	-.07					
AL2 - AL2			.32	.30	.35	-.19	.14	.32	.30	.35	-.19	.14					
AL3 - AL3			.19	.38	.10	.09	-.01	.19	.38	.10	.09	-.01					

120



(Point éloigné : B>2 abs. 0.431 ord. -0.811  
a été ramené sur le bord du graphique)

194

198

ANNEXE J-7  
Une proposition de devoir

E désigne l'ensemble des tableaux carrés  $3 \times 3$  de réels.

On admettra que les opérations suivantes définissent sur E une structure d'espace vectoriel réel.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline a' & b' & c' \\ \hline d' & e' & f' \\ \hline g' & h' & i' \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a+a' & b+b' & c+c' \\ \hline d+d' & e+e' & f+f' \\ \hline g+g' & h+h' & i+i' \\ \hline \end{array}$$

et  $\lambda \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda \cdot a & \lambda \cdot b & \lambda \cdot c \\ \hline \lambda \cdot d & \lambda \cdot e & \lambda \cdot f \\ \hline \lambda \cdot g & \lambda \cdot h & \lambda \cdot i \\ \hline \end{array}$

F désigne l'ensemble des carrés magiques  $3 \times 3$ , c'est-à-dire des tableaux de E dont les sommes des éléments de chaque colonne, chaque ligne et chaque diagonale sont égales.

C désignera un élément de F et S(C) la somme commune de ces lignes colonnes ou diagonales.

- 1-a 

0,5	-0,5	?
5,5	?	?
?	?	?

 Peut-on compléter le carré ci-contre de façon à obtenir un carré magique C de somme S(C)=4,5 ?

- 1-b Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.  
 2- Pour chaque réel s,  $F_s$  désigne l'ensemble des carrés magiques de somme s.  $F_s = \{ C \in F / S(C) = s \}$ .

2-a Montrer que pour tout s, l'intersection de  $F_s$  et de l'ensemble des carrés ayant le même nombre dans chacune de leurs cases, est réduite à un seul élément que l'on notera  $C_s$ .

123

2-b Pour quelle(s) valeur(s) de s,  $F_s$  est-il un sous-espace vectoriel de  $F$  ?

2-c Conjecture (\*): pour tout s,  $F_s$  est une variété linéaire affine(\*\*).

- 3-a 

a	b	?
c	?	?
?	?	?

 A quelle condition sur a, b et c, peut-on remplir les cases vides du carré ci-contre de façon à obtenir un élément de  $F_0$  ?

- 3-b 

-x-y	2x	y-x
2y	0	-2y
x-y	-2x	x+y

 En déduire que tous les éléments de  $F_0$  s'écrivent comme le carré ci-contre.

3-c Conjecture (\*):  $F_0$  est un espace vectoriel de dimension 2.

4-a Donner la dimension et une base de  $F$ .

4-b Donner un carré magique utilisant tous les chiffres de 1 à 9.

(\*) Conjecture signifie que l'étudiant doit dire si la proposition est exacte ou non, en justifiant sa réponse dans le premier cas par une démonstration, dans le second par un contre-exemple.

(\*\*) Si la notion de variété linéaire affine n'a pas été définie en cours on peut demander de montrer que  $F_s = \{ C_s \} + F_0$ .

124

Editeur : IREM  
Directeur Responsable de la publication : Régine DOUADY  
Dépôt légal : Avril 1990  
ISBN : 2-86612-099-X  
IREM Université Paris VII  
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018  
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05