



**HAL**  
open science

# OPÉRATEURS QUANTIQUES, APPLICATION À LA CONJECTURE DE HILBERT-PÓLYA.

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

Jean Louis Jonot. OPÉRATEURS QUANTIQUES, APPLICATION À LA CONJECTURE DE HILBERT-PÓLYA.. 2019. hal-02133808v2

**HAL Id: hal-02133808**

**<https://hal.science/hal-02133808v2>**

Preprint submitted on 10 Jul 2019 (v2), last revised 11 Sep 2023 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# OPÉRATEURS QUANTIQUES, APPLICATION À LA CONJECTURE DE HILBERT-PÓLYA.

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Cet article présente une description de certains opérateurs quantiques en relation avec la conjecture de Hilbert-Pólya. L'étude porte sur des opérateurs quantiques dont le spectre peut être décrit par les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. Le travail proposé par Bender, Brody et Muller donne un exemple d'opérateur dont le spectre contient  $i(2\rho - 1)$  pour tous les zéros non triviaux de la fonction zêta et dont les fonctions propres sont les fonctions  $\zeta_\rho$  définies par

$$\zeta_\rho(x) = \zeta(\rho, x), x > 0,$$

où  $\zeta$  est la fonction zêta de Hurwitz.

## 1. INTRODUCTION

Les opérateurs quantiques, sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbb{R}$ , sont des opérateurs  $\widehat{L}$  de  $L^2(I)$ , de domaine dense dans  $L^2(I)$ , qui peuvent être représentés sous la forme

$$\widehat{L} = \sum_{\lambda} \alpha^\lambda \widehat{L}_\lambda, \alpha^\lambda \in \mathbb{C}$$

où  $\sum_{\lambda}$  est une somme finie ou infinie avec

$$\widehat{L}_\lambda = \prod_j \widehat{L}_{\lambda,j}, \text{ avec } \widehat{L}_{\lambda,j} = \widehat{x}, \widehat{L}_{\lambda,j} = \widehat{p}, \widehat{L}_{\lambda,j} = \widehat{\int}_a \text{ ou } \widehat{L}_{\lambda,j} = \widehat{\delta}_a,$$

$\prod_j$  est un produit fini,  $\widehat{x}$  et  $\widehat{p}$  sont les opérateurs quantiques définis par, si  $\varphi$  est dérivable

$$\widehat{x}(\varphi)(x) = x\varphi(x) \text{ et } \widehat{p}(\varphi)(x) = -i\partial\varphi(x) = -i\varphi'(x),$$

l'opérateur  $\widehat{\int}_a$  est l'opérateur de Volterra d'indice  $a \in \text{Adh}(I)$

$$\left( \widehat{\int}_a \varphi \right)(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

et si  $a \in I$ ,  $\widehat{\delta}_a$  est l'opérateur de Dirac

$$\widehat{\delta}_a(\varphi) = \varphi(a),$$

qui à chaque fonction  $\varphi \in L^2(I)$  associe la fonction constante  $\varphi(a)$ .

---

*Date:* 19/05/2019.

*1991 Mathematics Subject Classification.* 47L30,47L90,11A67.

*Key words and phrases.* Opérateur quantique, fonction zêta de Riemann, fonction zêta de Hurwitz, hypothèse de Riemann, conjecture de Hilbert-Pólya, opérateur hermitien, fonction zêta de Hurwitz, opérateur symétrique, opérateur non borné, opérateur adjoint, opérateur essentiellement autoadjoint.

**Notation 1.** On note  $\mathbf{Q}(\widehat{x}, \widehat{p}, \widehat{J}_a, \widehat{\delta}_a)$ , l'algèbre des opérateurs quantiques et on pose

$$\widehat{J}_a^a = -\widehat{J}_a.$$

**Definition 1.** L'opérateur

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} = \widehat{x}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{x} = 2\widehat{x}\widehat{p} - i = -i(2\widehat{x}\widehat{\partial} + 1)$$

est l'opérateur de Berry-Keating [2].

**Lemma 1.** Sur leur domaine de définition, ces opérateurs vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned} [\widehat{x}, \widehat{p}] &= i \\ \widehat{J}_a \widehat{p} &= -i(1 - \widehat{\delta}_a) \text{ et } \widehat{p} \widehat{J}_a = i, \\ \left\{ \widehat{J}_a, \widehat{p} \right\} &= i\widehat{\delta}_a, \quad \left[ \widehat{J}_a, \widehat{p} \right] = -i(2 - \widehat{\delta}_a) \\ \widehat{J}_a \widehat{x} &= \widehat{x} \widehat{J}_a - \left( \widehat{J}_a \right)^2, \\ \widehat{J}_a (1 + i\widehat{x}\widehat{p}) &= (1 - \widehat{\delta}_a) \widehat{x}, \quad \widehat{\delta}_a \widehat{J}_a = 0, \quad \widehat{J}_a \widehat{\delta}_a = [\widehat{x}, \widehat{\delta}_a] \end{aligned}$$

et

$$\left[ \widehat{x}, \widehat{J}_a \right] = \left( \widehat{J}_a \right)^2 \text{ et } \left[ \widehat{x}, \widehat{\delta}_a \right] = \widehat{J}_a \widehat{\delta}_a.$$

## 2. L'OPÉRATEUR $\widehat{H}_a$

On définit sur leur domaine respectif les opérateurs

$$\widehat{\Delta}_\alpha = 1 - e^{i\alpha\widehat{p}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \partial^n \quad (2.1)$$

et

$$\widehat{\square}_\alpha = \frac{i\alpha\widehat{p}}{e^{i\alpha\widehat{p}} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n \alpha^n}{n!} \partial^n, \quad (2.2)$$

où les  $B_n$  sont les nombres de Bernoulli et  $\alpha \in [-1, 1]$

**Definition 2.** L'opérateur quantique  $\widehat{H}_a$  est défini par

$$\widehat{H}_a = \widehat{J}_a \widehat{\square}_1 \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\Delta}_1.$$

Pour l'étude de cet opérateur on a besoin des résultats suivants,

**Lemma 2.** Pour  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  on a

$$\sum_{1 \leq 2\tau \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau}{k}\right) = 0 \text{ et } \sum_{1 \leq 2\tau+1 \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau+1}{k}\right) = 0.$$

*Proof.* On a, si  $z \neq 0, 1$  et  $h, k$  des entiers tels que  $1 \leq h \leq k$ ,

$$\zeta\left(1 - z, \frac{h}{k}\right) = \frac{2\Gamma(z)}{(2\pi k)^z} \sum_{\tau=1}^k \cos\left(\frac{\pi z}{2} - \frac{2\pi\tau h}{k}\right) \zeta\left(z, \frac{\tau}{k}\right),$$

formule 25.11.16 dans [9]. Si  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$  alors  $1 - \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$  et

$$\zeta(1 - \rho, 1) = \zeta\left(1 - \rho, \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$\cos\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) \neq 0$ , donc

$$\sum_{\tau=1}^k \zeta\left(\rho, \frac{\tau}{k}\right) = 0 \text{ et } \sum_{1 \leq 2\tau \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau}{k}\right) - \sum_{1 \leq 2\tau+1 \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau+1}{k}\right) = 0.$$

On pose

$$A = \sum_{1 \leq 2\tau \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau}{k}\right) \text{ et } B = \sum_{1 \leq 2\tau+1 \leq k} \zeta\left(\rho, \frac{2\tau+1}{k}\right)$$

alors

$$A + B = 0 \text{ et } A - B = 0$$

ainsi,

$$A = B = 0.$$

□

**Corollary 1.**  $\forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$

$$\zeta\left(\rho, \frac{1}{3}\right) = \zeta\left(\rho, \frac{2}{3}\right) = 0. \quad (2.3)$$

**Lemma 3.**  $\forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$

$$\widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 x^{-\rho} = \zeta(\rho, x).$$

*Proof.* Calculons  $\widehat{\square}_1 x^{-\rho}$ , on vérifie les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \widehat{\square}_1 x^{-\rho} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \partial^n x^{-\rho} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{\Gamma(-\rho-n+1)} x^{-(\rho+n)} \\ &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_{\gamma} x^{-(\rho+n)} t^{n+\rho-1} e^t dt \\ &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_{\gamma} \left(\frac{t}{x}\right)^{n+\rho-1} e^{x\frac{t}{x}} d\frac{t}{x} \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est un contour de Hankel qui entoure l'axe des réels négatifs et est orienté positivement. La transformation

$$t \rightarrow \frac{t}{x}$$

de  $\gamma$  donne un nouveau contour de Hankel, noté  $\delta$ , ayant les mêmes propriétés car  $x > 0$ . Pour ce contour

$$\begin{aligned}\widehat{\square}_1 x^{-\rho} &= \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \int_{\delta} t^{n+\rho-1} e^{xt} dt = \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\delta} t^{\rho-1} e^{xt} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) dt \\ &= -\frac{\Gamma(1-\rho)}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{t^{\rho} e^{xt}}{1-e^t} dt = -\rho \zeta(\rho+1, x), \\ \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 x^{-\rho} &= \int_{\frac{1}{3}}^x -\rho \zeta(\rho+1, t) dt = \zeta(\rho, x) \text{ par 2.3.}\end{aligned}$$

□

**Notation 2.**  $\mathcal{Z}(\zeta)$  est l'ensemble des zéros non triviaux de la fonction de Riemann  $\zeta$ .

**Theorem 1.** L'opérateur  $\widehat{H}_a$  a pour valeur propre  $i(2\rho-1)$  associée à la fonction propre

$$\zeta(\rho, x), \quad x > 0$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$  et  $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$  et 1.

*Proof.* On développe le calcul pour  $a = \frac{1}{3}$ . Calculons  $\widehat{H}_{\frac{1}{3}} \zeta(\rho, x)$ , en utilisant la formule de Taylor et la représentation intégrale de  $\zeta$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{\frac{1}{3}} \zeta(\rho, x) &= \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\Delta}_1 \zeta(\rho, x) \\ \widehat{\Delta}_1 \zeta(\rho, x) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \partial_x^n \zeta(\rho, x) \\ &= \zeta(\rho, x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{\Gamma(-\rho-n+1)} \zeta(\rho+n, x) \\ &= \zeta(\rho, x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho+n-1} e^{xt}}{1-e^t} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho-1} e^{xt}}{1-e^t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \frac{\Gamma(-\rho+1)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{\rho-1} e^{(x+1)t}}{e^t - 1} dt \\ &= \zeta(\rho, x) - \zeta(\rho+1) = x^{-\rho}, \\ (\widehat{x}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{x}) \widehat{\Delta}_1 \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 x^{-\rho} &= i(2\rho-1) x^{-\rho} \\ \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 (\widehat{x}\widehat{p} + \widehat{p}\widehat{x}) \widehat{\Delta}_1 \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 x^{-\rho} &= i(2\rho-1) \widehat{\int}_{\frac{1}{3}} \widehat{\square}_1 x^{-\rho}\end{aligned}$$

donc,

$$\widehat{H}_{\frac{1}{3}} \zeta(\rho, x) = i(2\rho-1) \zeta(\rho, x), \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta),$$

et

$$\widehat{H}_a \zeta(\rho, x) = i(2\rho - 1) \zeta(\rho, x), \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \text{ et } a = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \text{ et } 1. \quad (2.4)$$

□

**Remark 1.** Dans le cas général, pour l'opérateur  $\widehat{H}_a$ , l'équation 2.3 se transforme en

$$\widehat{\int}_a \widehat{\square}_1 x^{-\rho} = \int_a^x -\rho \zeta(\rho + 1, t) dt = \zeta(\rho, x) - \zeta(\rho, a)$$

et

$$\widehat{\Delta}_1(\zeta(\rho, x) - \zeta(\rho, a)) = \widehat{\Delta}_1 \zeta(\rho, x) = x^{-\rho}$$

en conséquence

$$\widehat{H}_a(\zeta(\rho, x) - \zeta(\rho, a)) = i(2\rho - 1)(\zeta(\rho, x) - \zeta(\rho, a)),$$

si on pose

$$\zeta_\rho(x) = \zeta(\rho, x),$$

les fonctions

$$(1 - \widehat{\delta}_a) \zeta_\rho$$

sont des fonctions propres de l'opérateur  $\widehat{H}_a$  associée à la valeur propre  $i(2\rho - 1)$ .

### 3. L'OPÉRATEUR $\widehat{H}^b$

L'opérateur  $\widehat{\Delta}_{-1}$  et  $\widehat{\square}_{-1}$  sont définis par

$$\widehat{\Delta}_{-1} = 1 - e^{-i\widehat{p}} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial^n$$

et

$$\widehat{\square}_{-1} = \frac{-i\widehat{p}}{e^{-i\widehat{p}} - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \partial^n.$$

**Definition 3.** L'opérateur  $\widehat{H}^b$  est défini par

$$\widehat{H}^b = \widehat{\square}_{-1} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\Delta}_{-1} \widehat{\int}^b.$$

**Lemma 4.** Si  $\varphi$  est développable en série entière en chaque point  $x > 0$ , alors pour  $x > \tau$

$$\widehat{\Delta}_{-\tau} \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x - \tau), \quad x > \tau.$$

*Proof.* Pour  $x > \tau$

$$\widehat{\Delta}_{-\tau} \varphi(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) = \varphi(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} (x - \tau - x)^n,$$

et

$$\widehat{\Delta}_{-\tau} \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x - \tau).$$

□

**Corollary 2.** Si  $x > 1$ ,

$$\widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} = x^{-\rho} - (x - 1)^{-\rho}. \quad (3.1)$$

*Proof.* Il suffit de vérifier que pour  $x_0 > 1$ , le rayon de convergence  $R$  de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \rho(\rho+1) \cdots (\rho+n) x_0^{-z-n-1}}{n!} (x-x_0)^n$$

est strictement supérieur à 1. Le calcul du rayon de convergence donne

$$R = x_0 > 1$$

et

$$\widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} = x^{-\rho} - (x-1)^{-\rho}.$$

□

**Theorem 2.** Pour  $x > 1$ , la fonction

$$x^{-\rho} - (x-1)^{-\rho}$$

est une fonction propre de l'opérateur  $\widehat{H}^b$  pour  $b > 1$ , associée à la valeur propre  $i(2\rho-1)$ .

*Proof.* Si  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned} \widehat{H}^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= \widehat{\Delta}_{-1} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\square}_{-1} \int^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} \\ \int^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= \int^b i\widehat{p} \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}, \quad i\widehat{p} \widehat{\Delta}_{-1} = \widehat{\Delta}_{-1} i\widehat{p} \\ &= -\widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} + \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ \widehat{\square}_{-1} \int^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= -\widehat{\square}_{-1} \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} + \widehat{\square}_{-1} \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ &= -\widehat{\Delta}_{-1} \widehat{\square}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} + \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1}, \quad \widehat{\Delta}_{-1} \widehat{\square}_{-1} = \widehat{\square}_{-1} \widehat{\Delta}_{-1} \end{aligned}$$

en utilisant le calcul développé dans [1],

$$\begin{aligned} \widehat{\square}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} &= -\zeta(\rho, x+1) \\ \widehat{\square}_{-1} \int^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= \widehat{\Delta}_{-1} \zeta(\rho, x+1) + \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ &= -x^{-\rho} + \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\square}_{-1} \int^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= -\{\widehat{x}, \widehat{p}\} x^{-\rho} + \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ &= i(2\rho-1) x^{-\rho} + i\widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} \\ \widehat{H}^b \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} &= i(2\rho-1) \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} - i\widehat{\Delta}_{-1} \widehat{\delta}_b \widehat{\Delta}_{-1} \frac{x^{-\rho+1}}{-\rho+1} = i(2\rho-1) \widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

la fonction

$$\widehat{\Delta}_{-1} x^{-\rho} = x^{-\rho} - (x-1)^{-\rho}$$

est une fonction propre de  $\widehat{H}^b$ .  $\square$

**Remark 2.** Contrairement à l'opérateur  $\widehat{H}_a$  dont les fonctions propres associées à  $i(2\rho - 1)$  dépendent du paramètre  $a$ , la fonction propre associée à cette valeur propre est indépendante du choix du paramètre  $b$ .

#### 4. L'ESPACE DE SOBOLEV $H^1(]0, 1[)$

Si  $\widehat{\partial}$  est l'opérateur de dérivation faible 5.1, l'espace de Sobolev

$$H^1(]0, 1[) = \left\{ \varphi \in L^2(]0, 1[) \cap \text{dom}(\widehat{\partial}) : \|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|\widehat{\partial}\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2 < +\infty \right\}$$

est un espace de Hilbert muni du produit scalaire hermitien

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^1(]0, 1[)} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(]0, 1[)} + \langle \widehat{\partial}\varphi, \widehat{\partial}\psi \rangle_{L^2(]0, 1[)},$$

cet espace s'identifie à

$$H^1(]0, 1[) = \left\{ \varphi \in L^2(]0, 1[) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\varphi)|^2 (1 + n^2) < +\infty \right\}$$

où  $\{c_n(\varphi)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  sont les coefficients de Fourier de  $\varphi$ . L'opérateur  $\widehat{p} = -i\widehat{\partial}$  restreint à  $H^1(]0, 1[)$  est continu comme opérateur de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ . L'opérateur de Berry-Keating  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$  est un opérateur continu de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ ,

$$\begin{aligned} \|\{\widehat{x}, \widehat{p}\}\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2 &= \|-i(2x\varphi' + \varphi)\|_{L^2(]0, 1[)}^2 \leq \left(2\|\varphi'\|_{L^2(]0, 1[)} + \|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}\right)^2 \\ &= 4\|\varphi'\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + \|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + 4\|\varphi'\|_{L^2(]0, 1[)}\|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)} \\ &\leq 8\|\varphi'\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + 5\|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2 \leq 8\|\varphi\|_{H^1(]0, 1[)}^2 \end{aligned}$$

et

$$\|\{\widehat{x}, \widehat{p}\}\varphi\|_{L^2(]0, 1[)} \leq 2\sqrt{2}\|\varphi\|_{H^1(]0, 1[)}, \forall \varphi \in H^1(]0, 1[).$$

L'opérateur de Volterra d'indice 0,  $\widehat{f} = \widehat{f}_0$  défini par

$$\widehat{f}\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \varphi \in L^2(]0, 1[),$$

est un opérateur continu comme opérateur de  $L^2(]0, 1[)$  à valeurs dans  $H^1(]0, 1[)$ .

En utilisant l'inégalité de Schwarz

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{f}\varphi \right\|_{H^1(]0, 1[)}^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^x \varphi(t) dt \right|^2 dx + \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx + \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx \\ &= \frac{3}{2} \|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}^2, \end{aligned}$$

et

$$\left\| \widehat{f}\varphi \right\|_{H^1(]0, 1[)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{L^2(]0, 1[)}.$$



**Proposition 1.** *L'opérateur*

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\int} : H^1(]0, 1[) \rightarrow H^1(]0, 1[)$$

est un opérateur borné de  $H^1(]0, 1[)$ .

On généralise le concept d'espace de Sobolev associé à un opérateur  $\widehat{L}$  non nécessairement borné, à domaine dense, d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . L'espace

$$\left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \widehat{L}^k \varphi \in \mathcal{H}, \forall k \leq n \right\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle \varphi, \psi \rangle_n = \sum_{k=0}^n \langle \widehat{L}^k \varphi, \widehat{L}^k \psi \rangle,$$

où

$$\widehat{L}^0 = 1 \text{ et } \widehat{L}^k = \widehat{L} \circ \widehat{L} \circ \dots \circ \widehat{L},$$

$k$  fois

est un espace préhilbertien. Le complété est noté  $\mathcal{H}^n(\widehat{L})$ . Plus généralement, soit  $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels strictement positifs, les espaces de Sobolev associés à l'opérateur  $\widehat{L}$  et à la suite  $a$  sont les complétés des espaces

$$\mathcal{H}^n(\widehat{L}, a) = \left\{ \varphi \in \text{dom } \widehat{L} : \widehat{L}^k \varphi \in \text{dom } \widehat{L}, \forall k \leq n \right\}$$

muni du produit scalaire préhilbertien

$$\langle \varphi, \psi \rangle_n = \sum_{k=0}^n a_k \langle \widehat{L}^k \varphi, \widehat{L}^k \psi \rangle$$

et on note  $\mathcal{H}^\infty(\widehat{L}, a)$ , le complété de l'espace préhilbertien

$$\left\{ \varphi \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \widehat{L}^k(\mathcal{H}) : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \left\| \widehat{L}^k \varphi \right\|^2 < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\infty = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \langle \widehat{L}^k \varphi, \widehat{L}^k \psi \rangle.$$

**Proposition 2.** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{H}^\infty(\widehat{L}, \mathbf{1})$ ,*

$$\left\| \widehat{L} \varphi \right\|_\infty^2 + \|\varphi\|^2 = \|\varphi\|_\infty^2,$$

en particulier,  $\widehat{L}$  est un opérateur borné de  $\mathcal{H}^\infty(\widehat{L}, \mathbf{1})$ , où  $\mathbf{1}$  est la suite constante égale à 1.

## 5. ESPACE DE HILBERT ASSOCIÉ AUX OPÉRATEURS QUANTIQUES

Soit  $a$  et  $b$  tels que

$$0 \leq a < b,$$

et  $L^2(]a, b[)$ , l'espace de Hilbert des fonctions  $\varphi$  sur  $]a, b[$  telles que

$$\int_a^b |\varphi|^2 < +\infty.$$

**Definition 4.** Soit  $\widehat{L}$  un opérateur de  $L^2(]a, b[)$ , à domaine dense. Un sous-espace  $\mathfrak{D}$  de  $\text{dom } \widehat{L}$  est un domaine de symétrisation si  $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$  est un opérateur symétrique.

Un sous-espace  $\mathfrak{D}$  de  $\text{dom } \widehat{L}$  est un domaine de densité si  $(i\widehat{L} \pm 1)|_{\mathfrak{D}}$  est dense dans  $L^2(]a, b[)$ .

**Remark 3.** Si  $\mathfrak{D}$  est un domaine de symétrisation et de densité alors  $\widehat{L}|_{\mathfrak{D}}$  est un opérateur essentiellement autoadjoint.

La dérivation faible, ou dérivation au sens des distributions, de  $\varphi$  est définie par l'unique fonction  $\widehat{\partial}\varphi \in L^2(]a, b[)$ , si elle existe, qui vérifie

$$\int_a^b \varphi \phi' = - \int_a^b \phi \widehat{\partial}\varphi, \forall \phi \in \mathcal{D}(]a, b[), \quad (5.1)$$

l'opérateur quantique

$$\widehat{p} = -i\widehat{\partial}$$

et l'opérateur de Berry-Keating  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$  sont des opérateurs à domaine dense car  $\mathcal{D}(]a, b[)$  est contenu dans chaque domaine de  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ . Si on pose

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^0(]a, b[) &= \left\{ \varphi \in \text{dom } \widehat{p} : \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) \right\} \\ \mathfrak{D}_0(]a, b[) &= \left\{ \varphi \in \text{dom } \{\widehat{x}, \widehat{p}\} : \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \right\}, \end{aligned}$$

on a

$$\mathcal{D}(]a, b[) \subset \mathfrak{D}^0(]a, b[) \cap \mathfrak{D}_0(]a, b[).$$

**Lemma 5.** Si  $]a, b[$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , les domaines  $\mathfrak{D}^0(]a, b[)$  et  $\mathfrak{D}_0(]a, b[)$  sont des domaines de densité de , respectivement,  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ .

*Proof.* On vérifie que  $(\pm 1 + i\widehat{p})\mathfrak{D}^0(]a, b[)$  est dense dans  $L^2(]a, b[)$ , pour cela on montre que

$$\mathcal{D}(]a, b[) \subset (1 \pm i\widehat{p})\mathfrak{D}^0(]a, b[). \quad (5.2)$$

Soit  $\phi \in \mathcal{D}(]a, b[)$ , on cherche  $\varphi$  tel que

$$\begin{aligned} \varphi' + \epsilon\varphi &= \phi, \quad \epsilon = \pm 1 \\ \varphi(x) &= \left( \int_a^x e^{\epsilon t} \phi(t) dt + K \right) e^{-\epsilon x}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

on fixe la constante  $K$  pour que  $\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$ . Pour le choix de la constante

$$K = \frac{e^{-\epsilon b}}{e^{-\epsilon a} - e^{-\epsilon b}} \int_a^b e^{\epsilon t} \phi(t) dt.$$

La fonction  $\varphi \in \mathfrak{D}^0(]a, b[)$  et on a,

$$(\epsilon 1 + i\widehat{p})\varphi = \phi, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Pour vérifier que  $(\pm 1 + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) \mathfrak{D}_0 ]a, b[$  est dense dans  $L^2 ]a, b[$ , on doit déterminer les solutions de l'équation

$$\varphi' + \frac{1 + \epsilon}{2x} \varphi = \phi, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (5.4)$$

avec  $\phi \in \mathcal{D} ]a, b[$ ,

$$\varphi' = \phi \text{ si } \epsilon = -1 \text{ et } \varphi' + \frac{1}{x} \varphi = \phi \text{ si } \epsilon = +1.$$

Si  $\epsilon = -1$ ,

$$\varphi = \int_a^x \phi(t) dt + K,$$

on veut déterminer la constante  $K$  telle que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} \varphi(x), \quad (5.5)$$

on obtient

$$K = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \int_a^b \phi(t) dt$$

et si  $\epsilon = +1$ ,

$$\varphi = \frac{1}{x} \left( \int_a^x t \phi(t) dt + K \right)$$

la constante  $K$  qui vérifie l'équation 5.5 est donnée par

$$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}} - 1} \int_a^b t \phi(t) dt,$$

dans tous les cas, il existe  $\varphi \in \mathfrak{D}_0 ]a, b[$  telle que

$$(\pm 1 + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) \varphi = \phi$$

pour tout  $\phi \in \mathcal{D} ]a, b[$ . La densité de  $\mathcal{D} ]a, b[$  dans  $L^2 ]a, b[$  permet de conclure.  $\square$

**Lemma 6.** *Les domaines  $\mathfrak{D}^0 ]a, b[$  et  $\mathfrak{D}_0 ]a, b[$  sont des domaines de symétrisation de , respectivement,  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ .*

*Proof.* Le domaine  $\mathfrak{D}^0 ]a, b[$  est un domaine de symétrisation de  $\widehat{p}$ , par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{\widehat{p} \varphi} \psi &= i \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} \overline{\varphi(x)} \psi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} \overline{\varphi(x)} \psi(x) \right] + \int_a^b \overline{\varphi} \widehat{p} \psi \\ &= \int_a^b \overline{\varphi} \widehat{p} \psi, \quad \forall \varphi \text{ et } \forall \psi \in \mathfrak{D} ]a, b[ \end{aligned}$$

et  $\mathfrak{D}_0 ]a, b[$  est un domaine de symétrisation de  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi} \psi &= 2i \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} x \overline{\varphi(x)} \psi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} x \overline{\varphi(x)} \psi(x) \right] + \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi \\ &= \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi, \quad \forall \varphi \text{ et } \forall \psi \in \mathfrak{D}_0 ]a, b[. \end{aligned}$$

$\square$

**Theorem 3.** *Si  $]a, b[$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , les opérateurs  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$  restreints, respectivement, à  $\mathfrak{D}^0(]a, b[)$  et  $\mathfrak{D}_0(]a, b[)$  comme opérateurs de  $L^2(]a, b[)$ , sont des opérateurs essentiellement autoadjoints.*

**Remark 4.** *On peut consulter [4] pour une autre preuve de l'affirmation, "  $\widehat{p} |_{\mathfrak{D}^0(]a, b[)}$  est un opérateur essentiellement autoadjoint".*

On peut utiliser les résultats précédents aux fonctions  $\zeta_\rho \in L^2(]a, b[)$ . Pour  $a, b \in \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ , ces fonctions appartiennent à  $\mathfrak{D}^0(]a, b[)$  et  $\mathfrak{D}_0(]a, b[)$  si  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ . Ces domaines sont des domaines de symétrisation de, respectivement,  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ . On en déduit que pour tout  $\rho, \tau \in \mathcal{Z}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{p}\zeta_\rho, \zeta_\tau \rangle &= \langle \zeta_\rho, \widehat{p}\zeta_\tau \rangle & (5.6) \\ \langle \{\widehat{x}, \widehat{p}\}\zeta_\rho, \zeta_\tau \rangle &= \langle \zeta_\rho, \{\widehat{x}, \widehat{p}\}\zeta_\tau \rangle, \\ \widehat{p}\zeta_\rho &= i\rho\zeta_{\rho+1} \text{ et } \{\widehat{x}, \widehat{p}\}\zeta_\rho = 2ix\rho\zeta_{\rho+1} - i\zeta_\rho \\ -\overline{\rho}\langle \zeta_{\rho+1}, \zeta_\tau \rangle &= \tau\langle \zeta_\rho, \zeta_{\tau+1} \rangle \\ \langle \zeta_\rho, \zeta_\tau \rangle + \langle \zeta_\tau, \zeta_\rho \rangle &= 2\overline{\rho}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\tau \rangle + 2\overline{\tau}\langle x\zeta_{\tau+1}, \zeta_\rho \rangle \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{Re}\langle \zeta_\rho, \zeta_\tau \rangle = \overline{\rho}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\tau \rangle + \overline{\tau}\langle x\zeta_{\tau+1}, \zeta_\rho \rangle.$$

En particulier, si  $\rho = \tau$

$$\|\zeta_\rho\|^2 = 2\overline{\rho}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle, \quad (5.7)$$

si  $\tau = \overline{\rho}$

$$\operatorname{Re}\langle \zeta_\rho, \zeta_{\overline{\rho}} \rangle = \overline{\rho}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_{\overline{\rho}} \rangle + \rho\langle x\zeta_{\overline{\rho}+1}, \zeta_\rho \rangle,$$

et si  $\tau = 1 - \rho$

$$\operatorname{Re}\langle \zeta_\rho, \zeta_{1-\rho} \rangle = \overline{\rho}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_{1-\rho} \rangle + (1 - \overline{\rho})\langle x\zeta_{-\rho}, \zeta_\rho \rangle.$$

De 5.7, si  $\rho = \mu + i\nu$

$$\begin{cases} \mu \operatorname{Re}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle + \nu \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle = \frac{1}{2}\|\zeta_\rho\|^2 \\ \mu \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle - \nu \operatorname{Re}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle = 0 \end{cases}$$

et

$$\mu |\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle|^2 = \frac{1}{2}\|\zeta_\rho\|^2 (\operatorname{Re}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle + \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle) \quad (5.8)$$

$$\nu |\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle|^2 = \frac{1}{2}\|\zeta_\rho\|^2 \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle. \quad (5.9)$$

**Theorem 4.** *L'hypothèse de Riemann est vérifiée si et seulement si*

$$|\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle|^2 = \|\zeta_\rho\|^2 (\operatorname{Re}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle + \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle), \quad \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$$

où  $\zeta$  est la fonction zêta de Hurwitz avec  $\zeta_\rho(x) = \zeta(\rho, x)$ .

**Remark 5.** *Les parties imaginaires sont de la forme*

$$\operatorname{Im}(\rho) = \frac{\|\zeta_\rho\|^2 \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle}{2 |\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle|^2}.$$

et

$$\operatorname{Re}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle + \operatorname{Im}\langle x\zeta_{\rho+1}, \zeta_\rho \rangle \geq 0.$$

Les calculs précédents peuvent être développés pour tous les espaces  $L^2(]a, b[)$  avec  $a < b$  et  $a, b$  appartenant à  $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ , en remarquant que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(]a, b[)} + \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(]b, c[)} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(]a, c[)}.$$

Si  $]a, b[$  est borné on peut construire des opérateurs dits "d'inversion" avec les relations développées précédemment, en posant

$$(\epsilon 1 + i\widehat{p})^{-1} \phi = e^{-\epsilon x} \int_a^x e^{\epsilon t} \phi(t) dt \text{ et } (\epsilon 1 + i\widehat{p})^{-1} = e^{-\epsilon x} \int_a^{\widehat{x}} e^{\epsilon x}^{-1},$$

$$(\epsilon + i\{\widehat{x}, \widehat{p}\})^{-1} \phi = x^{-\frac{1+\epsilon}{2}} \int_a^x t \phi(t),$$

$$(\epsilon + i\{\widehat{x}, \widehat{p}\})^{-1} = x^{-\frac{1+\epsilon}{2}} \int_a^{\widehat{x}} \widehat{x} = \begin{cases} \widehat{x}^{-1} \int_a^{\widehat{x}} \widehat{x} & \text{si } \epsilon = 1 \\ \int_a^{\widehat{x}} \widehat{x} & \text{si } \epsilon = -1 \end{cases}$$

qui sont des opérateurs à domaine dense dans  $L^2(]a, b[)$ . Sur les espaces

$$\mathfrak{D}_{\frac{i\alpha}{2}}(]a, b[) = \left\{ \varphi \in \text{dom} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} : \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \varphi(x) \right\}$$

on peut remarquer que l'opérateur  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$  est un opérateur symétrique car

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi} \psi &= 2i \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} \overline{x \varphi(x)} \psi(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} \overline{x \varphi(x)} \psi(x) \right] + \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi \\ &= 2i \left[ \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \psi(x) \overline{x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \varphi(x)} - \lim_{x \rightarrow a^+} \overline{x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \varphi(x)} x^{\frac{1+i\alpha}{2}} \psi(x) \right] + \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi \\ &= \int_a^b \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi, \forall \varphi \text{ et } \forall \psi \in \mathfrak{D}_{\frac{i\alpha}{2}}(]a, b[). \end{aligned}$$

De façon générale si on se fixe une mesure  $\mu$  sur  $]a, b[$ , absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue,

$$d\mu = \mu dx \text{ avec } \mu \in C^1(]a, b[),$$

à quelle condition sur  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $L^2(]a, b[, d\mu)$ , a-t-on

$$\int_a^b \overline{\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi(x)} \psi(x) \mu(x) dx = \int_a^b \overline{\varphi(x)} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi(x) \mu(x) dx? \quad (5.10)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation 5.10 soit vérifiée, sur le domaine de  $\widehat{x}\widehat{p}$ , est

$$\langle \widehat{x}\widehat{p}\varphi, \psi \rangle_\mu - \langle \varphi, \widehat{x}\widehat{p}\psi \rangle_\mu = -i \langle \varphi, \psi \rangle_\mu,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\mu$  est le produit scalaire dans  $L^2(]a, b[, d\mu)$ . On a, en simplifiant l'écriture

$$\begin{aligned} \int \overline{\{\widehat{x}, \widehat{p}\} \varphi} \psi \mu &= \int \overline{(2\widehat{x}\widehat{p} - i) \varphi} \psi \mu = \int \overline{\varphi} (2\widehat{x}\widehat{p} - i) \psi \mu = \int \overline{\varphi} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \psi \mu \\ &= 2 \int \overline{\widehat{x}\widehat{p}\varphi} \psi \mu + \int i \varphi \psi \mu = 2 \int \overline{\varphi} \widehat{x}\widehat{p}\psi \mu - i \int \overline{\varphi} \psi \mu \end{aligned}$$

l'équation est vérifiée si et seulement si

$$\int \psi \mu \overline{\widehat{x}\widehat{p}\varphi} - \int \mu \overline{\varphi} \widehat{x}\widehat{p}\psi = -i \int \mu \overline{\varphi} \psi.$$

Si  $\mu(a^+) = \mu(b^-) = 0$  alors l'équation 5.10 est vérifiée pour toutes fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  dans  $L^2(]a, b[, d\mu)$  avec l'hypothèse

$$\int_a^b x \overline{\varphi(x)} \psi(x) \mu'(x) dx = 0.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\int \overline{\{\hat{x}, \hat{p}\}} \varphi \psi \mu &= i \int (2x\bar{\varphi}' + \bar{\varphi}) \psi \mu = 2i \int x\bar{\varphi}' \psi \mu + i \int \bar{\varphi} \psi \mu \\
&= 2i \left( [x\varphi\psi\mu]_{a^+}^{b^-} - \int \bar{\varphi} (x\psi\mu)' \right) + i \int \bar{\varphi} \psi \mu \\
&= -2i \int \bar{\varphi} (x\psi\mu)' + i \int \bar{\varphi} \psi \mu \\
&= -2i \int \bar{\varphi} \psi' x \mu - 2i \int \bar{\varphi} \psi (x\mu)' + i \int \bar{\varphi} \psi \mu \\
&= -2i \int \bar{\varphi} \psi' x \mu - 2i \int \bar{\varphi} \psi x \mu' - 2i \int \bar{\varphi} \psi \mu + i \int \bar{\varphi} \psi \mu \\
\int \overline{\{\hat{x}, \hat{p}\}} \varphi \psi \mu &= \int \bar{\varphi} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \psi) \mu - 2i \int \bar{\varphi} \psi x \mu' = \int \bar{\varphi} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \psi) \mu \\
&\quad \text{si } \int \bar{\varphi} \psi x \mu' = 0.
\end{aligned}$$

**Definition 5.** Un domaine de stabilité d'ordre  $n \geq 1$  d'un opérateur  $\widehat{L}$  d'un espace de hilbert  $\mathcal{H}$ , est un sous-espace de  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$  pour lequel

$$\widehat{L}^k(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \text{ pour tout } k, 0 \leq k \leq n,$$

on dit que l'opérateur  $\widehat{L}$  est stable à l'ordre  $n$  sur  $\mathcal{K}$ .

**Definition 6.** L'opérateur  $\widehat{L}$  est stable à l'infini sur  $\mathcal{K}$  si

$$\widehat{L}^k(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

**Definition 7.** On pose

$$\mathfrak{D}_n(|a, b|) = \left\{ \varphi \in C^\infty(|a, b|) : \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k} \varphi^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k} \varphi^{(k)}(x), 0 \leq k \leq n \right\}$$

et

$$\mathfrak{D}_\infty(|a, b|) = \left\{ \varphi \in C^\infty(|a, b|) : \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k} \varphi^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k} \varphi^{(k)}(x), k \in \mathbb{N} \right\}.$$

**Lemma 7.** L'opérateur de Berry-Keating  $\{\hat{x}, \hat{p}\}$  est stable à l'infini sur le domaine  $\mathfrak{D}_\infty(|a, b|)$ .

*Proof.* Pour  $\varphi \in \mathfrak{D}_\infty(|a, b|)$ ,

$$\begin{aligned}
(\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)} &= -2ix\varphi^{(k+1)} - i(2k+1)\varphi^{(k)} \\
x^{\frac{1}{2}+k} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)}(x) &= -2ix^{\frac{1}{2}+k+1}\varphi^{(k+1)}(x) - i(2k+1)x^{\frac{1}{2}+k}\varphi^{(k)}(x) \\
\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)}(x) &= -2i \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k+1}\varphi^{(k+1)}(x) - i(2k+1) \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k}\varphi^{(k)}(x) \\
&= -2i \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k+1}\varphi^{(k+1)}(x) - i(2k+1) \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k}\varphi^{(k)}(x) \\
&= \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

car  $\varphi \in \mathfrak{D}_\infty(|a, b|)$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}+k} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}+k} (\{\hat{x}, \hat{p}\} \varphi)^{(k)}(x) \text{ pour tout } k \geq 0$$

donc,

$$\{\widehat{x}, \widehat{p}\} (\mathfrak{D}_\infty (]a, b[)) \subset \mathfrak{D}_\infty (]a, b[). \quad (5.11)$$

□

Pour tout  $k \geq 1$ , si  $]a, b[$  est borné,  $\mathfrak{D}_\infty (]a, b[)$  est un domaine de symétrisation pour  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}^k$ , ce domaine est dense dans  $L^2 (]a, b[)$  puisqu'il contient les fonctions à support compact sur  $]a, b[$ . Pour tout  $\phi \in L^2 (]a, b[)$ , il existe un  $\varphi \in \mathfrak{D}_0 (]a, b[)$  telle que 5.4 est vérifiée. On en déduit que

$$x\varphi' + \frac{1+\epsilon}{2}\varphi = x\phi \text{ pour } \epsilon = \pm 1, \quad (5.12)$$

si  $\phi \in \mathcal{D} (]a, b[)$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left( x^{\frac{1}{2}} x\varphi' (x) + \frac{1+\epsilon}{2} x^{\frac{1}{2}} \varphi (x) \right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow b^-} \left( x^{\frac{1}{2}} x\varphi' (x) + \frac{1+\epsilon}{2} x^{\frac{1}{2}} \varphi (x) \right) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} x\varphi' (x) = -\frac{1+\epsilon}{2} \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} \varphi (x) = -\frac{1+\epsilon}{2} \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} \varphi (x) = \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} x\varphi' (x),$$

donc  $\varphi \in \mathfrak{D}_1 (]a, b[)$ .

**Lemma 8.** *On a l'inclusion suivante,*

$$\mathcal{D} (]a, b[) \subset (\epsilon + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) (\mathfrak{D}_\infty (]a, b[)), \epsilon = \pm 1.$$

*Proof.* De 5.11, on a l'inclusion

$$(\epsilon + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) (\mathfrak{D}_\infty (]a, b[)) \subset \mathfrak{D}_\infty (]a, b[),$$

maintenant, si  $\phi \in \mathcal{D} (]a, b[)$ , il existe  $\varphi \in \mathfrak{D}_0 (]a, b[)$  telle que l'équation 5.4 est vérifiée. On dérive à l'ordre  $k$  l'équation 5.12, on obtient

$$x\varphi^{(k+1)} + \frac{2k+1+\epsilon}{2}\varphi^{(k)} = x\phi^{(k)} + k\phi^{(k-1)}$$

en multipliant par  $x^{\frac{1}{2}}x^k$  et en passant à la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} x^{k+1} \varphi^{(k+1)} (x) = -\frac{2k+1+\epsilon}{2} \lim_{x \rightarrow a^+} x^{\frac{1}{2}} x^k \varphi^{(k)} (x), \forall k \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} x^{k+1} \varphi^{(k+1)} (x) = -\frac{2k+1+\epsilon}{2} \lim_{x \rightarrow b^-} x^{\frac{1}{2}} x^k \varphi^{(k)} (x^-), \forall k \geq 0$$

puisque  $\varphi \in \mathfrak{D}_0 (]a, b[)$ ,  $\varphi \in \mathfrak{D}_\infty (]a, b[)$ . En particulier,

$$(\epsilon + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) (\mathfrak{D}_\infty (]a, b[))$$

est dense dans  $L^2 (]a, b[)$ . □

De façon analogue, si on pose

$$\mathfrak{D}^n (]a, b[) = \left\{ \varphi \in C^\infty (]a, b[) : \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(k)} (x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(k)} (x), 0 \leq k \leq n \right\}$$

et

$$\mathfrak{D}^\infty (]a, b[) = \left\{ \varphi \in C^\infty (]a, b[) : \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(k)} (x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(k)} (x), k \in \mathbb{N} \right\}$$

l'opérateur  $\widehat{p}$  est stable à l'infini sur  $\mathfrak{D}^\infty (]a, b[)$ . Pour chaque entier  $k \geq 0$ ,  $\mathfrak{D}^\infty (]a, b[)$  est un domaine de symétrisation de  $\widehat{p}^k$  qui est dense dans  $L^2 (]a, b[)$ . On a

$$\mathfrak{D}^\infty (]a, b[) = (\epsilon + i\widehat{p}) (\mathfrak{D}^\infty (]a, b[)),$$

si  $\phi \in \mathfrak{D}^\infty (]a, b[)$ , il existe une fonction  $\varphi \in \mathfrak{D}^0 (]a, b[)$  telle que

$$\varphi' + \epsilon\varphi = \phi,$$

on dérive à l'ordre  $k \geq 1$

$$\varphi^{(k+1)} + \epsilon\varphi^{(k)} = \phi^{(k)}$$

par passage à la limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(k+1)}(x) = -\epsilon \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(k)}(x) + \lim_{x \rightarrow a^+} \phi^{(k)}(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(k+1)}(x) = -\epsilon \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(k)}(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} \phi^{(k)}(x)$$

si on suppose que  $k \leq n$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(k)}(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(k)}(x)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi^{(n+1)}(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi^{(n+1)}(x)$$

et  $\varphi \in \mathfrak{D}^\infty (]a, b[)$ .

**Remark 6.** Dans ce qui suit, sur un domaine borné  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$ , les fermetures de  $\hat{p}$  et de  $\{\hat{x}, \hat{p}\}$  sont encore notées  $\hat{p}$  et  $\{\hat{x}, \hat{p}\}$ , de domaine contenant respectivement,

$$\text{dom } \hat{p} \text{ et } \text{dom } \{\hat{x}, \hat{p}\},$$

ces fermetures sont des opérateurs autoadjoints de  $L^2 (]a, b[)$ .

## 6. SÉRIES D'OPÉRATEURS QUANTIQUES

On veut définir des opérateurs par des séries à partir d'opérateurs quantiques. L'opérateur  $\hat{p}$  est stable sur  $\mathfrak{D}^\infty (]a, b[)$  et  $\{\hat{x}, \hat{p}\}$  est stable sur  $\mathfrak{D}_\infty (]a, b[)$ , pour une suite de nombres complexes  $\mu = \{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , on définit les opérateurs

$$\hat{p}_\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \hat{p}^n \text{ et } \{\hat{x}, \hat{p}\}_\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \{\hat{x}, \hat{p}\}^n$$

de domaine respectif

$$\text{dom } \hat{p}_\mu \subset \mathfrak{D}^\infty (]a, b[) \text{ et } \text{dom } \{\hat{x}, \hat{p}\}_\mu \subset \mathfrak{D}_\infty (]a, b[).$$

L'opérateur  $\hat{\Delta}_\alpha$  peut s'écrire sous la forme  $\hat{p}_\mu$  où

$$\mu_n = -\frac{\alpha^n}{n!} \text{ si } n \neq 0 \text{ et } \mu_0 = 0$$

et  $\hat{\square}_\alpha$  s'écrit sous la forme  $\hat{p}_\nu$  où

$$\nu_n = \frac{B_n \alpha^n}{n!}, n \in \mathbb{N}.$$

On généralise la notion de série d'opérateurs quantiques par la définition suivante,

**Definition 8.** Soit  $\hat{L}$  un opérateur d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , de domaine dense  $\text{dom } \hat{L}$  et

$$\text{dom}_N \hat{L} = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \hat{L}^n \varphi \in \text{dom } \hat{L}, \forall n = 0, 1, \dots, N \right\}$$

$$\text{dom}_\infty \hat{L} = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} : \hat{L}^n \varphi \in \text{dom } \hat{L}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$



pour une suite  $\mu = \{\mu_n\}$ , on définit l'opérateur

$$\widehat{L}_\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \widehat{L}^n$$

le domaine de  $\widehat{L}_\mu$  est contenu dans  $\text{dom } \widehat{L}$ .

Sur  $L^2(]0, +\infty[, dx)$ , le domaine de

$$e^{i\alpha\widehat{p}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(i\alpha\widehat{p})^n}{n!}, \alpha > 0$$

contient les fonctions analytiques sur  $]0, +\infty[$ , dont le rayon de convergence  $R(x)$  du développement en série entière en  $x$ , est strictement supérieur à  $\alpha$ , on note  $\mathcal{A}_\alpha$ , ce sous-espace.

**Proposition 3.** *On a*

$$e^{i\alpha\widehat{p}} = \widehat{T}_\alpha \text{ sur } \mathcal{A}_\alpha$$

où

$$\widehat{T}_\alpha \varphi(x) = \varphi(x + \alpha).$$

*Proof.* Soit  $\varphi \in \mathcal{A}_\alpha$

$$e^{i\alpha\widehat{p}} \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} (x + \alpha - x)^n = \varphi(x + \alpha).$$

□

**Proposition 4.** *Si*

$$\widehat{x}_a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widehat{x}^n, \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

on a

$$\widehat{x}_a = \widehat{\phi}.$$

L'espace de Hilbert  $L^2(]a, b[)$  est muni de la base hilbertienne

$$e_m(x) = e^{2i\pi m \frac{x-a}{b-a}}, m \in \mathbb{Z}$$

et vérifie

$$\widehat{p}e_m = \frac{2\pi m}{b-a} e_m, \forall m \in \mathbb{Z}$$

donc,

$$\begin{aligned} \widehat{p}_\mu e_m &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)^n e_m \\ &= \phi \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right) e_m, \end{aligned}$$

l'opérateur  $\widehat{p}_\mu$  a une base hilbertienne de fonctions propres dont les valeurs propres associées sont  $\phi \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)$ . Si

$$\|\phi\|_\infty < +\infty$$

cet opérateur est un opérateur continu sur un domaine dense de  $L^2(]a, b[)$  et si la suite  $\mu$  est réelle alors  $\widehat{p}_\mu$  a une base hilbertienne de fonctions propres dont les valeurs propres sont réelles.

**Theorem 5.** Pour toute suite réelle  $\mu$  telle que

$$\|\phi\|_\infty < +\infty$$

où

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n x^n,$$

alors  $\widehat{p}_\mu$  admet un prolongement hermitien de norme

$$\|\widehat{p}_\mu\| = \|\phi\|_\infty.$$

*Proof.* L'opérateur  $\widehat{p}_\mu$  vérifie, si

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(\varphi) e_m$$

la formule de Bessel-Parseval permet d'écrire

$$\begin{aligned} \|\widehat{p}_\mu \varphi\|^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| c_m(\varphi) \phi\left(\frac{2\pi m}{b-a}\right) \right|^2 \leq \|\phi\|_\infty^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(\varphi)|^2 \\ &= \|\phi\|_\infty^2 \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

$$\|\widehat{p}_\mu \varphi\| \leq \|\phi\|_\infty \|\varphi\|,$$

l'opérateur  $\widehat{p}_\mu$  est un opérateur borné de  $L^2([a, b])$ . Sur  $\mathcal{D}([a, b])$ ,  $\widehat{p}$  est symétrique et il en est de même de  $\widehat{p}_\mu$  car la suite est réelle. La densité de  $\mathcal{D}([a, b])$  dans  $L^2([a, b])$  et la continuité de  $\widehat{p}_\mu$  sur  $L^2([a, b])$  permet d'affirmer que  $\widehat{p}_\mu$  est symétrique sur  $L^2([a, b])$ .  $\square$

**Corollary 3.** L'opérateur  $e^{-\widehat{p}^2}$  s'étend en un opérateur hermitien.

*Proof.* Pour cet exemple,

$$\phi(x) = e^{-x^2}.$$

$\square$

**Corollary 4.** L'opérateur

$$e^{i\widehat{p}} = \cos(\widehat{p}) + i \sin(\widehat{p})$$

s'étend en un opérateur borné de  $L^2([a, b])$  tel que

$$\left(e^{i\widehat{p}}\right)^\dagger = e^{-i\widehat{p}}$$

et  $\widehat{\Delta}_1$  s'étend en un opérateur borné de  $L^2([a, b])$  avec

$$\widehat{\Delta}_1^\dagger = \widehat{\Delta}_{-1}.$$

*Proof.* Les opérateurs  $\cos(\widehat{p})$  et  $\sin(\widehat{p})$  s'étendent à des opérateurs hermitiens de  $L^2([a, b])$  et

$$\left(e^{i\widehat{p}}\right)^\dagger = \cos(\widehat{p})^\dagger - i \sin(\widehat{p})^\dagger = e^{-i\widehat{p}}.$$

$\square$

On peut généraliser les résultats précédents comme suit,

**Proposition 5.** Soit  $\widehat{L}$  un opérateur d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  pour lequel il existe une base hilbertienne  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_n$

$$\widehat{L}e_n = \lambda_n e_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

soit  $\phi$  une fonction développable en série entière

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n x^n$$

pour laquelle

$$M = \sup \{|\phi(\lambda_n)| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$$

alors l'opérateur

$$\phi(\widehat{L}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \widehat{L}^n \tag{6.1}$$

a une extension bornée dans  $\mathcal{H}$ .

*Proof.* Soit  $\varphi \in \text{Vect}(e_n : n \in \mathbb{N}) \subset \text{dom } \widehat{L}$ ,

$$\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_{n_j} e_{n_j}$$

$$\phi(\widehat{L})e_n = \phi(\lambda_n)e_n \in \mathcal{H} \text{ et } \text{Vect}\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{dom } \phi(\widehat{L}),$$

$$\phi(\widehat{L})\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_{n_j} \phi(\lambda_{n_j}) e_{n_j}$$

$$\|\phi(\widehat{L})\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^N |\varphi_{n_j}|^2 |\phi(\lambda_{n_j})|^2 \leq M^2 \|\varphi\|^2,$$

donc  $\phi(\widehat{L})$  est un opérateur continu sur un domaine dense de  $\mathcal{H}$ , l'uniforme continuité nous donne l'existence d'une unique extension bornée sur  $\mathcal{H}$ .  $\square$

**Remark 7.** L'opérateur  $\widehat{L}$  n'est pas borné si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty,$$

c'est le cas de l'opérateur  $\widehat{p}$ . L'opérateur

$$\int_a^{\widehat{\square}_1}$$

n'a pas d'extension bornée pour tout  $b-a \in ]0, +\infty[$ , même sous l'hypothèse où  $\frac{\pi}{b-a}$  est irrationnel.

## 7. L'OPÉRATEUR DE DIRICHLET

On rappelle que la fonction éta de Dirichlet est définie par

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

l'opérateur de Dirichlet  $\widehat{\nabla}$  est un opérateur construit à partir de l'opérateur de Berry-Keating en perturbant cet opérateur comme suit

$$\widehat{\eta}_\alpha = \widehat{\eta} \left( \frac{1}{2} (1 + \alpha i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) \right), \quad \alpha \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} \widehat{\eta}_\alpha &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e^{-\frac{1}{2}(1+\alpha i\{\widehat{x}, \widehat{p}\}) \log(n)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2} \log(n))^k}{k!} (1 + \alpha i \{\widehat{x}, \widehat{p}\})^k. \end{aligned}$$

L'opérateur de Dirichlet  $\widehat{\nabla}$  est défini par

$$\widehat{\nabla} = \{\widehat{x}, \widehat{p}\} + \frac{1}{2} (\widehat{\eta}_{-1} + \widehat{\eta}_{+1}).$$

**Proposition 6.** *Pour tout  $\rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ ,  $x^{-\rho}$  est une fonction propre associée à la valeur propre  $i(2\rho - 1)$  pour l'opérateurs  $\widehat{\nabla}$ .*

*Proof.* On a, pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (1 - i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) x^{-\rho} &= \rho x^{-\rho} \\ \frac{1}{2} (1 + i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}) x^{-\rho} &= (1 - \rho) x^{-\rho} \\ \widehat{\eta}_{-1} x^{-\rho} = \eta(\rho) x^{-\rho} &= 0 \text{ si } \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \\ \widehat{\eta}_{+1} x^{-\rho} = \eta(1 - \rho) x^{-\rho} &= 0 \text{ si } \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \end{aligned}$$

et

$$\widehat{\nabla} x^{-\rho} = i(2\rho - 1) x^{-\rho}.$$

□

## 8. L'OPÉRATEUR DE LI

On note  $\mathcal{F}$  la famille des zéros non triviaux de  $\zeta$ , comptés avec leur ordre de multiplicité. Une famille de nombres complexes  $\mathbf{z} = \{z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{F}}$  est un élément de  $\mathcal{H}$  si

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \sum_{\rho} |z_\rho|^2 < +\infty,$$

la sommation est définie dans [6] par

$$\sum_{\rho} |z_\rho|^2 = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sum_{|\operatorname{Im}(\rho)| < \tau} |z_\rho|^2.$$

On munit  $\mathcal{H}$  d'un produit scalaire hermitien

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = \sum_{\rho} \overline{z_\rho} s_\rho, \quad \mathbf{z} = \{z_\rho\}_{\rho \in \mathcal{F}} \text{ et } \mathbf{s} = \{s_\rho\}_{\rho \in \mathcal{F}},$$

l'espace  $\mathcal{H}$  muni de ce produit est un espace de Hilbert séparable de base hilbertienne

$$e_\rho = \{\delta_{\rho,\mu}\}_{\mu \in \mathcal{F}}.$$

**Definition 9.** *L'espace de Li est l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  muni du produit hermitien  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle$ .*

Soit  $\tau$  une permutation de  $\mathcal{F}$ , l'opérateur  $\widehat{\tau}$  est défini par

$$\widehat{\tau}e_\rho = e_{\tau(\rho)}, \forall \rho \in \mathcal{F}$$

par exemple, l'opérateur de conjugaison est

$$\widehat{c}e_\rho = e_{\overline{\rho}}$$

et l'opérateur de symétrisation est

$$\widehat{s}e_\rho = e_{1-\rho}.$$

**Definition 10.** *L'opérateur de Li est défini par*

$$\widehat{L}e_\rho = \frac{1}{\rho}e_\rho, \forall \rho \in \mathcal{F}.$$

Cet opérateur est un opérateur à trace dont la trace est égale au premier coefficient de Li

$$\text{Trace } \widehat{L} = \sum_\rho \frac{1}{\rho} = \lambda_1 = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\log(4\pi)}{2} \approx 0.023096.$$

La fonction  $\frac{\xi'(z)}{\xi(z)}$  où

$$\xi(z) = \frac{1}{2}z(z-1)\pi^{-\frac{z}{2}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et de 1. On note

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$$

le développement en série entière de  $\frac{\xi'}{\xi}$  dans un voisinage de zéro. De l'équation fonctionnelle

$$\xi(z) = \xi(1-z),$$

on en déduit les équations

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = -\frac{\xi'(1-z)}{\xi(1-z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k (z-1)^k,$$

et

$$\log(\xi(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \text{ et } \log(\xi(z)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_{k-1}}{k} (z-1)^k.$$

**Lemma 9.**

$$a_k = -\sum_\rho \frac{1}{\rho^{k+1}}, \forall k.$$

*Proof.* De

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = \frac{1}{z-1} - \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)},$$

en utilisant le produit d'Hadamard, on a

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \log(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \sum \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right]$$

la sommation  $\sum$  est symétriquement par rapport à la droite  $x = \frac{1}{2}$  et les zéros sont comptés avec leur ordre de multiplicité, cette sommation  $\sum$  s'identifie à  $\sum_{\rho}$ , il suffit de le vérifier sur chaque somme partielle finie,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} &= \frac{1}{z-1} - \frac{\log(\pi)}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} \\ &+ \log(2\pi) - \frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{z}{2}+1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+1)} + \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] \\ &= \frac{\log(4\pi)}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1 + \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{z-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] \\ &= \kappa + \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} \left[ 1 - \frac{1}{1-\frac{z}{\rho}} \right] \\ &= \kappa - \sum_{\rho} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\rho^{k+1}}, \quad \kappa = \frac{\log(4\pi)}{2} - \frac{\gamma}{2} - 1 \\ &= \kappa - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}} \right) z^k \text{ si } |z| < \inf \{ |\rho| : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \}. \end{aligned}$$

□

On peut remarquer que

$$\kappa = - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(z)}{\xi(z)} &= - \frac{\xi'(1-z)}{\xi(1-z)} \text{ et } \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = - \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} \\ \kappa &= -\kappa - \sum_{\rho} \left[ \frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} \right] = -\kappa - 2 \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

**Remark 8.** Le premier coefficient de  $Li$ ,  $\lambda_1 = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$  est strictement positif et vaut

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma}{2} - \log(2) - \frac{\log(\pi)}{2}$$

et le développement de  $\frac{\xi'}{\xi}$  en série entière dans un voisinage de 0 est

$$\frac{\xi'(z)}{\xi(z)} = - \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}} \right) z^k \text{ si } |z| < \inf \{ |\rho| : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta) \}.$$

Soit  $\widehat{L}$  un opérateur de classe-trace sur  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire, un opérateur tel que  $\widehat{L} = \widehat{L}_1 \widehat{L}_2$  où  $\widehat{L}_1$  et  $\widehat{L}_2$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt [11]. Le théorème de Lidskii [8] permet d'écrire

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_n \langle \mathbf{e}_n, \widehat{L} \mathbf{e}_n \rangle = \sum_{n \geq 1} \lambda_n(\widehat{L})$$

où  $\{\lambda_n(\widehat{L})\}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $\widehat{L}$  comptées avec leur ordre de multiplicité. D'après Weyl [13], la série est absolument convergente, donc commutativement convergente et si  $\phi$  est une bijection de  $\mathbb{N}^*$  sur  $\mathcal{F}$ , on a

$$\text{Trace}(\widehat{L}) = \sum_{\rho} \lambda_{\rho}(\widehat{L}), \quad \lambda_{\rho}(\widehat{L}) = \lambda_{\phi^{-1}(\rho)}(\widehat{L}),$$

qui est indépendant du choix de la bijection  $\phi$ . Si on applique ces résultats aux opérateurs  $\widehat{L}^k$ , ces opérateurs sont des opérateurs à trace

$$\text{Trace}(\widehat{L}^{k+1}) = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho^{k+1}} = -a_k$$

et

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^k} < +\infty, \quad \forall k \geq 1$$

on en déduit que les opérateurs  $\widehat{L}^k$  sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

**Theorem 6.** *Les coefficients de Li,  $\lambda_n$  pour  $n \geq 1$ , vérifient*

$$\lambda_n = \text{Trace} \left( 1 - (1 - \widehat{L})^n \right), \quad \forall n \geq 1$$

*ces coefficients sont positifs si et seulement si*

$$\widehat{s} \left\{ \widehat{L}, \widehat{s} \right\}$$

*est un opérateur hermitien où  $\widehat{s}$  est l'opérateur de symétrisation.*

*Proof.* On a

$$\widehat{s} \left\{ \widehat{L}, \widehat{s} \right\} e_{\rho} = \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right) e_{\rho}, \quad \forall \rho$$

le critère de positivité de Li [6] permet de conclure. □

**Remark 9.** *L'opérateur  $1 - \widehat{L}$  est inversible, on a*

$$1 - (1 - \widehat{L})^{-1} = - \sum_{k=1}^{+\infty} \widehat{L}^k$$

*et la trace de  $1 - (1 - \widehat{L})^{-1}$  est donnée par*

$$\text{Trace} \left( 1 - (1 - \widehat{L})^{-1} \right) = \frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = - \frac{\xi'(0)}{\xi(0)}.$$

On pose  $\widehat{r}$ , l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \widehat{r}(e_{\rho}) &= i\rho \widehat{s}(e_{\rho}) = i\rho e_{1-\rho}, \quad \forall \rho \in \mathcal{F} \\ [\widehat{s}, \widehat{r}] e_{\rho} &= i(2\rho - 1) e_{\rho}, \quad \forall \rho \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

On définit les opérateurs

$$\widehat{\alpha}_+ = \phi\left(\frac{1+i[\widehat{s}, \widehat{r}]}{2}\right) \text{ et } \widehat{\alpha}_- = \phi\left(\frac{1-i[\widehat{s}, \widehat{r}]}{2}\right) = \phi\left(\frac{1+i[\widehat{r}, \widehat{s}]}{2}\right)$$

où  $\phi$  est la fonction de Stieltjes 9.1, l'opérateur

$$\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}_+ + \widehat{\alpha}_-$$

vérifie

$$\widehat{\alpha}(e_\rho) = \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho}\right) e_\rho, \forall \rho \in \mathcal{F}.$$

**Proposition 7.** *Avec les notations précédentes,*

$$\widehat{\alpha} = \widehat{s} \left\{ \widehat{L}, \widehat{s} \right\} \text{ et } \widehat{\alpha}_+ = \widehat{L}.$$

L'opérateur  $\widehat{\alpha}$  s'étend en un opérateur borné de  $\mathcal{H}$  qui est autoadjoint si et seulement si

$$\text{Trace}(1 - (1 - \widehat{\alpha}_+)^n) = \text{Trace}(1 - (1 - \widehat{\alpha}_-)^n) \geq 0, \forall n \geq 1.$$

## 9. OPÉRATEURS DE STIELTJES

On va construire un opérateur ayant des propriétés analogues à l'opérateur de Li qui peut être défini à l'aide des opérateurs quantiques. La fonction de Stieltjes est définie par

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} (1-x)^n \quad (9.1)$$

où  $\gamma_n$  sont les coefficients de Stieltjes

$$\gamma_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^N \frac{\log(k)^n}{k} - \frac{\log(N)^{n+1}}{n+1} \right),$$

les opérateurs de Stieltjes sont définis par

$$\widehat{\alpha}_+ = \phi\left(\frac{1+i\{\widehat{x}, \widehat{p}\}}{2}\right) \text{ et } \widehat{\alpha}_- = \phi\left(\frac{1-i\{\widehat{x}, \widehat{p}\}}{2}\right) \quad (9.2)$$

pour ces opérateurs

$$\widehat{\alpha}_+ x^{-\rho} = \frac{1}{\rho} x^{-\rho} \text{ et } \widehat{\alpha}_- x^{-\rho} = \frac{1}{1-\rho} x^{-\rho}, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta), \quad (9.3)$$

et si  $\rho \notin \mathcal{Z}(\zeta)$  alors

$$\widehat{\alpha}_+ x^{-\rho} = \left(\zeta(1-\rho) + \frac{1}{\rho}\right) x^{-\rho} \text{ et } \widehat{\alpha}_- x^{-\rho} = \left(\zeta(\rho) + \frac{1}{1-\rho}\right) x^{-\rho}. \quad (9.4)$$

**Definition 11.** *Une paire d'opérateurs  $(L, \mathcal{L})$  d'un espace de Hilbert séparable  $\mathcal{H}$  est une paire de Gram-Schmidt associée à une famille  $\mathcal{F} = \{f_n\}$  s'il existe une base hilbertienne  $\{e_n\}$  de  $\mathcal{H}$  telle que*

$$L f_n = e_n, \forall n$$

et

$$\mathcal{L} e_n = f_n, \forall n.$$

**Remark 10.** *L'opérateur  $\mathcal{L}$ , si il existe, est un opérateur à domaine dense.*



**Lemma 10.** *Si  $\mathcal{F} = \{f_n\}$  est une famille libre et totale alors pour toute base hilbertienne  $\{e_n\}$  de  $\mathcal{H}$ , il existe une paire de Gram-Schmidt  $(\widehat{L}, \widehat{\mathcal{L}})$  telle que*

$$\widehat{L}f_n = e_n, \forall n.$$

*Les opérateurs  $\widehat{L}$  et  $\widehat{\mathcal{L}}$  sont des opérateurs à domaine dense.*

*Proof.* On orthonormalise la famille libre et totale  $\mathcal{F}$  et on conclut.  $\square$

Soit  $\mathcal{H}$  la fermeture dans  $L^2 ]a, b[$ ,  $a > 0$ , de

$$\mathcal{E} = \text{Vect} \{x^{-\rho} : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\} \subset L^2 ]a, b[, \quad (9.5)$$

la base hilbertienne  $\{e_\rho\}$  de  $\mathcal{H}$ , obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-schmidt de

$$\{x^{-\rho} : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)\}$$

permet de définir deux opérateurs à domaine dense dans  $\mathcal{H}$

$$\widehat{L}e_\rho = x^{-\rho}, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$$

$$\widehat{\mathcal{L}}x^{-\rho} = e_\rho, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$$

toute extension de ces deux opérateurs sont des opérateurs de Gram-schmidt associés à  $\zeta$ , avec

$$\|\widehat{L}e_\rho\|^2 = \frac{b^{-2\text{Re}(\rho)+1} - a^{-2\text{Re}(\rho)+1}}{-2\text{Re}(\rho)+1} \text{ si } \text{Re}(\rho) \neq \frac{1}{2}$$

et

$$\|\widehat{L}e_\rho\|^2 = \log\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } \text{Re}(\rho) = \frac{1}{2}.$$

Les opérateurs  $\widehat{L}\widehat{a}_+\widehat{\mathcal{L}}$  et  $\widehat{L}\widehat{a}_-\widehat{\mathcal{L}}$  s'étendent à des opérateurs bornés  $\widehat{A}_+$  et  $\widehat{A}_-$  de  $\mathcal{H}$ ,

$$\widehat{A}_+\varphi = \sum_\rho \frac{1}{\rho} \langle \varphi, e_\rho \rangle e_\rho, \quad \|\widehat{A}_+\varphi\| \leq \|\varphi\| \sqrt{\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2}} \quad (9.6)$$

$$\widehat{A}_-\varphi = \sum_\rho \frac{1}{1-\rho} \langle \varphi, e_\rho \rangle e_\rho, \quad \|\widehat{A}_-\varphi\| \leq \|\varphi\| \sqrt{\sum_\rho \frac{1}{|1-\rho|^2}} = \|\varphi\| \sqrt{\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2}}$$

où la sommation  $\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^2}$  se fait dans le sens de [7] et la sommation  $\sum_\rho \frac{1}{1-\rho} \langle \varphi, e_\rho \rangle e_\rho$  est défini dans  $\mathcal{H}$ . On pose

$$\widehat{A} = \widehat{A}_+ + \widehat{A}_-$$

l'opérateur borné de  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 8.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

$$1) \text{ Trace} \left( 1 - \left( 1 - \widehat{A}_+ \right)^n \right) = \text{Trace} \left( 1 - \left( 1 - \widehat{A}_- \right)^n \right) \geq 0, \forall n \geq 1$$

$$2) \widehat{A} \text{ est un opérateur autoadjoint de } \mathcal{H}. \quad (9.7)$$

*Proof.* L'ensemble  $\mathcal{Z}(\zeta)$  des zéros non triviaux de  $\zeta$ , comptés sans leur ordre de multiplicité, est encore un multiset pour lequel les résultats développés dans [7] sont vérifiés car

$$\sum_{\mathcal{Z}(\zeta)} \frac{1 + |\operatorname{Re}(\rho)|}{(1 + |\rho|)^2} \leq 2 \sum_{\mathcal{Z}(\zeta)} \frac{1}{|\rho|^2} < +\infty$$

avec les notations de [7]. On en déduit l'équivalence entre

$$\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$$

et

$$\sum_{\rho} 1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n \geq 0, \forall n \geq 1.$$

Si

$$\operatorname{Trace} \left(1 - \left(1 - \widehat{A}_+\right)^n\right) \geq 0, \forall n \geq 1$$

alors

$$\operatorname{Trace} \left(1 - \left(1 - \widehat{A}_+\right)^n\right) = \sum_{\rho} 1 - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)^n \geq 0, \forall n \geq 1$$

où la somme est définie sur le "multiset  $\mathcal{Z}(\zeta)$ " formé par les zéros non triviaux de  $\zeta$  sans leur ordre de multiplicité et en utilisant le critère de positivité de Li [6] et [7] pour ce "multiset", on a  $\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta)$ ,

$$\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}, \forall \rho \in \mathcal{Z}(\zeta).$$

L'opérateur  $\widehat{A}$  a une base hilbertienne dont les valeurs propres associées sont

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\frac{1}{2} + i \operatorname{Im}(\rho)} + \frac{1}{\frac{1}{2} - i \operatorname{Im}(\rho)} = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + i \operatorname{Im}(\rho)} \right) \in \mathbb{R},$$

donc,  $\widehat{A}$  est un opérateur autoadjoint de  $\mathcal{H}$ . Inversement, si  $\widehat{A}$  est un opérateur autoadjoint de  $\mathcal{H}$  alors  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{1-\rho} \in \mathbb{R}$  et  $\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ , donc

$$\operatorname{Trace} \left(1 - \left(1 - \widehat{A}_+\right)^n\right) \geq 0, \forall n \geq 1.$$

□

L'espace  $\mathcal{H}$  est un sous-espace fermé de  $L^2([a, b])$ ,  $a > 0$ . On note  $\pi_{\mathcal{H}}$  la projection sur  $\mathcal{H}$  et on pose

$$\widehat{H} = \widehat{A}_+ \circ \pi_{\mathcal{H}} : \varphi \in L^2([a, b]) \rightarrow \widehat{A}_+(\pi_{\mathcal{H}}\varphi) \in L^2([a, b])$$

cet opérateur est un opérateur de Hilbert-Schmidt de  $L^2([a, b])$ . Pour le vérifier il suffit de compléter la base hilbertienne  $\{e_{\rho}\}$  avec une base hilbertienne de  $\{f_{\mu}\}$  de  $\mathcal{H}^{\perp}$ . Pour cette base hilbertienne, on a

$$\widehat{H}e_{\rho} = \frac{1}{\rho}e_{\rho} \text{ et } \widehat{H}f_{\mu} = 0,$$

l'opérateur  $\widehat{H}$  est de Hilbert-Schmidt car  $\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^2} < +\infty$ .

## 10. GÉNÉRALISATION DE LA TRACE

On suppose que  $\widehat{T}$  est un opérateur à domaine dense d'un espace de hilbert  $\mathcal{H}$ , pour lequel il existe une famille totale  $\{f_n\}$  telle que

$$\widehat{T}f_n = \alpha_n f_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

où  $\{\alpha_n\}$  est une suite contenue dans le spectre ponctuel de  $\widehat{T}$  privé de 0.

**Definition 12.** On dit que la suite  $\{\alpha_n\}$  est totale pour l'opérateur  $\widehat{T}$ .

On note,  $\{e_n\}$  une base hilbertienne obtenue par orthonormalisation de  $\{f_n\}$ . Soient  $(\widehat{L}, \widehat{\mathcal{L}})$ , la paire de Gram-Schmidt à domaine dense vérifiant

$$\widehat{L}f_n = e_n \text{ et } \widehat{\mathcal{L}}e_n = f_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On se fixe une fonction analytique  $\phi$  sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  contenant la suite  $\{\lambda_n\}$  pour laquelle

$$\Phi^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\alpha_n)|^2 < +\infty$$

et on pose

$$\widehat{T}_\phi = \phi(\widehat{T}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n (\widehat{T} - z_0)^n$$

si

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n (z - z_0)^n$$

dans un voisinage de  $z_0$ . Sur un voisinage de  $z_1$

$$\phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n (z - z_1)^n,$$

si  $\lambda_k$  est dans l'intersection de ces deux voisinages, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n (\widehat{T} - z_0)^n f_k = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n (\widehat{T} - z_1)^n f_k,$$

sur l'espace Vect  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ , l'opérateur  $\widehat{T}_\phi$  est défini et donc de domaine dense.

**Theorem 7.** L'opérateur à domaine dense

$$\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}} = (\widehat{L}\widehat{T}\widehat{\mathcal{L}})_\phi$$

admet une unique extension bornée  $\widehat{\mathbf{T}}$  dans  $\mathcal{H}$ . L'opérateur  $\widehat{\mathbf{T}}$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

*Proof.* Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\widehat{T}_\phi f_n = \phi(\alpha_n) f_n$$

et

$$\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}e_n = \phi(\alpha_n) e_n.$$

En particulier, sur l'ensemble des combinaisons linéaires finies, l'opérateur  $\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}$  est défini et vérifie

$$\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}} \left( \sum_{n < \infty} \mu_n e_n \right) = \sum_{n < \infty} \mu_n \phi(\alpha_n) e_n$$

$$\left\| \widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}} \left( \sum_{n<\infty} \mu_n e_n \right) \right\|^2 = \sum_{n<\infty} |\mu_n \phi(\alpha_n)|^2 \leq \Phi^2 \left\| \sum_{n<\infty} \mu_n e_n \right\|^2$$

$$\left\| \widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}\varphi \right\| \leq \Phi \|\varphi\|, \forall \varphi \in \text{Vect} \{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

on peut donc étendre cet opérateur à un opérateur borné  $\widehat{\mathbf{T}}$  de  $\mathcal{H}$ , cette extension est un opérateur de Hilbert-Schmidt car

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\| \widehat{\mathbf{T}}e_n \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\alpha_n)|^2 < +\infty.$$

□

Si on change la famille  $\mathcal{F} = \{f_n\}$  en une famille  $\mathcal{G} = \{g_n\}$ , les opérateurs

$$\widehat{L}_\mathcal{F}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}_\mathcal{F} \text{ et } \widehat{L}_\mathcal{G}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}_\mathcal{G}$$

sont des opérateurs conjugués, où  $(\widehat{L}_\mathcal{G}, \widehat{\mathcal{L}}_\mathcal{G})$  est un couple de Gram-Schmidt associés à  $\{g_n\}$ , l'opérateur de conjugaison envoie la base hilbertienne définie par orthonormalisation de  $\{f_n\}$  sur la base hilbertienne qui est l'orthonormalisée de  $\{g_n\}$ . En particulier,

$$\text{Trace } \widehat{L}_\mathcal{F}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}_\mathcal{F} = \text{Trace } \widehat{L}_\mathcal{G}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}_\mathcal{G},$$

**Definition 13.** Une suite  $\{\alpha_n\}$  est à trace pour  $\widehat{T}_\phi$  si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\alpha_n)| < +\infty$ .

**Theorem 8.** Si  $\{\alpha_n\}$  est totale pour  $\widehat{T}$  et à trace pour  $\widehat{T}_\phi$  alors  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi(\alpha_n)$  est indépendant du choix de la suite totale pour  $\widehat{T}$  qui sont à trace pour  $\widehat{T}_\phi$ . Ce nombre est la trace de l'opérateur  $\widehat{T}$  relativement à  $\phi$ , on le note

$$\text{Trace}_\phi \left( \widehat{T} \right).$$

**Remark 11.** Pour que  $\text{Trace}_\phi \left( \widehat{T} \right)$  existe, il faut et il suffit qu'il existe une suite  $\{\alpha_n\}$  telle que  $\widehat{T}f_n = \alpha_n f_n$ ,  $\{f_n\}$  est une famille totale et la suite doit vérifier  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\phi(\alpha_n)| < +\infty$ .

**Example 1.** L'opérateur  $\widehat{a}_-$  défini par

$$\widehat{a}_-\varphi = \phi \left( \frac{1 - i \{\widehat{x}, \widehat{p}\}}{2} \right) \varphi, \varphi \in L^2([0, 1])$$

est un opérateur à domaine dense. La famille  $\{f_n\}$  définie par

$$f_n = x^{2n}$$

est une famille totale de  $L^2([0, 1])$  par le théorème de Müntz et si  $\widehat{L}$  et  $\widehat{L}^{-1}$  sont des opérateurs de Gram-Schmidt associé à cette suite, on a si  $\widehat{A}_- = \widehat{L}\widehat{a}_-\widehat{L}^{-1}$

$$\widehat{A}_-e_n = \left( \zeta(-2n) + \frac{1}{1+2n} \right) e_n = \frac{1}{1+2n} e_n, \zeta(-2n) = 0 \text{ pour } n \geq 1 \quad (10.1)$$

cet opérateur est prolongeable en un opérateur de Hilbert-Schmidt car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+2n)^2} < +\infty$$

mais n'est pas un opérateur à trace puisque  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2n}$  diverge. On en déduit que pour tout suite totale  $\{\alpha_n\}$  pour l'opérateur  $\frac{1-i\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2}$  de  $L^2([0, 1])$ , la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(-\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n}$$

est divergente. En particulier, si  $\{\rho \in \mathcal{Z}(\zeta) : \operatorname{Re}(\rho) < \frac{1}{2}\} \neq \emptyset$ , la série

$$\sum_{\rho, \operatorname{Re}(\rho) < \frac{1}{2}} \frac{1}{|1-\rho|} \leq \sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|} < +\infty$$

est absolument convergente, donc la famille

$$\left\{ x^{-\rho} : \rho \in \mathcal{Z}(\zeta), \operatorname{Re}(\rho) < \frac{1}{2} \right\}$$

n'est pas totale dans  $L^2([0, 1])$ .

Sur  $\mathcal{H}$  un sous-espace de Hilbert de  $L^2([a, b])$ , l'opérateur  $\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}$  vérifie

$$\begin{aligned} \widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}\varphi &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\varphi) \phi(\alpha_n) e_n, \quad \varphi = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(\varphi) e_n \\ \widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}\varphi(x) &= \int_a^b \varphi(t) k(t, x) dt \end{aligned}$$

où

$$k(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(\alpha_n) \overline{e_n(t)} e_n(x),$$

$\widehat{L}\widehat{T}_\phi\widehat{\mathcal{L}}$  est un opérateur à noyau pour  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\phi(\alpha_n)|^2 < +\infty$  et de norme dans  $L^2([a, b]) \times L^2([a, b])$ ,

$$\|k\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\phi(\alpha_n)|^2.$$

Cet opérateur est autodjoint si,

$$\overline{k(t, x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \overline{\phi(\alpha_n) e_n(t) e_n(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi(\alpha_n) \overline{e_n(x)} e_n(t) \quad [12].$$

## 11. OPÉRATEUR DE BERRY-KEATING GÉNÉRALISÉ

On propose, dans ce qui suit, une généralisation de l'opérateur de Berry-Keating comme suit,

$$\widehat{L}_\phi = \left\{ \widehat{\phi}, \widehat{p} \right\}$$

où  $\phi$  est une fonction au moins de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$ , à valeurs dans  $]0, +\infty[$ , et  $\widehat{\phi}$  est l'opérateur de multiplication par  $\phi$  avec pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$ , on a

$$\widehat{L}_\phi\varphi = -i\phi\varphi' - i(\phi\varphi)' = -2i\phi\varphi' - i\phi'\varphi, \quad \varphi \in \operatorname{dom} \widehat{L}.$$

On peut écrire, formellement

$$\int_a^b \overline{\widehat{L}_\phi\varphi\psi} = -2i [\overline{\varphi\phi\psi}]_{a^+}^{b^-} + \int_a^b \overline{\varphi} \widehat{L}_\phi\psi, \quad (11.1)$$

en particulier si les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à

$$\mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[) = \left\{ \varphi \in \text{dom } \widehat{L}_\phi : \lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x)^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x)^{\frac{1}{2}} \varphi(x) \right\}$$

l'équation 11.1 est vérifiée, on a le lemme suivant.

**Lemma 11.**  $\mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[)$  est un domaine de symétrisation de  $\{\widehat{\phi}, \widehat{p}\}$ .

La fonction

$$\psi \in \left( \pm 1 + i\widehat{L}_\phi \right) \mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[)$$

si et seulement si il existe une fonction  $\varphi \in \mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[)$  telle que

$$\left( \pm 1 + i\widehat{L}_\phi \right) \varphi = \psi,$$

les candidats possibles vérifient l'équation différentielle

$$2\phi\varphi' + (\epsilon + \phi')\varphi = \psi, \quad \epsilon = \pm 1$$

$$\varphi' + \frac{1}{2} \frac{\epsilon + \phi'}{\phi} \varphi = \frac{1}{2} \frac{\psi}{\phi}$$

les solutions sont de la forme

$$\varphi = Ke^{-\Phi}$$

où  $\Phi$  est une primitive de  $\frac{1}{2} \frac{\epsilon + \phi'}{\phi}$  sur  $]a, b[$

$$K(x) = \frac{1}{2} \int_a^x \frac{e^{\Phi(t)} \psi(t)}{\phi(t)} dt + k, \quad \alpha \in ]a, b[$$

une condition nécessaire pour que  $\varphi \in \mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[)$  est

$$k = \frac{1}{2} \frac{B}{A - B} \int_a^b \frac{e^{\Phi(t)} \psi(t)}{\phi(t)} dt$$

avec

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x)^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi(x)} \quad \text{et} \quad B = \lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x)^{\frac{1}{2}} e^{-\Phi(x)}.$$

**Definition 14.** L'application  $\phi$  de  $L^2 (]a, b[)$  est "autoadjointe" si

$$\text{Im} \left( \pm 1 + i\widehat{L}_\phi \right) = L^2 (]a, b[).$$

On dit que l'application  $\phi$  de  $L^2 (]a, b[)$  est "essentiellement autoadjointe" si

$$\text{Im} \left( \pm 1 + i\widehat{L}_\phi \right)$$

est dense dans  $L^2 (]a, b[)$ .

**Theorem 9.** Si  $\phi$  est autoadjointe alors l'opérateur  $\widehat{L}_\phi$  restreint à  $\mathfrak{D}_{0,\phi} (]a, b[)$  est un opérateur autoadjoint.

La fonction propre  $\varphi$  de  $\widehat{L}_\phi$  associée à la valeur propre  $\lambda$  vérifie

$$2\phi\varphi' - i(\lambda + i\phi')\varphi = 0$$

$$\varphi' + \frac{-i\lambda + \phi'}{2\phi} \varphi = 0,$$

$$\varphi(x) = ke^{-\Lambda(x)}$$

où  $\Lambda$  est une primitive de  $\frac{-i\lambda + \phi'}{2\phi}$  sur  $]a, b[$ , à savoir

$$\Lambda(x) = \int_a^x \frac{-i\lambda + \phi'(t)}{2\phi(t)} dt.$$

**Theorem 10.** *Si  $\phi$  est essentiellement autoadjointe, les valeurs  $\lambda$  pour lesquelles,*

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \phi(x)^{\frac{1}{2}} e^{-\Lambda(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \phi(x)^{\frac{1}{2}} e^{-\Lambda(x)}, \quad (11.2)$$

sont réelles.

*Proof.* La fonction

$$\varphi(x) = e^{-\Lambda(x)}$$

associée à la valeur propre  $\lambda$  est une fonction propre pour l'opérateur de Berry-Keating généralisé défini par la fonction  $\phi$  qui est un opérateur essentiellement autoadjoint, donc  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Theorem 11.** *La fonction*

$$\phi(x) = x^{-\alpha}, \quad x \in ]0, 1[ \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

est essentiellement autoadjointe dans  $L^2(]0, 1[)$ .

*Proof.* On a, si  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ,  $x^{-\alpha} \in L^2(]0, 1[)$  et

$$\frac{1}{2} \frac{\epsilon + \phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon - \alpha x^{-\alpha-1}}{x^{-\alpha}} = \frac{\epsilon x^\alpha - \alpha x^{-1}}{2}$$

$$\Phi(x) = \frac{\epsilon x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)} - \frac{\alpha}{2} \log(x)$$

$$K(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{e^{\Phi(t)} \psi(t)}{\phi(t)} dt + k = \frac{1}{2} \int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\epsilon t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} \psi(t) dt + k$$

$$\varphi(x) = \left( \frac{1}{2} \int_0^x t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\epsilon t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} \psi(t) dt + k \right) x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{\epsilon x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{\epsilon x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} = 1 \quad \text{et} \quad B = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{-\frac{\epsilon x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} = e^{-\frac{\epsilon}{2(\alpha+1)}}$$

$$k = \frac{1}{2} \frac{e^{-\frac{\epsilon}{2(\alpha+1)}}}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{2(\alpha+1)}}} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\epsilon t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} \psi(t) dt,$$

si  $\psi \in \mathcal{D}(]0, 1[)$ , la fonction

$$\varphi(x) = K(x) e^{-\Phi(x)}$$

est bien définie car  $K(x)$  est définie puisque la fonction

$$t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{\epsilon t^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}} \psi(t)$$

est nulle dans voisinage de 0 et appartient à  $L^2(]0, 1[)$ .  $\square$

**Remark 12.** *Les fonctions propres associées à la valeur propre  $\lambda$  sont proportionnelles à*

$$\varphi(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} e^{i \frac{\lambda x^{\alpha+1}}{2(\alpha+1)}},$$

les valeurs propres pour lesquelles 11.2 est réalisée, sont de la forme

$$\lambda = 4k(\alpha+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

12. LES ISOMÉTRIES  $\widehat{\ln}$  ET  $\widehat{e\mathbf{x}}$ 

On rappelle que les fonctions  $f$  dérivables sur un intervalle ouvert de  $I \subset \mathbb{R}$ , qui sont fonctions propres pour les opérateurs  $\widehat{p}$  et  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$  sont proportionnelles, pour l'opérateur  $\widehat{p}$ , à

$$f_\rho(x) = e^{-\rho x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

associées à la valeur propre  $\rho$ . Pour l'opérateur  $\{\widehat{x}, \widehat{p}\}$ , elles sont proportionnelles à

$$g_\rho(x) = x^{-\rho}, \quad x \in ]0, +\infty[ \quad (12.2)$$

associées à la valeur propre

$$i(2\rho - 1).$$

On munit  $]0, +\infty[$  de sa mesure de Haar  $\frac{dx}{x}$ , les opérateurs

$$\widehat{e\mathbf{x}} : L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dx), \quad \widehat{e\mathbf{x}}\varphi(x) = \varphi \circ \exp(x)$$

et

$$\widehat{\ln} : L^2(\mathbb{R}, dx) \rightarrow L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right), \quad \widehat{\ln}\psi(x) = \psi \circ \log(x),$$

vérifient par le théorème de changement de variable

$$s = \log(x),$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \overline{\widehat{\ln}\varphi(x)} \widehat{\ln}\psi(x) \frac{dx}{x} &= \int_0^{+\infty} \overline{\varphi \circ \log(x)} \psi \circ \log(x) \frac{dx}{x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(s)} \psi(s) ds. \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont des isométries d'espaces de Hilbert avec

$$\widehat{\ln} \circ \widehat{e\mathbf{x}} = 1 \quad \text{et} \quad \widehat{e\mathbf{x}} \circ \widehat{\ln} = 1.$$

L'opérateur  $\widehat{p}$  est un opérateur symétrique comme opérateur de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ , en effet,  $\text{dom } \widehat{p}$  est un domaine de symétrie de  $\widehat{p}$  car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$$

L'opérateur de Berry-Keating réduit, à savoir,  $\widehat{x\widehat{p}}$  comme opérateur de

$$L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right)$$

a pour domaine de symétrie

$$\mathfrak{D}^0(]0, +\infty[) = \left\{ \varphi \in \text{dom } \widehat{x\widehat{p}} : \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right\}$$

qui correspond au même domaine de symétrie de l'opérateur  $\widehat{p}$  considéré comme un opérateur de  $L^2(]0, +\infty[, dx)$ . On a le diagramme commutatif,

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, dx) & \xrightarrow{\widehat{p}} & L^2(\mathbb{R}, dx) \\ \widehat{e\mathbf{x}} \uparrow & & \widehat{\ln} \downarrow \\ L^2(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}) & \xrightarrow{\widehat{x\widehat{p}}} & L^2(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}) \end{array}, \quad (12.3)$$



$$\begin{aligned}\widehat{\ln\widehat{p}\widehat{e}x}(\varphi)(x) &= \widehat{\ln\widehat{p}}(\varphi(e^t)) = \widehat{\ln}\left(-i(\varphi(e^t))'\right) \\ &= \widehat{\ln}\left(-ie^t\varphi'(e^t)\right) = -ix\varphi'(x) = \widehat{x\widehat{p}}(\varphi)(x), \quad x = e^t\end{aligned}$$

et

$$\widehat{\ln\widehat{p}\widehat{e}x} = \widehat{\ln\widehat{p}}\widehat{\ln}^{-1} = \widehat{x\widehat{p}}. \quad (12.4)$$

**Remark 13.** Dans l'équation 12.4, dans le premier membre  $\widehat{p}$  est l'opérateur quantique de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . Dans le second membre l'opérateur  $\widehat{p}$  est l'opérateur quantique de  $L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right)$ .

Si  $]a, b[$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , on pose  $\alpha = e^a$  et  $\beta = e^b$ , le diagramme précédent s'écrit

$$\begin{array}{ccc} L^2(]a, b[, dx) & \xrightarrow{\widehat{p}} & L^2(]a, b[, dx) \\ \widehat{e}x \uparrow & & \widehat{\ln} \downarrow \\ L^2(] \alpha, \beta[, \frac{dx}{x}) & \xrightarrow{\widehat{x\widehat{p}}} & L^2(] \alpha, \beta[, \frac{dx}{x}) \end{array},$$

l'opérateur de Berry-Keating réduit restreint à

$$\mathfrak{D}^0(] \alpha, \beta[) = \left\{ \varphi \in L^2\left(] \alpha, \beta[, \frac{dx}{x}\right) : \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) \right\}$$

est un opérateur essentiellement autoadjoint. Soit  $\phi$  un difféomorphisme de  $] \alpha, \beta[$  sur  $]a, b[$  avec  $\phi' > 0$  où  $] \alpha, \beta[$  et  $]a, b[$  sont des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ . Les opérateurs  $\widehat{\Phi}$  et  $\widehat{\Phi}^{-1}$  sont définis par

$$\widehat{\Phi}\varphi = \varphi \circ \phi, \quad \varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\widehat{\Phi}^{-1}\varphi = \varphi \circ \phi^{-1}, \quad \varphi : ] \alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{C},$$

le théorème de changement de variable permet d'écrire

$$\left\langle \widehat{\Phi}\varphi, \widehat{\Phi}\psi \right\rangle_{L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx)} = \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(]a, b[, dx)},$$

$\widehat{\Phi}$  est une isométrie de  $L^2(]a, b[, dx)$  sur  $L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx)$  et  $\widehat{\Phi}^{-1}$  est l'isomorphisme réciproque. L'opérateur de Berry-Keaton généralisé réduit, est défini par

$$\widehat{\frac{1}{\phi'}}\widehat{p}\varphi = -i\frac{\varphi'}{\phi'}, \quad \varphi \in L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx)$$

et si on pose

$$\mathfrak{D}^0(] \alpha, \beta[) = \left\{ \varphi \in L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx) : \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x) \right\}.$$

est un domaine de symétrisation de l'opérateur de Berry-Keaton généralisé réduit, l'image de

$$\epsilon + i\widehat{\frac{1}{\phi'}}\widehat{p}$$

est dense dans

$$L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx).$$

On en déduit le théorème suivant,

**Theorem 12.** Si  $]a, b[$  est borné, l'opérateur  $\widehat{\frac{1}{\phi'}}\widehat{p}|_{\mathfrak{D}^0(] \alpha, \beta[)}$  est un opérateur essentiellement autoadjoint comme opérateur de  $L^2(] \alpha, \beta[, \phi'(x)dx)$ .

*Proof.* On a

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}\widehat{p}\widehat{\Phi}^{-1}\varphi &= \widehat{\Phi}\widehat{p}(\varphi \circ \phi^{-1}) = -i\widehat{\Phi}(\varphi' \circ \phi^{-1})(\phi^{-1})' = -i\widehat{\Phi}(\varphi' \circ \phi^{-1})\frac{1}{\phi' \circ \phi^{-1}} \\ &= -i\frac{\varphi'}{\phi'} = \frac{1}{\phi'}\widehat{p}\varphi, \forall \varphi \in L^2(]a, \beta[, \phi'(x) dx),\end{aligned}$$

si  $]a, b[$  est borné, l'opérateur  $\widehat{p}$  de  $L^2(]a, b[, dx)$  restreint à

$$\mathfrak{D}_0(]a, b]) = \left\{ \varphi \in L^2(]a, b[, dx) : \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) \right\}$$

est un opérateur essentiellement autoadjoint, par isométrie l'opérateur  $\frac{1}{\phi'}\widehat{p}$  de

$$L^2(]a, \beta[, \phi'(x) dx)$$

restreint à  $\mathfrak{D}^0(]a, \beta[)$  est un opérateur essentiellement autoadjoint.  $\square$

**Remark 14.** L'intervalle  $]a, \beta[$  n'est pas nécessairement borné.

L'opérateur  $\widehat{p}$  comme opérateur de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  est un opérateur symétrique. La symétrie sur  $\text{dom } \widehat{p}$  s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\widehat{p}\varphi}\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{-i\varphi'}\psi = i[\varphi\psi]_{-\infty}^{+\infty} - i \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}\psi' = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi}\widehat{p}\psi$$

car si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$  alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

L'espace  $\text{Im}(\pm 1 + i\widehat{p})$  est formé des fonctions  $\phi$  pour lesquelles il existe une fonction  $\varphi \in \text{dom } \widehat{p}$  telle que

$$\varphi + \varphi' = -\phi \text{ ou } \varphi - \varphi' = \phi,$$

les fonctions, qui vérifient une de ces équations différentielles, sont de la forme

$$\varphi(x) = e^{-x} \left( - \int_a^x \phi(t) e^t dt + K \right) \text{ ou } \varphi(x) = e^x \left( \int_a^x \phi(t) e^{-t} dt + K \right), a \in \mathbb{R}.$$

Si  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on note  $[\alpha, \beta]$  le support de  $\phi$  alors

$$\varphi(x) = -e^{-x} \int_{\alpha}^x \phi(t) e^t dt,$$

est solution de  $\varphi + \varphi' = -\phi$  et vérifie

$$\varphi(x) = 0, x < \alpha \text{ et } \varphi(x) = -e^{-x} \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^t dt \text{ si } x > \beta \quad (12.5)$$

cette fonction est une fonction de  $\text{dom } \widehat{p}$ . La fonction

$$\varphi(x) = e^x \int_{\beta}^x \phi(t) e^{-t} dt$$

est solution de  $\varphi - \varphi' = \phi$  et vérifie

$$\varphi(x) = 0 \text{ si } x > \beta \text{ et } \varphi(x) = -e^x \int_{\alpha}^{\beta} \phi(t) e^{-t} dt \text{ si } x < \alpha, \quad (12.6)$$

on a encore  $\varphi \in \text{dom } \widehat{p}$ . On en déduit que

**Theorem 13.** *L'opérateur  $\widehat{x}$  est un opérateur de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ , à domaine dense, autoadjoint et l'opérateur  $\widehat{p}$  est un opérateur essentiellement autoadjoint de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ .*

*Proof.* La symétrie de ces deux opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  a été vérifiée précédemment. On a

$$\text{Im}(\epsilon + i\widehat{x}) = L^2(\mathbb{R}, dx)$$

car pour  $\phi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$  alors

$$\varphi = \frac{\phi}{\epsilon + ix} \in \text{dom}(\epsilon + ix).$$

En utilisant 12.5 et 12.6, l'équation différentielle

$$\epsilon\varphi + \varphi' = \phi$$

a pour solution pour  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , si  $\epsilon = 1$

$$\varphi(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x \phi(t) e^t dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

pour  $\epsilon = -1$

$$\varphi(x) = -e^x \int_x^{+\infty} \phi(t) e^{-t} dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \text{Im}(\epsilon + i\widehat{x}),$$

$\text{Im}(\epsilon + i\widehat{x})$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . □

**Corollary 5.** *L'opérateur de Berry-Keating  $\widehat{x}\widehat{p}$  réduit est un opérateur essentiellement autoadjoint de  $L^2(]0, +\infty[, \frac{dx}{x})$ .*

*Proof.* La relation,

$$\widehat{x}\widehat{p} = \widehat{\ln}\widehat{p}\widehat{e\hat{x}}, \quad \widehat{e\hat{x}} = \widehat{\ln}^{-1}$$

permet de conclure. □

**Definition 15.** *Soit  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  deux espaces de Hilbert et*

$$\widehat{h}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1 \quad \text{et} \quad \widehat{h}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

*deux opérateurs à domaine dense. Les opérateurs  $\widehat{h}_1$  et  $\widehat{h}_2$  sont conjugués isomorphiquement s'il existe un isomorphisme  $\widehat{j}$  de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$  telle que  $\widehat{h}_2 = \widehat{j}\widehat{h}_1\widehat{j}^{-1}$ . Si  $\widehat{j}$  est une isométrie, on dit que la conjugaison est isométrique. Si  $\widehat{h}_1$  est un opérateur à domaine dense essentiellement autoadjoint, on dit que l'opérateur  $\widehat{h}_2$  de  $\mathcal{H}_2$ , est essentiellement pseudo-autoadjoint.*

**Remark 15.** *Les opérateurs  $\widehat{x}\widehat{p}$  et  $\widehat{p}$  sont conjugués isométriquement.*

### 13. LA TRANSFORMÉE DE FOURIER ET LES OPÉRATEURS $\widehat{\square}_\alpha$ ET $\widehat{\Delta}_\alpha$

La représentation fréquentielle de la transformée de Fourier est l'opérateur de  $L^2(\mathbb{R})$  défini par

$$\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt, \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}),$$

pour cet opérateur

$$\|\widehat{\mathcal{F}}\varphi\| = \|\varphi\|, \quad \widehat{\mathcal{F}}^\dagger = \widehat{\mathcal{F}}^{-1}.$$

**Lemma 12.** *Sur les domaines où les opérateurs sont définis, on a*

$$\begin{aligned}\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}} &= -2\pi\widehat{\mathcal{F}}\widehat{x} \\ \widehat{x}\widehat{\mathcal{F}} &= \frac{1}{2\pi}\widehat{\mathcal{F}}\widehat{p}.\end{aligned}$$

*Proof.* Pour les fonctions  $\varphi$  pour lesquelles ces expressions sont définies,

$$\begin{aligned}\widehat{p}\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi) &= -i\partial_\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \partial_\xi e^{-2i\pi\xi t} dt \\ &= -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt = -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{t}\varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt = -2\pi\widehat{\mathcal{F}}\widehat{x}\varphi(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{x}\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi) &= \xi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \xi e^{-2i\pi\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{-2i\pi} \varphi(t) \partial_t e^{i\xi t} dt \\ &= \frac{1}{-2i\pi} [\varphi(t) \partial_t e^{i\xi t}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t \varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p}\varphi(t) e^{-2i\pi\xi t} dt = \frac{1}{2\pi}\widehat{\mathcal{F}}\widehat{p}\varphi(\xi).\end{aligned}$$

□

On peut utiliser les relations précédentes pour étudier certains opérateurs. Soit  $\alpha \neq 0$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  avec  $\text{supp } \varphi \subset ]-\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\alpha}|[$ , l'opérateur  $\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\square}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$  où  $\widehat{\square}_\alpha$  est défini en 2.2, vérifie

$$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\square}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(2i\pi\alpha\xi)^n}{n!} \varphi(\xi) = \frac{2i\pi\alpha\xi}{e^{2i\pi\alpha\xi} - 1} \varphi(\xi)$$

car le rayon de convergence de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n t^n}{n!}$$

est  $2\pi$  et sur  $]-2\pi, 2\pi[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

**Lemma 13.** *Pour  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , l'opérateur  $\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\square}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$  restreint à  $\mathcal{D}\left(]-\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\alpha}|[ \right)$ , s'identifie à*

$$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\square}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1} = \frac{\widehat{2i\pi\alpha x}}{e^{2i\pi\alpha x} - 1}.$$

Pour l'opérateur  $\widehat{\Delta}_\alpha$  défini en 2.1, on a le lemme suivant,

**Lemma 14.** *L'opérateur  $\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\Delta}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$  vérifie*

$$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\Delta}_\alpha\widehat{\mathcal{F}}^{-1} = 1 - \widehat{e^{2i\pi\alpha x}},$$

et l'opérateur de Berry-Keating est invariant par conjugaison pour  $\widehat{\mathcal{F}}$ ,

$$\widehat{\mathcal{F}} \{\widehat{x}, \widehat{p}\} \widehat{\mathcal{F}}^{-1} = \{\widehat{x}, \widehat{p}\}.$$

**Lemma 15.** Si  $\varphi \in L^2(]0, +\infty[, \frac{dx}{x})$  alors

$$\widehat{\ln \mathcal{F} \ln^{-1}} \varphi(\xi) = \widehat{\mathcal{M}} \varphi(-2i\pi \log(\xi))$$

où  $\widehat{\mathcal{M}}$  est la transformée de Mellin de  $\varphi$  en  $-2i\pi \log(\xi)$ .

*Proof.* Soit  $\varphi \in L^2(]0, +\infty[, \frac{dx}{x})$

$$\begin{aligned} \widehat{\ln \mathcal{F} \ln^{-1}} \varphi(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^t) e^{-2i\pi t \log(\xi)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(u) e^{-2i\pi \log(u) \log(\xi)} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(u) u^{-2i\pi \log(\xi) - 1} du = \widehat{\mathcal{M}} \varphi(-2i\pi \log(\xi)) \end{aligned}$$

en posant  $u = e^t$ . □

#### 14. L'OPÉRATEUR DE BERRY-STIELTJES

Les espaces de Sobolev

$$H^n(\mathbb{R}) = W^{n,2}(\mathbb{R}),$$

sont les espaces de Hilbert définis par

$$\begin{aligned} H^n(\mathbb{R}) &= \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^n d\xi < +\infty \right\} \\ &= \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{\mathcal{F}}\varphi \in L^2(\mathbb{R}, (1 + x^2)^n dx) \right\} \end{aligned}$$

donc,

$$H^n(\mathbb{R}) = \widehat{\mathcal{F}}^{-1} \left( L^2(\mathbb{R}, (1 + x^2)^n dx) \right).$$

L'opérateur  $\widehat{p}$  est un opérateur continu de  $H^{n+1}(\mathbb{R})$  dans  $H^n(\mathbb{R})$ , si  $\varphi \in \text{dom } \widehat{p}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\widehat{p}\varphi(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^n d\xi &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\xi}\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^n d\xi \\ &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi)|^2 \xi^2 (1 + \xi^2)^n d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\widehat{p}\varphi(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^n d\xi &= 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^{n+1} d\xi - 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\mathcal{F}}\varphi(\xi)|^2 d\xi \\ \|\widehat{p}\varphi\|_{H^n(\mathbb{R})}^2 &= 4\pi^2 \|\widehat{p}\varphi\|_{H^{n+1}(\mathbb{R})}^2 - 4\pi^2 \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (14.1)$$

en particulier,

$$\|\widehat{p}\varphi\|_{H^n(\mathbb{R})} \leq 2\pi \|\varphi\|_{H^{n+1}(\mathbb{R})}.$$

**Lemma 16.** L'opérateur  $\widehat{p}^n$  est un opérateur continu de  $H^n(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ .

*Proof.* L'opérateur  $\widehat{p}^n$  comme opérateur de  $H^n(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  est continu par composition d'opérateurs continus.

$$H^n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\widehat{p}} H^{n-1}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\widehat{p}} H^{n-2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\widehat{p}} \dots \xrightarrow{\widehat{p}} H^1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\widehat{p}} L^2(\mathbb{R}, dx).$$

□

L'opérateur de dérivation de Stieltjes associé à une fonction entière  $\varsigma$  est défini par

$$\widehat{t}_\varsigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widehat{p}^n \text{ où } \varsigma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \forall z \in \mathbb{C}$$

et on pose

$$\widehat{\varsigma}\varphi = \phi_\varsigma\varphi$$

où  $\phi_\varsigma$  est la fonction définie par

$$\phi_\varsigma(x) = \varsigma(2\pi x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Lemma 17.** Pour  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ , si les fonctions

$$\varphi_n(x) = x^n \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (14.2)$$

vérifient les conditions

$$\varphi_n \in L^1(\mathbb{R}, dx), \forall n \text{ et } \phi_\varsigma\varphi \in L^1(\mathbb{R}, dx)$$

alors

$$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{t}_\varsigma\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi = \widehat{\varsigma}\varphi. \quad (14.3)$$

*Proof.* Si  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}\widehat{t}_\varsigma\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi) &= \widehat{\mathcal{F}}\widehat{t}_\varsigma \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{2i\pi\xi t} dt = \widehat{\mathcal{F}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-i)^n a_n \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{2i\pi\xi t} dt \right) \\ &= \widehat{\mathcal{F}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (2\pi)^n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) e^{2i\pi\xi t} dt \right) \text{ car } \varphi_n \in L^1(\mathbb{R}, dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}\widehat{t}_\varsigma\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\varphi(\xi) &= \widehat{\mathcal{F}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\varsigma\varphi(t) e^{2i\pi\xi t} dt \right) \text{ car } \phi_\varsigma\varphi \in L^1(\mathbb{R}, dx) \\ &= \phi_\varsigma\varphi(\xi). \end{aligned}$$

□

**Theorem 14.** Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ , on a

$$\widehat{t}_\varsigma\varphi = \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}\varphi$$

si

$$\widehat{\mathcal{F}}\varphi \in \mathcal{E},$$

où

$$\mathcal{E} = \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx) : \varphi_n \in L^1(\mathbb{R}, dx), \forall n \text{ et } \phi_\varsigma\varphi \in L^1(\mathbb{R}, dx) \}. \quad (14.4)$$

Si  $\varsigma \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ , la relation est vérifiée sur la base hilbertienne formée des fonctions de Hermite-Gauss

$$\psi_n(x) = 2^{\frac{1}{4}} \left(\sqrt{n!}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi x^2} H_n(2x\sqrt{\pi})$$

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{n!}{k!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

en particulier,

$$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\psi_n = \widehat{\varsigma}\psi_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a la majoration de Cramèr-Indritz [5]

$$\|\psi_n\|_\infty \leq \pi^{-\frac{1}{4}},$$

on en déduit que  $\psi_n \in \text{dom } \widehat{\varsigma}$  et  $\psi_n \in \text{dom } \widehat{\mathcal{F}}\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ , les relations

$$\widehat{\mathcal{F}}\psi_n = (-i)^n \psi_n$$

permettent d'écrire

$$\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma\psi_n = \widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}\psi_n, \forall n.$$

De plus la norme infinie de  $\|\widehat{\varsigma}\|_\infty$  est finie, l'opérateur  $\widehat{\varsigma}$  est un opérateur borné de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$

$$\|\widehat{\varsigma}\varphi\|_2 \leq \|\widehat{\varsigma}\|_\infty \|\varphi\|_2, \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}, dx),$$

$$\text{dom } \widehat{\varsigma} = L^2(\mathbb{R}, dx) \text{ et } \text{dom } \widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma \neq L^2(\mathbb{R}, dx).$$

**Theorem 15.** *Si  $\varsigma \in L^2(\mathbb{R}, dx)$  et  $\varsigma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , l'opérateur de dérivation de Stieltjes associé à  $\varsigma$ , restreint à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , admet une extension hermitienne de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  qui est donnée par  $\widehat{\mathcal{F}}^{-1}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}$  où  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est l'espace de Schwartz.*

*Proof.* L'opérateur  $\widehat{\varsigma}$  est un opérateur symétrique car  $\varsigma$  est à valeurs réelles, c'est un opérateur hermitien de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . L'opérateur de dérivation de Stieltjes associé à  $\varsigma$  vérifie sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma = \widehat{\mathcal{F}}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}^{-1},$$

$\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$  est un opérateur hermitien de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  car  $\widehat{\varsigma}$  est hermitien,  $\widehat{\mathcal{F}}$  est borné et  $\widehat{\mathcal{F}}^{-1} = \widehat{\mathcal{F}}^\dagger$ . L'opérateur  $\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma$  restreint à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  admet pour extension continue l'opérateur hermitien  $\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ .  $\square$

**Remark 16.** *On peut remplacer l'espace de Schwartz par  $\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ .*

**Corollary 6.** *Si  $\varsigma \in L^2(\mathbb{R}, dx)$  et  $\varsigma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ , l'opérateur de Berry-Stieltjes réduit*

$$\widehat{\mathfrak{s}}_\varsigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\widehat{x}\widehat{p})^n$$

*réduit à  $\widehat{\text{ln}}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$ , admet une extension hermitienne dans  $L^2([0, +\infty[, \frac{dx}{x})$ , notée  $\widehat{\mathfrak{r}}_\varsigma$ .*

*Proof.* Sur  $\widehat{\text{ln}}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$

$$\widehat{\mathfrak{s}}_\varsigma = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\widehat{x}\widehat{p})^n = \widehat{\text{ln}}\widehat{\mathfrak{t}}_\varsigma\widehat{\text{ln}}^{-1},$$

en utilisant l'équation 12.4,

$$\begin{aligned}\widehat{s}_\zeta &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left( \widehat{\ln p} \widehat{\ln}^{-1} \right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \widehat{\ln p}^n \widehat{\ln}^{-1} \\ &= \widehat{\ln}_\zeta \widehat{\ln}^{-1}.\end{aligned}$$

L'opérateur  $\widehat{\tau}_\zeta$  est un opérateur symétrique de  $L^2 \left( ]0, +\infty[, \frac{dx}{x} \right)$  qui admet une extension hermitienne de la forme

$$\widehat{\tau}_\zeta = \widehat{\ln} \widehat{\mathcal{F}} \widehat{\zeta} \left( \widehat{\ln} \widehat{\mathcal{F}} \right)^{-1}.$$

□

### 15. QUELQUES REMARQUES SUR LA CONJECTURE DE HILBERT-PÓLYA

Dans la version 1 du présent document la fonction  $\zeta$  utilisée était définie par

$$\zeta(z) = \zeta(1-z) + \zeta(z) + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z}$$

cette fonction est développable en série entière en utilisant le développement en série de Laurent de  $\zeta$ . Sur  $\mathbb{R}$ , on a bien

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) + \frac{1}{1-x} = 1,$$

mais  $\zeta(x)$  est non borné pour  $x < 0$ . Pour approcher la conjecture de Hilbert-Pólya on est amené à construire des opérateurs autoadjoints. On remarque, par exemple, que les fonctions

$$\varsigma_1(z) = e^{-z^2} (1 + \Xi(z))$$

et

$$\varsigma_2(z) = e^{-z^2} (z + \Xi(z))$$

où

$$\Xi(z) = \xi\left(\frac{1}{2} + iz\right), \quad \xi(z) = \frac{1}{2} z(z-1) \pi^{-\frac{z}{2}} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \zeta(z)$$

sont des fonctions entières d'ordre 1. En particulier, il existe une constante  $A > 0$  telle que pour  $|x| > A$ ,

$$|\Xi(x)| \leq e^{|x|}$$

et

$$|\varsigma_1(x)| \leq e^{-x^2} (1 + e^{|x|}) \quad \text{et} \quad |\varsigma_2(x)| \leq e^{-x^2} (|x| + e^{|x|}), \quad |x| > A$$

donc,

$$\|\varsigma_1\|_\infty < +\infty \quad \text{et} \quad \|\varsigma_2\|_\infty < +\infty$$

et sont des fonctions entières à valeurs réelles sur  $\mathbb{R}$ . Les opérateurs associés

$$\widehat{\tau}_{\varsigma_1} \quad \text{et} \quad \widehat{\tau}_{\varsigma_2}$$

sont des opérateurs hermitiens de  $L^2 \left( ]0, +\infty[, \frac{dx}{x} \right)$ , les classes de  $L^2 \left( ]0, +\infty[, \frac{dx}{x} \right)$  associées aux fonctions

$$\begin{aligned}x_{A,+}^{i\rho} &= \begin{cases} x^{2i\pi\rho} & \text{si } 1 < x < A \\ 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}, \quad \text{Im } \rho > 0 \text{ et } A > 0 \\ x_{A,-}^{i\rho} &= \begin{cases} x^{2i\pi\rho} & \text{si } \frac{1}{A} < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}, \quad \text{Im } \rho < 0 \text{ et } A > 0\end{aligned}$$



sont dans  $L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right)$  pour tout  $\rho$  de partie imaginaire non nulle et  $A > 0$ , mais ne sont pas des fonctions propres de  $\widehat{\tau}_j$ ,  $j = 1, 2$  qui sont les extensions des restrictions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,j} (\widehat{x}\widehat{p})^n \Big|_{\widehat{\ln}\widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{E})}$$

car

$$\widehat{e}x_{A,\pm}^{i\rho} \notin \widehat{\mathcal{F}}(\mathcal{E})$$

où  $\mathcal{E}$  est défini par 14.4.

## 16. CONCLUSION

On a construit, dans cet article, des opérateurs qui permettent de décrire les zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann comme des éléments du spectre de ces opérateurs. Plusieurs procédés de construction sont décrits dans ce document, un outil essentiel utilisé est la notion de séries d'opérateurs développées à partir des familles libres et totales d'un espace de Hilbert. La notion de paire de Gram-Schmidt est un outil qui permet l'extension des séries d'opérateurs à des opérateurs bornés.

L'introduction de la transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  permet de comparer les opérateurs quantiques  $\widehat{x}$  et  $\widehat{p}$ . L'opération de dérivation de Stieltjes, associé à  $\varsigma$  et restreint à  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , s'identifie par transformée de Fourier à l'opérateur  $\widehat{\mathcal{F}}\widehat{\varsigma}\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ , où  $\widehat{\varsigma}$  est l'opérateur de multiplication par  $\phi(x) = \varsigma(2\pi x)$ .

Les opérateurs  $\widehat{\ln}$  et  $\widehat{e}x$  permettent de décrire l'opérateur de Berry-Keating réduit  $\widehat{x}\widehat{p}$  de  $L^2\left(]0, +\infty[, \frac{dx}{x}\right)$  comme le conjugué, en un certain sens, de l'opérateur  $\widehat{p}$  défini comme opérateur de  $L^2(\mathbb{R}, dx)$ . D'autres opérateurs ont été construits, comme les opérateurs de Li, de Dirichlet et les opérateurs Bender, Brody et Müller qui ont été développés pour les espaces de Hilbert de fonctions définies sur des intervalles bornés de  $\mathbb{R}$ .

## REFERENCES

- [1] Bender C., Brody D.C., Müller M. P. "Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function", *Phy. Rev. Letter*, PRL 118, 2017.
- [2] M.V. Berry and J.P. Keating. "H = XP and the Riemann zeros. Symmetry and trace formula: Chaos and disorder", 1999.
- [3] J. Dixmier. "L'adjoint du produit de deux opérateurs fermés", *Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4<sup>e</sup> série* (1947), p. 101-106
- [4] B.C. Hall, "Quantum Theory for mathematicians", *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, June 2013.
- [5] J. Indritz, "An inequality for Mermite polynomials", *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 981-983.
- [6] Bombieri E., Lagarias J.C., "Complements to Li's Criterion for the Riemann Hypothesis", *Journal of Number Theory* 77, 274-287 (1999)
- [7] Li X-J. "The positivity of a sequence of numbers and the Riemann Hypothesis" *Journal of Number Theory* 65, 325-333 (1997)
- [8] V.B. Lidskii. "Non-selfadjoint operators with a trace", *Dokl. Akad. Nauk. SSR*, 125 :485-487, 1959. *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 47 (1965) 43-46.
- [9] DMF:25.11, "Hurwitz Zeta Function", [dmf.nist.gov/25.11](http://dmf.nist.gov/25.11) (2016)
- [10] Olver F.W.J, Lozier D.M., Boisvert R.F, Clark C.W., *NIST Handbook of Mathematical functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2010.
- [11] D. Robert, "Sur les traces d'opérateurs (de Grothendieck à Lidskii)", *SMF*, 2014.
- [12] L. Schwartz, "Théorie des noyaux", *Proceedings of ICM*, 1950.

- [13] I. C Gohberg and M.G. Krein. Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in Hilbert space. Translations of mathematical monographs, vol. 18. A.M.S., 1969.  
*E-mail address:* `jean-louis.jonot@ac-versailles.fr`