



**HAL**  
open science

# Un rapport d'approximation pour le problème de recherche de hiérarchie de recouvrement de poids minimum à branchements bornés

Massinissa Merabet, Sylvain Durand, Miklós Molnár

► **To cite this version:**

Massinissa Merabet, Sylvain Durand, Miklós Molnár. Un rapport d'approximation pour le problème de recherche de hiérarchie de recouvrement de poids minimum à branchements bornés. ALGOTEL, Jun 2019, Saint Laurent de la Cabrerisse, France. hal-02127236

**HAL Id: hal-02127236**

**<https://hal.science/hal-02127236v1>**

Submitted on 13 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un rapport d'approximation pour le problème de recherche de hiérarchie de recouvrement de poids minimum à branchements bornés

Massinissa Merabet<sup>1</sup> Sylvain Durand<sup>2</sup> et Miklos Molnar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>SAMOVAR UMR 5157, ENSIIE, 9 rue Charles Fourier, 91011, Évry, France.

<sup>2</sup>LIRMM, Université Paul-Valéry Montpellier 3, 161 Rue Ada, 34090 Montpellier, France.

<sup>3</sup>LIRMM, Université de Montpellier, 161 Rue Ada, 34090 Montpellier, France.

---

Étant donné un graphe  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  et un entier  $k$ , le problème Branch Vertices Constrained Minimum Spanning Hierarchy (BVCMSH) consiste en la recherche d'une hiérarchie de recouvrement de poids minimum  $\mathcal{H}$  de  $G$  ayant un nombre de sommets de branchements (sommets degré strictement supérieur à deux) inférieur ou égal à  $k$ . Ce problème étant NP-difficile, il ne peut exister d'algorithme efficace résolvant ce problème de manière exacte. Nous proposons dans ce papier un algorithme d'approximation polynomial ayant un ratio  $\rho = 2 \cdot (1 - \frac{k}{|\mathcal{V}|-1})$ . Celui-ci est le meilleur possible en considérant le poids de l'arbre couvrant de poids minimum comme borne inférieure.

**Mots-clés :** Arbre couvrant, Sommet de branchement, Résolution approchée, ratio d'approximation, Branch Vertices Constrained Minimum Spanning Hierarchy

---

## 1 Introduction

L'arbre couvrant est le plus utilisé pour la diffusion de messages dans les réseaux de communication car c'est le sous-graphe connexe permettant de couvrir les sommets en utilisant un minimum de liens. Il existe cependant des applications qui n'imposent pas explicitement un sous-graphe comme solution. Une structure plus flexible appelée « hiérarchie » a été proposée. Les arbres couvrants passent une seule fois par les sommets et les arêtes du graphe, tandis que hiérarchies sont des généralisations des arbres qui peuvent passer plusieurs fois par certains sommets et arêtes. Ceci leur permet de satisfaire les contraintes sur le degré des noeuds plus facilement. Cette structure n'est pas un sous-graphe mais un homomorphisme d'un arbre dans le graphe. Un homomorphisme est une application  $h : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$  entre deux graphes  $Q = (\mathcal{W}, \mathcal{F})$  et  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  qui associe un sommet de  $\mathcal{V}$  à chaque sommet de  $\mathcal{W}$  en préservant l'adjacence. Si  $Q$  est un graphe connexe sans cycle (un arbre) alors le triplet  $(Q, h, G)$  définit une *hiérarchie dans  $G$*  [Mol11].

Dans les réseaux tout-optique, les fonctions de commutation et de routage sont fournies par les brasseurs optiques OXC (optical cross-connect). Certains OXC onéreux, appelés OXC-MC, peuvent diviser une longueur d'onde entrante vers plusieurs ports de sortie grâce à un coupleur optique, afin d'offrir un service *broadcast/multicast* [MJ00]. Cette division génère un affaiblissement du faisceau lumineux ainsi qu'une dégradation du signal (pertes). Mêmes quand les OXC-MC amplifient les lumières divisées, la portée de celles-ci est dégradée ([ZLW<sup>+</sup>17]). Un sommet de branchement dans l'arbre couvrant correspond à un nœud équipé de coupleur optique dans le réseau. Afin de réduire les poids et de limiter les pertes, il convient donc de réduire leur nombre, ou encore de trouver une route avec un nombre limité de nœuds de branchement tout en garantissant la faisabilité du routage. Merabet et al. ont introduit dans [MM13] le problème BVCMSH. Celui-ci est NP-Difficile et est défini comme suit.

**Définition 1.** Étant donné un graphe  $G$  et un entier  $k$ , le problème Branch Vertices Constrained Minimum Spanning Hierarchy (BVCMSH) consiste à rechercher une hiérarchie de recouvrement de poids minimum de  $G$  ayant un nombre de sommets de branchements (sommets degré strictement supérieur à deux) inférieur ou égal à  $k$ .

## 2 Résolution approchée du problème BVCMSH

Le problème BVCMSH est approximable. En effet, il suffit de faire un parcours en longueur de l'arbre couvrant de poids minimum du graphe pour obtenir une hiérarchie réalisable avec un poids inférieur ou égal à deux fois le poids de la hiérarchie optimale. Dans cette section, nous donnons un algorithme permettant de l'approximer avec un ratio  $\rho = 2 \cdot (1 - \frac{k}{|\mathcal{T}'|-1})$ . Cet algorithme s'inspire de l'approche que nous avons développée dans [MDM14], permettant d'obtenir un rapport d'approximation pour un problème voisin. Notre algorithme contient 6 étapes qui se présentent comme suit :

1. Calculer un arbre couvrant de poids minimum  $\mathcal{T}$ . Notons que  $\mathcal{T}$  peut contenir un nombre de sommets de branchement supérieur à la borne  $k$ .
2. Si  $\mathcal{T}$  respecte la borne  $k$ , retourner  $\mathcal{T}$ .
3. Sinon, contracter toutes les chaînes parfaites maximales de  $\mathcal{T}$  (cf, sous-section 2.2).
4. Décomposer cet arbre en un ensemble d'étoiles.
5. Conserver les  $k$  étoiles de plus grand poids dont le sommet central est un sommet de branchement ; parcourir chacune des autres étoiles en utilisant une hiérarchie de recouvrement.
6. Construire une hiérarchie en connectant toutes les "sous-hiérarchies" couvrant les étoiles.

### 2.1 Première étape : Construction d'un arbre de couvrant de poids minimum

L'arbre couvrant de poids minimum (Minimum Spanning Tree, MST) donne trivialement une borne inférieure pour le poids de notre solution approchée. La première étape de notre algorithme est donc de calculer un tel arbre  $\mathcal{T}$ . Le calcul est polynomial et peut être réalisé grâce à l'algorithme de Prim.

### 2.2 Deuxième étape : Contraction des chaînes parfaites de $\mathcal{T}$

Dans un graphe, une chaîne se composant d'au moins deux arêtes ayant des sommets internes de degré deux est dite chaîne parfaite. Si les degrés de deux extrémités sont différents de deux, elle est aussi maximale. Après la construction de  $\mathcal{T}$ , nous contractons toutes les chaînes parfaites maximale : chaque chaîne parfaite maximale est remplacée par une arête entre ses deux extrémités de poids égal à la somme des poids des arêtes supprimées. Nous obtenons ainsi un arbre  $\mathcal{T}'$  ayant un poids égal à celui de  $\mathcal{T}$ . Notons que cette opération ne modifie pas le degré des sommets qui sont des extrémités dans la chaîne parfaite.

### 2.3 Troisième étape : Décomposition en étoiles de l'arbre de couvrant de poids minimum contracté $\mathcal{T}'$

L'arbre  $\mathcal{T}'$  peut être décomposé en un ensemble d'étoiles comme suit. Soit  $v_1$  un sommet de branchement arbitraire de  $\mathcal{T}'$ . Le sommet  $v_1$  peut être considéré comme le sommet central d'une étoile  $S_1$ . Un sommet central d'une étoile correspond à un sommet de branchement (en raison à la contraction de l'étape 2). Certains voisins de  $v_1$  dans  $S_1$  peuvent correspondre à des feuilles de  $\mathcal{T}'$ , les autres voisins de  $v_1$  correspondent à des sommets centraux d'autres étoiles et sont ainsi des sommets de branchement. Récursivement, l'arbre peut être entièrement couvert par des étoiles arête disjointe. La décomposition est illustrée par la Figure 1. Trivialement :  $c(\mathcal{T}') = \sum_{i=1}^k c(S_i)$  ou les  $S_i, i = 1, \dots, k$  sont les étoiles dans la décomposition.

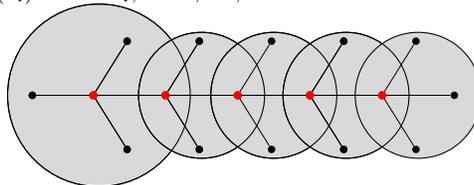


Figure 1. Décomposition en étoiles d'un arbre

## 2.4 Quatrième étape : Recouvrement des étoiles par les hiérarchies

L'arbre  $\mathcal{T}'$  est maintenant décomposé en étoiles. Tout arbre  $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  contient au plus  $\frac{|\mathcal{V}|-1}{2}$  sommets de branchement [CCR14]. Chaque étoile de  $\mathcal{T}'$  contient comme sommet central un sommet de branchement. Le nombre d'étoiles de  $\mathcal{T}'$  est donc borné par  $\frac{|\mathcal{V}|-1}{2}$ . Les  $k$  étoiles de plus grand poids sont conservées dans la hiérarchie approchée. Les autres étoiles (au plus  $\frac{|\mathcal{V}|-1}{2} - k$ ) sont parcourues avec un parcours en profondeur en partant du centre.

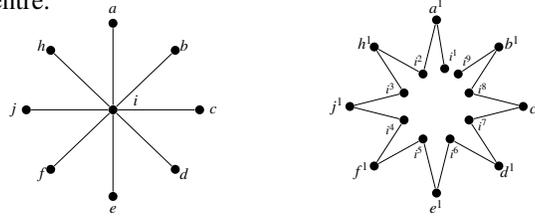


Figure 2. Recouvrement d'une étoile par une hiérarchie

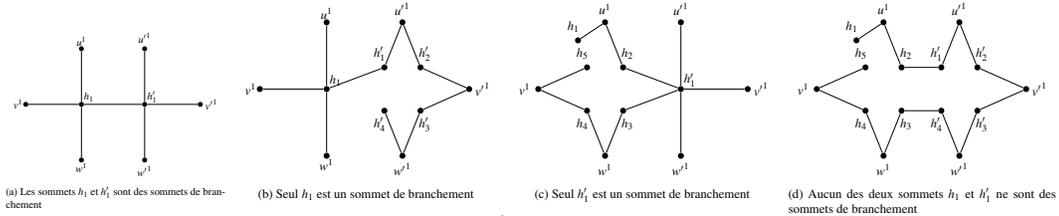
La figure 2 montre le parcours d'une étoile. Ainsi, chaque arête de l'étoile est utilisée (dupliquée) exactement deux fois dans la hiérarchie. Le poids de la hiérarchie de recouvrement de l'étoile est égal à deux fois le poids de l'étoile. Notons que les deux feuilles de la hiérarchie sont deux duplications du sommet central de l'étoile. Une des deux duplications n'est pas nécessaire pour la couverture, mais elle est néanmoins utile pour connecter les sous-hiérarchies couvrant les étoiles (étape 5).

Une fois les étoiles de plus faible poids parcourues par des hiérarchies, on connecte ces hiérarchies et les  $k$  étoiles de plus fort poids afin de former une seule hiérarchie  $\mathcal{H}$  contenant  $k$  sommets de branchement. Notons  $C(AD)$  le poids de la partie dupliquée dans  $\mathcal{H}$  et posons  $n = |V|$ . Ce poids peut être borné par  $C(AD) \leq \frac{\frac{n-1}{2} - k}{\frac{n-1}{2}} \cdot C(\mathcal{T})$ . Nous obtenons ainsi :  $\frac{C(\mathcal{H})}{C(\mathcal{T})} \leq 2 \cdot (1 - \frac{k}{n-1})$ .

## 2.5 Cinquième étape : Connexion des hiérarchies de recouvrement des étoiles

Il est nécessaire de reconnecter les hiérarchies de recouvrement des étoiles afin de former une seule hiérarchie connexe. Une connexion est requise si une feuille dans une étoile coïncide avec le sommet central d'une autre étoile. Soit  $S$  et  $S'$  deux étoiles telles que  $c$  et  $c'$  soient leurs sommets centraux et que le sommet  $c'$  soit une feuille dans l'étoile  $S$ . Notons par  $\mathcal{H}_S$  et par  $\mathcal{H}'_{S'}$  les hiérarchies de recouvrement de  $S$  et de  $S'$ , respectivement. Pour des raisons de clarté, les étiquettes des sommets dans les hiérarchies ne correspondent pas à celles du graphe initial. Notons par  $h_i$  la  $i$ -ème occurrence du sommet  $c$  dans  $\mathcal{H}_S$  et  $h'_i$  la  $i$ -ème occurrence du sommet  $c'$  dans  $\mathcal{H}'_{S'}$ . Notons par  $f_1$  la seule occurrence du sommet  $c'$  dans la hiérarchie  $\mathcal{H}_S$ . Rappelons que si le sommet central d'une étoile est un sommet de branchement dans la solution, alors la hiérarchie de recouvrement de cette étoile est identique à l'étoile. Plusieurs cas peuvent se présenter :

1. Les sommets  $h_1$  et  $h'_1$  sont des sommets de branchement : dans ce cas, les deux hiérarchies  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$  sont reliées de la même manière que les étoiles  $S$  et  $S'$  avant la décomposition. Ainsi, nous fusionnons le sommet  $f_1$  et le sommet  $h_1$  (Figure 3a).
2. Le sommet  $h_1$  est un sommet de branchement et le sommet  $h'_1$  n'est pas un sommet de branchement : le sommet  $f_1$  peut être fusionné avec  $h'_1$  sans créer de sommet de branchement, car  $h'_1$  et  $f_1$  ont un degré 1 (Figure 3b).
3. Le sommet  $h_1$  n'est pas un sommet de branchement et le sommet  $h'_1$  est un sommet de branchement : le sommet  $h'_1$  est alors fusionné avec le sommet  $f_1$ . Ceci ne crée pas de sommet de branchement supplémentaire car  $h'_1$  est déjà un sommet de branchement (Figure 3c).
4. Aucun des deux sommets  $h_1$  et  $h'_1$  ne sont des sommets de branchement : notons  $h_i$  et  $h_{i+1}$  les deux occurrences du sommet central  $c$  reliées au sommet  $f_1$ . Nous supprimons le sommet  $f_1$  ainsi que les deux arêtes qui le reliaient respectivement à  $h_i$  et  $h_{i+1}$ . Nous ajoutons deux arêtes qui relient  $h_i$  à  $h'_1$  et  $h'_{i+1}$  à la dernière occurrence du sommet  $c_i$  dans  $\mathcal{H}$ , ce qui ne modifie pas le poids de la solution et n'ajoute pas de sommet de branchement (Figure 3d).


 Figure 3. Les sommets  $h_1$  et  $h'_1$  sont des sommets de branchement

### 3 Conclusion et perspectives

L'algorithme d'approximation polynomial pour le problème BVCMSH garantit un ratio de  $\rho = 2 \cdot (1 - \frac{k}{|\mathcal{V}|-1})$ . Nous améliorons ainsi le ratio trivial qui est égal à deux. Ce ratio est le meilleur possible en considérant l'arbre couvrant de poids minimum comme borne inférieure. En effet, considérons le graphe de la Figure 4 composé d'un peigne à  $|\mathcal{V}|/2$  branches de poids 1 et d'un sommet universel relié par des arêtes de poids  $1 + \varepsilon$ . La solution optimale  $\mathcal{H}_{OPT}$  consiste à prendre la base du peigne ainsi que  $k - 1$  branches et de relier les autres sommets grâce au sommet universel (poids  $\approx |\mathcal{V}|$  lorsque  $\varepsilon$  est petit et  $|\mathcal{V}|$  est grand). L'arbre de poids minimum  $\mathcal{T}_{OPT}$  est composé du peigne et d'une arête reliant le sommet universel (poids  $= |\mathcal{V}| + \varepsilon$ ). La hiérarchie construite à partir de  $\mathcal{T}_{OPT}$  doit nécessairement parcourir deux fois  $\frac{|\mathcal{V}|-1}{2} - k$  « étoiles » du peigne (poids  $\approx 2 \cdot k + 2 \cdot (\frac{|\mathcal{V}|-1}{2} - k) \cdot 2 + \varepsilon$ ). Nous obtenons donc le rapport annoncé.

Pour avoir un meilleur rapport, il faut donc trouver une autre borne inférieure, plus proche de la solution optimale. Nous avons montré dans [MM13] que le poids d'un arbre optimal pour le problème MBVCST (version considérant seulement les arbres) peut être supérieur au poids de la hiérarchie optimale pour le problème BVCMSH. Ainsi, une borne inférieure pour MBVCST ne l'est pas nécessairement pour BVCMSH. Ceci rend compliqué de trouver un arbre comme borne inférieure autre qu'un MST. Toutefois, prouver qu'il est possible de trouver, en temps polynomial, une hiérarchie ayant un poids inférieur ou égal à celui de la hiérarchie optimale et ayant au plus  $k + \varepsilon$  sommets de branchement, avec  $\varepsilon > 0$  (sous l'hypothèse que  $\mathcal{P} \neq \mathcal{N}(\mathcal{P})$  le plus petit possible, nous semble être une piste intéressante pour trouver une meilleure borne.

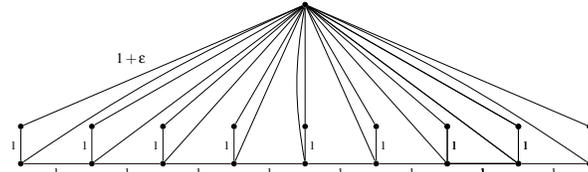


Figure 4. Exemple de graphe permettant d'atteindre la rapport d'approximation

### Références

- [CCR14] C. Cerrone, R. Cerulli, and A. Raiconi. Relations, models and a memetic approach for three degree-dependent spanning tree problems. *European Journal of Operational Research*, 232(3) :442 – 453, 2014.
- [MDM14] M. Molnár, S. Durand, and M. Merabet. Approximation of the degree-constrained minimum spanning hierarchies. In Magnus M. Halldorsson, editor, *Structural Information and Communication Complexity : 21st International Colloquium, SIROCCO 2014, Takayama, Japan. Proceedings*, pages 96–107. Springer International Publishing, 2014.
- [MJ00] A. Maher and S. D. Jitender. Power-Efficient Design of Multicast Wavelength-Routed Networks. In *IEEE Journal of Selected areas in communication*, pages 1852–1862, 2000.
- [MM13] M. Merabet, S. Durand and M. Molnár. Exact solution for branch vertices constrained spanning problems. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 41 :527 – 534, 2013.
- [Mol11] M. Molnár. Hierarchies to Solve Constrained Connected Spanning Problems. Technical Report RR-11029, September 2011.
- [ZLW<sup>+</sup>17] Z. Zhu, X. Liu, Y. Wang, W. Lu, L. Gong, S. Yu, and N. Ansari. Impairment- and splitting-aware cloud-ready multicast provisioning in elastic optical networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 25(2) :1220–1234, April 2017.