



## Les 4 Robots Fantastiques

Quentin Bramas, Sébastien Tixeul

### ► To cite this version:

Quentin Bramas, Sébastien Tixeul. Les 4 Robots Fantastiques. ALGOTEL 2019 - 21èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2019, Saint Laurent de la Cabrerisse, France. <hal-02123870>

**HAL Id: hal-02123870**

**<https://hal.science/hal-02123870v1>**

Submitted on 9 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# Les 4 Robots Fantastiques

Quentin Bramas<sup>1</sup> et Sébastien Tixeuil<sup>2</sup>

<sup>1</sup> ICUBE, Université de Strasbourg, CNRS

<sup>2</sup> Sorbonne Université, LIP6, CNRS

---

Nous considérons le problème de la formation d'un motif géométrique arbitraire avec 4 robots évoluant dans un environnement asynchrone. Ce problème, dans sa formulation la plus générale où les robots n'ont pas de chiralité commune et permettant de former tous les motifs possibles, n'est pas encore résolu, quelque soit le nombre de robots considérés.

Avec l'hypothèse d'une chiralité commune, ou des conditions supplémentaires sur les configurations de départ ou sur le motif à former, nous avons observé que le cas  $n = 4$  a souvent été laissé de côté, puis résolu après le cas général.

Nous prenons le contre-pied de cette habitude en commençant par résoudre le cas  $n = 4$  pour le problème général, avant de nous attaquer au cas  $n > 4$ . Il s'avère que le problème n'est pas trivial, et que sa résolution offre une meilleure compréhension du problème. En outre, la solution que nous proposons introduit un nouvel invariant géométrique dont l'intérêt est indépendant du problème considéré.

**Mots-clefs :** Robots mobiles, Algorithme distribué, Formation de motifs

---

## 1 Introduction et Modèle

Nous considérons un système distribué constitué de robots autonomes capables d'observer leurs positions respectives, d'effectuer des calculs, et de se déplacer dans un plan Euclidien. Les robots ne communiquent pas explicitement entre eux (mais peuvent effectuer des déductions et des calculs à partir des positions observées). Ils sont anonymes, autonomes, et exécutent le même algorithme de manière asynchrone. Les travaux dans le domaine des réseaux de robots se concentrent sur l'étude des tâches qu'il est possible de réaliser avec ces robots très simples, parfois en ajoutant certaines hypothèses supplémentaires, qui peuvent concerner les robots eux-mêmes, leurs positions initiales, ou l'ordonnancement des exécutions.

Un des problèmes fondamentaux consiste à déplacer les robots jusqu'à former un motif géométrique donné. Lorsque les robots partagent une même chiralité (c'est à dire qu'ils ont la même notion de droite et de gauche), on sait qu'il est nécessaire et suffisant que la *symétrie* de la configuration de départ (c'est à dire le plus grand  $p$  tel que la rotation par  $2\pi/p$  de la configuration est invariante) divise celle du motif à former pour qu'il existe un algorithme déterministe qui forme ce motif.

Sans chiralité commune, les robots ne peuvent pas former, à partir d'une configuration ayant un axe de symétrie, des motifs qui ne sont pas symétriques. Plus généralement, on sait qu'il est nécessaire que les symétries de la configuration initiale persistent dans le motif à former, mais aucune preuve ne montre que c'est suffisant (ce qui est le cas avec une chiralité commune). Dans le modèle sans chiralité commune, les résultats existant sont incomplets : (i) il est possible de former un  $n$ -gone régulier à partir d'une configuration quelconque pour  $n > 4$  robots [FPSV14] et pour  $n = 4$  [MV16], et (ii) il est possible de former un motif quelconque à partir d'une configuration asymétrique [CDSN18].

Dans ce papier nous présentons un premier algorithme qui permet de former, avec  $n = 4$  robots, tous les motifs qu'il est possible de former à partir d'une configuration initiale donnée, prouvant ainsi que la condition nécessaire de symétrie est également suffisante. Par ailleurs, notre algorithme fonctionne avec ou sans chiralité. Dans le cas avec chiralité commune, les robots l'utilisent et l'ensemble des motifs qu'ils peuvent former est plus grand. En outre, la solution que nous proposons introduit un nouvel invariant géométrique dont l'intérêt est indépendant du problème considéré. Les détails de notre algorithme sont disponibles dans le rapport technique associé [BT18].

**Modèle** Un réseau de  $n = 4$  robots est modélisé par l'ensemble  $P = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ , appelé *configuration*, de leurs positions dans le plan Euclidien. Les positions ne sont pas définies dans un système de coordonnées particulier et deux configurations sont équivalentes si l'une peut être obtenue de l'autre par translation, rotation ou symétrie.

Les robots sont activés de manière asynchrone et effectuent des cycles *Regarde-Calcule-Se Déplace*. A chaque activation, un robot *Regarde* autour de lui et obtient un *instantané* des positions des autres robots. Basé uniquement sur cette information visuelle, le robot *Calcule* une destination, et *se Déplace* vers cette destination (sans être assuré de l'atteindre). La durée de chaque phase du cycle, ainsi que la durée entre deux activations, est arbitraire. Lorsqu'un robot regarde son environnement, il obtient l'ensemble des positions occupées par les autres robots dans un système de coordonnées ego-centré dont l'orientation et la mesure unitaire sont arbitraires. De plus, un robot peut observer son environnement lorsque d'autres robots sont en mouvement, ils lui apparaissent alors comme s'ils étaient immobiles. Enfin, les robots ne disposent pas de mémoire persistante : à chaque début de cycle, leur mémoire est réinitialisée.

Le problème de la formation de motif, consiste à atteindre, en un nombre fini d'activations, une configuration équivalente à un ensemble de points  $F$  donné. Le motif géométrique  $F$  à former est donné aux robots dans un système de coordonnée arbitraire.

**Notations** Dans la suite, on dit que 4 points  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  forment un quadrilatère si (i) ils forment un quadrilatère convexe, (ii) trois points forment un triangle et le quatrième se situe sur une arête, ou (iii)  $p_2$  et  $p_3$  se situent sur le segment  $[p_1, p_4]$ , c'est-à-dire que l'on considère que les deux points centraux sont adjacents sur un quadrilatère aplati. On note  $Q$  l'ensemble des configurations formant un quadrilatère. On note  $L \subset Q$ , resp.  $C \subset Q$ , l'ensemble des configurations formant une ligne, resp. un cerf-volant. On pose  $Q^- = Q \setminus (L \cup C)$ .

On dit que la configuration est un triangle si un robot est *strictement contenu* dans l'enveloppe convexe formée par les trois autres. Une configuration est donc soit un triangle, soit un quadrilatère. On note  $T_{\alpha, \beta}$  l'ensemble des configurations formant un triangle dont les deux plus petits angles sont  $\alpha$  et  $\beta$ .

$\angle(A, B, C)$  désigne la valeur de l'angle orienté  $\widehat{ABC}$ . L'orientation est soit directe dans le cas où les robots partagent la même chiralité, soit déterminée par la configuration, soit arbitraire.

## 2 Un Invariant Géométrique Pour 4 Robots

Pour faciliter la description de notre algorithme, nous avons défini un nouvel invariant géométrique qui existe entre 4 points formant un quadrilatère quelconque. La définition d'un invariant est particulièrement utile dans un modèle asynchrone. En effet, lorsque la destination d'un robot est définie à l'aide d'un invariant, elle ne dépend plus des mouvements des autres robots et on peut donc ignorer de quelle manière ils sont activés.

Notre invariant est un segment dont les extrémités forment des angles particuliers avec les 4 robots. Dans la suite, on dira que deux points  $p$  et  $p'$  étendent un segment  $[A, B]$  en  $A$  si parmi les deux angles  $\angle(p, A, B)$  et  $\angle(B, A, p')$ , l'un vaut  $5\pi/8$  et l'autre vaut  $5\pi/8 \mod \pi$ .

**H-segment** Pour un quadrilatère  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$ , prenons deux côtés opposés  $[r_1, r_2]$  et  $[r_3, r_4]$  (il y a deux manières possibles de choisir deux côtés opposés). Le *H-segment* correspondant à ce choix de côtés opposés est le segment  $[A, B]$  tel que  $r_1$  et  $r_2$  étendent  $[A, B]$  en  $A$ , et  $r_3$  et  $r_4$  étendent  $[A, B]$  en  $B$  (voir Figure 1).

On peut montrer que le H-segment ainsi défini est unique. En effet, pour que  $r_1$  et  $r_2$  étendent  $[A, B]$  en  $A$ , il faut nécessairement (i) que  $A$  appartienne au cercle  $C_{1,2}$ , l'unique cercle dont les points forment un angle de  $6\pi/8$  ou  $3\pi/8$  avec  $r_1$  et  $r_2$ , et dont le centre est dans le demi plan délimité par  $(r_1, r_2)$  ne contenant pas  $r_3$ , et (ii) que  $A$  et  $B$  soient alignés avec le point  $h_{1,2}$ , point d'intersection de la médiatrice de  $[r_1, r_2]$  et de  $C_{1,2}$ . Comme la même propriété est vraie pour  $B$  sur le cercle  $C_{3,4}$ ,  $A$  et  $B$  sont définis de manière unique comme étant les points d'intersection de  $(h_{1,2}, h_{3,4})$  avec  $C_{1,2}$  et  $C_{3,4}$  (voir Figure 1). Par ailleurs, le H-segment ne dépend que des angles qu'il forme avec les 4 sommets du quadrilatère, il est donc invariant par déplacement de ces sommets vers, ou s'éloignant d'une extrémité.

Comme il existe deux H-segments par quadrilatère (un par manière de choisir les côtés opposés), on définit le H-segment d'un quadrilatère comme étant le plus long des deux H-segments. On peut montrer

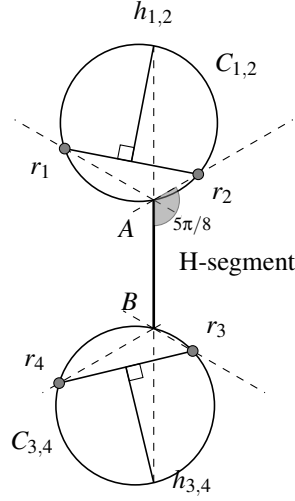


FIGURE 1: Construction d'un H-segment

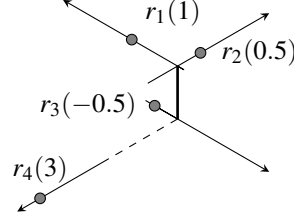


FIGURE 2: 4 robots sur leur H-axis. Les H-coordonnées des 4 robots sont  $(-0.5, 3, 0.5, 1)$

que le H-segment est correctement défini pour les quadrilatères non aplatis dont les diagonales ne sont pas perpendiculaires. Dans ce cas, un H-segment peut tout de même être élu par un robot de manière unique, sauf si le quadrilatère est un losange. Les configurations dans  $L \cup C$  *i.e.*, où les robots forment un cerf-volant (une légère généralisation du losange), ou un quadrilatère aplati, sont traitées séparément.

**H-axes et H-coordonnées** À partir d'un H-segment, on définit le H-axe d'un robot comme étant la droite passant par ce robot et par l'extrémité du H-segment qu'il étend. le H-axe est orienté et l'unité de distance est la longueur du H-segment. Ainsi, chaque robot possède une H-coordonnée sur son H-axe (voir Figure 2).

Soit  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  un quadrilatère dont le plus grand H-segment est associé aux côtés opposés  $[r_1, r_2]$  et  $[r_3, r_4]$ . Soit  $c_i$  la H-coordonnée de  $r_i$ , pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  a pour H-coordonnées le plus petit tuple parmi  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$  et  $(c_3, c_4, c_1, c_2)$  (et  $(c_2, c_1, c_4, c_3)$  et  $(c_4, c_3, c_2, c_1)$  si les robots ne partagent pas la même chiralité). Si le quadrilatère est orthodiamétral, il a pour H-coordonnées le plus petit tuple de H-coordonnées parmi ceux obtenus pour les deux H-segments. On dira qu'un tuple de 4 nombres (ou 4-tuple) est acceptable s'il correspond aux H-coordonnées d'un quadrilatère. On remarque que ce n'est pas forcément le cas pour tout les 4-tuples. Le lemme suivant permet de s'assurer que former un quadrilatère donné est équivalent à déplacer les robots sur leur H-axe jusqu'à atteindre les H-coordonnées de ce quadrilatère (même si celui-ci est orthodiamétral ou aplati).

**Lemme 1** *Deux quadrilatères sont similaires si et seulement si ils ont les mêmes H-coordonnées.*

Pour que le mouvement des robots le long de leur H-axe laisse invariant le H-segment du quadrilatère qu'ils forment, il faut que le H-segment reste le plus grand. On peut montrer que lorsqu'un robot se déplace en diminuant sa H-coordonnée, la taille du second H-segment du quadrilatère diminue. Les robots peuvent donc diminuer leur H-coordonnées sans problème tant qu'ils forment un quadrilatère, *i.e.*, un robot ne doit pas entrer dans l'enveloppe convexe formée par les trois autres robots.

Si les robots doivent augmenter leur H-coordonnée afin de former un quadrilatère, ils peuvent le faire tout en conservant le H-segment le plus long. En effet, les H-coordonnées  $(d_1, d_2, d_3, d_4)$  d'un quadrilatère correspondent toujours aux H-coordonnées associées à son H-segment le plus long, c'est donc aussi vrai pour tous les tuples de H-coordonnées  $(d'_1, d'_2, d'_3, d'_4)$  avec  $d_i \geq d'_i$ .

**Le Mouvement Principal des 4 Robots Fantastiques** Soient une configuration de robots de H-coordonnées  $(d_1, d_2, d_3, d_4)$  et un motif  $F$  à former de H-coordonnées  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ . Un robot  $r_i$ , connaît la position de sa H-coordonnée dans le tuple et connaît ainsi la valeur cible  $f_i$  qu'il doit atteindre pour former le quadrilatère voulu. Il peut y avoir une ambiguïté si la configuration est symétrique, mais dans ce cas la même symétrie existe aussi dans le quadrilatère à former (sinon le problème ne peut être résolu [BT18]) et donc,

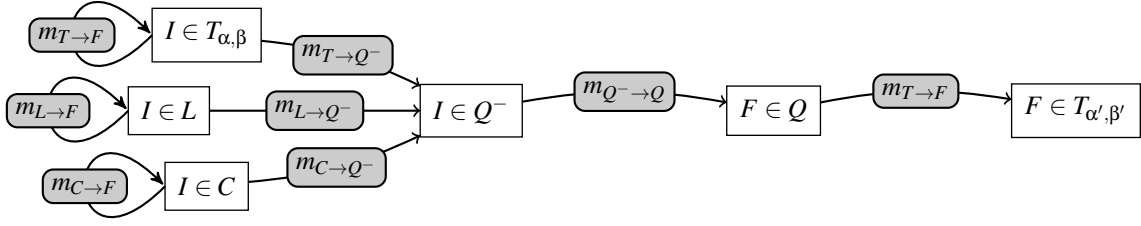


FIGURE 3: Schéma de l'Algorithme : les mouvements des robots dépendent de la configuration  $I$  et du motif  $F$  à former.

dans tous les cas, la valeur cible est la même. La séquence de mouvements que les 4 robots doivent réaliser afin de former le motif  $F$  est la suivante. Tout d'abord, les robots dont les H-coordonnées sont plus grandes que leur valeur cible doivent réduire leur H-coordonnée, généralement en se rapprochant de l'extrémité du H-segment, afin de former un quadrilatère de H-coordonnées  $(d'_1, d'_2, d'_3, d'_4)$ , avec  $f_i \geq d'_i$ . Ensuite, les robots peuvent augmenter leurs H-coordonnée pour atteindre la valeur cible du quadrilatère à former. Si possible, les robots se déplacent l'un après l'autre afin de ne pas créer de nouvelle symétrie. Si c'est impossible, c'est qu'une symétrie existe déjà et plusieurs robots peuvent donc se déplacer en même temps. Dans l'algorithme principal, on note ce mouvement  $m_{Q^- \rightarrow Q}$ .

### 3 Description de l'Algorithme

Le schéma de la Figure 3 décrit les phases de l'algorithme en fonction de la configuration de départ et du motif à former. Commençons la description de notre algorithme par les cas particuliers où l'invariant n'intervient pas (correspondants aux boucles sur le schéma) :

- si la configuration initiale et le motif à former sont des triangles similaires,  $I, F \in T_{\alpha, \beta}$ , alors le mouvement  $m_{T \rightarrow F}$  consiste à déplacer le robot central vers sa position finale.
- si la configuration initiale et le motif à former sont des lignes,  $I, F \in L$ , alors le mouvement  $m_{L \rightarrow F}$  consiste à déplacer les deux robots centraux vers leur position finale.
- si la configuration initiale et le motif à former sont des cerf-volants,  $I, F \in C$ , alors le mouvement  $m_{L \rightarrow F}$  consiste à déplacer les deux robots les plus proches du centre vers leur position finale.

Si la configuration initiale est un triangle, une ligne ou un cerf-volant, on applique une phase spéciale ( $m_{T \rightarrow Q^-}$ ,  $m_{L \rightarrow Q^-}$ , et  $m_{C \rightarrow Q^-}$  respectivement) afin d'obtenir un quadrilatère dans  $Q^-$ . Par manque de place ces phases ne sont pas décrites.

La phase principale de notre algorithme permet, à partir d'une configuration dans  $Q^-$ , d'obtenir n'importe quelle configuration dans  $Q$  à l'aide du mouvement  $m_{Q^- \rightarrow Q}$  décrit à la section précédente.

Il ne reste que le cas où le motif à former est dans  $T_{\alpha, \beta}$ . Dans ce cas, on applique l'algorithme précédent jusqu'à former le quadrilatère dont l'enveloppe convexe est un triangle similaire (avec un robot sur une arête à un position arbitraire). Une fois ce quadrilatère formé, le mouvement  $m_{T \rightarrow F}$  forme le motif final en déplaçant le robot qui est dans le triangle, ou sur une arête, jusqu'à sa position finale.

### Références

- [BT18] Quentin Bramas and Sébastien Tixeuil. Arbitrary pattern formation with four robots. In Taisuke Izumi and Petr Kuznetsov, editors, *Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, pages 333–348, Cham, 2018. Springer International Publishing.
- [CDSN18] Serafino Cicerone, Gabriele Di Stefano, and Alfredo Navarra. Asynchronous arbitrary pattern formation : the effects of a rigorous approach. *Distributed Computing*, pages 1–42, 2018.
- [FPSV14] Paola Flocchini, Giuseppe Prencipe, Nicola Santoro, and Giovanni Viglietta. Distributed computing by mobile robots : uniform circle formation. *Distributed Computing*, pages 1–45, 2014.
- [MV16] Marcello Mamino and Giovanni Viglietta. Square formation by asynchronous oblivious robots. *arXiv preprint arXiv :1605.06093*, 2016.