



**HAL**  
open science

## Quelques bornes sur les chemins dans les réseaux multicouches

Mohamed Lamine Lamali, Nasreddine Fergani, Johanne Cohen

► **To cite this version:**

Mohamed Lamine Lamali, Nasreddine Fergani, Johanne Cohen. Quelques bornes sur les chemins dans les réseaux multicouches. ALGOTEL 2019 - 21èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications, Jun 2019, Saint Laurent de la Cabrerisse, France. hal-02123183

**HAL Id: hal-02123183**

**<https://hal.science/hal-02123183>**

Submitted on 7 May 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques bornes sur les chemins dans les réseaux multicouches

Mohamed Lamine Lamali<sup>1 †</sup> et Nasreddine Fergani<sup>2</sup> et Johanne Cohen<sup>3</sup>

<sup>1</sup>LaBRI - Univ. de Bordeaux, France

<sup>2</sup>Criteo. Cambridge, Royaume-Uni.

<sup>3</sup>LRI-CNRS. Université Paris-Sud, Université Paris Saclay, France

---

Les réseaux multicouches sont des réseaux où certains protocoles peuvent être encapsulés dans d'autres le long d'un chemin, induisant ainsi des tunnels parfois imbriqués. Les plus courts chemins *faisables* (i.e., qui respectent l'ordre des encapsulations et la continuité protocolaire) peuvent comporter des circuits. Dans cet article, nous donnons des bornes sur la longueur de tels chemins. Nous montrons qu'il existe des réseaux à  $n$  sommets où le chemin le plus court entre deux sommets spécifiés est superpolynomial en  $n$ . Nous montrons néanmoins que si un plus court chemin existe, sa longueur ne peut être plus qu'exponentielle en  $n^2$ .

La version complète de cet article est [LFC18](<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01706362v2>)

**Mots-clefs** : Protocoles, Encapsulation, Longueur de chemins, bornes

---

## 1 Introduction

L'omniprésence des tunnels et la multiplicité des protocoles de communication dans les réseaux actuels nécessitent la conception de nouveaux protocoles de routages, et donc de nouveaux algorithmes de calcul de chemins. Ces chemins doivent être *faisables*, c'est-à-dire respecter les contraintes réseaux (ordre des encapsulations, désencapsulations et conversions de protocoles le long d'un chemin). Il existe un algorithme centralisé pour calculer le plus court chemin faisable entre deux sommets (si celui-ci existe) [LFC18]. Cet algorithme est polynomial en fonction de la taille du réseau *et* de la longueur du chemin à calculer. Or, les plus courts chemins faisables peuvent comporter des circuits (voir exemple de la Figure 1). Pour évaluer réellement l'efficacité de l'algorithme en question, il faudrait avoir des bornes sur la longueur d'un plus court chemin<sup>‡</sup>. Nous montrons qu'un tel chemin peut être superpolynomial en la taille du réseau, mais pas plus qu'exponentiel en fonction du carré de cette taille.

### 1.1 Formalisation du problème

Nous considérons un réseau avec  $|\mathcal{V}| = n$  sommets,  $|\mathcal{E}| = m$  liens (orientés) et un ensemble fini  $\mathcal{A} = \{a, b, c, \dots\}$  de protocoles de communication, leur nombre étant noté  $|\mathcal{A}| = \lambda$ . Certains sommets sont capables d'encapsuler (resp. désencapsuler) certains protocoles dans d'autres. Une encapsulation d'un protocole  $a$  dans  $b$  est notée  $(a \rightarrow ab)$ , la désencapsulation correspondante est notée  $(a \leftarrow ab)$ . Une conversion du protocole  $a$  en  $b$  est notée  $(a \rightarrow b)$ , le cas particulier de la retransmission sans changement de protocole est notée  $(a \rightarrow a)$ .

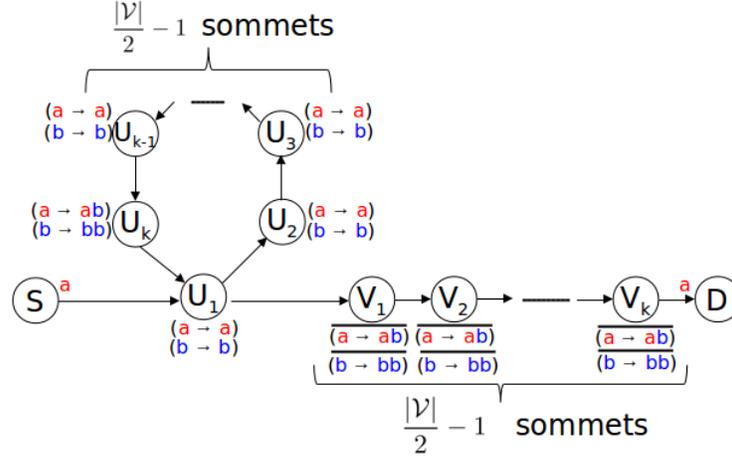
Une suite d'encapsulations induit une *pile de protocoles* à chaque étape d'un chemin. Par exemple, la suite  $(a \rightarrow aa)(a \rightarrow b)(b \rightarrow ba)$  induit la pile  $a$ , puis  $aa$ , puis  $ab$ , et enfin  $aba$ <sup>§</sup>. Un chemin (faisable) doit permettre à la destination de recevoir le message tel qu'émis par la source.

---

<sup>†</sup>Financé par le projet HÉRA ANR-18-CE25-0002.

<sup>‡</sup>. Dans la suite de l'article, le mot *chemin* sous-entendra *chemin faisable*.

<sup>§</sup>. Le sommet de pile est le protocole le plus à droite.



**Figure 1:** Exemple de réseau multicouche où le plus court chemin de  $S$  à  $D$  comporte  $\Omega(n^2)$  liens.

## 1.2 Motivation

L'algorithme centralisé pour le calcul du plus court chemin entre deux sommets est de complexité  $O(\max\{\lambda^5 n^2 m, |\mathcal{P}| nm\})$ , où  $|\mathcal{P}|$  est la longueur du chemin. La première partie de cette formule est polynomiale en la taille du réseau et correspond à la complexité du problème de décision (existe-t-il un chemin). La deuxième partie est polynomiale en la taille du réseau et la longueur du chemin, elle correspond au calcul effectif de celui-ci. Afin d'estimer correctement l'efficacité de l'algorithme en question, il faudrait avoir des bornes sur  $|\mathcal{P}|$  en fonction de  $n$  et  $\lambda$ .

## 2 Bornes sur la longueur d'un plus court chemin

Il est évident que si le chemin ne comporte pas de circuits,  $|\mathcal{P}| \leq n$ . Autrement, il est facile de construire des réseaux où  $|\mathcal{P}|$  n'est pas linéaire en fonction de  $n$ . Un exemple est donné sur la Figure 1. Un réseau avec deux protocoles  $a$  et  $b$  est composé d'un circuit de  $n/2 - 1$  sommets (on suppose sans perte de généralité que  $n$  est pair) et d'un chemin de  $n/2 - 1$  sommets. Un sommet source  $S$  est relié au circuit et un sommet destination  $D$  est relié à la fin du chemin. Ces deux sommets communiquent en utilisant le protocole  $a$ . Tous les sommets du chemin ( $V_1, V_2, \dots$ ) sont seulement capables de désencapsuler n'importe quel protocole du protocole  $b$ . Et tous les sommets du circuit ( $U_1, U_2, \dots$ ) sont uniquement capables de transmettre un protocole tel qu'il est reçu, sauf un seul qui est capable d'encapsuler n'importe quel protocole dans  $b$ . Pour traverser le chemin et arriver à  $D$ , un paquet doit avoir une pile de protocole comportant  $n/2 - 1$   $b$  (un pour chaque sommet  $V_i$ ). Or, il n'existe qu'un seul sommet capable d'encapsuler des  $b$ , et il se trouve dans le circuit. Il faudra donc traverser le circuit  $n/2 - 1$  fois. Le plus court (et seul) chemin ici est donc en  $\Omega(n^2)$ . La Proposition 1 généralise cet exemple.

**Proposition 1.** *Pour tout  $n$  et tout ensemble fini de protocoles  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_\lambda\}$ , il existe un réseau multicouches et deux sommets distingués  $S$  et  $D$  tel que le plus court chemin faisable de  $S$  à  $D$  comporte  $\Omega\left(\binom{n}{\lambda}^\lambda\right)$  liens.*

*Démonstration.* Soit, sans perte de généralité, un réseau où le nombre de sommets est de forme  $n = \lambda k + 1$  pour un entier arbitraire  $k$ . On construit d'abord le graphe (topologie) du réseau comme suit : on crée un chemin contenant tous les sommets du réseau, le premier étant la source  $S$  et le dernier la destination  $D$ . On note par  $U_{i,j}$  ( $0 \leq j < k$ ) le  $ki + j + 1$ <sup>e</sup> sommet du chemin. Ainsi,  $U_{\lambda,0}$  est le sommet  $D$ . Puis les liens sont créés comme suit : Un lien de  $U_{i,0}$  vers  $S$  pour tout  $i \leq k - 1$ . Enfin, les capacités d'encapsulations sont affectées de la manière suivante :

*Quelques bornes sur les chemins dans les réseaux multicouches*

- Le sommet  $S$  sait uniquement émettre le protocole  $a_1$ , et les sommets  $U_{0,1}, \dots, U_{0,k-1}$  transmettent les protocoles tels qu'ils les reçoivent, sans aucun changement,
- Les sommets  $U_{i,1}, \dots, U_{i,k-1}$  ( $1 \leq i \leq \lambda - 1$ ) sont uniquement capables de désencapsuler le protocole  $a_{i+1}$  de n'importe quel protocole,
- Les sommets  $U_{i,0}$  ( $1 \leq i \leq \lambda - 1$ ) sont uniquement capables d'encapsuler n'importe quel protocole dans le protocole  $a_{i+1}$ .

Un chemin doit comporter la séquence  $a_{i+1}^{k-1}$  en sommet de pile ¶ pour traverser les sommets  $U_{i,1}, \dots, U_{i,k-1}$  ( $1 \leq i \leq \lambda - 1$ ) et atteindre  $U_{i+1,0}$ . Il doit donc traverser le sommet  $U_{i,0}$   $k - 1$  fois puisque c'est le seul capable d'encapsuler dans le protocole  $a_{i+1}$  (et ainsi ajouter une occurrence de  $a_{i+1}$  en sommet de pile). Et à chaque fois qu'il atteint  $U_{i,0}$  (sauf la dernière fois), il doit retraverser le lien  $(U_{i,0}, S)$ . Soit  $\phi_i$  la longueur du plus court chemin pour atteindre  $U_{i,0}$ . Atteindre  $U_{i,0}$   $k - 1$  fois nécessite de parcourir  $(k - 2)(\phi_i + 1) + \phi_i$  liens. Ainsi, atteindre  $U_{i+1,0}$  nécessite de parcourir  $(k - 2)(\phi_i + 1) + \phi_i + k$  liens. On obtient l'équation récurrente :

$$\phi_{i+1} = (k - 1)\phi_i + 2k - 2 \text{ avec } \phi_1 = k \quad (1)$$

dont la solution est  $\phi_\lambda = \Omega(k^\lambda)$ . En posant  $k = \frac{n-1}{\lambda}$  on obtient le résultat.  $\square$

Le résultat précédent donne des réseaux où un plus court chemin est exponentiel en fonction du nombre de protocoles mais polynomial en fonction du nombre de sommets. La Proposition 2 montre que, même avec deux protocoles, il est possible de construire des réseaux où un plus court chemin est superpolynomial.

**Proposition 2.** *Pour tout  $n$ , il existe un réseau multicouche avec seulement 2 protocoles et deux sommets distingués  $S$  et  $D$ , tel que le plus court chemin de  $S$  à  $D$  contient  $\Omega\left(\sqrt{n}2^{\Omega(\sqrt{n})}\right)$  liens.*

*Démonstration.* Soit le réseau construit dans la preuve de la Proposition 1 avec  $n$  sommets et  $\lambda$  protocoles. Nous allons le convertir en un réseau avec deux protocoles  $a$  et  $b$ . L'idée est de simuler un protocole  $a_{i+1}$  par la suite de protocoles  $ab^i a$  ( $0 \leq i \leq \lambda - 1$ ). Pour ce faire, chaque sommet  $U_{i,0}$  est remplacé par une séquence de  $i + 2$  sommets  $U_{i,0}^0 \dots U_{i,0}^{i+1}$  où  $U_{i,0}^0$  et  $U_{i,0}^{i+1}$  sont capables d'encapsuler n'importe quel protocole dans  $a$  et les sommets  $U_{i,0}^1 \dots U_{i,0}^i$  sont capables d'encapsuler n'importe quel protocole dans  $b$ . Traverser cette séquence de sommets ajoute  $ab^i a$  en sommet de pile. De manière analogue, chaque sommet  $U_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq \lambda - 1$  et  $1 \leq j \leq k - 1$ ) est remplacé par une séquence de  $i + 2$  sommets  $U_{i,j}^0 \dots U_{i,j}^{i+1}$  où  $U_{i,j}^0$  et  $U_{i,j}^{i+1}$  sont capables de désencapsuler  $a$  de n'importe quel protocole, et les sommets  $U_{i,j}^1 \dots U_{i,j}^i$  sont capables de désencapsuler  $b$  de n'importe quel protocole. Traverser cette séquence nécessite que le sommet de pile contienne  $ab^i a$ . Redéfinissons  $\phi_i$  comme étant la longueur du plus court chemin pour atteindre  $U_{i,0}^{i+1}$ . On obtient l'équation récurrente :

$$\phi_{i+1} = (k - 1)\phi_i + (i + 3)k - 2 \text{ avec } \phi_1 = k + 2$$

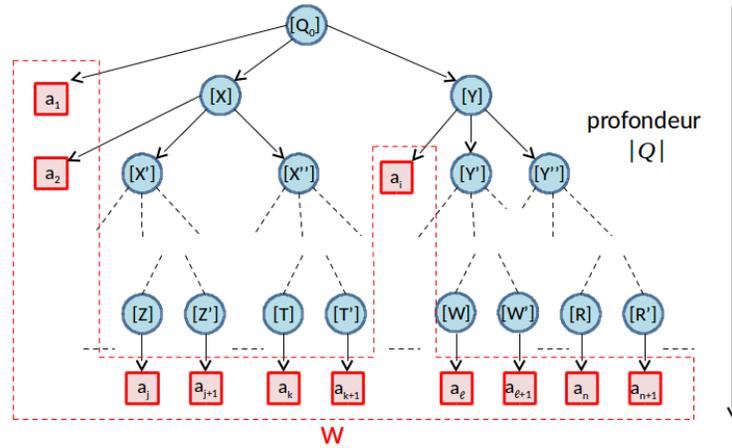
Dont la solution est  $\phi_\lambda = \Omega(\lambda k^\lambda)$ . En posant  $\lambda = \frac{n-1}{k}$  et  $k = 3$ , on obtient  $\phi_\lambda = \Omega(n3^{\frac{n}{3}})$ . Néanmoins, le nouveau réseau construit comporte  $O(n^2)$  sommets. On a donc construit un réseau à  $n' = O(n^2)$  sommets où le plus court chemin de  $S$  à  $D$  comporte  $\Omega\left(\sqrt{n'}3^{\Omega(\sqrt{n'})}\right) = \Omega\left(\sqrt{n}2^{\Omega(\sqrt{n})}\right)$  liens.  $\square$

Néanmoins, il existe une borne supérieure sur la longueur d'un chemin (s'il en existe un). La Proposition 3 donne une telle borne.

**Proposition 3.** *Pour tout réseau multicouche à  $n$  sommets, s'il existe un plus court chemin entre deux sommets distingués, alors ce chemin contient au maximum  $O(2^\Psi)$  liens, où  $\Psi = (\lambda + 1)\lambda^2 n^2$ .*

---

¶. La notation  $a^k$  signifie  $\underbrace{aa \dots a}_{k \text{ fois}}$ .



**Figure 2:** Arbre de dérivation d'un mot correspondant à la suite de protocole d'un chemin.

*Démonstration.* Il se trouve que la suite de protocoles le long du chemin (en considérant l'ensemble de protocoles comme un alphabet) est générée par une grammaire hors-contexte. Il suffit donc de trouver une borne sur le mot le plus court généré par cette grammaire. Il se trouve que toutes les règles de production de la grammaire sont de la forme suivante (voir [LFC18] pour les détails de la construction de cette grammaire) :

1.  $[X] \rightarrow a$
2.  $[X] \rightarrow a[Y]$
3.  $[X] \rightarrow a[Y][Z]$

Où  $[X]$ ,  $[Y]$  et  $[Z]$  sont des non-terminaux et  $a$  un terminal (et donc un protocole) quelconque. Soit  $Q$  l'ensemble des non-terminaux de la grammaire. Le plus grand arbre de dérivation  $\parallel$  possible du mot le plus court est celui dont toutes les règles de production le long d'une branche sont de la forme (1), sauf les feuilles qui sont de la forme (3). Cet arbre est de profondeur maximale  $|Q|$  (car si un non-terminal se répète deux fois sur une branche, il est possible d'obtenir un mot plus court). La Figure 2 illustre un tel arbre. Le nombre de sommets de l'arbre est  $2^{|Q|} - 1$ , et en supposant que chaque sommet produise un terminal (et donc une lettre du mot que nous recherchons), la longueur du mot est aussi bornée par  $2^{|Q|} - 1$ . Or, par construction (voir [LFC18]),  $|Q| \leq (\lambda + 1)\lambda^2 n^2$ .  $\square$

### 3 Conclusion et questions ouvertes

On sait que pour un réseau avec  $n$  sommets et deux protocoles, le plus long chemin qu'on puisse avoir vérifie

$$\Omega\left(\sqrt{n}2^{\Omega(\sqrt{n})}\right) \leq |\mathcal{P}| \leq 2^{O(n^2)}.$$

Le principal défi est de rapprocher ces bornes et, le cas échéant, de trouver une fonction  $\ell$  telle que  $|\mathcal{P}| = \Theta(\ell(n))$ .

### Références

- [HMU06] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J. D. Ullman. Introduction to automata theory, languages, and computation. Addison-Wesley, 2006.
- [LFC18] M. L. Lamali, N. Fergani, and J. Cohen. Algorithmic and complexity aspects of path computation in multi-layer networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 26(6) :2787–2800, Dec 2018.

$\parallel$ . Pour la définition d'un arbre de dérivation, on peut se rapporter à [HMU06] par exemple.