



**HAL**  
open science

# Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle

Nicolas Bacaër, Hisashi Inaba, Ali Moussaoui

► **To cite this version:**

Nicolas Bacaër, Hisashi Inaba, Ali Moussaoui. Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle. 2020. hal-02123099v4

**HAL Id: hal-02123099**

**<https://hal.science/hal-02123099v4>**

Preprint submitted on 11 Aug 2020 (v4), last revised 24 Feb 2021 (v6)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Un modèle mathématique pour une transition démographique partielle

Bacaër Nicolas, Hisashi Inaba, Ali Moussaoui

Unité de modélisation mathématique et informatique des systèmes complexes  
Institut de recherche pour le développement  
Paris, France  
nicolas.bacaer@ird.fr

Département de mathématiques  
Université de Tokyo  
Tokyo, Japon  
inaba@ms.u-tokyo.ac.jp

Département de mathématiques  
Université de Tlemcen  
Tlemcen, Algérie  
moussaouidz@yahoo.fr

**RÉSUMÉ.** On étudie un modèle mathématique pour la transition démographique. Il s'agit d'un système différentiel homogène de degré un. Il y a deux classes d'âge et deux niveaux de fécondité. La fécondité faible s'étend par mimétisme aux adultes avec une fécondité élevée. Lorsque le coefficient de mimétisme augmente, le système traverse deux seuils entre lesquels la population croît ou décroît exponentiellement avec un mélange stable des deux fécondités. Cette transition démographique partielle rappelle la situation dans certains pays d'Afrique subsaharienne.

**ABSTRACT.** We study a mathematical model for the demographic transition. It is a homogeneous differential system of degree one. There are two age groups and two fertility levels. Low fertility extends by mimicry to adults with high fertility. When the mimicry coefficient increases, the system crosses two thresholds between which the population increases or decreases exponentially with a stable mixture of the two fertility rates. This partial demographic transition is reminiscent of the situation in some countries of sub-Saharan Africa.

**MOTS-CLÉS :** démographie, modèle mathématique, système homogène

**KEYWORDS :** demography, mathematical model, homogeneous system



---

## 1. Introduction

La transition démographique est un phénomène observé dans tous les pays du monde et qui s'étend sur plusieurs décennies. La population voit d'abord sa mortalité baisser. Puis, avec un certain retard, c'est au tour de la fécondité de baisser. À cause de ce décalage, la population croît souvent de manière considérable, avec d'importantes conséquences économiques et sociales [3]. L'hypothèse bien connue de la modernisation insiste sur le fait que le faible taux de fécondité est le résultat d'une adaptation individuelle à des environnements modernisés, à mesure que l'industrialisation, l'urbanisation, les normes éducatives et les familles changent. Il est néanmoins difficile d'établir un lien direct entre la baisse de la fécondité et de nombreux indices du niveau de développement social. On cherche par conséquent un mécanisme dynamique pour comprendre l'écart entre le changement d'attitude individuelle et les données statistiques macroscopiques.

Si l'on suit le découpage en « trois démographies » de [9], on peut dire que la transition démographique peut être envisagée sous trois angles : statistique, politique ou mathématique. C'est sous ce dernier angle, illustré notamment par les travaux de Verhulst [19] ou de Lotka [12] et résumé par exemple par [14], que l'on va considérer le problème. Contrairement aux deux premiers angles, l'approche mathématique permet notamment de faire des projections quantitatives. Mais c'est surtout du point de vue qualitatif que l'on va envisager la dynamique du problème.

Du point de vue de la modélisation mathématique, la transition démographique peut être présentée soit comme exogène, soit comme endogène. Dans le premier cas, la population est supposée homogène mais la modernisation des conditions de vie fait que les paramètres démographiques varient dans le temps. Cela conduit à des modèles non autonomes [1]. L'hypothèse sous-jacente est donc que la baisse de la fécondité n'est pas due à l'interaction entre différentes composantes de la population mais à un « progrès » externe.

L'approche endogène consiste au contraire à utiliser des modèles autonomes, c'est-à-dire dont les coefficients ne dépendent pas du temps, mais avec une population hétérogène. Les changements qualitatifs résultent alors de l'interaction entre les sous-populations ; la transition démographique est un peu analogue à une épidémie. Des normes culturelles novatrices qui réduisent le nombre de naissances peuvent être transmises par des individus à faible fécondité (les « infectés ») à des individus traditionnels à fécondité élevée (les « susceptibles »), selon une dynamique fondée sur la « théorie de la diffusion » [18, 13]. Ce processus de transmission peut être déclenché par des changements socio-économiques et environnementaux.

[8] a récemment développé ce point de vue épidémique pour la théorie de la diffusion de la transition de la fécondité ; le déclin de la fécondité est décrit comme le résultat de la diffusion de la tendance à avoir moins d'enfants. Le premier modèle divisait la population entre individus  $P_1(t)$  avec une fécondité élevée et individus  $P_2(t)$  avec une fécondité faible. Leurs nombres évoluaient selon un système différentiel homogène de degré un

$$\frac{dP_1}{dt} = r_1 P_1 - b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}, \quad \frac{dP_2}{dt} = r_2 P_2 + b \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2},$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les taux de croissance des populations isolées ( $r_1 > r_2$ ), tandis que  $b$  est un coefficient de mimétisme indiquant le taux maximum auquel les individus avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Ce taux est supposé dépendre linéairement de la fraction  $f(t) = P_2(t)/(P_1(t) + P_2(t))$  de la population avec une fécondité faible. En termes écologiques, c'est un système du genre proies-prédateurs à la manière

de Lotka et Volterra [20] mais avec un taux de prédation non linéaire qui ne dépend que du rapport des deux populations, comme dans le modèle d'Arditi et Ginzburg [11, §2.3]. L'analyse mathématique est très simple : il suffit d'observer que  $f(t)$  est solution d'une équation logistique. Selon que  $b < r_1 - r_2$  ou  $b > r_1 - r_2$ , la population totale tend à croître exponentiellement avec un taux  $r_1$  ou  $r_2$  et c'est la fraction de la population avec une fécondité faible ou celle avec une fécondité élevée qui tend vers 0. En partant d'une population avec une fécondité élevée et quelques individus avec une fécondité faible, la transition démographique n'a donc lieu que si  $b$  est strictement supérieur au seuil unique  $r_1 - r_2$ .

Dans un deuxième temps, [8] considérait une version structurée par âge du même modèle. Comme l'âge  $x$  était une variable continue, cela conduisait à un système d'équations aux dérivées partielles du type de McKendrick et von Foerster :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_1(t, x) - \pi(t, x)P_1(t, x), \\ \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial x} &= -m(x)P_2(t, x) + \pi(t, x)P_1(t, x), \\ P_1(t, 0) &= \int_0^\infty a_1(x) P_1(t, x) dx, \\ P_2(t, 0) &= \int_0^\infty a_2(x) P_2(t, x) dx,\end{aligned}$$

avec

$$\pi(t, x) := \frac{\int_0^\infty b(x, y) P_2(t, y) dy}{\int_0^\infty [P_1(t, y) + P_2(t, y)] dy}.$$

Dans ce modèle,  $m(x)$  est la mortalité,  $a_1(x)$  et  $a_2(x)$  sont les fertilités. L'analyse mathématique du modèle est alors plus compliquée et seuls des résultats très partiels ont été obtenus. Il n'existe en général plus un seul seuil mais deux. Sous le premier seuil et au-dessus du second seuil, il existe une unique solution exponentielle triviale localement stable (au sens de la théorie des systèmes homogènes) composée d'individus avec une fécondité élevée dans le premier cas, faible dans le second cas. Entre les deux seuils, au moins pour certaines valeurs des paramètres (c'est-à-dire avec certaines conditions supplémentaires certainement non optimales), il a été possible de démontrer l'existence d'une solution exponentielle non triviale qui mêle des individus avec des fécondités différentes ; ni la question de l'unicité ni celle de la stabilité de cette solution non triviale n'ont été abordées. Pour cette solution, le taux de croissance de la population est intermédiaire. La transition démographique n'est alors que partielle. Cette différence qualitative avec le premier modèle n'était pas évidente a priori.

Le régime entre les deux seuils semblait anecdotique dans [8] puisque la motivation provenait de la démographie du Japon. La transition démographique y est si avancée que le taux de croissance de la population est devenu négatif ; on se trouve au-delà du second seuil. En revanche, il se pourrait que le régime intermédiaire présente un intérêt dans le cas de certains pays d'Afrique subsaharienne. La fécondité moyenne y a effectivement baissé un peu mais bien moins que ce que prévoyaient les démographes [10]. Par ailleurs, les difficultés d'analyse du système d'équations aux dérivées partielles poussent à chercher un modèle plus simple pour une transition démographique partielle.

On étudie donc ci-dessous un modèle avec seulement deux classes d'âge (jeunes et adultes) au lieu d'un âge qui varie continûment. L'intérêt est qu'il conserve le même phénomène de transition à deux seuils. Ceci permet de faire une étude plus complète : on

montre notamment que la solution non triviale est unique et que son domaine d'existence coïncide exactement avec le domaine d'instabilité des solutions triviales ; on parvient aussi à démontrer la stabilité locale de la solution non triviale.

On présente le modèle dans la section 2 avec ses solutions exponentielles triviales et non triviales. On étudie la stabilité des solutions exponentielles dans la section 3 en utilisant notamment le critère de Routh-Hurwitz et la théorie relativement peu connue des systèmes différentiels homogènes de degré un développée par [6, p. 638], également exposée dans les livres [5, chap. 5], [7, chap. 4] et [16, chap. 4]. Il a d'ailleurs fallu recourir à un logiciel de calcul formel pour se sortir de calculs autrement inextricables. Comme le système est de dimension 4, la stabilité de la solution exponentielle non triviale présente une difficulté qui était absente des exemples des références ci-dessus. La section 4 présente un exemple numérique qui se veut représentatif de quelques pays d'Afrique subsaharienne. La section 5 propose une conjecture pour le comportement asymptotique global faite d'avoir trouvé une fonction de Liapounov convenable. Quoique plus simple que celle du système d'équations aux dérivées partielles, l'analyse de notre modèle est donc encore incomplète.

---

## 2. Le modèle et ses solutions exponentielles

Notons  $X_1(t)$  et  $Y_1(t)$  le nombre de jeunes et d'adultes de familles fécondes. Notons de même  $X_2(t)$  et  $Y_2(t)$  le nombre de jeunes et d'adultes de familles peu fécondes. On suppose que

$$\frac{dX_1}{dt} = a_1 Y_1 - (c + m) X_1, \quad \frac{dY_1}{dt} = c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad [1]$$

$$\frac{dX_2}{dt} = a_2 Y_2 - (c + m) X_2, \quad \frac{dY_2}{dt} = c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}, \quad [2]$$

où  $a_1 > 0$  et  $a_2 > 0$  sont les fécondités avec  $a_1 > a_2$ ,  $m > 0$  est la mortalité,  $c > 0$  est le taux de passage des jeunes à l'âge adulte, et  $b > 0$  est un coefficient de mimétisme qui donne le taux maximum auquel les adultes avec une fécondité élevée adoptent une fécondité faible. Plus le coefficient  $b$  est faible, plus la population est « conservatrice » ; plus le coefficient  $b$  est élevé, plus la population est sujette au « panurgisme ». Contrairement au deuxième modèle de [8],  $c$ 'est la fraction  $Y_2/(Y_1 + Y_2)$  d'adultes peu féconds dans la population adulte qui intervient dans le modèle et non la fraction d'individus de familles peu fécondes dans la population totale. On suppose  $X_1(0) > 0$ ,  $Y_1(0) > 0$ ,  $X_2(0) > 0$  et  $Y_2(0) > 0$ .

Si l'on pose  $Z = (X_1, Y_1, X_2, Y_2)$ , on remarque que le système différentiel ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dZ}{dt} = F(Z) \quad [3]$$

avec un second membre qui est une fonction vectorielle homogène de degré un. L'existence globale et la positivité des solutions du système (3) se montrent comme dans les modèles démographiques avec mariage ; voir par exemple [16, chap. 4]. La positivité résulte de ce que  $dX_1/dt \geq 0$  lorsque  $X_1 = 0$ ,  $dY_1/dt \geq 0$  lorsque  $Y_1 = 0$ , etc. Avec une condition initiale dont les composantes sont toutes strictement positives, chaque composante reste même strictement positive pour tout  $t > 0$ . L'existence globale résulte de l'inégalité pour la population totale  $P = X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2$  :  $dP/dt \leq (a_1 - m)P$ .

On dit que  $Z(t) = e^{\lambda t} z$  est une solution exponentielle positive du système (3) si  $z = (z_i)$  est un vecteur fixé avec  $z_i \geq 0$  pour tout  $i$ , si  $\sum_i z_i > 0$  et si  $(\lambda, z)$  est une solution du problème de valeur propre non linéaire

$$\lambda z = F(z).$$

Si  $(\lambda, z)$  est une pareille solution et si  $\alpha > 0$ , alors  $(\lambda, \alpha z)$  est aussi une solution. On dit qu'une solution exponentielle positive est normalisée si  $\sum_i z_i = 1$ .

**Proposition 1** *Il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme  $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$  :*

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{2} - m, \quad x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}, \quad y_1 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_1c}}.$$

*De même, il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme  $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$  :*

$$\lambda_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{2} - m, \quad x_2 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}, \quad y_2 = \frac{2c}{c + \sqrt{c^2 + 4a_2c}}.$$

Si  $b_1 < b < b_2$  avec

$$b_1 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_1/c}}, \quad b_2 = \frac{2(a_1 - a_2)}{1 + \sqrt{1 + 4a_2/c}},$$

*alors il existe une unique solution exponentielle positive normalisée de la forme  $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$  avec  $x_1^* > 0, y_1^* > 0, x_2^* > 0$  et  $y_2^* > 0$  :*

$$\lambda^* = c \left( \frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m,$$

$$x_1^* = \frac{a_1}{a_1 - a_2} \left[ 1 - \frac{b}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_1^* = \frac{c}{b} - \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{a_2 b}{(a_1 - a_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{a_2}{a_1 - a_2} \left[ \frac{b}{a_1 - a_2} - 1 + \frac{a_1 b^2}{c(a_1 - a_2)^2} \right], \quad y_2^* = \frac{c}{a_1 - a_2} - \frac{c}{b} + \frac{a_1 b}{(a_1 - a_2)^2}.$$

*Preuve.* La première solution doit vérifier  $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ ,  $(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1$  et  $(\lambda + m)y_1 = c x_1$ . D'où l'équation quadratique pour  $\lambda$  :  $(\lambda + m)(c + \lambda + m) - a_1 c = 0$ . Les deux racines sont  $[-c \pm \sqrt{c^2 + 4a_1c}]/2 - m$  mais seule celle avec un  $+$  conduit à des solutions  $(x_1, y_1)$  qui sont positives.

La deuxième solution s'obtient de la même manière en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2.

Quant à la troisième solution, elle doit vérifier

$$(\lambda + m)x_1 = a_1 y_1 - c x_1, \quad (\lambda + m)y_1 = c x_1 - b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}, \quad [4]$$

$$(\lambda + m)x_2 = a_2 y_2 - c x_2, \quad (\lambda + m)y_2 = c x_2 + b \frac{y_1 y_2}{y_1 + y_2}. \quad [5]$$

On ne peut pas avoir  $c + \lambda + m = 0$  car on aurait sinon  $y_1 = 0$ . Donc  $x_1 = a_1 y_1 / (c + \lambda + m)$  et  $x_2 = a_2 y_2 / (c + \lambda + m)$ . D'où, en remplaçant dans les deux autres équations et en divisant par  $y_1$  ou  $y_2$ ,

$$\lambda + m = c \frac{a_1}{c + \lambda + m} - b \frac{y_2}{y_1 + y_2}, \quad \lambda + m = c \frac{a_2}{c + \lambda + m} + b \frac{y_1}{y_1 + y_2}.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$\lambda = c \left( \frac{a_1 - a_2}{b} - 1 \right) - m, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}} - 1. \quad [6]$$

Le membre de droite dans la formule pour  $y_1/y_2$  doit être strictement positif. Notons qu'il tend vers  $-1$  quand  $b$  tend vers  $0^+$  et qu'il tend vers  $-a_2/a_1 < 0$  quand  $b$  tend vers  $+\infty$ . La dérivée du dénominateur par rapport à  $b$  est  $-c/b^2 + 2c(a_1 - a_2)/b^3$ . Elle est strictement positive pour  $0 < b < 2(a_1 - a_2) := b_3$ , nulle quand  $b = b_3$  et strictement négative quand  $b > b_3$ . Par ailleurs, un petit calcul montre que le dénominateur dans (6) s'annule pour  $b = b_1$  et vaut 1 quand  $b = b_2$ . On remarque enfin que  $b_1 < b_2 < b_3$ . On en conclut que le membre de droite dans la formule (6) pour  $y_1/y_2$  décroît de  $-1$  à  $-\infty$  sur l'intervalle  $]0, b_1[$ , décroît de  $+\infty$  à 0 sur l'intervalle  $]b_1, b_2[$ , continue à décroître sur l'intervalle  $]b_2, b_3[$  en prenant des valeurs négatives, puis croît sur l'intervalle  $]b_3, +\infty[$  en restant négatif. Donc  $y_1/y_2$  n'est positif que sur l'intervalle  $]b_1, b_2[$ . Les formules pour  $x_1, y_1, x_2$  et  $y_2$  découlent de (6) et de la normalisation  $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 1$ .

Remarquons que  $b_1 < b_2$ . Lorsque  $b$  croît de  $b_1$  à  $b_2$ , le taux de croissance  $\lambda^*$  donné par (6) décroît de  $\lambda_1$  à  $\lambda_2$ . Lorsque  $c$  tend vers  $+\infty$ , le modèle avec deux groupes d'âges se réduit au modèle de l'introduction avec un seul groupe d'âges ; on vérifie bien que les deux seuils  $b_1$  et  $b_2$  convergent alors vers un seuil unique égal à  $a_1 - a_2$ .

### 3. La stabilité des solutions exponentielles

Pour  $i \in \{1, 2\}$ , posons

$$\mathbf{X}_i = \frac{X_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}, \quad \mathbf{Y}_i = \frac{Y_i}{X_1 + Y_1 + X_2 + Y_2}.$$

Notons que  $\mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1 + \mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_2 = 1$ . Un calcul assez simple à partir du système (1)-(2) montre alors que

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = a_1 \mathbf{Y}_1 - c \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad [7]$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_1}{dt} = c \mathbf{X}_1 - b \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} - \mathbf{Y}_1 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad [8]$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = a_2 \mathbf{Y}_2 - c \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2], \quad [9]$$

$$\frac{d\mathbf{Y}_2}{dt} = c \mathbf{X}_2 + b \frac{\mathbf{Y}_1 \mathbf{Y}_2}{\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2} - \mathbf{Y}_2 [a_1 \mathbf{Y}_1 + a_2 \mathbf{Y}_2]. \quad [10]$$

Si  $e^{\lambda t} z$  avec  $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  fixé est une solution exponentielle normalisée du système (1)-(2), alors les équations (4)-(5) sont vérifiées. En additionnant les quatre équations, on obtient que  $a_1 y_1 + a_2 y_2 = \lambda + m$ . On en déduit que  $z$  est un point d'équilibre

du système (7)-(10). On dit que la solution  $e^{\lambda t}z$  est « asymptotiquement stable » (respectivement instable) si  $z$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable (resp. instable) du système (7)-(10). Il résulte du théorème d'Euler pour les fonctions homogènes vectorielles (ici de degré un) que  $\lambda$  est toujours une valeur propre de la matrice jacobienne  $J_F(z)$  de la fonction  $F$  définie par (3) en  $z$  car  $J_F(z)z = F(z) = \lambda z$ . D'après [6, p. 638]), l'équilibre  $z$  est asymptotiquement stable si les trois valeurs propres de  $J_F(z)$  autres que  $\lambda$  ont une partie réelle strictement inférieure à  $\lambda$ ; il est instable si l'une de ces trois valeurs propres a une partie réelle strictement supérieure à  $\lambda$ . C'est ce que l'on va utiliser dans la proposition suivante.

**Proposition 2** – Soit  $e^{\lambda_1 t}(x_1, y_1, 0, 0)$  la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable si  $b < b_1$ , instable si  $b > b_1$ .

– Soit  $e^{\lambda_2 t}(0, 0, x_2, y_2)$  la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable si  $b > b_2$ , instable si  $b < b_2$ .

– Soit  $e^{\lambda^* t}(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$  la solution exponentielle normalisée de la proposition 1. Elle est asymptotiquement stable pour  $b_1 < b < b_2$ .

Preuve. De manière générale, si  $z = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  avec  $y_1 + y_2 > 0$  et si  $p = y_2/(y_1 + y_2)$ , alors

$$J_F(z) = \begin{pmatrix} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - m & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - m \end{pmatrix}. \quad [11]$$

Dans le premier cas, on a  $p = 0$ . Donc

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -m & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & 0 & c & b - m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est  $\lambda_1$ . La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est

$$\mu_2 = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2c}}{2} - m,$$

qui est une fonction croissante de  $b$ . Après quelques calculs, on obtient que  $\mu_2 > \lambda_1$  si  $b > b_1$  et  $\mu_2 < \lambda_1$  si  $b < b_1$ .

Dans le deuxième cas, on a  $p = 1$ . Donc

$$J_F(z) = \left( \begin{array}{cc|cc} -c - m & a_1 & 0 & 0 \\ c & -b - m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -c - m & a_2 \\ 0 & b & c & -m \end{array} \right).$$

La plus grande valeur propre du bloc inférieur droit est  $\lambda_2$ . La plus grande valeur propre du bloc supérieur gauche est

$$\mu_1 = \frac{-b - c + \sqrt{(b - c)^2 + 4a_1c}}{2} - m,$$



qui est une fonction décroissante de  $b$  puisque

$$2 \frac{d\mu_1}{db} = -1 + \frac{b-c}{\sqrt{(b-c)^2 + 4a_1c}} < 0.$$

Après quelques calculs, on obtient que  $\mu_1 > \lambda_2$  si  $b < b_2$  et  $\mu_1 < \lambda_2$  si  $b > b_2$ .

Dans le troisième cas, on a  $0 < p < 1$ . Il résulte alors de l'équation (6) que

$$p = \frac{y_2^*}{y_1^* + y_2^*} = \frac{a_1}{a_1 - a_2} + \frac{c}{b} - c \frac{a_1 - a_2}{b^2}.$$

On sait déjà que  $\lambda^*$  est une valeur propre de la matrice  $J_F(z)$  définie par (11). La question est de savoir si les trois autres valeurs propres ont une partie réelle strictement inférieure à  $\lambda^*$ . Autrement dit, la matrice  $M = J_F(z) - \lambda^*I$  a une valeur propre nulle et il s'agit de savoir si les autres valeurs propres ont une partie réelle strictement négative. On a

$$M = \begin{pmatrix} -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_1 & 0 & 0 \\ c & -bp^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c & 0 & -b(1-p)^2 \\ 0 & 0 & -c \frac{a_1 - a_2}{b} & a_2 \\ 0 & bp^2 & c & b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est donc de la forme

$$\chi(\xi) = \det(M - \xi I) = \xi(\xi^3 + k_2\xi^2 + k_1\xi + k_0).$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= - \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \\ &\quad \left\{ \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[ b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] \right. \\ &\quad \left. - b^2 p^2 (1-p)^2 \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] + a_2 c \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c + \xi \right] \right\} \\ &\quad - c \left\{ -a_1 \left[ c \frac{a_1 - a_2}{b} + \xi \right] \left[ b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c - \xi \right] - a_1 a_2 c \right\}. \end{aligned}$$

Pour le terme en  $\xi^3$ , on trouve

$$k_2 = 4c \frac{a_1 - a_2}{b} - 2c - b(1-2p),$$

ce qui donne après simplification

$$k_2 = \frac{(a_1 + a_2)b^2 + 2(a_1 - a_2)^2 c}{(a_1 - a_2)b}.$$

Pour le terme en  $\xi^2$ , on trouve

$$\begin{aligned} k_1 &= \left[ -3c \frac{a_1 - a_2}{b} - bp^2 + c \right] \left[ b(1-p)^2 - c \frac{a_1 - a_2}{b} + c \right] + c^2 \frac{(a_1 - a_2)^2}{b^2} \\ &\quad + 2c \frac{a_1 - a_2}{b} \left[ bp^2 + c \frac{a_1 - a_2}{b} - c \right] + b^2 p^2 (1-p)^2 - a_1 c - a_2 c, \end{aligned}$$

ce qui conduit après une simplification laborieuse à

$$k_1 = c \frac{[2(a_1 - a_2) - b][(a_1 + a_2)b + (a_1 - a_2)c]}{(a_1 - a_2)b}.$$

Enfin, pour le terme en  $\xi$ , on a utilisé le logiciel de calcul formel Xcas ([www.xcasenligne.fr](http://www.xcasenligne.fr)) pour obtenir

$$k_0 = -c \frac{[a_1 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c][a_2 b^2 + (a_1 - a_2)bc - (a_1 - a_2)^2 c]}{(a_1 - a_2)b^3}.$$

Notons que  $k_0$  peut aussi s'écrire sous la forme

$$k_0 = -k(b - b_1)(b - b_2),$$

$$k = \frac{a_1 a_2 c}{b^3 (a_1 - a_2)} \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_1/c} - 1} \right) \left( b + \frac{2(a_1 - a_2)}{\sqrt{1 + 4a_2/c} - 1} \right).$$

Pour que les trois racines du polynôme  $\xi^3 + k_2 \xi^2 + k_1 \xi + k_0$  aient une partie réelle strictement négative, il faut et il suffit d'après le critère de Routh-Hurwitz que  $k_2 > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_0 > 0$  et  $k_1 k_2 - k_0 > 0$  [17, p. 134]. On a bien  $k_2 > 0$ . D'autre part,  $k_1 > 0$  lorsque  $0 < b < 2(a_1 - a_2)$  et donc en particulier pour  $b_1 < b < b_2$  puisque  $b_2 < a_1 - a_2$ . On a aussi  $k_0 > 0$  pour  $b_1 < b < b_2$ . Il ne reste donc qu'à voir si  $k_1 k_2 - k_0 > 0$  lorsque  $b_1 < b < b_2$ . En développant le produit  $k_1 k_2$  et en ordonnant les termes selon les puissances de  $b$ , on obtient

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + 2(a_1 - a_2)^4 c^2 b \right. \\ + [-(a_1 - a_2)^3 c^2 + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c] b^2 \\ + (a_1 - a_2)^2 (a_1 + a_2) c b^3 \\ + [-(a_1 - a_2)(a_1 + a_2)c + a_1 a_2 (a_1 - a_2) + 2(a_1 + a_2)^2 (a_1 - a_2)] b^4 \\ \left. - (a_1 + a_2)^2 b^5 \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

On regroupe certains termes :

$$k_1 k_2 - k_0 = \left\{ (a_1 - a_2)^5 c^2 + (a_1 - a_2)^3 c^2 b [2(a_1 - a_2) - b] \right. \\ + 3(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)^3 c b^2 + (a_1^2 - a_2^2) c b^3 [(a_1 - a_2) - b] \\ \left. + a_1 a_2 (a_1 - a_2) b^4 + (a_1 + a_2)^2 b^4 [2(a_1 - a_2) - b] \right\} \frac{c}{(a_1 - a_2)^2 b^3}.$$

Comme  $b < b_2 < a_1 - a_2$ , on voit que les termes entre crochets sont tous strictement positifs. Ainsi  $k_1 k_2 - k_0 > 0$ . La troisième solution est donc bien asymptotiquement stable pour  $b_1 < b < b_2$ .

---

#### 4. Un exemple

Prenons  $a_1 = 10\%$  par an. Rappelons que ce paramètre est égal au nombre de naissances dans les familles avec une fécondité élevée divisé par la population adulte avec une fécondité élevée, et non le taux de natalité employé habituellement en démographie, qui divise par la population totale. Prenons aussi :  $a_2 = 4\%$  par an,  $c = 5\%$  par an (de sorte que  $1/c = 20$  ans) et  $m = 2\%$  par an. L'espérance de vie à la naissance est donc  $1/m = 50$  ans. Rappelons qu'en 2017, les espérances de vie pour les hommes et pour les femmes étaient par exemple égales à 52 et 55 ans en Côte d'Ivoire, à 51 et 54 ans au Tchad, à 50 et 53 ans en Centrafrique [15].

Avec ces valeurs des paramètres, on obtient d'une part  $\lambda_1 = 3\%$  par an et  $\lambda_2 \simeq 0,62\%$  par an, d'autre part  $b_1 = 3\%$  par an et  $b_2 \simeq 3,9\%$  par an. La figure 1 montre les différents taux de croissance  $\lambda_1$ ,  $\lambda^*$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $b$ . C'est dans l'intervalle  $]b_1, b_2[$  qu'il y a une transition démographique partielle avec un taux de croissance  $\lambda^*$ . Par comparaison, le taux d'accroissement naturel est de 2,4% par an en Côte d'Ivoire, de 3,3% au Tchad et de 2,2% en Centrafrique. Le Tchad serait donc plutôt dans le cas où  $b < b_1$ , tandis que les deux autres pays seraient dans la situation intermédiaire avec  $b_1 < b < b_2$ .

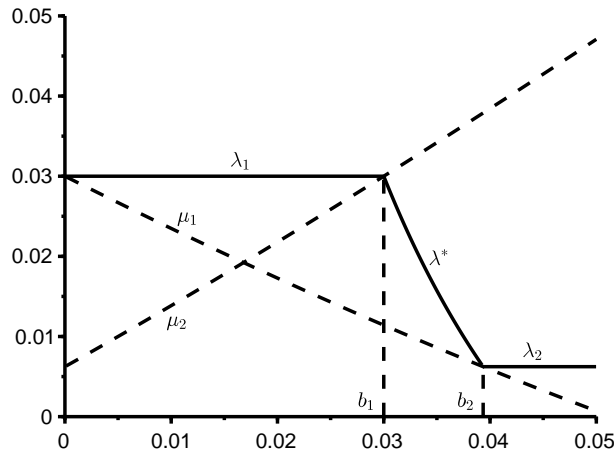


Figure 1 – Les taux asymptotiques de croissance de la population  $\lambda_1$ ,  $\lambda^*$  et  $\lambda_2$  (ligne continue) en fonction du coefficient de mimétisme  $b$  (en abscisse). Les valeurs propres  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont en pointillé.

Pour ce modèle, on peut calculer la proportion de « jeunes » dans la population. Lorsque  $b < b_1$ , elle vaut  $x_1/(x_1 + y_1) = 1/(1 + c/(\lambda_1 + m)) = 50\%$ . Lorsque  $b > b_2$ , elle vaut  $x_2/(x_2 + y_2) = 1/(1 + c/(\lambda_2 + m)) \simeq 34\%$ . Néanmoins, étant donnée la structure du modèle, ces « jeunes » auraient une moyenne d'âge  $1/(c + m)$  de 14,3 ans. Il est donc difficile de comparer avec les statistiques démographiques. D'après [15], la proportion des moins de 15 ans est de 43% en Côte d'Ivoire, de 48% au Tchad et de 44% en Centrafrique.

On en déduit aussi que le taux de natalité est  $a_1 y_1/(x_1 + y_1) = a_1 c/(\lambda_1 + m + c) = 50$  pour 1000 habitants si  $b < b_1$ ,  $a_2 y_2/(x_2 + y_2) = a_2 c/(\lambda_2 + m + c) = 26$  pour 1000

habitants si  $b > b_2$ . Pour les trois pays déjà considérés, les chiffres sont dans l'ordre 37, 46 et 36 pour 1000 habitants.

Ainsi donc, les valeurs choisies pour les paramètres sont relativement réalistes.

## 5. Le comportement asymptotique

L'étude de stabilité n'était jusqu'ici que locale. Comme le système est de dimension 4 et comme il se ramène au mieux à un système de dimension 3, il ne semble pas possible d'utiliser le théorème de Poincaré et Bendixson pour déterminer le comportement asymptotique global, contrairement au modèle démographique avec mariage de plus petite dimension de [16, chap. 4].

Il est également difficile de trouver une fonction de Liapounov convenable. Quoique notre système homogène puisse se transformer en un système avec uniquement des termes linéaires ou quadratiques si l'on prend comme nouvelles inconnues  $X_1/(Y_1+Y_2)$ ,  $Y_1/(Y_1+Y_2)$ ,  $X_2/(Y_1+Y_2)$  et  $Y_2/(Y_1+Y_2)$ , la fonction de Liapounov avec des termes logarithmiques utilisée par exemple par [2] pour une classe particulière de pareils systèmes ne semble pas convenir.

En s'inspirant du modèle linéaire de population de [4, p. 80], on obtient cependant la proposition suivante.

**Proposition 3** *La fonction*

$$V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda_1 t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_1}{c} [e^{-\lambda_1 t} Y_1(t)]^2$$

*est toujours positive et décroissante.*

Preuve. Posons plus généralement  $V(t) = \frac{1}{2}[e^{-\lambda t} X_1(t)]^2 + \frac{1}{2}k[e^{-\lambda t} Y_1(t)]^2$  avec  $k > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_1[-\lambda X_1 + a_1 Y_1 - (c+m)X_1] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_1 \left[ -\lambda Y_1 + c X_1 - m Y_1 - b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $Y_1(t) > 0$  et  $Y_2(t) > 0$ , le terme avec  $b$  en facteur est négatif et il reste

$$\frac{dV}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [(-\lambda - c - m)X_1^2 + (a_1 + kc)X_1 Y_1 - (\lambda + m)k Y_1^2].$$

Pourvu que  $\lambda + c + m \neq 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[ X_1 - \frac{a_1 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_1 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(a_1 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} - (\lambda + m)k \right] Y_1^2 \right\}. \end{aligned}$$

Choisissons  $\lambda$  de sorte que le coefficient de  $Y_1^2$  s'annule. On trouve que

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 2a_1 c + a_1^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Pour avoir  $\lambda + c + m > 0$ , ne conservons que la racine avec un  $+$  dans  $\pm$ . Cette racine, qui dépend de  $k$ , est minimale si  $a_1^2/k + kc^2$  est minimal, c'est-à-dire si  $k = a_1/c$ . Avec ce choix, on a  $\lambda = \lambda_1$  et

$$\frac{dV}{dt} \leq -e^{-2\lambda_1 t} \frac{c + \sqrt{c^2 + 4a_1 c}}{2} \left[ X_1 - \frac{\lambda_1 + m}{c} Y_1 \right]^2 \leq 0.$$

Notons que  $V(t)$  converge vers une limite positive ou nulle. En particulier, il existe une constante  $K > 0$  telle que pour tout  $t > 0$ ,  $X_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$  et  $Y_1(t) \leq K e^{\lambda_1 t}$ .

**Proposition 4** *La fonction*

$$W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{a_2}{c} [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$$

avec

$$\lambda = \frac{b - c + \sqrt{(b + c)^2 + 4a_2 c}}{2} - m \quad [12]$$

est toujours positive et décroissante.

Preuve. Posons plus généralement  $W(t) = \frac{1}{2} [e^{-\lambda t} X_2(t)]^2 + \frac{1}{2} k [e^{-\lambda t} Y_2(t)]^2$  avec  $k > 0$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e^{-2\lambda t} X_2 [-\lambda X_2 + a_2 Y_2 - (c + m) X_2] \\ &\quad + k e^{-2\lambda t} Y_2 \left[ -\lambda Y_2 + c X_2 - m Y_2 + b \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \right]. \end{aligned}$$

Comme  $Y_1/(Y_1 + Y_2) \leq 1$ , on obtient

$$\frac{dW}{dt} \leq e^{-2\lambda t} [-(\lambda + c + m) X_2^2 + (a_2 + kc) X_2 Y_2 + k(b - \lambda - m) Y_2^2].$$

Pourvu que  $\lambda + c + m \neq 0$ , on peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq e^{-2\lambda t} \left\{ -(\lambda + c + m) \left[ X_2 - \frac{a_2 + kc}{2(\lambda + c + m)} Y_2 \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \left[ k(b - \lambda - m) + \frac{(a_2 + kc)^2}{4(\lambda + c + m)} \right] Y_2^2 \right\}. \end{aligned}$$

Choisissons  $\lambda$  de sorte que le coefficient de  $Y_2^2$  s'annule. On trouve que

$$\lambda = \frac{b - c \pm \sqrt{(b + c)^2 + 2a_2 c + a_2^2/k + kc^2}}{2} - m.$$

Pour avoir  $\lambda + c + m > 0$ , ne conservons que la racine avec un  $+$  dans  $\pm$ . Cette racine, qui dépend de  $k$ , est minimale si  $a_2^2/k + kc^2$  est minimal, c'est-à-dire si  $k = a_2/c$ . Alors  $\lambda$  est donné par la formule (12) et on a bien  $dW/dt \leq 0$ .

Ces deux dernières propositions ne permettent pas de distinguer les différents comportements asymptotiques selon la valeur de  $b$ . On conjecture néanmoins, étant données les propositions 1 et 2, que :

– si  $b < b_1$ , alors

$$e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, 0, 0)$$

avec  $x_1 > 0, y_1 > 0$  et  $(\lambda_1 + m)y_1 = c x_1$  ; c'est la population avec une fécondité élevée qui en proportion finit par dominer ;

– si  $b_1 < b < b_2$ , alors

$$e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

et il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que  $(x_1, y_1, x_2, y_2) = \alpha(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$ , ce dernier vecteur étant celui de la proposition 1. Il y a coexistence en proportion des sous-populations avec des fécondités différentes ;

– si  $b > b_2$ , alors

$$e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} (0, 0, x_2, y_2)$$

avec  $x_2 > 0, y_2 > 0$  et  $(\lambda_2 + m)y_2 = c x_2$  ; c'est la population avec une fécondité basse qui en proportion finit par dominer.

Ainsi donc, la transition démographique partielle observée dans certains pays d'Afrique subsaharienne pourrait correspondre au cas intermédiaire où  $b_1 < b < b_2$ .

Pour soutenir cette conjecture, considérons l'exemple numérique de la section précédente. Prenons une condition initiale quelconque, par exemple  $X_1(0) = Y_1(0) = X_2(0) = Y_2(0) = 1$  (comme le système est homogène, on peut penser à 1 million). La figure 2 montre comment le système se comporte selon la position de  $b$  par rapport à  $b_1$  et  $b_2$ . Si la conjecture semble bien se confirmer, on notera cependant dans le cas où  $b_1 < b < b_2$  que le temps caractéristique de convergence est assez long ; la deuxième valeur propre de la matrice  $J_F(z)$  est proche de  $\lambda^*$ .

---

## 6. Conclusion

Quoique encore incomplète d'un point de vue mathématique, notre étude est néanmoins plus précise que celle du modèle analogue de [8]. On espère que ceci stimulera l'étude mathématique de nouveaux modèles pour la transition démographique. Il s'agit d'un phénomène global de toute première importance, souvent moins évoqué que la pollution, le réchauffement climatique ou les épidémies.

---

## 7. Bibliographie

- [1] M. ARTZROUNI, « Une nouvelle famille de courbes de croissance : application à la transition démographique », *Population* 41 (1986) 497-509.
- [2] V. CAPASSO, « Mathematical Structures of Epidemic Systems », Berlin, Springer, 1993.
- [3] J.-C. CHESNAIS, « La Transition démographique, étapes, formes, implications économiques », Paris, Presses Universitaires de France, 1986.

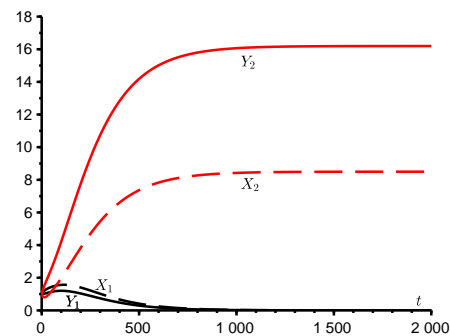
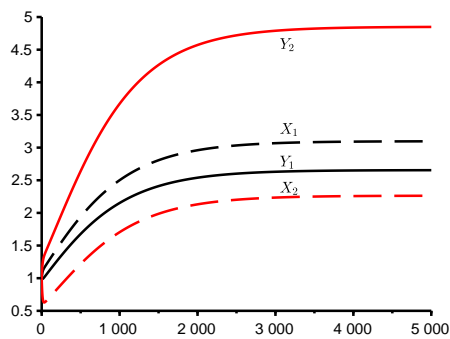
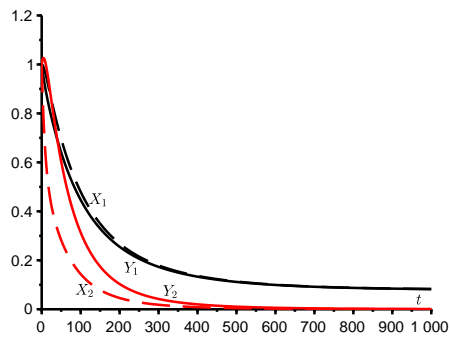


Figure 2 – (a) Les fonctions  $t \mapsto e^{-\lambda_1 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  lorsque  $b = 0,025 < b_1$ . (b) Les fonctions  $t \mapsto e^{-\lambda^* t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  lorsque  $b = 0,035 \in ]b_1, b_2[$ . (c) Les fonctions  $t \mapsto e^{-\lambda_2 t}(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  lorsque  $b = 0,05 > b_2$ . Pour simplifier, on a écrit  $(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$  sur les différentes figures, mais il s'agit bien des fonctions renormalisées par une exponentielle.

- [4] T. GOUDON, « Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique », Londres, ISTE, 2017.
- [5] K. P. HADELER, « Topics in Mathematical Biology », Cham, Springer, 2017.
- [6] K. P. HADELER, R. WALDSTÄTTER R., A. WÖRZ-BUSEKROS, « Models for pair formation in bisexual populations », *Journal of Mathematical Biology* 26 (1988) 635-649.
- [7] H. INABA, « Age-Structured Population Dynamics in Demography and Epidemiology », Singapour, Springer, 2017.
- [8] H. INABA, R. SAITO R., N. BACAËR, « An age-structured epidemic model for the demographic transition », *Journal of Mathematical Biology* 77 (2018) 1299-1339.
- [9] H. LE BRAS, « Les trois démographies », *Socio* 2 (2013) 273-290.
- [10] H. LERIDON, « Afrique subsaharienne : une transition démographique explosive », *Futuribles*, 407 (2015) 5-21.
- [11] C. LOBRY, « La Relation ressource-consommateur, Modélisation mathématique », Londres, ISTE, 2018.
- [12] A. J. LOTKA, « Théorie analytique des associations biologiques, 2<sup>e</sup> partie », Paris, Hermann, 1939.
- [13] P. MANFREDI, L. FANTI, « The demographic transition and neo-classical models of balanced growth », in : N. SALVADORI (éd.) « The Theory of Economic Growth », Cheltenham, Edward Elgar, 2003.
- [14] R. PRESSAT, « Éléments de démographie mathématique », Paris, AIDELF, 1995.
- [15] G. PISON, « Tous les pays du monde », *Population & Sociétés* 547 (2017) 1-8.
- [16] J. W. PRÜSS, R. SCHNAUBELT, R. ZACHER, « Mathematische Modelle in der Biologie – Deterministische homogene Systeme », Bâle, Birkhäuser, 2008.
- [17] H. REINHARD, « Équations différentielles, fondements et applications », Paris, Dunod, 1989.
- [18] L. ROSERO-BIXBY, J. B. CASTERLINE, « Modelling diffusion effects in fertility transition », *Population Studies* 47 (1993) 147-167.
- [19] P.-F. VERHULST, « Notice sur la loi que suit la population dans son accroissement », *Correspondance mathématique et physique* 10 (1838) 113-121.
- [20] V. VOLTERRA, « Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie », Paris, Gauthier-Villars, 1931.